НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Денега Ірина Вікторівна

УДК 517.5

КВАДРАТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ТА СИМЕТРИЗАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
БАХТІН Олександр Костянтинович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
БАНДУРА Андрій Іванович,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться 23 лютого 2021 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 13 січня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Екстремальні задачі на класах голоморфних функцій — це один із найважливіших напрямів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Цей напрямок виник наприкінці XIX – на початку XX сторіччя на етапі, коли комплексний аналіз у своєму розвитку сягнув певного рівня і необхідність методів розв'язування екстремальних задач на класах голоморфних функцій стала вкрай нагальною. Такі задачі, зокрема, пов'язані з дослідженням глобальної структури траєкторій відповідних квадратичних диференціалів, оскільки межі екстремальних областей зазвичай складаються з дуг траєкторій цих квадратичних диференціалів.

1934 року в роботі М.О. Лаврентьєва[1] була вперше поставлена і розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Відтоді почались інтенсивні дослідження задач такого типу. Зауважимо, що переважна кількість задач, що були розглянуті у 1930-60 рр., були задачами, яким відповідають квадратичні диференціали з фіксованими полюсами. 1968 року П.М. Тамразов[2] привернув увагу до екстремальних задач, полюси відповідних квадратичних диференціалів яких не фіксовані, а володіють певною "свободою". В 1974–1975 рр. Г.П. Бахтіна[3] знайшла несподіване на той час застосування ідеї П.М. Тамразова до екстремальних задач про неперетинні області. В подальшому такі задачі отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. В 1970-80 рр. у роботах В.М. Дубініна[4] було розроблено кілька нових методів, що мають симетризаційну природу, для дослідження екстремальних задач геометричної теорії функцій. Серед них на особливу увагу заслуговує метод розділяючого перетворення, завдяки якому вдалося розв'язати ряд складних екстремальних задач, які не піддавались розв'язку впродовж тривалого часу.

Цей напрямок, пов'язаний із екстремальними задачами на класах голоморфних відображень, отримав особливо помітний розвиток завдяки працям П. Кьобе, Л. Бібербаха, Т. Гронуолла, М. Шиффера, М.О. Лаврентьєва, Г. Пойї, Г. Сегьо, Г. Ґрьотша, О. Тейхмюллера, Л. Альфорса, Г.М. Голузіна, К. Льовнера, П.П. Куфарева, М.В. Келдиша, А. Шеффера, Д. Спенсера, Дж.А. Дженкінса, Н.А. Лєбєдєва, В.К. Хеймана, І.М. Міліна, П.М.

[1] Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[2] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

[3] Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 "Теория функций и функциональный анализ". — Киев, 1975. — 11 с.

[4] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49** (295), № 1. — С. 3 – 76.

Тамразова, К. Померенке, З. Нехарі, Ю.Е. Аленіцина, І.Є. Базілевича, І.А. Александрова, І.П. Мітюка, Г.П. Бахтіної, В.А. Шлика, К. Фітцджеральда, П. Дюрена, Е. Бомбьєрі, А. Бернстайна, К.І. Бабенко, В.Я. Гутлянського, С.Л. Крушкаля, В.Г. Шеретова, Г.В. Кузьміної, В.М. Дубініна, Д.В. Прохорова, А.Ю. Солиніна, Є.Г. Ємельянова, А.Ю. Васильєва та багатьох інших авторів.

Основа для виконання завдань цієї роботи — це багаторічні напрацювання відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України. Зокрема, у відділі були проведені систематичні дослідження в теорії екстремальних метрик і квадратичних диференціалів, застосування їх до теорії однолистих функцій і конформних відображень, розв'язані екстремальні проблеми для конформних відображень, пов'язані з мультиполюсними квадратичними диференціалами, була доповнена загальна теорема коефіцієнтів Дж. Дженкінса, були знайдені екстремальні метрики і модулі деяких неорієнтовних ріманових многовидів. У роботах працівників відділу відбулось істотне послаблення вимог щодо геометрії взаємного розташування вільних полюсів квадратичних диференціалів, які відповідають задачам, що вивчаються, розроблено метод "керуючих" функціоналів, що дало змогу розширити класи екстремальних задач, для яких отримано повний розв'язок.

У роботах К. Льовнера, Г.М. Голузіна, В.К. Хеймана, Дж. Дженкінса, М.О. Лєбєдєва, М. Шиффера і Д.К. Спенсера, З. Нехарі, І.О. Алєксандрова, Б.В. Шабата, П.М. Тамразова, Г.В. Кузьміної, В.М. Дубініна, І.П. Мітюка, В.Я. Гутлянського, В.І. Рязанова та інших велику увагу приділено розвитку й удосконаленню методів геометричної теорії функцій комплексної змінної (параметричний метод, варіаційний метод, метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, метод симетризації, метод квадратичних диференціалів та інші методи дослідження метрико-геометричних властивостей аналітичних функцій і конформних відображень). Деякі методи й фундаментальні результати геометричної теорії функцій комплексної змінної знайшли своє застосування в теорії наближення (див., наприклад, у роботах М.О. Лаврентьєва, М.В. Келдиша, О.І. Маркушевича, С.М. Мергеляна, В.К. Дзядика, П.М. Тамразова, І.О. Шевчука та ін.), топології й геометрії (див., наприклад, у роботах Г.Д. Суворова, Ю.Ю. Трохимчука, В.В. Шарка, Ю.Б. Зелінського та ін.).

Проте, незважаючи на значну кількість досліджень, ряд складних проблем у теорії екстремальних задач про конформні відображення з фіксованими й вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів і досі залишаються відкритими. Тому актуальною є розробка методів і підходів щодо їхнього розв'язку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер державної реєстрації 0116U003060) і "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117U004077).

Мета і завдання дослідження. *Об'єкт дослідження* — функціонали, які задані або на класах однолистих функцій, або на класах відкритих множин розширеної комплексної площини. *Предмет дослідження* — знаходження максимумів указаних функціоналів і опис екстремальних конфігурацій. *Мета дослідження* полягає в розробці нових і вдосконаленні наявних методів і підходів для розв'язку задач про екстремальне розбиття комплексної площини, посилення й узагальнення відомих результатів.

Для досягнення зазначеної мети в роботі було поставлене завдання розробити метод для отримання ефективних оцінок зверху для функціоналів, заданих на класах взаємно неперетинних областей із фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів і на основі цього методу знайти підходи для розв'язку відкритих задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

При розв'язкові завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу й методи теорії квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, які виносяться на захист, нові. В роботі розроблено нові підходи й методи для вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини, завдяки яким отримано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, як із фіксованими, так і з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів на променевих системах точок комплексної площини. Одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і у випадку, коли області симетричні відносно одиничного кола. Встановлено умови, за яких структура точок і областей неістотна. Встановлено посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів. Розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2\,]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату.

Порівнюючи з раніше відомими результатами, можемо сказати, що в роботі представлено подальший розвиток підходів для розв'язку задач про екстремальне розбиття комплексної площини. Зазначимо, що навіть наслідки отриманих у дисертації загальних теорем — це узагальнення раніше відомих у цьому напрямі результатів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розвинені в ній підходи можуть бути використані, насамперед, при вивченні питань комплексного і гіперкомплексного аналізів, голоморфної динаміки, теорії функцій, теорії апроксимації. На основі доведених оцінок можна одержати ряд нових оцінок для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області, з деякими спеціальними властивостями. Результати можуть бути застосовані до теорем покриття, теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій.

Особистий внесок здобувачки. Визначення напряму й загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога щодо добору методів досліджень належать науковому консультантові — О.К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, авторка провела особисто. У спільних роботах внесок усіх співавторів однаковий.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на: International Conference of Young Mathematicians (June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine); X літній школі «Алгебра, Топологія, Аналіз» (3–15 серпня 2015, Одеса, Україна); International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis» (August 1–14, 2016, Odesa, Ukraine); 5th International Conference for Young Scientists On Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine); Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis» (February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine); International Scientific Conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (May 31 – June 5, 2017, Odesa, Ukraine); International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine); міжнародній науковій конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвяченій 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (13.12.1932–14.11.2015) (13–14 грудня, 2017, Київ, Україна); International Scientific Conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (May 30 – June 4, 2018, Odesa, Ukraine); International Congress of Mathematicians (August 1–9, 2018, Rio de Janeiro, Brazil); International Conference «Harmonic analysis and approximations» VII, dedicated to 90th Anniversary of Alexandr Talalyan (September 16–22, 2018, Tsaghkadzor, Armenia); International Conference of Young Mathematicians (June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine); International conference «Functional methods in approximation theory, differential equations and numerical mathematics IV», dedicated to the 100th anniversary of V.K. Dzyadyk (1919–1998) (June 20–26, 2019, Svityaz' village, Volyn' region, Ukraine); 12th International ISAAC Congress (July 29 – August 2, 2019, University of Aveiro, Portugal); Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of theoretical and mathematical physics» (September 24–26, 2019, Kyiv, Ukraine); International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications (December 14–16, 2019, New Delhi, India); International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (May 26–30, 2020, Odesa, Ukraine); International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications (July 27–29, 2020, Latur, India).

Крім цього, результати дисертації були предметом доповідей і обговорень на двох Вчених радах Інституту математики НАН України; семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса); семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк); Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кор. НАН України А.Н. Кочубей); Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків); семінарі «Сучасний аналіз» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, професори О.О. Курченко, В.М. Радченко, І.О. Шевчук); семінарі кафедри математичного аналізу

Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А.О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ф. Герус); Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes, Modelling and Simulations (Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 2–9, 2015); Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures and Related Problems (30 years of the direct cooperation agreement Łódź – Paris VI) (Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, June 30 – July 7, 2016); 9th Elgersburg School 2017 «Control theory of digitally networked dynamic systems, Optimal control techniques» (Elgersburg, Germany, March 26 – April 1, 2017); Workshop «Young Women in Geometry» (Bonn, Germany, April 3–5, 2017); Hypercomplex Seminar 2017: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Łódź [University and Łódź Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]) (Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 22–29, 2017); World Meeting for Women in Mathematics (Rio de Janeiro, Brazil, July 31, 2018); Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications (Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 7–14, 2019); OTHA online workshop 2020 on operator theory and harmonic analysis and their applications (Rostov-on-Don, Russia, August 24–25, 2020); Virtual Heidelberg Laureate Forum (Heidelberg, Germany, September 21–25, 2020).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 26 наукових роботах [1–26], внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук, 13 із них [8, 10, 11, 16–21, 23–26] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus і Web of Science. Частково вони також висвітлені у збірниках тез конференцій [27–43].

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, списку публікацій здобувачки, змісту, переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 236 найменувань, і додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 351 сторінку друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому консультантові, професору, докторові фізико-математичних наук Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задач, корисні поради й рекомендації, а також усім

працівникам відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу за плідну співпрацю, постійну увагу й підтримку при створенні дисертаційної роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи й показано наукову новизну одержаних результатів.

У **першому розділі** наведено огляд наукових праць, проблематика яких тісно пов'язана з дослідженнями, які проведені в дисертаційній роботі.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**.

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ — однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ — одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує конформне відображення області B на одиничний круг U, коли $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ, яке здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$, то поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначається таким чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальнення поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей — це поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. Функцією Гріна області B називається така дійсна функція $g_B(z, a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B, z \neq a$ і при кожному фікованому $a \in B$ виконуються такі умови:

1) функція $g_B(z, a)$ як функція від z гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z, a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z, a) - \ln \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного a, різниця $g_B(z, a) - \ln |z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі ∂B функція $g_B(z, a)$ прямує до нуля.

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z,a) - \ln\frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці a й рівномірно збігається на компактних підмножинах області B при $k \to \infty$ або до $+\infty$, або до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей B_1, $B_2, \ldots$. В цьому разі функція

$$g_B(z,a) := h_{B,a}(z) + \ln\frac{1}{|z-a|}$$

називається узагальненою функцією Гріна області B, а величина $r(B,a) := \exp(h_{B,a}(a))$ називається внутрішнім радіусом області B відносно точки a. Все сказане вище дійсне і для $w = \infty$:

$$h_{B_k,\infty}(z) := g_{B_k}(z,\infty) - \ln|z|.$$

Таким чином,

$$g_B(z,a) = \ln\frac{1}{|z-a|} + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Зазначимо, що відмінність узагальненої функції Гріна від класичної функції Гріна полягає в тому, що при наближенні до границі узагальнена функція Гріна прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок $A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}\}$ називатимемо (n,m)-променевою, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ і $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення: $0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty$; $\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k$; $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi$. У випадку $m = 1$, $(n,1)$-променеву систему точок називатимемо n-променевою і розглянемо простіші позначення: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$, $a_{n+1} := a_1$, $a_0 := a_n$. Величини $\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}[\theta_{k+1} - \theta_k]$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n$, називатимемо кутовими параметрами (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = 2$. Якщо (n,m)-променева система точок $A_{n,m}$ володіє властивістю $\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, то її називатимемо рівнопроменевою. Величини $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}^+$ при заданому R — коефіцієнти зміщення системи $A_{n,m}$, причому $\mu_k(R) \leqslant m^{-2m}$, $R \in \mathbb{R}^+$.

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і будь-якої (n, m)-променевої системи точок $A_{n,m}$ введемо такий "керуючий" функціонал:

$$L_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|.$$

Очевидно, що $L_1(A_{n,m}) = L(A_{n,m})$. Окрім того,

$$L_R(A_{n,m}) = R^{mn}\cdot L\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,m}\right).$$

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Клас n-променевих систем точок, для яких справедлива рівність $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, автоматично включає всі системи n різних точок, що розміщені на одиничному колі.

Одним із основних понять у цій роботі є поняття квадратичного диференціала[5]. Нехай B — область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під квадратичним диференціалом в B розумітимемо символ

$$Q(z)dz^2, \tag{1}$$

де $Q(z)$ — функція, мероморфна в B. Якщо область $D \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ конформно еквівалентна до області B і відображення $\varphi : D \to B$ конформне й однолисте, то скажемо, що квадратичний диференціал (1) породжує в області D за допомогою функції φ квадратичний диференціал $\widetilde{Q}(w)dw^2 = Q(\varphi(w))(\varphi'(w))^2dw^2$.

Скінченна точка $z_0 \in B$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала (1), якщо вона є нулем або полюсом функції $Q(z)$.

Нулі і полюси квадратичного диференціала (1) називаються його критичними точками, причому нулі і прості полюси називаються скінченними критичними точками.

Максимальна регулярна крива $z(t)$, $t \in (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, на якій $Q(z)dz^2 \equiv Q(z(t))(z'(t))^2dt^2 > 0$ (відповідно $Q(z)dz^2 < 0$), називається траєкторією (відповідно ортогональною траєкторією) диференціала (1). При конформному однолистому відображенні траєкторії переходять у траєкторії.

[5] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $w = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ $(f(a) = 0)$ області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, дійсна тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty).$$

Кругова область G для $Q(z)dz^2$ містить єдиний подвійний полюс a диференціала $Q(z)dz^2$ і $G \setminus \{a\}$ заповнена траєкторіями $Q(z)dz^2$, кожна з яких — це замкнута жорданова крива, яка відділяє точку a від границі G. При певному виборі чисто уявної сталої τ функція $w = exp\left\{\tau \int (Q(z))^{\frac{1}{2}}dz\right\}$, доозначена значенням нуль у точці a, конформно відображає G на круг $|w| < r$, причому точка a переходить у точку $w = 0$.

Квадратичні диференціали вперше з'явилися при вивченні екстремальних задач у роботах М.О. Лаврентьєва[6], Г. Ґрьотша[7], М. Шиффера[8,9]. Фундаментальну роль квадратичних диференціалів як універсального засобу для розв'язку екстремальних задач геометричної теорії функцій вперше відзначив О. Тейхмюллер[10], який сформулював 1939 р. принцип, за яким розв'язок кожної такої задачі пов'язаний із деяким квадратичним диференціалом. Цей принцип знайшов своє обґрунтування у формі так званої "загальної теореми про коефіцієнти", яку згодом сформулював і довів Дж. Дженкінс[11]. Зокрема, відзначимо, що метод квадратичних диференціалів і його застосування отримали значний розвиток у роботах П.М. Тамразова[12,13,14].

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений отриманню оцінок зверху за будь-яких значень параметра $\gamma \in (0, nm]$ для функціоналів виду

$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

[6] Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[7] Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1928. — **80**, No. 6. — P. 367 – 376, 497 – 502.

[8] Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1938. — **44**. — P. 432 – 449.

[9] Schiffer M. On the coefficients of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1938. — **44**. — P. 450 – 452.

[10] Teichmuller O. Collected papers. — Berlin ect.: Springer — 1982.

[11] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

[12] Тамразов П.М. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений // Мат. сборник. — 1965. — **67** (109), № 3. — С. 329 – 337.

[13] Тамразов П.М. К общей теореме о коэффициентах // Мат. сборник. — 1967. — **72** (114), № 1. — С. 59 – 71.

[14] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

$$Y_{n,m}(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

де $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна фіксована (n,m)-променева система точок, B_0, B_∞, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$ при $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

У монографії[15] для функціоналів $I_{n,m}(\gamma)$ та $Y_{n,m}(\gamma)$ були отримані лише результати для $\gamma=0$ та $\gamma=\frac{n^2}{4}$ і будь-яких (n,m)-рівнопроменевих систем точок.

Теорема 2.2.1. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma)\leqslant(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(I_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Зауваження 2.2.1. *Якщо $\gamma=nm$ і $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\leqslant R$, то за умов теореми 2.2.1 дійсне таке співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant(nm)^{-\frac{nm}{2}}\cdot R^2.$$

Зауваження 2.2.2. *В теоремі 2.2.1 за умов $\gamma=nm$ і $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\leqslant R$ структура точок і областей неістотна.*

Використавши нерівність, доведену в теоремі 3.1.1[15], із теореми 2.2.1 одержуємо подальше твердження.

Наслідок 2.2.1. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива*

[15] Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}\times$$

$$\times\left(2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

Врахувавши наслідок 3.1.5[16], із теореми 2.2.1 одержуємо такі твердження.

Наслідок 2.2.2. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma)\leqslant\frac{4^{nm-\gamma}\cdot\left(L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Наслідок 2.2.3. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такої, що $L_R(A_{n,m})=1$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Теорема 2.3.1. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma)\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(Y_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

[16]Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

Зауваження 2.3.1. *Якщо $\gamma = nm$, то за умов теореми 2.3.1 дійсне таке співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

Зауваження 2.3.2. *В теоремі 2.3.1 при $\gamma = nm$ структура точок і областей неістотна.*

Використавши результат теореми 3.1.1[17] і наслідок 3.1.5[17], із теореми 2.3.1 одержуємо наступні твердження.

Наслідок 2.3.1. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_{∞}, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

Наслідок 2.3.2. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_{∞}, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}\cdot\left(L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Наслідок 2.3.3. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, такої, що $L_R(A_{n,m}) = 1$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_{∞}, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

[17]Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

Якщо $m = 1$, то дійсні подальші твердження.

Теорема 2.4.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \qquad (2)$$

Зауваження 2.4.1. *Якщо* $\gamma = n$ *і* $|a_k| \leqslant 1$, *то зі сформульованої вище теореми 2.4.1 маємо нерівність*

$$r^{n}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

Зауваження 2.4.2. *В теоремі 2.4.1 за умов* $\gamma = nm$ *і* $|a_k| \leqslant 1$ *структура точок і областей неістотна.*

Теорема 2.4.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність* (2).

Використавши результат теореми 5.1.1[18] із теореми 2.4.2, отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.4.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma}\cdot n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використавши теорему 6.11[19], маємо такий результат.

Наслідок 2.4.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset$

[18] Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

[19] Dubinin V. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

$\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

Також у п. 2.4 одержано відповідні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із фіксованими полюсами на одиничному колі за будь-яких значень степеня $\gamma\in(0,n]$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат і узагальнено їх для випадку, коли області — симетричні відносно одиничного кола.

У п. 2.5 одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей для (n,m)-променевих систем точок із додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, що містить початок координат.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений отриманню ефективних оцінок зверху за будь-яких значень параметра $\gamma\in\mathbb{R}^{+}$ для функціонала

$$J_{n,m}(\gamma)=\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_{\infty},\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

де $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна фіксована (n,m)-променева система точок, B_0, B_{∞}, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_{\infty}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$ при $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

У монографії[20] для функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ були отримані лише результати для $\gamma=0$ та $\gamma=\frac{n^2}{4}$ і будь-яких (n,m)-рівнопроменевих систем точок.

Теорема 3.1.1. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in\mathbb{R}^{+}$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_{∞}, $\{B_{k,p}\}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_{\infty}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma)\leqslant\begin{cases}(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}},\\ \textit{якщо }\gamma\in\left(0,\frac{nm+2}{2}\right];\\ (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|,\quad \textit{якщо }\gamma>\frac{nm+2}{2}.\end{cases}$$

[20] Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

Зауваження 3.1.1. *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant R$, *то за умов теореми 3.1.1 дійсне таке співвідношення*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \cdot R.$$

Зауваження 3.1.2. *В теоремі 3.1.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant R$ *структура точок і областей неістотна.*

У п. 3.2 розглядається така екстремальна задача.

Проблема 3.1. За всіх значень параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ показати, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k),$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-променева система точок, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, досягається для деякої конфігурації з областей B_k, B_∞ і точок a_k, ∞, $k = \overline{0,n}$, які володіють n-кратною симетрією.

1988 року В.М. Дубінін[21] уперше отримав оцінку для функціонала $J_n(\gamma)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geqslant 2$ для систем неперетинних областей методом симетризації у разі, коли точки лежать на одиничному колі. Г.В. Кузьміна[22] за допомогою методу екстремальної метрики посилила результат роботи В.М. Дубініна і показала, що ця оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geqslant 2$ (для випадку взаємно неперетинних однозв'язних областей). Тут дійсний ось який результат.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0,\infty\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, \ \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|, \ \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

[21] Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

[22] Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

Зауваження 3.2.1. *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$, *то з теореми 3.2.1 одержуємо таку нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Зауваження 3.2.2. *В теоремі 3.2.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ *структура точок і областей неістотна.*

Теорема 3.2.3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Зауваження 3.2.3. *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$, *то за всіх умов теореми 3.2.3 дійсна подальша нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Теорема 3.2.4. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $B_0 \subset U$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* B_k, $k = \overline{1, n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|a_k| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Четвертий розділ присвячений дослідженню подальшої відкритої екстремальної задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються.

Проблема 4.1. (В.М. Дубінін[23,24]) За всіх значень параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, досягається для конфігурації з областей B_k і точок a_k, які володіють n-кратною симетрією.

Ця проблема була поставлена як відкрита проблема 1994 року в роботі[23]. На сьогодні вона не розв'язана цілком, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. У статті[23] для випадку одиничного кола сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma = 1$ і всіх значень натурального параметра $n \geqslant 2$. Л.В. Ковальов 1996 року в роботі[25] отримав розв'язок цієї задачі за досить-таки жорстких обмежень на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 5$. У роботі[26] показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n = 4$. 2003 року у[27] одержано розв'язок проблеми 4.1 для $\gamma \in (0, 1]$ за умови $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Далі, в монографії[28] 2008 року було показано, що аналог результату В.М. Дубініна[29] виконується для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$.

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{3}$$

У теоремі 4.1.1 одержано розв'язок проблеми 4.1 при $n = 2$.

Теорема 4.1.1. *Нехай $\gamma \in (1, 2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, B_0,*

[23] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49(295)**, № 1. — С. 3 – 76.

[24] Vladimir N.Dubinin. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, 344 p.

[25] Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[26] Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — **62**, No. 2. — P. 83 – 92.

[27] Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 – 67.

[28] Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

[29] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49(295)**, № 1. — С. 3 – 76.

B_1, B_2, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant I_2^0(\gamma)\left(\frac{1}{2}\left|a_1 - a_2\right|\right)^{2-\gamma}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \tag{4}$$

Зауваження 4.1.1. *Із теореми 4.1.1 випливає повний розв'язок проблеми 4.1 для $n = 2$.*

При $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ розгляньмо загальнішу задачу про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ комплексної площини. Дійсний такий результат.

Теорема 4.2.1. *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для довільних різних точок $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, таких, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4).

Використавши результат теореми 4.1.1, маємо таку оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$.

Теорема 4.3.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma}\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.3, маємо такі результати.

Теорема 4.5.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ *і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ *визначається співвідношенням* (3), *а*

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *таких, що*

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{5}$$

Теорема 4.5.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^\gamma\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^n r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (5).

П'ятий розділ присвячений дослідженню екстремальної задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, для n-променевих систем точок комплексної площини.

Проблема 5.1. За всіх значень параметра $\gamma \in (0,n]$ знайти максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — n-променева система точок, така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — будь-який набір областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, і описати екстремалі.

Нині ця проблема не розв'язана цілком, відомі лише часткові результати. У[30] одержано її розв'язок для $\gamma \in (0,1]$ і $n \geqslant 2$. У[31] сформульована задача розв'язана для $\gamma \in (0, n^{0,38}]$ і $n \geqslant 5$. У[32] отримано результати за деяких обмежень на геометрію розташування систем точок, а саме, для $n \geqslant 4$ і підкласу систем точок, що задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$.

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right), \tag{6}$$

де d_k і D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (5). Позначимо

$$Q_n(\gamma) = \frac{\left[2^n \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{7}$$

Тоді дійсне подальше твердження.

Теорема 5.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, — фіксоване натуральне число і число γ, $\gamma \geqslant 1$. Тоді для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k ($k = \overline{0,n}$), що задовольняють усі умови проблеми 5.1, і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$, дійсна така оцінка*

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} \leqslant Q_n(\gamma),$$

де $I_n^0(\gamma)$ і $Q_n(\gamma)$ визначаються співвідношеннями (6) і (7). Якщо γ_n^0 — корінь рівняння $Q_n(\gamma) = 1$, то для довільного γ_n, такого, що $1 \leqslant \gamma_n < \gamma_n^0$, справедлива нерівність

$$\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} < 1.$$

[30] Denega I.V. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia. — 2013. — **67**, No. 1. — P. 11 – 22.

[31] Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблеме В. Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — **10**, № 4-5. — С. 401 – 411.

[32] Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — **38**, No. 2. — P. 229 – 235.

Подальший результат показує межі застосування методу, що запропонований при доведенні теореми 5.1.1, і характеризує екстремальні області, якщо $0<\gamma\leqslant n^{\delta}$, $\frac{1}{3}<\delta<\frac{2}{3}$.

Теорема 5.2.2. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n>e^{9}$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n^{\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$, такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)\leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n)\leqslant 1$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(D_k,d_k).$$

Рівність у цій нерівності досягається, якщо $a_k=d_k$, $B_k=D_k$, $k=\overline{0,n}$, де d_k, D_k, — це, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала (5).

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.2, отримуємо такі твердження.

Теорема 5.3.1. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(1,n]$ і*

$$K(n,\gamma)=\left[I_n^0(\gamma)\cdot\mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ визначається співвідношенням (3), а

$$\mu_n(\gamma)=\left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$, такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)\leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n)\leqslant 1$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, таких, що

$$r(B_0,0)\leqslant K(n,\gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k і B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (5).

Теорема 5.3.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (5).

Завдяки ідеям робіт[33,34,35] у теоремі 5.4.1 одержано оцінку зверху для внутрішнього радіуса області відносно початку координат для довільної системи різних точок на комплексній площині.

Теорема 5.4.1. *Нехай* $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^{+}$ *і* $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *— довільна система різних точок на* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тоді для будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *такого, що* $I_n(\gamma) \geqslant \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k| \right)^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

Шостий розділ присвячений дослідженню подальшої екстремальної задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, частина з яких володіє симетрією відносно одиничного кола.

Проблема 6.1. За всіх значень параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$ і, крім того, області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, досягається для конфігурації з областей B_k і точок a_k, що володіють n-кратною симетрією.

Проблема 6.1 для випадку $\gamma = 1$ була сформульована як відкрита проблема

[33] Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный математический журнал. — 2000. — **1**, № 1. — С. 3 – 7.

[34] Бахтин А.К. Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. пр. Ін-ту мат-ки НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 25 – 33.

[35] Bakhtin A.K. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. — 2018. — **234**, No. 1. — P. 1 – 13.

1994 року в роботі[36]. Для $\gamma = 1$ і $n \geqslant 2$ її розв'язав Л.В. Ковальов[37,38]. Однак для значень $\gamma \neq 1$ проблема 6.1 упродовж тривалого часу залишалася нерозв'язаною. Лише 2017 року у статті[39] було одержано результат для $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (0,1)$. Для $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}})$ і $n \geqslant 14$ задача розв'язана в статті[40]. У роботі[41] отримано деякий результат для однієї загальнішої задачі, з якого випливає, що проблема 6.1 має розв'язок для $\gamma \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ і $n \geqslant 9$.

У теоремі 6.1.1 одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (0,\, 2]$ для фіксованих полюсів 0, 1, -1.

Теорема 6.1.1. *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для будь-якого фіксованого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, такого, що $0 \in B_0$, $1 \in B_1$, $-1 \in B_2$, і, крім того, області B_k, $k \in \{1, 2\}$, — симетричні відносно одиничного кола $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, 1\right) r\left(B_2, -1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[\frac{2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2}\cdot(2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли області B_0, B_1, B_2 — це кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

У теоремі 6.2.1 показано, що якщо кутові параметри задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, то множина тих γ, для яких отримана точна оцінка добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, значно ширша порівняно з загальним випадком.

Теорема 6.2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,49$, $\gamma_3 = 3,01$, $\gamma_n = 0,25\, n^2$, $n \geqslant 4$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|w| = 1$, таких, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, і для довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, і, крім того, області B_k, $k = \overline{1,n}$, — симетричні відносно одиничного кола*

[36] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**(295), № 1. — С. 3 – 76.

[37] Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 6. — С. 82 – 87.

[38] Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный математический журнал. — 2000. — **1**, № 1. — С. 3 – 7.

[39] Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

[40] Bakhtin A., Vyhivska L. Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains // J. Math. Sci. — 2019. — **241**, No. 1. — P. 1 – 18.

[41] Дворак И. Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости // Український математичний вісник. — 2018. — **15**, № 3. — С. 345 – 357.

$|w|=1$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки a_k й області B_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{8}$$

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.4, й результати теорем 6.1.1 і 6.2.1, ми одержали таке твердження.

Теорема 6.3.1. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 8$, $\gamma\in(1,\sqrt{n}]$. Тоді для довільної системи різних точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, причому області B_k, $k=\overline{1,n}$, — симетричні відносно одиничного кола $|w|=1$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, — це, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала (8).

У **сьомому розділі** одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій за всіх можливих значень параметра γ. Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок.

Теорема 7.4.1. *Нехай $p,q\in\mathbb{N}$, $p+q\geqslant 3$, $\gamma\in(0,\,p+q]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k, $k=\overline{1,p+q}$ ($a_k\in\mathbb{R}^+$, $k=\overline{1,p}$, $a_k\in\mathbb{R}^-$, $k=\overline{1,q}$), й будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,p+q}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}}\left(\prod_{k=1}^{p+q}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

Зауваження 7.4.1. *Якщо $\gamma = p+q$ і $|a_k| \leqslant R$, то за умов теореми 7.4.1 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot R^{2(p+q)}.$$

Теорема 7.4.2. *Нехай $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1,q}$), і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\gamma\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

Зауваження 7.4.2. *Якщо $\gamma = \frac{1}{2}(p+q+2)$ і $|a_k| \leqslant R$, то за умов теореми 7.4.2 маємо співвідношення*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^{p+q} \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q+1)^{-\frac{p+q+1}{2}} \cdot R^{(p+q)}.$$

Теорема 7.4.3. *Нехай $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0,\, p+q]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1,q}$), і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_∞, B_k, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

Зауваження 7.4.3. *Якщо $\gamma = p+q$, то за умов теореми 7.4.3 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}}.$$

Розгляньмо випадок, якщо $p = q := m$. У роботі[42] для довільної $(2, m)$-променевої системи точок $A_{2,m} = \{a_{k,p}\}$, $k \in \{1, 2\}$, $p = \overline{1,m}$, і системи

[42] Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, доведено нерівність

$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2m} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2\right)^m \cdot \left(\mu_1(R) \cdot \mu_2(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{2,m}).$$

Таким чином, із доведених теорем 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3 одержуємо наступні результати.

Наслідок 7.4.1. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, $B_{k,p}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}} \cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(L_R(A_{2,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{2m}} \left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} |a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m}}.$$

Наслідок 7.4.2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, m+1]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, $B_{k,p}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2m+1)^{-\gamma\frac{2m+1}{2m+2}}\left[2^{2m} \cdot m^{-2m} \cdot L_R(A_{2,m})\right]^{1-\frac{\gamma}{m+1}} \left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} |a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m+1}}.$$

Наслідок 7.4.3. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_∞, $B_{k,p}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_\infty, \infty\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}} \cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(L_R(A_{2,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{2m}}.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці нових підходів і методів розв'язку екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної. В роботі на базі новітніх фундаментальних досягнень у теорії функцій, комплексному аналізі та теорії відображень досліджено ряд актуальних проблем про екстремальне розбиття комплексної площини, знайдено нові підходи до розв'язання цих проблем і одержано ряд нових результатів у складних відкритих проблемах, над якими працюють математики в багатьох країнах світу. Отримані результати відкривають нові перспективи для подальшого дослідження цих проблем. Зокрема, в цій дисертаційній роботі отримано такі результати:

– одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на (n, m)-променевих системах точок комплексної площини як при будь-яких значеннях степеня $\gamma \in (0,\, nm]$ внутрішнього радіуса області, що містить нульову точку, так і для степеня $\gamma \in \mathbb{R}^+$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки;

– отримано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і в разі, коли області симетричні відносно одиничного кола; встановлено умови, за яких структура точок і областей неістотна; доведені оцінки функціоналів дозволили знайти сильніші результати в точних розв'язках відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області;

– розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2\,]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату;

– розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатній степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат для $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 3$ й узагальнено її на випадок n-променевих систем точок; також наведено розв'язок цієї задачі для $\gamma \in (1, n\,]$, $n \geqslant 4$, при додатковому обмеженні величини внутрішнього радіуса області B_0 відносно початку координат;

– одержано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатній степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат із додатковою умовою симетрії областей відносно одиничного кола для $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 8$; показано, що якщо кутові параметри задовільняють умову $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, то множина тих γ, для яких отримана точна оцінка добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, значно ширша порівняно з загальним випадком ($\gamma \in (0;\, 0,25n^2]$, $n \geqslant 4$);

– для довільної системи взаємно неперетинних областей і довільної системи різних точок комплексної площини встановлено оцінку зверху для внутрішнього радіуса $r\,(B_0, 0)$ області B_0 відносно початку координат;

– наведено оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на довільній осі, за всіх можливих значень степеня γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат (степеня γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки, степеня γ внутрішнього радіуса області відносно нескінченно віддаленої точки). Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок.

Варто зазначити, що навіть наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення й посилення раніше відомих у цьому напряму класичних результатів В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, Я.В. Заболотного.

Отримані в дисертаційній роботі результати й розвинені в ній методи можуть бути корисними в подальших дослідженнях комплексного аналізу і його застосуваннях.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2012, Т. 9, № 2, С. 32–44.

2. Denega I.V. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia, 2013, V. LXVII, No. 1, P. 11–22.

3. Денега И.В. Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013, Т.10, № 4-5, С. 442–449.

4. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 3, С. 17–23.

5. В'юн В.Е., Денега І.В., Таргонський А.Л. Екстремальне розбиття комплексної площини і нерівності для добутків внутрішніх радіусів областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 4, С. 138–143.

6. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2016, V. LXVI, No. 2, P. 13–20.

7. Денега И.В., Заболотный Я.В. Обобщение некоторых результатов о неналегающих областях // Праці ІПММ НАН України, 2016, Т. 30, С. 43–52.

8. Denega I.V., Zabolotnii Ya.V. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations, 2017, V. 62, No. 11, P. 1611–1618.

9. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2017, Т. 14, № 1, С. 34–38.

10. Денега И.В., Заболотный Я.В. Задача о неналегающих полицилиндрических областях с полюсами на границе поликруга // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 1., С. 33–41. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Y.V. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // Journal of Mathematical Sciences, 2017, V. 227, No. 1, P. 26–32.)

11. Денега И., Клищук Б. К задаче об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 4, С. 472–480. (переклад: Denega I.V., Klishchuk B.A. To the problem of extremal partition of the complex plane // Journal of Mathematical Sciences, 2018, V. 234, No. 1, P. 14–20.)

12. Zabolotnyi Y., Denega I. On conformal radii of non-overlapping simply connected domains // International Journal of Advanced Research in Mathematics, 2018, V. 11, P. 1–7.

13. Bakhtin A., Vyhivska L. and Denega I. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 2, P. 37–44.

14. Денега И.В. Некоторые оценки для экстремального разбиения комплексной плоскости // Праці ІПММ НАН України, 2018, Т. 32, С. 42–47.

15. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 3, P. 71–78.

16. Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of multidimensional complex space for five domains // Український математичний вісник, 2018, Т. 15, № 3, P. 431–441. (переклад: Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of a multidimensional complex space for five domains // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 241, No. 1, P. 101–108.)

17. Bakhtin A.K., Denega I.V. Sharp estimates of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Probl. Anal. Issues Anal., 2019, V. 8(26), No. 1, P. 17–31.

18. Denega I., Zabolotnii Ya. Problem on extremal decomposition of the complex plane // An. St. Univ. Ovidius Constanta, 2019, V. 27, No. 1, P. 61–77.

19. Бахтин А.К., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. журн., 2019, Т. 71, № 7., С. 996–1002. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J., 2019, 71, С. 1138–1145.)

20. Bakhtin A.K., Denega I.V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane // Matematychni Studii, 2019, V. 51, No. 1, P. 35–40.

21. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 1., С. 77–87. (переклад: Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 242, No. 6, P. 787–795.)

22. Денега І.В. Оцінка добутків внутрішніх радіусів областей з додатковою умовою симетрії // Праці ІПММ НАН України, 2019, Т. 33, С. 82–88.

23. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 3, С. 307–328. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 1, P. 1–17.)

24. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами II // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 4, С. 477–495. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II // Journal of Mathematical

Sciences, 2020, V. 246, No. 5, P. 602–616.)

25. Бахтін О.К., Денега І.В. Оцінки максимума добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються // Укр. мат. журн., 2020, Т. 72, № 2, С. 173–183. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains // Ukr. Math. J., 2020, 72, P. 191–202.)

26. Denega I.V. Estimate of maximum of the products of inner radii of non-overlapping domains // Probl. Anal. Issues Anal., 2020, V. 9(27), No. 1, P. 60–65.

27. Денега І.В. Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини // International conference of young mathematicians. June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P.72.

28. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane // X літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз». 3–15 серпня 2015, Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 65–66.

29. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis». August 1–14, 2016, Odessa, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. – P. 59–60.

30. Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists On Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Book of Abstracts. – P. 53–55.

31. Denega I., Zabolotnij Ya. On the problem of extremal decomposition of the complex plane // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis». February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. – Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – С. 73–75.

32. Denega I. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 31 – June 5, 2017, Odesa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 53–54.

33. Denega I., Zabolotnij Ja. On one Dubinin extremal problem // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy. June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of

Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – P. 29.

34. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (13.12.1932–14.11.2015). 13–14 грудня, 2017, Київ, Україна. Тези доповідей. – С. 38–39.

35. Denega I. Problem on non-overlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 30 – June 4, 2018, Odesa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 14–15.

36. Bakhtin A., Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane with free poles // International Conference «Harmonic analysis and approximations», VII, dedicated to 90th Anniversary of Alexandr Talalyan. September 16–22, 2018, Tsaghkadzor, Armenia. Abstracts, Yerevan, 2018. – P. 25–26.

37. Denega I. Inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 98.

38. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains on the complex plane // International conference «Functional methods in approximation theory, differential equations and numerical mathematics IV», dedicated to the 100th anniversary of V.K. Dzyadyk (1919–1998). June 20–26, 2019, Svityaz' village, Volyn' region, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 16.

39. Denega I. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // 12th International ISAAC Congress. 29 July – 2 August 2019, University of Aveiro, Portugal. Volume of Abstracts. – P. 32.

40. Denega I. Estimates of the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of theoretical and mathematical physics». September 24–26, 2019, Kyiv, Ukraine. Program and Abstracts. – P. 100.

41. Denega I. Extremal decomposition problems // International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications. December 14–16, 2019, New Delhi, India.

42. Denega I. Estimate of maximum of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains // International scientific online conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 26–30, 2020, Odesa, Ukraine. Book of

abstracts. – P. 9–10.

43. Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with fixed points // International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications. July 27–29, 2020, Department of Mathematics, Dayanand Science College, Latur, India. Abstract book. – P. 78.

АНОТАЦІЇ

Денега І.В. Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. — Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових і вдосконаленню наявних підходів і методів дослідження відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини. Основний об'єкт дослідження — це екстремальні задачі про конформні відображення з фіксованими й вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

У роботі одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на (n, m)-променевих системах точок комплексної площини за будь-яких значень степеня $\gamma \in (0,\, nm]$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат (степеня $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки). Одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і у випадку, коли області симетричні відносно одиничного кола. Встановлено умови, за яких структура точок і областей неістотна.

Доведені оцінки функціоналів дали змогу знайти деякі точні розв'язки у відкритих екстремальних проблемах про взаємно неперетинні області.

Зокрема, розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2\,]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й узагальнено його для випадку двох довільних точок комплексної площини.

Наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення й посилення раніше

відомих у цьому напряму результатів В.М. Дубініна, Г.П. Бахтіної, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, Я.В. Заболотного.

Ключові слова: області, що взаємно не перетинаються, променева система точок, конформний і внутрішній радіус області, одиничне коло, функціонал, функція Гріна області, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, логарифмічна ємність, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі.

Denega I.V. Quadratic differentials and symmetrization methods in problems on extremal decomposition of the complex plane. — Manuscript. — Doctor of Sciences Thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the development of new and improvement of existing approaches and methods of research of open extremal problems of geometric function theory of a complex variable. The main object of the study is the extremal problems with fixed and free poles of the corresponding quadratic differentials.

In thesis, an effective upper estimates are obtained for the products of inner radii of mutually non-overlapping domains with fixed poles corresponding quadratic differentials on the (n, m)-radial systems of points of the complex plane at all possible values of the degree $\gamma \in (0,\, nm]$ of the inner radius of the domain relative to the origin (the degree $\gamma \in \mathbb{R}^+$ of the inner radii of the domains relative to the origin and the infinitely distant point). The corresponding results are obtained for the case when the poles corresponding quadratic differentials are located on the unit circle and in the case when the domains are mirror-symmetric relative to the unit circle. The conditions under which in the proved results the structure of points and domains is irrelevant are established.

Proved estimates of functionals have made it possible to find some exact solutions in open extremal problems on mutually non-overlapping domains. In particular, an open problem of finding the maximum of product of inner radii of two domains relative to the points of a unit circle on the degree γ of the inner radius of the domain relative to the origin at arbitrary $\gamma \in (0, 2\,]$, provided that all three domains are mutually non-overlapping domains is solved. And it is generalized for the case of two arbitrary points on the complex plane.

An upper estimates are given for products of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to the points located on one line at all possible values of the degree γ of the inner radius of the domain relative to the origin (the degree γ of the inner radii of the domains relative to the origin and the infinitely

distant point, the degree γ of the inner radius of the domain relative to the infinitely distant point). As a consequence, the results are obtained when two rays contain the same number of points.

The consequences of the general theorems are significant generalizations and enhancements of the results previously known in this direction by V.N. Dubinin, G.P. Bakhtina, G.V. Kuz'mina, E.G. Yemelyanov, L.V. Kovalev, A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii.

On the basis of the proved estimations it is possible to obtain a number of new estimations for the functions realizing conformal mapping of a circle on domains, with some special properties. The results can be applied to coverage theorems, distortion theorems, estimates of coefficients of univalent functions and in some problems of holomorphic dynamics.

Key words: non-overlapping domains, radial system of points, conformal and inner radius of the domain, the unit circle, functional, the Green function of domain, separating transformation, quadratic differential, logarithmic capacity, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area.

Підписано до друку 10.11.2020. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,25. Умов. друк. арк. 2,09. Тираж 100 пр. Зам. 51.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.