Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу Оксани Омелянівни Безущак
"Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр"
представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Алгебра над полем $\mathbb{F}$ *локально матрична*, якщо довільна скінченна множина її елементів міститься в підалгебрі, яка ізоморфна алгебрі матриць $\mathbb{F}^{n\times n}$ для деякого n. Тобто, кожна скінченно породжена підалгебра продовжується до підалгебри, яка ізоморфна алгебрі всіх квадратних матриць фіксованого розміру. Серед незлічен-но вимірних алгебр, такі алгебри найбільш близькі за властивостями до скінченно вимірних алгебр, бо кожна скінченно вимірна алгебра ізоморфна алгебрі матриць.

Теорія скінченно вимірних алгебр кардинально змінилася за останні 50 років, значною мірою завдяки роботам київських математиків (А.В. Ройтера, Ю.А. Дрозда, В.В. Кириченка, В.І. Бондаренка, та їх учнів), чого не можна сказати про теорію локально матричних алгебр. Тому тема дисертації Оксани Безущак, в якій розвинута теорія локально матричних задач, є безумовно актуальною.

Я учень А.В. Ройтера, веду дослідження в лінійної алгебрі та теорії зображень, старший редактор журналу Linear Algebra and its Applications (Q1 за Скопусом), і можу кваліфіковано оцінити науковий рівень дисертації Оксани Безущак.

Відзначу такі результати дисертації:

- Нехай V — нескінченно вимірний векторний простір над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$, характеристика якого не дорівнює 2. Нехай $f : V \to \mathbb{F}$ — невироджена квадратична форма. Нехай $\mathrm{Cl}(V, f)$ — асоціативна $\mathbb{F}$-алгебра, яка породжена векторним простором V та одиницею 1 і задана визначальними співвідношен-нями $v^2 = f(v) \cdot 1$, $v \in V$. Доведено, що $\mathrm{Cl}(V, f)$ — локально матрична алгебра.

- Нехай I — впорядкована нескінченна множина. Нехай l — натуральне число ≥ 2, причому l взаємно просте з характеристикою поля, якщо вона додатня. Нехай $\mathrm{Clg}(l, I)$ — алгебра, яка задана твірними елементами x_1, $i \in I$, та визна-чальними співвідношеннями

$$x_i^{-1}x_jx_i = \begin{cases} \xi x_j, & \text{якщо } i < j, \\ \xi^{-1}x_j, & \text{якщо } i > j, \end{cases}$$

  де ξ — первісний корінь степеня l з 1 у полі $\mathbb{F}$. Доведено, що $\mathrm{Clg}(l, I)$ — локально матрична алгебра.

- Доведено, що числа Стейніца цих алгебр дорівнюють

$$\mathrm{st}(\mathrm{Cl}(V, f)) = 2^{\infty}, \qquad \mathrm{st}(\mathrm{Clg}(l, I)) = l^{\infty}.$$

- Нехай V — комплексний векторний простір нескінченних послідовностей $(a_1, a_2, \dots)$ комплексних чисел таких, що $|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots < \infty$. Розглянемо невироджену квадратичну форму на V:

$$f : (a_1, a_2, \dots) \mapsto a_1^2 + a_2^2 + \cdots .$$

  Доведено, що алгебра $\mathrm{Cl}(V, f)$ розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

- Нехай l — непарне натуральне число. Доведено, що алгебра $\mathrm{Clg}(l, \mathbb{R})$ не ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр.

- Доведено, що для довільного нескінченного локально скінченного числа Стейніца знайдеться незліченно-вимірна унітальна локально матрична алгебра з цим числом Стейніца, яка не ізоморфна тензорному добутку примарних локально матричних алгебр. (Негативна відповідь на питання Курочкіна.)

- Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не можна зобразити у вигляді $(\operatorname{char}\mathbb{F})^{\infty} \cdot n$, де n — натуральне число. Тоді існує унітальна локально матрична алгебра з числом Стейніца s, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

- Доведено, що унітальні локально матричні алгебри універсально еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца співпадають.

- Якщо унітальні локально матричні алгебри Моріта еквівалентні, то їх числа Стейніца раціонально зв'язні.

- Якщо унітальні локально матричні алгебри зліченно-вимірні, то вони Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца раціонально зв'язні.

- Нехай s — нескінчене не локально скінчене число Стейніца, яке не можна зобразити у вигляді $(\operatorname{char}\mathbb{F})^{\infty}s'$, де s' — число Стейніца, яке не є локально скінченним. Доведено, що існують не Моріта еквівалентні локально матричні алгебри з числом Стейніца s, які мають однакову розмірність як векторні простори.

- Для зліченно-вимірних унітальних локально матричних алгебр їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до ізоморфізму. Для унітальних локально матричних алгебр довільної розмірності їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до універсальної еквівалентності.

Я навів тільки основні твердження розділу 3 дисертації. Не менш змістовні є інші розділи дисертації:

- розділ 4 про інваріанти Стеніца не обов'язково унітальних локально матричних алгебр,

- розділ 5 про простори Хемінга,

- розділ 6 про диференціювання і автоморфізми зліченно-вимірних локально матричних алгебр,

- розділ 7 про групи нескінченних періодичних матриць, та

- розділ 8 про диференціювання асоціативних алгебр і алгебр Лі нескінченних матриць.

Я запам'ятав студентку Оксану Безущак, коли вона тільки починала вчитися на мехматі Київського університету, де я тоді викладав, і активно працювала в студентському науковому товаристві. Вона зробила блискучу доповідь на студентському науковому семінарі, яким я керував. Я дуже радий, що Оксана стала провідним науковцем в галузі незліченно вимірних алгебр і написала чудову дисертацію.

Згідно з формальними вимогами підтверджую, що основні результати дисертації повною мірою викладено в 16 статтях та в матеріалах наукових конференцій. Основні положення дисертації повністю відображені в авторефераті. Дисертація "Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр" є завершеним науковим дослідженням, містить нові вагомі наукові результати, відповідає всім вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року № 567 (зі змінами), які висуваються до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора наук, а її автор Оксана Омелянівна Безущак заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел.

Офіційний опонент
провідний науковий співробітник відділу алгебри
Інституту математики НАН України
доктор фіз.-мат. наук, професор В.В. Сергейчук

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Підпис
ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики НАН України
23 грудня 2020

Надійшов 23.12.2020р.