

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Безущак Оксани Омелянівни на тему
«Структурна теорія та асимптотичні конструкції
локально матричних алгебр»,
представленої на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена структурній теорії локально матричних алгебр, а також застосуванням локально матричних алгебр до груп та алгебр нескінченних матриць і просторів Хемінга.

Локально матричні алгебри природно виникають в алгебрі як нескінченно-вимірні об'єкти, які найбільш близькі до скінченно-вимірних матричних алгебр, у функціональному аналізі в теорії апроксимативно скінченно-вимірних C^* -алгебр, у теорії зображень локально скінченно-вимірних алгебр Лі, математичній фізиці.

Інтерес до класів локально матричних алгебр виник давно. Так, ще у 1931 році Г. Кьоте довів, що будь-яка унітальна зліченно-вимірна локально матрична алгебра єдиним чином розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр над полем і розширив цей результат на клас локально простих скінченно-вимірних центральних алгебр. О.Г. Курош у статті 1942 року показав, що результати Кьоте не узагальнюються на випадок незліченно-вимірних локально матричних алгебр, а через декілька років його учень В.М. Курочкін, вивчаючи єдиність розкладів локально матричних алгебр у тензорний добуток скінченно-вимірних і примарних компонент, сформулював питання, яке залишалося відкритим і відповідь на яке отримана в дисертаційній роботі: чи розкладається довільна локально матрична алгебра в тензорний добуток примарних алгебр ?

Пізніше, вже в 1960 році Дж. Глімм показав, що будь-яка апроксимативно скінченно-вимірна C^* -алгебра містить щільну унітальну зліченно-вимірну локально матричну алгебру, що дало підґрунтя для застосування локально матричних алгебр у теорії C^* -алгебр. Через короткий час, у 1967 році, Ж. Діксм'є класифікував неунітальні зліченно-вимірні локально матричні алгебри над полем нульової характеристики за допомогою параметризації числами Стейніца та

невід'ємними дійсними числами. У кінці 90-х років минулого століття цей результат був поширений О.О. Барановим на випадок довільного поля, а також на випадок зліченно-вимірних локально інволютивно простих алгебр.

Задачі структурної теорії різних типів класів локальних алгебр розглядалися в багатьох публікаціях. Так, у статті Х. Штраде 1999 року, вивчалось диференціювання зліченно-вимірних локально простих алгебр Лі над полем нульової характеристики. Ш.А. Аюпов і К.К. Кудайбергенов у 2020 році побудували ненульове зовнішнє диференціювання унітальної зліченно-вимірної локально матричної алгебри з числом Стейніца, яке є нескінченним степенем двійки.

З локально матричними алгебрами пов'язані два важливі класи простих нескінченно-вимірних локально скінченно-вимірних алгебр. Це фінітарні алгебри, вивченню яких присвячені декілька статей О.О. Баранова та Х. Штраде, та діагонально локально прості алгебри Лі. Ю.О. Бахтурін, О.О. Баранов, О.Ю. Залеський довели, наприклад, що над алгебрично замкненим полем характеристики нуль алгебри дрогого типу вичерпуються квадратами таких алгебр або квадратами їх підалгебр з інволюцією, а Дж. Хеннінг поширила цей результат на алгебри над полем характеристики більшої за 5. Велика серія робіт присвячена також зображенням таких алгебр та їх застосуванням у математичній фізиці та в теорії солітонів. К. Х. Нееб у 2005 році описав диференціювання алгебр Лі, які є спеціальними приєднаними до таких класів алгебр, над полем нульової характеристики.

Іншим класом алгебричних структур, який тісно пов'язаний з локально матричними алгебрами і який вивчається в дисертаційній роботі, є локально стандартні простори Хемінга (булеві кільця з мірою). Такому класу алгебричних структур присвячена ціла низка робіт В.І. Суцанського і його учнів, а також П. Камерона, С. Тарзі, Б.В. Олійник.

Виходячи із зробленого аналізу, вважаю, що тематика дисертаційних досліджень, без сумніву, є важливою та актуальною.

Зміст роботи. Основна частина – це розділи 3-8. У першому та другому розділах роботи зроблено детальний огляд літератури за тематикою досліджень із

належними цитуваннями відповідних публікацій та наведено означення понять і відомих результатів, які використовувалися в подальших розділах.

У третьому розділі вивчаються числа Стейніца і розклади в тензорний добуток локально матричних алгебр. Показано, що алгебра Кліфорда невідродженої квадратичної форми на нескінченно-вимірному векторному просторі над полем характеристики, відмінної від 2, та узагальнена алгебра Кліфорда є локально матричними алгебрами. Визначається інваріант довільної унітальної локально матричної алгебри, який для зліченно-вимірної локально матричної алгебри збігається з числом Стейніца, визначеного Гліммом. Будуються приклади неізоморфних унітальних локально матричних алгебр, що мають однакові числа Стейніца. Тим самим показано, що теорема Глімма не узагальнюється на незліченно-вимірний випадок. Показано, що унітальні локально матричні алгебри (довільної розмірності) мають однакові числа Стейніца тоді й лише тоді, коли їх універсальні елементарні теорії збігаються. У цьому розділі важливим результатом є доведення існування незліченно-вимірних унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються в тензорний добуток примарних компонент, що є негативною відповіддю на питання Курочкина. У цьому розділі також побудована нова велика серія прикладів унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються у тензорний добуток матричних алгебр. Хочу відмітити також результат, що якщо локально матричні алгебри зліченно-вимірні, то умова раціональної зв'язності їх чисел Стейніца є необхідною і достатньою умовою для того, щоб вони були Моріта еквівалентними. Також побудовані приклади не Моріта еквівалентних незліченно-вимірних унітальних локально матричних алгебр, які мають однакові числа Стейніца.

У четвертому розділі вивчаються спектри локально матричних алгебр. Зокрема, для довільної локально матричної алгебри визначено її спектр, який є повною множиною чисел Стейніца, класифіковані всі повні множини чисел Стейніца, для довільної повної множини чисел Стейніца побудована зліченно-вимірна локально матрична алгебра, яка має цю множину як спектр, та показано, що зліченно-вимірні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються.

Таким чином, отримане нове доведення теореми Діксм'є-Баранова про класифікацію неунітальних зліченно вимірних локально матричних алгебр.

П'ятий розділ дисертації присвячений класу булевих кілець з мірою та структурою лінійного векторного простору, які ще називаються просторами Хемінга. У цьому розділі визначено тензорний добуток у класі просторів Хемінга і доведено, що кожний унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга є тензорним добутком стандартних просторів Хемінга, що є аналогом теореми Кьоте. Також визначено Стейніцовий інваріант довільного унітального локально стандартного простору Хемінга, доведено, що унітальні зліченні локально стандартні простори Хемінга ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца збігаються, що є аналогом теореми Глімма. Показано, що для довільної узагальненої підалгебри Картана унітальної зліченно-вимірної локально матричної алгебри її підалгебра ідемпотентів з функцією відносного рангу в ролі міри є унітальним локально стандартним простором Хемінга. Доведено, що кожний унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга може бути реалізований як алгебра ідемпотентів деякої підалгебри Картана унітальної зліченно-вимірної локально матричної алгебри. Для кожного локально стандартного (не обов'язково унітального) простору Хемінга визначено його спектр і доведено, що він є повною множиною чисел Стейніца. Визначена параметризація неунітальних зліченних локально стандартних просторів Хемінга парами, які складаються з числа Стейніца і невід'ємного дійсного числа, що є аналогом теореми Діксм'є.

У шостому розділі вивчаються автоморфізми і диференціювання локально матричних алгебр. Зокрема, показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в алгебрі Лі всіх диференціювань. Доведено, що група внутрішніх автоморфізмів унітальної локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в напівгрупі всіх унітальних ін'єктивних ендоморфізмів. Для довільного нескінченного тензорного добутку матричних алгебр описані його диференціювання на мові нескінченних збіжних сум внутрішніх диференціювань, які відповідають розрідженим

підмножинам. Для кожної розрідженої підмножини множини індексів знайдено топологічний базис у векторному просторі нескінченних збіжних сум внутрішніх диференціювань, який буде відповідати цій розрідженій підмножині. Показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань зліченно-вимірної локально матричної алгебри не локально скінченно-вимірна, що є аналогом теореми Штраде. Доведено, що розмірності алгебри Лі диференціювань тензорного добутку родини матричних алгебр над полем \mathbf{F} , індексованого нескінченною множиною індексів I , і алгебри Лі зовнішніх диференціювань такого тензорного добутку збігаються і дорівнюють $|\mathbf{F}|^I$. Для зліченно-вимірної локально матричної алгебри показано, що розмірності алгебри Лі її диференціювань і алгебри Лі її зовнішніх диференціювань збігаються, дорівнюють $|\mathbf{F}|^{\aleph_0}$ і дорівнюють порядку групи її автоморфізмів та порядку групи її зовнішніх автоморфізмів.

У цьому розділі вивчаються нескінченні періодичні матриці. Показано, що для довільного числа Стейніца s множина нескінченних періодичних блочно-діагональних $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ -матриць над полем \mathbf{F} з періодом, який ділить число Стейніца s , є локально матричною унітальною зліченно-вимірною алгеброю з числом Стейніца s , а група її оборотних елементів та комутант цієї групи є локально GL - і локально SL -групами відповідно. А також доведено, що для унітальних локально матричних алгебр A та B та їх груп оборотних елементів A^* і B^* відповідно з того, що комутанти $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, випливає, що кільця A і B або ізоморфні, або антиізоморфні. Більш того, показано, що довільний ізоморфізм цих комутантів або продовжується до ізоморфізму кілець A та B , або знайдеться антиізоморфізм цих кілець спеціального вигляду.

Останній восьмий розділ присвячений вивченню диференціювання асоціативних та лієвських алгебр нескінченних матриць, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику; алгебр $(I \times I)$ -матриць, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному рядку і кожному стовпці; алгебр $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ -матриць зі скінченною кількістю ненульових діагоналей (матриць Якобі); алгебр $(I \times I)$ -матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів. До основних результатів останнього розділу слід віднести такі. Описані

диференціювання таких алгебр, показано, що кожне їх диференціювання є або приєднаним диференціюванням, що індукується елементом з відповідної надалгебри, або ж є внутрішніми. Також описані диференціювання спеціальних лінійних алгебр L_1 , які є алгебрами L_1 кососиметричних елементів відносно інволюції транспонування та симплектичної інволюції, а також спеціальних лінійних алгебр L_1 , які є приєднаними алгебрами L_1 до вказаних типів алгебр. Доведено, що довільне диференціювання алгебри всіх ендоморфізмів, яка містить лінійні перетворення скінченного рангу має вигляд приєданого диференціювання, що індукується елементами алгебри I на I матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпці та кожному рядку. На основі цього результату далі показується, що всі диференціювання алгебр I на I матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпці і кожному рядку і алгебр матриць Якобі є внутрішніми. Один із цих результатів узагальнює теорему Нееба на випадок довільного поля характеристики, відмінної від 2.

Зауваження й побажання.

1). У роботі використовуються позначення, які не є загально прийнятими у всіх областях математики. Наприклад, позначення точної верхньої границі. Тому варто було б уточнювати, що ці позначення означають.

2). У тексті використовується поняття фільтра в сенсі власного фільтра, але це не відмічено.

3). Можливо варто було б більш детально пояснити умову невідродженості форми у випадку поля характеристики 2 на стор 77, оскільки вона є очевидною лише для вузькоспеціалізованих фахівців.

Зроблені зауваження мають рекомендаційний характер і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Дисертаційну роботу оформлено згідно вимог МОН України. Матеріал дисертації викладено чітко і послідовно. Оформлення тексту і формул справляє хороше враження. Автореферат правильно відображає структуру, зміст та основні результати дисертації. Посилання на дослідження інших авторів є коректними.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у абстрактну алгебру і теорію моделей, а також структурну теорію скінченно-вимірних та

нескінченно-вимірних асоціативних алгебр, лінійну алгебру і теорію алгебр з мірою. Результати дисертаційної роботи у подальшому можна використовувати у дослідженнях нескінченно-вимірних алгебр, структурній теорії асоціативних алгебр, а також теорії алгебр з мірою, теорії C^* -алгебр і теорії зображень.

Результати в повній мірі опубліковані у журнальних публікаціях. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 16 наукових статей, серед яких 9 публікацій надруковано у наукових періодичних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та/або Web of Science, одна з яких опублікована у журналі, що віднесений до першого квартиля (Q1) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, дві статті опубліковані у виданнях, що віднесені до другого квартиля (Q2), і дві статті опубліковані у виданнях, віднесених до третього квартиля (Q3). Результати дисертації доповідались на наукових семінарах, а також міжнародних конференціях і пройшли належну апробацію.

Враховуючи сказане, вважаю, що результати дисертаційної роботи «Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр» поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, є завершеним науковим дослідженням і відповідають усім вимогам п. 9, п. 10, п. 12, п. 13, п. 14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 року №567, зі змінами, які висуваються до докторських дисертацій, а її автор Безущак Оксана Омелянівна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
провідний науковий співробітник відділу
алгебри Інституту прикладних проблем
механіки і математики НАН України,
старший науковий співробітник

Підпис *Щедрика В.П.*
засвідчую
Ст. інсп. ВК *[підпис]*
" 29 " 12 20 20р.



В.П. Щедрик

7

Надійшов 5.04.2021р.