Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Безущак Оксана Омелянівна

УДК 512.54, 512.55, 512.56

ДИСЕРТАЦІЯ

Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

О. О. Безущак

Науковий консультант
Петравчук Анатолій Петрович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2021

Анотація

Безущак О.О. Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр.— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел.– Київський національний університет імені Тараса Шевченка.– Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена асимптотичним конструкціям та структурній теорії локально матричних алгебр та їх застосуванням до груп і алгебр нескінченних матриць та просторів Хемінга.

Інтерес до локально матричних алгебр виник у зв'язку з їх застосуваннями в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, теорії зображень та математичній фізиці. Як зазначають А. Вершик та С. Керов, локально матричні алгебри — це нескінченно–вимірні алгебри, які найближчі до класичних алгебр матриць.

Результати дисертаційної роботи можна розділити на три частини. У першій частині (розділи 3, 4):

(i) вводимо нові приклади локально матричних алгебр довільних розмірностей,

(ii) вводимо нові інваріанти Стейніца локально матричних алгебр,

(iii) вивчаємо розклади локально матричних алгебр довільної розмірності у тензорні добутки матричних алгебр та примарних локально матричних алгебр.

У другій частині (розділ 5) розробляємо структурну теорію локально стандартних просторів Хемінга, паралельну структурній теорії локально матричних алгебр.

У третій частині (розділи 6, 7, 8) вивчаємо:

(i) автоморфізми та диференціювання локально матричних алгебр,

(ii) групи нескінченних періодичних матриць,

(iii) диференціювання асоціативних та лієвих алгебр нескінченних матриць.

Г. Кете показав, що кожна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток матричних алгебр і, отже, примарних локально матричних алгебр. А.Г. Курош побудував приклад, який показує, що

цей результат не поширюється на локально матричні алгебри незліченних розмірностей. Його учень В.М. Курочкін вивчав єдиність примарних розкладів і сформулював основне питання, яке залишалося відкритим:

чи кожна локально матрична алгебра допускає примарний розклад?

У розділі 3 ми побудували приклад незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри, яка не допускає примарного розкладу, що дає негативну відповідь на питання Курочкіна.

Новий сплеск інтересу до локально матричних алгебр відбувся в 60–70-х роках минулого століття у зв'язку з їх застосуванням до $\mathbb{C}^*$–алгебр. Дж. Глімм параметризував зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри числами Стейніца. Дж. Діксм'є параметризував неунітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри над полем нульової характеристики. А.А. Баранов поширив результат Діксм'є на випадок довільного поля.

У розділі 3 ми визначили інваріант Стейніца для унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності і показали, що, взагалі кажучи, цей інваріант не визначає локально матричну алгебру незліченної розмірності з точністю до ізоморфізму.

Тим не менш, показали, що:

(i) інваріант Стейніца визначає алгебру з точністю до універсальної елементарної еквівалентності, тобто Стейніцові інваріанти двох алгебр рівні тоді й лише тоді, коли їх універсальні елементарні теорії збігаються,
(ii) Моріта еквівалентність зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр може бути повністю охарактеризована за допомогою інваріантів Стейніца.

Використовуючи нові приклади унітальних локально матричних алгебр (алгебри Кліфорда та узагальнені алгебри Кліфорда), нам вдалося для майже всіх чисел Стейніца побудувати приклади унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються в тензорні добутки матричних алгебр.

У розділі 4 ми визначили інваріанти Стейніца для не обов'язково унітальних локально матричних алгебр. Довільній такій алгебрі A привласнюємо набір чисел Стейніца, який називаємо спектром A. Показуємо, що спектр є повною множиною і що кожна повна множина чисел Стейніца є спектром деякої локально матричної алгебри.

Узагальнюючи теорему Глімма, показуємо, що дві зліченно–вимірні локально матричні алгебри є ізоморфними тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються. Ми повністю класифікували повні множини чисел Стейніца. Як наслідок, отримали інше доведення теореми Діксім'є–Баранова.

Розділ 5 присвячений вивченню локально стандартних просторів Хемінга. Стандартний простір Хемінга n–наборів із 0 та 1 є незамінним інструментом у теорії кодування. Ми вивчаємо стандартні простори Хемінга та їх нескінченні узагальнення в контексті алгебр з мірою, тобто булевих алгебр з функцією міри, визначених А. Хорном та А. Тарським.

Для довільного локально стандартного унітального простору Хемінга ми визначили Стейніцовий інваріант і довели, що:

(i) зліченний унітальний локально стандартний простір Хемінга розкладається у тензорний добуток стандартних просторів Хемінга,

(ii) кожен зліченний унітальний локально стандартний простір Хемінга однозначно визначається своїм інваріантом Стейніца.

Локально стандартні простори Хемінга пов'язані з підалгебрами Картана локально матричних алгебр. Нехай A є унітальною зліченно–вимірною локально матричною алгеброю, а H — її підалгебра Картана. Розглянемо множину $E(H)$ усіх ідемпотентів H із булевими операціями ef та $e+f-2ef$, де $e, f \in E(H)$, і функцією r відносного рангу (рангу Курочкіна) як функцію міри. Тоді $(E(H), r)$ є локально стандартним унітальним простором Хемінга.

І навпаки, для довільного унітального зліченного локально стандартного простору Хемінга S існує унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра A така, що простори Хемінга S та $(E(H), r)$ — ізоморфні, де H — підалгебра Картана алгебри A.

Для довільного не обов'язково унітального локально стандартного простору Хемінга визначаємо його спектр, який є повною множиною чисел Стейніца. З огляду на отриману в розділі 5 класифікацію повних множин чисел Стейніца, ми довели аналог теореми Діксм'є для неунітальних зліченних просторів Хемінга.

У розділі 6 вивчаємо автоморфізми та диференціювання локально матричних алгебр, зосереджуючи увагу на зовнішніх автоморфізмах та зовнішніх диференціюваннях. Ми показали, що:

(i) для довільної локально матричної алгебри ідеал внутрішніх диференціювань щільний в алгебрі Лі всіх диференціювань у топології Тихонова,

(ii) в унітальній локально матричній алгебрі нормальна підгрупа її внутрішніх автоморфізмів щільна в топології Тихонова в групі всіх її автоморфізмів і навіть у напівгрупі ін'єктивних ендоморфізмів.

Для нескінченного (не обов'язково зліченного) тензорного добутку матричних алгебр ми описуємо всі диференціювання як нескінченні збіжні суми внутрішніх диференціювань спеціального типу. З огляду на теорему Кьоте тоді матимемо опис диференціювань унітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр.

Схожим чином ми описали ін'єктивні ендоморфізми унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри як нескінченні збіжні добутки певних внутрішніх автоморфізмів. Показали, що такий добуток є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність обернених до цих внутрішніх автоморфізмів є інтегровною.

Використовуючи наведений вище опис, ми показали, що для зліченно–вимірної локально матричної алгебри розмірність її алгебри Лі зовнішніх диференціювань дорівнює $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$, де $|\mathbb{F}|$ — потужність основного поля $\mathbb{F}$.

Ми також довели, що алгебра Лі зовнішніх диференціювань не є локально скінченно–вимірною (аналог теореми Штраде). Схожим чином показали, що порядок групи зовнішніх автоморфізмів нашої алгебри дорівнює $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$.

У розділі 7 вивчаємо матричні реалізації зліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри, запропоновані В.І. Сущанським. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. Для фіксованого числа Стейніца u ми розглядаємо алгебру $M_u(\mathbb{F})$ усіх періодичних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$ з періодом, що ділить число Стейніца u. Така алгебра є унітальною зліченно–вимірною локально матричною алгеброю з числом Стейніца u.

Нехай $GL_u(\mathbb{F})$ — група оборотних елементів алгебри $M_n(\mathbb{F})$ і нехай $SL_u(\mathbb{F})$ — комутант алгебри $GL_u(\mathbb{F})$. Використовуючи структурну теорію локально матричних алгебр, ми описуємо ізоморфізми між групами $SL_u(\mathbb{F})$. Зокрема, показуємо, що для довільних двох чисел Стейніца u_1 і u_2 групи $SL_{u_1}(\mathbb{F})$ і $SL_{u_2}(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й лише тоді, коли числа Стейніца u_1 та u_2 збігаються.

В останньому розділі 8 ми вивчаємо диференціювання асоціативних та лієвих алгебр нескінченних матриць. Ключовим інструментом тут є доведена в розділі 6 щільність внутрішніх диференціювань локально матричних алгебр у топології Тихонова.

Нехай I — нескінченна множина. Нехай $M_I(\mathbb{F})$ — алгебра $(I \times I)$−матриць над полем $\mathbb{F}$, що має скінченну кількість ненульових елементів у кожному стовпчику. Якщо V є $|I|$−вимірним векторним простором над $\mathbb{F}$, то алгебра $M_I(\mathbb{F})$ ізоморфна алгебрі усіх лінійних перетворень простору V.

Ми також розглядаємо алгебру $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ $(I \times I)$−матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпчику і кожному рядку, а також алгебру $M_\infty(I, \mathbb{F})$ $(I \times I)$−матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів.

Матриця Якобі — це $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$−матриця, що має скінченну кількість ненульових діагоналей. Нехай $MJ(\mathbb{F})$ позначає алгебру всіх матриць Якобі.

Використовуючи щільність у топології Тихонова алгебри внутрішніх диференціювань локально матричної алгебри, доводимо, що довільне диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд $\mathrm{ad}(a)$, де $a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. На основі цього результату ми далі показуємо, що всі диференціювання алгебр $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $MJ(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

Довільна асоціативна алгебра A породжує приєднану алгебру Лі $A^{(-)} = (A, [a, b] = ab - ba)$. Алгебри $\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}) = M_\infty(I, \mathbb{F})^{(-)}$, $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F}) = [\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}), \mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F})]$ і підалгебри $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$ кососиметричних матриць із $M_\infty(I, \mathbb{F})$ відносно інволюції транспонування і симплектичної інволюції відповідно знайшли застосування в математичній фізиці. Приєднана алгебра Лі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) = MJ(\mathbb{F})^{(-)}$ має застосування в теорії солітонів.

К.−Н. Нееб довів, що для поля $\mathbb{F}$ нульової характеристики всі диференціювання спеціальних лінійних алгебр Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$ мають вигляд $\mathrm{ad}(a)$, де a належить алгебрі Лі $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є приєднаною до алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Ми довели такий же результат для довільного поля характеристики відмінної від 2. Крім цього, ми також довели, що всі диференціювання алгебр $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

Ключові слова: локально матричні алгебри, число Стейніца, диференціювання, нескінченний тензорний добуток, кільце з мірою, простір Хемінга, нескінченні матриці, періодичні матриці.

Abstract

Bezushchak O.O. Structural theory and asymptotic constructions of locally matrix algebras.— Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.06 — Algebra and Number Theory.– Taras Shevchenko National University of Kyiv.– Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to asymptotic constructions and structure theory of locally matrix algebras and their applications to Hamming spaces and groups and algebras of infinite matrices.

The interest in locally matrix algebras stems from their connections to $\mathbb{C}^*$–algebras, Representation Theory and Mathematical Physics. As noted by A. Vershik and S. Kerov, locally matrix algebras are infinite–dimensional algebras that are closest to classical algebras of matrices.

The results of the thesis can be divided into three parts. In the first part (Chapters 3, 4), we:

(i) introduce new examples of locally matrix algebras of arbitrary dimensions,
(ii) introduce new Steinitz invariants of locally matrix algebras,
(iii) study decompositions of locally matrix algebras of arbitrary dimension into tensor products of matrix algebras and primary locally matrix algebras.

In the second part (Chapter 5), we develop structure theory of locally standard Hamming spaces that is parallel to structure theory of locally matrix algebras.

In the third part (Chapters 6, 7, 8), we study:

(i) automorphisms and derivations of locally matrix algebras,
(ii) groups of infinite periodic matrices,
(iii) derivations of associative and Lie algebras of infinite matrices.

G. Koethe showed that every countable–dimensional unital locally matrix algebra decomposes into a tensor product of matrix algebras and, hence, of primary locally matrix algebras. A.G. Kurosh constructed an example showing that this result does not extend to locally matrix algebras of uncountable dimensions. His student V.M. Kurochkin studied uniqueness of primary decompositions and formulated the basic question that remained open:

if every locally matrix algebra admits a primary decomposition?

In Chapters 3, we constructed an example of an uncountable–dimensional unital locally matrix algebra that does not admit primary decomposition thus giving negative answer to the question of Kurochkin.

A new splash of interest in locally matrix algebras happened in 60-70s in connection with their applications to $\mathbb{C}^*$–algebras. J. Grimm parameterized countable–dimensional unital locally matrix algebras with Steinits numbers. J. Dixmier parameterized non–unital countable–dimensional locally matrix algebras over a field of zero characteristics. A. A. Baranov extended Dixmier's result to an arbitrary field.

In Chapter 3, we assigned a Steinitz invariant to a unital locally matrix algebra of an arbitrary dimension and showed that, generally speaking, this invariant does not determine a locally matrix algebra of uncountable dimension up to an isomorphism.

However, we showed that:

(i) the Steinitz invariant an algebra up to universal elementary equivalence, that is, the Steinitz invariants of two algebras are equal if and only if their universal elementary theories coincide,

(ii) Morita equivalence of countable–dimensional unital locally matrix algebras can be completely characterized via Steinitz invariants.

Using the new examples of unital locally matrix algebras (Clifford and Generalized Clifford algebras), we were able to construct examples of unital locally matrix algebras that do not decompose as tensor products of matrix algebras and that have almost an arbitrary Steinitz number.

In Chapter 4, we introduced Steinitz invariants for not necessarily unital locally matrix algebras. To an arbitrary such algebra A we assign a set of Steinitz numbers that we call the spectrum of A. We show that the spectrum in a complete set and every complete set of Steinitz numbers can be realized as a spectrum of a locally matrix algebra.

Extending the theorem of Glimm, we show that two countable–dimensional locally matrix algebras are isomorphic if and only if their spectra coincide. We completely classified complete sets of Steinitz numbers. As a consequence, we obtained another proof of Diximier–Baranov theorem.

In Chapter 5, we study locally standard Hamming spaces. A standard Hamming space of n–tuples of 0 and 1 is an indispensable instrument of Coding Theory. We study standard Hamming spaces and their infinite generalizations in the context of measure algebras, i.e. Boolean algebras with measure functions as defined by A. Horn and A. Tarski.

To an arbitrary locally standard unital Hamming space we assigned a Steinitz invariant and proved that:

(i) a countable unital locally standard Hamming space decomposed as a tensor product of standard Hamming spaces,

(ii) every countable unital locally standard Hamming space is uniquely determined by its Steinitz invariant.

Locally standard Hamming spaces are related to Cartan subalgebras of locally matrix algebras. Let A be a unital countable–dimensional locally matrix algebra and let H be its Cartan subalgebra. Consider the set $E(H)$ of all idempotents of H with Boolean operations ef and $e + f - 2ef$ for $e, f \in E(H)$, and the function r of relative (Kurochkin) range as a measure function. Then $(E(H), r)$ is a locally standard unital Hamming space.

Conversely, for an arbitrary unital countable locally standard Hamming space S there exists a unique countable locally matrix algebra A such that Hamming spaces S and $(E(H), r)$ are isomorphic, where H is a Cartan subalgebra of A.

For an arbitrary not necessarily unital locally standard Hamming space we defined its spectrum, which is a complete set of Steinitz numbers. In view of the complete classification of complete sets of Steinitz numbers in Chapter 5, we obtain an analog of Dixmier's theorem for nonunital countable Hamming spaces.

In Chapter 6, we study automorphisms and derivations of locally matrix algebras focusing on outer automorphisms and outer derivations. We showed that:

(i) for an arbitrary locally matrix algebra the ideal of inner derivations is dense in the Lie algebra of all derivations in Tykhonoff topology,

(ii) in a unital locally matrix algebra the normal subgroup of inner automorphisms is dense in the group of all automorphisms in Tykhonoff topology and even in the semigroup of injective endomorphisms.

In an infinite (not necessarily countable) tensor product of matrix algebras we described all derivations as infinite converging sums of inner derivations of a special type. In view of Koethe's theorem it implies a description of derivations of unital countable–dimensional locally matrix algebras.

Similarly, we describe injective endomorphisms of a unital countable–dimensional locally matrix algebra as infinite converging products of certain inner automorphisms. We show that this product is an automorphism if and only if the sequence of inverses of these inner automorphisms is integrable.

Using the description above, we showed that for a countable–dimensional locally matrix algebra the dimension of its Lie algebra of outer derivations is equal to $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$, where $|\mathbb{F}|$ is the cardinality of the ground field $\mathbb{F}$.

We also proved that the Lie algebra of outer derivations is not locally finite–dimensional (an analog of the theorem of Strade). Similarly, the order of the group of outer automorphisms of the algebra is equal to $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$.

In Chapter 7, we study matrix realizations of countable–dimensional unital locally matrix algebras suggested by V.I. Sushchansky. Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers. Given a Steinitz number u we consider the algebra $M_u(\mathbb{F})$ of all periodic $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ matrices over a filed $\mathbb{F}$ with period dividing u. This algebra is a unital countable–dimensional locally matrix algebra with Steinitz number u.

Let $GL_u(\mathbb{F})$ be the group of invertible elements of the algebra $M_n(\mathbb{F})$ and let $SL_u(\mathbb{F})$ be a commutant of the algebra $GL_u(\mathbb{F})$. Using the structure theory of locally matrix algebras, we described isomorphisms between groups $SL_u(\mathbb{F})$. In particular, we showed that given two Steinitz numbers u_1 and u_2 the groups $SL_{u_1}(\mathbb{F})$ and $SL_{u_2}(\mathbb{F})$ are isomorphic if and only if their Steinitz numbers u_1 and u_2 are equal.

In the last Chapter 8, we study derivations of associative and Lie algebras of infinite matrices. The key instrument here is density of inner derivations in locally matrix algebras in Tykhonoff topology proved in Chapter 6.

Let I be an infinite set. Let $M_I(\mathbb{F})$ be the algebra of $I\times I$ matrices over a field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero entries in each column. If V is an $|I|$–dimensional vector space over $\mathbb{F}$ then the algebra $M_I(\mathbb{F})$ is isomorphic to the algebra $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ of all linear transformations of the vector space V.

We consider also the algebra $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$ of $I\times I$ matrices having finitely many nonzero entries in each row and in each column and the algebra $M_\infty(I,\mathbb{F})$ of $I\times I$ matrices having finitely many nonzero entries.

A Jacobi matrix is a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ matrix having finitely many nonzero diagonals. Let $MJ(\mathbb{F})$ denote the algebra of all Jacobi matrices.

Using Tykhonoff density of inner derivations in a locally matrix algebra, we proved that an arbitrary derivation of the algebra $M_\infty(I,\mathbb{F})$ is of the type $\mathrm{ad}(a)$, where $a \in M_{rcf}(I,\mathbb{F})$. Based on their result we then showed that all derivations of the algebras $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$ and $MJ(\mathbb{F})$ are inner.

An arbitrary associative algebra A gives rise to the adjoint Lie algebra $A^{(-)} = (A, [a,b] = ab - ba)$. The algebras $\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F}) = M_\infty(I,\mathbb{F})^{(-)}$, $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F}) = [\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F}), \mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})]$ and the subalgebras $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$ of skew-symmetric matrices of $M_\infty(I,\mathbb{F})$ with respect to transposition involution and symplectic involution, respectively, found applications in mathematical physics. The adjoint Lie algebra $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) = MJ(\mathbb{F})^{(-)}$ has applications in the theory of solutions.

K.-H. Neeb proved that for a field $\mathbb{F}$ of zero characteristic all derivations of special linear Lie algebras $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$ are of the type $\mathrm{ad}(a)$ for a from the adjoint Lie algebra $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}) = M_{rcf}(I,\mathbb{F})^{(-)}$. We proved it for an arbitrary field of characteristic $\neq 2$. We also proved that all derivations of the algebras $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ and $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ are inner.

Keywords: locally matrix algebras, Steinitz number, derivation, infinite tensor product, measure ring, Hamming space, infinite matrices, periodic matrices.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Безущак О.О., Розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій простору узагальненого берівського типу, *Мат. студ.*, **17** (2002), №1, С.29–40.
2. Bezushchak O., The lattice of closed normal subgroups of the isometry group of generalized Baire's metric space, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **8** (2002), P.33–36.
3. Bezushchak O.E., Zaitsev M.V., Exponents of Identities of Group Rings, *Матем. заметки*, **89** (2011), no.5, P.643–651.
4. Bezushchak O., Zaicev M., Special Lie superalgebras with maximality condition for subalgebras, *Rend. Circ. Matem. di Palermo*, **60** (2011), no.3, P.395–401.
5. Безущак О.О., Беляев А.А., Зайцев М.В., Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **3** (2012), С.7–9.
6. Безущак О.О., Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **2** (2014), С.9–13.
7. Bezushchak O.O., Sushchans'kyi V.I., Groups of periodically defined linear transformations of an infinite-dimensional vector space, *Укр. мат. журн.*, **67** (2016), Issue 10, P.1457–1468.
8. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures, *Algebra Discrete Math.*, **21** (2016), no.2, P.184—201.
9. Bezushchak O., On diagonal locally SL–groups, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2019), P.8–11.

10. Bezushchak O., Oliynyk B., Unital locally matrix algebras and Steinitz numbers, *J. Algebra Appl.*, **19** (2020), no.9. Doi:10.1142/SO219498820501807.
11. Bezushchak O., Oliynyk B., Primary decompositions of unital locally matrix algebras, *Bull. Math. Sci.*, **10** (2020), no.1. Doi:10.1142/S166436072050006X.
12. Bezushchak O., Oliynyk B., Morita equivalent unital locally matrix algebras, *Algebra Discrete Math.*, **29** (2020), no.2, P.173–179.
13. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras and groups, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **9** (2020), P.19–23.
14. Bezushchak O., On the Lie structure of locally matrix algebras, *Carpathian Math. Publ.*, **12** (2020), no.2, P.311–316. Doi: 10.15330/cmp.12.2.311-316
15. Bezushchak Oksana, Oliynyk Bogdana, Ordinality of isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Математика. Механіка*, **1** (2020), P.18–20.
16. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *J. Algebra Appl.*, доступна онлайн з 3 серпня 2020, www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0219498821501474(2020).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Безущак О.О., Про функцію довжини та порядок Брюа для груп ізометрій скінченних берівських метрик, *Тези II Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні, присвяченій пам'яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990)* (1999, 9–16 травня, Київ–Вінниця, Україна), С.54–55.
2. Безущак О.О., Про стабілізатор шляху в однорідному дереві валентності *n*, *Тези III Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні* (2001, 2–8 липня, Суми, Україна), С.125–126.
3. Безущак О.О., Спряженість в групі автоморфізмів некореневого дерева, *Тези Міжнародної алгебраїчної конференції присв'яченій 100–річчю роботи Граве в Київському університеті* (2002, 17–22 червня, Київ, Україна), С.69–70.
4. Bezushchak O., Parabolic subgroups of homogenous trees automorphism groups, *Abstracts of the 4th International Algebraic Conference in Ukraine* (2003, August 4–9, Lviv, Ukraine), P.42–44.

5. Bezushchak O., On some inverse semigroup of partially defined transformations of integers, *Abstracts of the 5th International Algebraic Conference in Ukraine* (2005, July 20–27, Odessa, Ukraine), P.35.
6. Bezushchak O., On Green's relations of inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers, *Abstracts of the International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006* (2006, July 30 – August 5, Kyiv, Ukraine), P.16–17.
7. Безущак О.О., Про ідеали інверсного моноїда частково визначених ко-скінченних автоморфізмів лінійки, *Тези Дванадцятої Міжнародної наукової конференції імені Академіка М.Кравчука* (2008, 15–17 травня, Київ, Україна), С.497.
8. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchanskyy V., Relational structures and Steinitz's lattice, *Abstracts of the International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy"* (2016, December 19–22, Kyiv, Ukraine), P.12.
9. Bezushchak O.O., Oliynyk B.V., Diagonal limits of linear groups, *Abstracts of the 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko*, (2017, Juiy 3–7, Kyiv, Ukraine), P.21.
10. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.90.
11. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.19.

Зміст

Зміст **14**

Вступ **16**

1 Огляд літератури за темою дисертації **54**

2 Попередні відомості. Асимптотичні конструкції **61**

2.1 Пряма границя алгебричних систем 62

2.2 Тензорний добуток 64

2.3 Ультрадобуток 67

3 Числа Стейніца і розклади в тензорний добуток локально матричних алгебр **72**

3.1 Приклади локально матричних алгебр 72

3.1.1 Прямі границі матричних алгебр 72

3.1.2 Тензорні добутки матричних алгебр 75

3.1.3 Алгебри Кліфорда 76

3.1.4 Узагальнені алгебри Кліфорда 84

3.2 Числа Стейніца локально матричних алгебр 90

3.3 Тензорний і примарний розклад 94

3.4 Числа Стейніца і універсальна еквівалентність 111

3.5 Моріта еквівалентність локально матричних алгебр 113

4 Спектри локально матричних алгебр **121**

4.1 Спектри і повні підмножини множини чисел Стейніца 121

4.2 Зліченно–вимірні неунітальні локально матричні алгебри 137

4.3 Занурення локально матричних алгебр 151

5 Простори Хемінга **155**

5.1 Абстрактне визначення і приклади просторів Хемінга 155

5.2 Тензорний добуток просторів Хемінга 159

5.3 Підалгебри Картана локально матричних алгебр 169

5.4 Неунітальні простори Хемінга 177

6 Автоморфізми і диференціювання локально матричних алгебр **191**

6.1 Топологія Тихонова 192

6.2 Диференціювання тензорних добутків матричних алгебр 203

6.3 Алгебри зовнішніх диференціювань Outder(**A**) не локально скінченно–вимірні 211

6.4 Автоморфізми і занурення 217

6.5 Автоморфізми локально матричних алгебр як узагальнені простори Бера 225

6.6 Розмірності алгебр Лі диференціювань і порядки груп автоморфізмів 228

6.7 Автоморфізми і ізометрії просторів Хемінга 236

7 Нескінченні періодичні матриці **241**

8 Диференціювання алгебр нескінченних матриць **264**

8.1 Асоціативні алгебри нескінченних матриць 264

8.2 Алгебри Лі нескінченних матриць 278

Висновки **290**

Список використаних джерел **298**

Додаток **308**

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено структурній теорії класу локально матричних алгебр. Інтерес до локально матричних алгебр і локально напівпростих алгебр виник у зв'язку з тим, що ці нескінченно–вимірні алгебри найбільш близькі до скінченно–вимірних матричних алгебр [107].

У 1931 році Г. Кьоте [81] довів, що будь–яка унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра єдиним чином розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр над полем. Більш того, Г. Кьоте розповсюдив цей результат на більш широкий клас локально нормальних (тобто локально простих скінченно–вимірних центральних) алгебр.

О.Г. Курош [84] у 1942 році побудував приклад, який показав, що теорема Кьоте не узагальнюється на випадок незліченно–вимірних локально матричних алгебр. Робота О.Г. Куроша була продовжена його учнем В.М. Курочкіним [83], який вивчав єдиність розкладів локально матричних алгебр у тензорний добуток скінченно–вимірних і примарних компонент. Основним питанням, яке залишалося відкритим, було: *чи розкладається довільна локально матрична алгебра в тензорний добуток примарних алгебр*?

У дисертаційній роботі побудовано приклад незліченно–вимірної локально матричної алгебри, яка не розкладається в тензорний добуток примарних алгебр. Таким чином, отримано негативну відповідь на сформульоване В.М. Курочкіним питання.

Наступний сплеск інтересу до локально матричних алгебр виник у зв'язку з їх застосуваннями в теорії C^*–алгебр. Дж. Глімм [59] показав, що будь–яка апроксимативно скінченно–вимірна C^*–алгебра містить щільну унітальну зліченно–вимірну локально матричну алгебру. Для довільної унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри Дж. Глімм визначив інваріант — число Стейніца, і показав, що цей інваріант визначає алгебру з точністю до ізоморфізму.

Продовжуючи роботу Дж. Глімма, Ж. Діксм'є [53] класифікував неунітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри над полем нульової характеристики. Ж. Діксм'є показав, що кожній такій алгебрі можна поставити у відповідність пару (s, α), де s — число Стейніца, а α — невід'ємне дійсне число, і що така пара визначає алгебру з точністю до ізоморфізму.

О.О. Баранов [6] поширив теорему Ж. Діксм'є на випадок довільного поля. Більш того, він описав зліченно–вимірні локально інволютивно прості алгебри, тобто алгебри з інволюцією, які мають локальну систему скінченно–вимірних інволютивно простих підалгебр.

Конструкції Дж. Глімма, Ж. Діксм'є, О.О. Баранова суттєво використовують зліченно–вимірність алгебри. У дисертаційній роботі ми визначаємо число Стейніца унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності. Цей інваріант у незліченно–вимірному випадку не визначає алгебру з точністю до ізоморфізму, але (як доведено в роботі) визначає її універсальну елементарну теорію. Крім цього, ми також визначили інваріант не обов'язково унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності — множину чисел Стейніца, яку ми називаємо спектром алгебри, описали усі можливі спектри і показали, як теорема Діксм'є–Баранова випливає з цього опису.

Диференціювання зліченно–вимірних локально простих (тобто таких, для яких існує локальна система простих скінченно–вимірних підалгебр) алгебр Лі над полем нульової характеристики вивчалися в роботі [104] Х. Штраде. Ш.А. Аюпов і К.К. Кудайбергенов [2] побудували ненульове зовнішнє диференціювання унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри з числом Стейніца 2^{∞}. У дисертаційній роботі описуються диференціювання і автоморфізми унітальних локально матричних алгебр, доведено, що для локально матричної алгебри A ідеал внутрішніх диференціювань і нормальна підгрупа внутрішніх автоморфізмів щільні в топології Тихонова в алгебрі Лі усіх диференціювань та групі всіх автоморфізмів алгебри A відповідно. Крім цього, описані диференціювання і автоморфізми унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри. Зокрема, знайдена розмірність алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядок групи зовнішніх автоморфізмів.

З локально матричними алгебрами пов'язані два важливі класи простих нескінченно–вимірних локально скінченно–вимірних алгебр. Перший клас — фінітарні алгебри, тобто алгебри Лі, які складаються з перетворень скінченного рангу деякого векторного простору. О.О. Баранов [4] і О.О. Баранов та Х. Штраде [7] довели, що будь–яка проста зліченно–вимірна фінітарна алгебра Лі ізоморфна одній з алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$, тобто мають вигляд $[A, A]$ або $[K(A, *), K(A, *)]$, де $A = M_\infty(\mathbb{F})$ — алгебра фінітарних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, $*$ або інволюція транспонування, або симплектична інволюція, а $K(A, *)$ — алгебра Лі усіх кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів.

Інший клас — діагонально локально прості алгебри Лі, тобто алгебри, які мають локальну систему простих скінченно–вимірних підалгебр, що вкладаються одна в одну діагонально. Ю.О. Бахтурін, О.О. Баранов, О.Ю. Залеський [3] довели, що над алгебрично замкненим полем характеристики нуль такі алгебри вичерпуються алгебрами $[A, A]$, де A — локально матрична алгебра, і алгебрами $[K(A, *), K(A, *)]$, де $(A, *)$ — локально інволютивно проста алгебра. Дж. Хеннінг [68] розповсюдила цей результат на алгебри над полем характеристики більшої за 5. У дисертаційній роботі ми вивчаємо алгебри Лі нескінченних матриць $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$, а також алгебру $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є приєднаною до алгебри $(I \times I)$–матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпчику і кожному рядку, та алгебру Лі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ матриць Якобі.

Зображенням таких алгебр присвячена велика кількість робіт (наприклад, [52, 95]). У роботах [51, 58, 137] розглядалися застосування теорії зображень алгебр нескінченних матриць у математичній фізиці і в теорії солітонов. К.–Х. Нееб [90] описав диференціювання алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$ над полем нульової характеристики. Використовуючи доведену у дисертаційній роботі щільність ідеала внутрішніх диференціювань у топології Тихонова, ми узагальнили теорему Нееба на випадок поля довільної характеристики відмінної від 2, а також показали, що всі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та алгебри матриць Якобі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

У дисертаційній роботі вивчаються також введені В.І. Сущанським (див. [37, 38]) групи нескінченних матриць, які відповідають числам Стейніца, обговорюються їх центри та простота. Описуються ізоморфізми і автомрфізми груп періодичних нескінченних матриць.

Класом алгебричних структур, які тісно повязані з локально матричними алгебрами і вивчаються в дисертаційній роботі, є локально стандартні простори Хемінга (булеві кільця з мірою). Стандартним способом обчислення відстані між двома двійковими векторами однакової довжини є метрика Хемінга на просторі $\mathbb{Z}_2^n$. Ми називаємо цей простір стандартним простором Хемінга.

У роботах Н.В. Крошко і В.І. Сущанського [82], П. Камерона і С. Тарзі [46], Б.В. Олійник [91], Б.В. Олійник і В.І. Сущанського [93] розглянуті приклади прямих границь стандартних просторів Хемінга. Природним аксіоматичним контекстом для вивчення цих прикладів є теорія булевих алгебр з мірою (див. роботу А. Хорна і А. Тарського [73], у роботі [93] вони названі просторами Хемінга).

Для локально стандартних просторів Хемінга у дисертаційній роботі визначаються числа Стейніца і побудована теорія, паралельна теорії локально матричних алгебр. Крім цього, доведено аналог теореми Діксм'є для неунітальних просторів Хемінга.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних науково–дослідницьких тем № 16БФ038-01 «Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури» (номер державної реєстрації 0116U004752) та № 19БФ038-02 «Розробка нових аналітико-геометричних, асимптотичних та якісних методів дослідження інваріантних множин диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0119U100334) кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета та задачі дослідження. Основною тематикою роботи є дослідження класу локально матричних алгебр та їх асимптотичних конструкцій. Такі алгебри є найбільш близькими до класу скінеченно–вимірних матричних алгебр. Вони знайшли своє широке застосування в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, математичній фізиці, лінійній алгебрі, теорії алгебр з мірою.

Метою дисертаційної роботи є побудова структурної теорії локально матричних алгебр, опис їх автоморфізмів і диференціювань, а також пов'язаних з ними груп і алгебр Лі нескінченних матриць та булевих кілець з мірою (просторів Хемінга).

Об'єктом дослідження є локально матричні алгебри довільної розмірності та їх асимптотичні конструкції, нескінченні тензорні добутки матричних алгебр, простори Хемінга, групи і алгебри Лі нескінченних матриць.

Предметом дослідження є стейніцові і спектральні інваріанти локально матричних алгебр та локально стандартних просторів Хемінга, універсальна еквівалентність та Моріта еквівалентність унітальних незліченно–вимірних локально матричних алгебр, диференціювання та автоморфізми локально матричних алгебр, розмірності їх алгебр диференціювань і порядки груп автоморфізмів, а також диференціювання алгебр нескінченних матриць.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються асимптотичні конструкції абстрактної алгебри і теорії моделей, а також структурна теорія скінченно–вимірних та нескінченно–вимірних асоціативних алгебр, лінійна алгебра, теорія алгебр з мірою, теорія груп і алгебр Лі.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна результатів полягає у вивченні структурної теорії локально матричних алгебр, їх автоморфізмів і диференціювань, а також зв'язків з групами і алгебрами Лі нескінченних матриць та булевими кільцями з мірою (просторами Хемінга). У дисертаційній роботі автором отримано такі нові результати.

1. Розв'язана проблема Курочкіна про примарну розкладність локально матричних алгебр.
2. Побудовані нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр.
3. Знайдені необхідні і достатні умови Моріта еквівалентності зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр у термінах їх чисел Стейніца.
4. Побудовані спектральні Стейніцові інваріанти неунітальних локально матричних алгебр.
5. Показано, що зліченний локально стандартний простір Хемінга визначається інваріантом Стейніца і розкладається в нескінченний тензорний добуток стандартних просторів Хемінга (аналог теорем Глімма і Кьоте).
6. Знайдена параметризація неунітальних локально стандартних просторів Хемінга числами Стейніца і дійсними числами (аналог теореми Діксм'є).
7. Описані диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр.

8. Знайдені розмірності алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядки груп зовнішніх автоморфізмів довільної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.
9. Описані ізоморфізми груп нескінченних періодичних матриць.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у абстрактну алгебру і теорію моделей, а також структурну теорію скінченно–вимірних та нескінченно–вимірних асоціативних алгебр, лінійну алгебру і теорію алгебр з мірою. Результати роботи можуть бути використані в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, теорії зображень, теорії булевих кілець, а також при підготовці спеціалізованих курсів і монографій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення напрямку досліджень належало професору В.І. Сущанському. У спільних статтях з професором В.І. Сущанським співавтору належить постановка задачі та загальне керівництво роботою, основні результати отримані дисертантом особисто.

У наукових статтях у співавторстві з професором В.І. Сущанським [38] та професорами Б.В. Олійник та В.І. Сущанським [37] постановка задач належить В.І. Сущанському, в основну частину дисертації включені результати, що отримані здобувачем особисто.

У спільних роботах з професором Б.В. Олійник [30, 32, 33, 34, 35] вклад обох авторів у наукові дослідження і підготовку статтей до друку рівноцінний.

У наукових статтях у співавторстві з професором М.В. Зайцевим [39, 40] та професором М.В. Зайцевим і доцентом О.О. Беляєвим [120] постановка задачі належить професору М.В. Зайцеву, вклад усіх авторів у наукові дослідження і підготовку цих статтей до друку рівноцінний.

Апробація результатів. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінарів провідних українських та міжнародних наукових установ, а саме:

Конференції:

- II Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена пам’яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990), м.Київ – м.Вінниця, Україна, 9–16 травня 1999р.

- III Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м.Суми, Україна, 2–8 липня 2001р.
- Міжнародна алгебраїчна конференція присв'ячена 100–річчю роботи Граве в Київському університеті, м.Київ, Україна, 17–22 червня 2002р.
- 4th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Львів, Україна, 4–9 серпня 2003р.
- 5th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Одеса, Україна, 20–27 липня 2005р.
- International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006, м.Київ, Україна, 30 липня – 5 серпня 2006р.
- Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені Академіка М.Кравчука, м.Київ, Україна, 15–17 травня 2008р.
- International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy", м.Київ, Україна, 19–22 грудня 2016р.
- 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko, м.Київ, Україна, 3–7 липня 2017р.
- International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Book of Abstracts, м.Київ, Україна, 14–17 липня 2020р.

Наукові семінари:

- Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2009–2010, м.Київ, Україна, 2010р.
- Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2013–2014, м.Москва, Росія, 2014р.
- Семінар з алгебри Університету Каліфорнії, м.Сан-Дієго, США, 2019р.
- Алгебраїчний семінар Інституту математики Національної Академії Наук України, м.Київ, Україна, 2020р.
- Алгебраїчний семінар Київського університету, м.Київ, Україна, 2020 р.
- Алгебраїчний семінар кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м.Київ, Україна, 2020 р.

Публікації. Основні результати роботи викладено в 16 наукових статтях [20, 22, 24, 32, 28, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 114, 118, 120], які опубліковано у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України та іноземних періодичних фахових виданнях, причому одна з цих статтей [34] є науковою публікацією у виданні, віднесеному до першого квартиля (Q1) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, ще дві статті [30, 33] є науковими публікаціями у виданнях, віднесених до другого квартиля (Q2), і ще дві статті [35, 39] є науковими публікаціями у виданнях, віднесених до третього квартиля (Q3). Згідно з наказом Міністерства освіти і науки України №1220 від 23 вересня 2019 року "Про опублікування результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук" наукова публікація у виданні, віднесеному до першого та другого квартилів (Q1, Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, прирівнюється до трьох публікацій, наукова публікація у виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, прирівнюється до двох публікацій.

Матеріали дисертації також додатково відображено у 11 матеріалах конференцій [21, 23, 25, 26, 29, 31, 36, 115, 116, 117, 119].

9 публікацій [24, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40] надруковано у наукових періодичних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та/або Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, анотації, восьми розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел із 137 найменувань та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 312 сторінок, основний текст займає 274 сторінки.

Автор вдячна своєму Вчителю професору Сущанському Віталію Івановичу за введення у тематику дисертаційного дослідження та нескінченну віру в результат.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту професору Петравчуку Анатолію Петровичу за увагу до роботи та підтримку, професору Зельманову Юхиму Ісааковичу, професору Олександру С. Кекрису, професору Олійник Богдані Віталіївні, професору Сергейчуку

Володимиру Васильовичу, доценту Ганюшкіну Олександру Григоровичу за корисні поради та роз'яснення окремих питань.

Основний зміст роботи

Локально матричні алгебри природно виникають в алгебрі як нескінченно–вимірні об'єкти, які найбільш близькі до скінченно–вимірних матричних алгебр; у функціональному аналізі в теорії апроксимативно скінченно–вимірних C^*–алгебр; у теорії зображень локально скінченно–вимірних алгебр Лі; математичній фізиці. Теорія локально матричних алгебр ідейно близька до теорії локально скінченних груп і теорії моделей. Про більш широкий клас — так званих локально напівпростих алгебр та їх взаємозв'язків мова йде, наприклад, в огляді А.М. Вершика і С.В. Керова 1987 р.

У вступі дисертації обгрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів. Наведено також список семінарів та конференцій, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію.

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дослідження.

У другому розділі вводяться необхідні поняття, конструкції прямої границі алгебричних систем, тензорного добутку, ультрадобутку та наводяться відомі результати, які використовуються в дисертації.

Третій розділ присвячений числам Стейніца і розкладам у тензорний добуток локально матричних алгебр.

Нехай $\mathbb{F}$ — поле. Наслідуючи А.Г. Куроша, будемо називати $\mathbb{F}$–алгебру A *локально матричною*, якщо довільна скінченна множина елементів алгебри A міститься в підалгебрі, яка ізоморфна алгебрі $M_n(\mathbb{F})$ $(n \times n)$–матриць над полем $\mathbb{F}$ для деякого натурального n.

Алгебра A називається *унітальною*, якщо вона містить одиницю 1_A.

У 1931 році Г. Кьоте довів, що довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A ізоморфна зліченному тензорному добутку матричних алгебр

$$A \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 2.$$

А.Г. Курош у 1942 р. побудував приклад незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Унітальна локально матрична алгебра A називається *примарною*, якщо існує просте число p таке, що довільна матрична підалгебра

$$1_A \in B \subset A, \quad \text{де} \quad B \cong M_n(\mathbb{F}), \quad \text{має степінь} \quad n = p^k \quad \text{для деякого} \quad k \geq 1.$$

Із результатів Г. Кьоте випливає, що довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток примарних алгебр. Існування та єдиність примарних розкладів вивчалися В.М. Курочкіним у 1948 р. Зокрема, В.М. Курочкін сформулював запитання:

чи правильно, що довільна унітальна локально матрична алгебра має примарний розклад?

Варто зазначити, що приклад Куроша незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри є примарною алгеброю, тому контрприкладом бути не може.

Дж. Глімм (1960 р.) вивчав локально матричні алгебри у зв'язку з їх C^*–оболонками — апроксимативно скінченно–вимірними C^*–алгебрами, і вперше зв'язав їх з числами Стейніца.

Будемо позначати символом $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел, символом P — множину всіх простих чисел. *Числом Стейніца* називається формальний добуток

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p},$$

де $r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ для всіх $p \in \mathbb{P}$.

Числа Стейніца

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p} \quad \text{і} \quad \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$$

перемножаються за правилом

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p+k_p},$$

де передбачається, що $t + \infty = \infty + t = \infty + \infty = \infty$ для всіх невід'ємних чисел t.

Позначимо символом $\mathbb{SN}$ множину всіх чисел Стейніца. Зауважимо, що множина усіх натуральних чисел $\mathbb{N}$ природно ототожнюється з підмножиною $\mathbb{SN}$. Числа з множини $\mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$ будемо називати *нескінченними числами Стейніца*.

Число Стейніца називається *локально скінченним*, якщо $r_p \neq \infty$ для всіх $p \in \mathbb{P}$.

Нехай A — локально матрична $\mathbb{F}$–алгебра з одиницею 1_A. Розглянемо множину $D(A)$ усіх натуральних чисел n, для кожного з яких існує підалгебра A' алгебри A така, що $1_A \in A'$ і A' ізоморфна матричній алгебрі $M_n(\mathbb{F})$.

Означення 3.5. Числом Стейніца алгебри A називається найменше спільне кратне $\mathbf{st}\,(A)$ чисел із множини $D(A)$.

Зауважимо, що Дж. Глімм число Стейніца $\mathbf{st}\,(A)$ визначав за зростаючими ланцюгами матричних підалгебр, тобто наперед передбачалося, що алгебра A зліченно–вимірна. А також ним було доведено, що зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца однакові.

О.О. Баранов і А.Г. Жилінський класифікацію Глімма за числами Стейніца розповсюдили на локально інволютивно прості алгебри і на діагональні прямі границі простих скінченно–вимірних алгебр Лі.

Таким чином, першочергово виникає питання розгляду нових прикладів локально матричних алгебр. Цьому присвячений **підрозділ 3.1**, у якому вивчаються нові класи локально матричних алгебр, а саме, алгебри Кліфорда і узагальнені алгебри Кліфорда.

Нехай V векторний простір над полем $\mathbb{F}$, характеристика якого відмінна від 2. Відображення $f : V \to \mathbb{F}$ називається *квадратичною формою*, якщо виконані такі умови:

1. $f(\alpha v) = \alpha^2 f(v)$ для довільних скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ та вектора $v \in V$;
2. відображення $f(u, v) = f(u + v) - f(u) - f(v)$ є білінійною формою.

Квадратична форма $f : V \to \mathbb{F}$ називається *невиродженою*, якщо відповідна білінійна форма $f(u, v)$ є невиродженою.

Розглянемо асоціативну $\mathbb{F}$–алгебру, яка породжена векторним простором V та одиницею 1 і яка задана такими визначальними співвідношеннями: $v^2 = f(v) \cdot 1$, де вектор v пробігає усі елементи векторного простору V. Така алгебра називається *алгеброю Кліфорда*; позначатимемо її символом $Cl(V, f)$.

Теорема 3.4. Нехай V — нескінченно–вимірний векторний простір над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$, характеристика $\operatorname{char}\mathbb{F}$ якого не дорівнює 2, з невиродженою квадратичною формою $f : V \to \mathbb{F}$. Тоді алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ є локально матричною алгеброю.

Виберемо натуральне число $l > 1$, яке взаємно просте з характеристикою поля $\mathbb{F}$, якщо ця характеристика є додатним числом. Якщо характеристика поля дорівнює 0, то в ролі l вибираємо довільне натуральне число, яке більше за 1. Зафіксуємо ξ — первісний корінь степеня l з 1 у полі $\mathbb{F}$.

Для довільної впорядкованої множини індексів I розглянемо алгебру, яка задана такими твірними елементами і визначальними співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
Clg(l, I) \;=\; \Big\langle x_i,\ i \in I \mid x_i^l \;=\; 1; \\
x_i^{-1} x_j x_i \;&=\; \xi x_j \quad \text{при} \quad i < j; \\
x_i^{-1} x_j x_i \;&=\; \xi^{-1} x_j \quad \text{при} \quad i > j; \\
& \qquad\qquad\qquad i, j \in I \Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Алгебра $Clg(l, I)$ називається *узагальненою алгеброю Кліфорда.*

Узагальнені алгебри Кліфорда в більш загальному вигляді та в іншому контексті розглядалися фізиками.

Теорема 3.6. Для довільної впорядкованої нескінченної множини I узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, I)$ є локально матричною алгеброю.

У підрозділі 3.2 показано, що

$$\mathbf{st}\,(Cl(V, f)) \;=\; 2^{\infty}, \quad \mathbf{st}\,(Clg(l, I)) \;=\; l^{\infty}.$$

Алгебри Кліфорда і узагальнені алгебри Кліфорда дозволяють побудувати нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр. Цьому присвячується **підрозділ 3.3**.

Розглянемо векторний простір

$$\mathbf{V} \; = \; \Big\{ \; (a_1, \; a_2, \; \ldots \;) \mid a_i \in \mathbb{C}, \;\; \sum_{i=1}^{\infty} \; |a_i|^2 \; < \; \infty \, \Big\}$$

над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Також розглянемо невироджену квадратичну форму

$$\mathbf{f}\; \big(\; (a_1, \; a_2, \; \ldots \;) \; \big) \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} \; a_i^2 \; \in \; \mathbb{C}.$$

Теорема 3.10. Алгебра Кліфорда $Cl(\mathbf{V}, \mathbf{f})$ розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Очевидно, що

$$\dim_{\mathbb{C}} Cl(\mathbf{V}, \mathbf{f}) \; = \; 2^{\aleph_0}.$$

Приклад Куроша і приклад теореми 3.10 локально матричних алгебр, нерозкладних у тензорний добуток матричних алгебр, мають число Стейніца 2^{∞}. Наступна теорема дає серію прикладів з іншими числами Стейніца.

Теорема 3.11. Нехай l — непарне натуральне число, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел зі стандартним порядком. Тоді узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, \mathbb{R})$ не ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр.

Очевидно, що розмірність алгебри $Clg(l, \mathbb{R})$ дорівнює

$$\dim_{\mathbb{F}} Clg(l, \mathbb{R}) \; = \; 2^{\aleph_0},$$

і, як ми вже відмічали раніше, $\mathbf{st}\,\big(Clg(l, \mathbb{R})\big) \; = \; l^{\infty}$.

Теореми 3.10 і 3.11 дають приклади нерозкладних унітальних локально матричних алгебр з числом Стейніца p^{∞} для довільного простого числа $p \neq \operatorname{char} \mathbb{F}$.

Особливий інтерес викликає випадок нескінченного локально скінченного числа Стейніца.

Теорема 3.12. Для довільного нескінченного локально скінченного числа Стейніца s знайдеться незліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра з числом Стейніца s. Ця алгебра не має примарного розкладу, тобто не ізоморфна тензорному добутку примарних локально матричних алгебр.

Теорема 3.12 дає негативну відповідь на питання Курочкіна.

Теорема 3.14. Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не можна зобразити у вигляді

$$\left(\operatorname{char} \mathbb{F}\right)^{\infty} \cdot n,$$

де $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує унітальна локально матрична алгебра A з числом Стейніца $\mathbf{st}\,(A) = s$, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Іншими словами, наслідком з теорем 3.10, 3.11, 3.12 є те, що теорема Глімма не переноситься на незліченно–вимірні локально матричні алгебри.

Теорема 3.15. Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не зображується у вигляді $(\operatorname{char} \mathbb{F})^{\infty} \cdot n$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді існують неізоморфні унітальні локально матричні алгебри A та B такі, що

$$\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B > \aleph_0 \quad \text{і} \quad \mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B) = s.$$

Таким чином, число Стейніца не визначає незліченно–вимірну унітальну локально матричну алгебру A з точністю до ізоморфізму. *Яку ж тоді інформацію про алгебру несе інваріант* $\mathbf{st}\,(A)$? Про це мова йде у **підрозділі 3.4**.

Нагадаємо, що замкнута формула $\Phi\,(x_1, \ldots, x_n)$ мови 1-го порядку називається *універсальною*, якщо вона має вигляд

$$\Phi\,(x_1, \ldots, x_n) = \forall x_1, \ \ldots, \ \forall x_n \ \psi\,(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

де $\psi\,(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, яка не містить кванторів. Очевидно, що з виконуваності універсальної формули на алгебричній системі випливає її виконуваність на довільній її підсистемі.

Позначимо через $UTh(A)$ множину всіх універсальних формул, які виконуються на системі A. Алгебричні системи тієї самої сигнатури A та B називаються *універсально еквівалентними*, якщо

$$UTh\,(A) = UTh\,(B).$$

Теорема 3.16. Унітальні локально матричні алгебри A та B універсально еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$\mathbf{st}\left(A\right) = \mathbf{st}\left(B\right).$$

Зауважимо, що теорема 3.16 справджується лише за умови, що сигнатура містить одиницю 1. Без цієї умови і вимоги унітальності довільні нескінченно–вимірні локально матричні алгебри будуть універсально еквівалентними.

У заключному **підрозділі 3.5** розділу 3 ми вивчаємо Моріта еквівалентність унітальних локально матричних алгебр та її зв'язок з числами Стейніца.

Нагадаємо, що унітальні алгебри A та B — *Моріта еквівалентні*, якщо категорії їх лівих модулів еквівалентні.

Нехай $e \in A$ — ідемпотент. Ідемпотент e називається *повним*, якщо $AeA = A$.

К. Моріта довів, що алгебри A та B Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли знайдуться натуральне число $n \geq 1$ і повний ідемпотент e матричної алгебри $M_n(A)$ такі, що

$$B \ \cong \ e\, M_n(A)\, e.$$

Називатимемо властивість P *Моріта інваріантною*, якщо дві Моріта еквівалентні алгебри A і B мають або не мають властивість P одночасно.

Виявляється, що властивості, які нами вивчаються, є Моріта інваріантними.

Лема 3.13.

1) Локальна матричність є Моріта інваріантною властивістю.
2) Властивість унітальної алгебри A розкладатися в тензорний добуток матричних алгебр є Моріта інваріантною властивістю.

Означення 3.11. Будемо говорити, що числа Стейніца s_1 та s_2 є раціонально зв'язними, якщо знайдеться раціональне число $q \in \mathbb{Q}$, таке, що $s_2 = q \cdot s_1$.

Теорема 3.17.

1) Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B Моріта еквівалентні, то їх числа Стейніца раціонально зв'язні.
2) Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B зліченно–вимірні, то вони Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца раціонально зв'язні.
3) Для довільного нескінченного не локально скінченного числа Стейніца s, яке не зображується у вигляді $(\mathrm{char}\ \mathbb{F})^{\infty} \cdot s'$, де число Стейніца s' є локально скінченним, існують не Моріта еквівалентні локально матричні алгебри A

і B такі, що

$$\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B, \quad \mathbf{st}\,(A) = \mathbf{st}\,(B) = s.$$

4) Для зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до ізоморфізму. Для унітальних локально матричних алгебр довільної розмірності їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до універсальної еквівалентності.

Розділ 4 присвячений вивченню інваріантів Стеніца не обов'язково унітальних локально матричних алгебр.

Дж. Глімм співставив кожній зліченно–вимірній унітальній локально матричній алгебрі інваріант — число Стейніца. Ж. Діксм'є показав, що зліченно–вимірна неунітальна локально матрична алгебра над полем нульової характеристики параметризується парами (s, α), де s — число Стейніца, а α — дійсне число з відрізку $[0, 1]$. О.О. Баранов узагальнив цю теорему на випадок довільного поля.

У підрозділі 4.1 визначається інваріант Стейніца — спектр — не обов'язково унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності.

Припустимо, що A — не обов'язково унітальна локально матрична алгебра. Для довільного ідемпотента $0 \neq e \in A$ підалгебра eAe є унітальною локально матричною алгеброю. Отже, є сенс говорити про число Стейніца $\mathbf{st}\,(eAe)$.

Означення 4.1. Назвемо множину чисел Стейніца

$$\mathrm{Spec}\,(A) = \left\{ \mathbf{st}\,(eAe) \mid e \in A,\ e^2 = e \right\},$$

де e пробігає всі ідемпотенти алгебри A, спектром алгебри A.

Для числа Стейніца s позначимо через $\Omega\,(s)$ множину усіх натуральних чисел, які ділять s.

Нехай s_1, s_2 — числа Стейніца. Будемо говорити, що число Стейніца s_1 *скінченно ділить* число Стейніца s_2, якщо знайдеться натуральне число

$$b \in \Omega\,(s_2) \quad \text{таке, що} \quad s_1 = \frac{s_2}{b}$$

(позначатимемо: $s_1 \,\big|_{fin}\, s_2$). Зрозуміло, що в цьому випадку числа Стейніца s_1 і s_2 раціонально зв'язані.

Означення 4.3. Назвемо множину чисел Стейніца $S \subset \mathbb{SN}$ повною, якщо виконуються умови:

1) довільні два числа Стейніца із S раціонально зв'язні,
2) якщо $s_2 \in S$ і $s_1 \big|_{fin} s_2$, то $s_1 \in S$,
3) якщо s, $ns \in S$, де $s \in \mathbb{SN}$, $n \in \mathbb{N}$, то $is \in S$ для довільного i, $1 \le i \le n$.

Лема 4.1.

1) Нехай $s_1,\ s_2 \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Тоді знайдуться натуральні числа $a \in \mathbb{N}$, $b \in \Omega\,(s_1)$ такі, що
$$s_2 \ = \ \frac{a}{b}\, s_1.$$
2) Нехай число Стейніца s_1 скінченно ділить число Стейніца s_2 та $s_2 \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Тоді $s_1 \in \mathrm{Spec}\,(A)$.
3) Нехай числа Стейніца s, ns такі, що
$$s,\ ns \ \in \ \mathrm{Spec}\,(A), \quad \text{де} \quad s \ \in \ \mathbb{SN}, \quad n \ \in \ \mathbb{N}.$$
Тоді $is \in \mathrm{Spec}\,(A)$ для довільного i, $1 \le i \le n$.

Таким чином, для довільної локально матричної алгебри A її спектр $\mathrm{Spec}\,(A)$ є повною множиною чисел Стейніца.

Нашою задачею є класифікація всіх повних підмножин множини всіх чисел Стейніца $\mathbb{SN}$.

Нехай S — повна множина чисел Стейніца. Для числа Стейніца $s \in S$ і натурального числа $b \in \Omega\,(s)$ покладемо
$$r_s(b) \ = \ \max\ \left\{\, i \ \ge \ 1 \,\middle|\, i \ \cdot \ \frac{s}{b} \ \in \ S \,\right\}.$$

Приклад 1. Повними множинами натуральних чисел є або $\mathbb{N}$, або $\{1, 2, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 2. Нехай s — число Стейніца. Тоді множина
$$S\,(\infty, s) \ := \ \left\{\, \frac{a}{b} \ \cdot \ s \,\middle|\, a \ \in \ \mathbb{N},\ b \ \in \ \Omega\,(s) \,\right\}$$
є повною. Крім того, для довільного числа Стейніца $s' \in S\,(\infty, s)$ матимемо $S\,(\infty, s) = S\,(\infty, s')$.

Приклад 3. Нехай r — дійсне число, $1 \le r < \infty$, і нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді множина чисел Стейніца

$$S(r,s) = \left\{ \frac{a}{b} s \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{N},\ b \in \Omega(s),\ a \le rb \right\}$$

є повною.

Приклад 4. Нехай s — нескінченне число Стейніца і нехай $r = u/v$ — раціональне число, де $u, v \in \mathbb{N}$, причому $v \in \Omega(s)$. Тоді

$$S^{+}(r,s) = \left\{ \frac{a}{b} s \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{N},\ b \in \Omega(s),\ a < rb \right\}$$

— повна множина.

Теорема 4.1. Довільна повна множина чисел Стейніца належить до одного з таких чотирьох типів:

1) $S(r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r \in [1, \infty)$;
2) $S^{+}(r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r = u/v$, u, v — взаємно прості натуральні числа, $v \in \Omega(s)$;
3) $\mathbb{N}$ або $\{1, 2, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$;
4) $S(\infty, s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$.

Кожна з множини $S(r,s)$, $S^{+}(r,s)$, $\{1, 2, \ldots, n\}$, $S(\infty, s)$ є повною.

Зауважимо, що по суті число r є оберненим до значення інваріанта щільності Діксм'є–Баранова.

У підрозділі 4.2 показано, як із класифікації спектрів можна вивести теорему Діксм'є–Баранова.

Теорема 4.2.

1) Для довільної повної множини чисел Стейніца S знайдеться зліченно–вимірна локально матрична алгебра A така, що $\mathrm{Spec}(A) = S$.
2) Якщо A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри, то $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B)$, тоді й лише тоді, коли $A \cong B$.

Зауважимо, що частина 2) теореми 4.2 є іншим трактуванням теореми Діксм'є–Баранова.

Неважко показати, що локально матрична алгебра A унітальна тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Spec}(A)$ є або $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, або множиною $S(r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r = u/v$ для u, v — взаємно простих натуральних чисел, $v \in \Omega(s)$.

У підрозділі 4.3 обговорюємо занурення локально матричних алгебр.

Лема 4.18. Нехай S_1 і S_2 — повні множини чисел Стейніца. Тоді або $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$, або одна із множин S_1, S_2 містить іншу множину.

Нехай A — локально матрична алгебра. Підалгебра $B \subseteq A$ називається *апроксимативним кутом*, якщо алгебра B є об'єднанням зростаючого ланцюга пірсівських компонент, тобто існує послідовність ідемпотентів $e_1, e_2, \ldots$ така, що

$$e_1\, Ae_1 \ \subseteq\ e_2\, Ae_2\ \subseteq\ \cdots, \quad B\ =\ \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\, A\, e_i.$$

Якщо B — апроксимативний кут алгебри A, то алгебра B сама є локально матричною і тому $\mathrm{Spec}\,(B) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A)$.

Лема 4.19. Нехай A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри,

$$\mathrm{Spec}\,(B)\ \subseteq\ \mathrm{Spec}\,(A).$$

Тоді алгебра B занурюється в алгебру A як апроксимативний кут.

Коли повна множина S_1 міститься в повній множині S_2? Якщо $S_2 \subseteq \mathbb{N}$, то S_1 і S_2 є або сегментами множини натуральних чисел, або усією множиною $\mathbb{N}$, тому відповідь очевидна. У випадку, коли $S_2 \subseteq \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $s \in S_1 \subseteq S_2$, матимемо $S_1 = S\,(r_1, s)$ або $S_1 = S^+\,(r_1, s)$ і $S_2 = S\,(r_2, s)$ або $S_2 = S^+\,(r_2, s)$. Легко бачити, що $r_1 \le r_2$. Зокрема, якщо $r_1 < r_2$, то $S_1 \subset S_2$. Якщо $r_1 = r_2 = r$, то або $S_1 = S_2$, або $S_1 = S^+\,(r, s)$, $S_2 = S\,(r, s)$.

У розділі 5 ми вивчаємо порівняно маловивчений клас алгебричних систем — *простори Хемінга.*

Нагадаємо, що в теорії кодування метрики Хемінга — це стандартний інструмент обчислення відстані між двома двійковими векторами однакової довжини.

Нехай $n \ge 1$. *Стандартним простором Хемінга* H_n називається множина усіх векторів довжини n вигляду:

$$x^n\ =\ (x_1, \ldots, x_n), \quad \text{де} \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \le i \le n,$$

а відстань d_{H_n} між цими векторами є число позицій, на яких ці вектори мають різні координати.

У серії робіт Р. Камерона, С. Тарзі, В.І. Сущанського, Б.В. Олійник розглядалися нескінченні аналоги просторів Хемінга, які виникають як прямі границі скінченних просторів H_n. У розділі 5 ми вивчаємо такі нескінченно–вимірні простори з абстрактної точки зору у контексті кілець з мірою (у роботі Б.В. Олійник вони визначалися як простори Хемінга). Оскільки наші приклади близькі до стандартних просторів Хемінга, ми будемо в основному слідувати термінології робіт В.І. Сущанського та Б.В. Олійник.

Нагадаємо, що *булевим кільцем* називається комутативне кільце, усі елементи якого задовольняють тотожність $x^2 = x$.

Нехай H — булеве кільце з 1. Функція $r : H \to [\,0, 1\,]$ називається мірою (або *функцією рангу*), якщо

(1) $r(a) = 0$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 0$;
(2) $r(a) = 1$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 1$;
(3) якщо $a, b \in H$ і $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

У підрозділі 5.1 дається абстрактне означення простору Хемінга і наводяться приклади просторів Хемінга.

Означення 5.3. Унітальним простором Хемінга (H, r) будемо називати булеве кільце H з 1 і функцією рангу $r : H \to [0, 1]$.

Якщо (H, r) — простір Хемінга, то функція

$$d_H(a, b) = r(a - b), \qquad a, b \in H,$$

задає метрику на H.

Приклад 5.1. Булеве кільце $H_n = \{0\,,\ 1\}^n$ з покомпонентними додаванням (за модулем 2) і множенням, а також функцією рангу

$$r_{H_n}(x_1,\ \ldots,\ x_n) \;=\; \frac{1}{n}\,(x_1 \;+\; \ldots \;+\; x_n)$$

для довільних $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, задовольняє умовам (1), (2), (3) означення функції рангу. Називатимемо простір Хемінга (H_n, r_{H_n}) стандартним.

Позначимо через $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ множину усіх нескінченних $(0, 1)$–послідовностей

$$\mathbf{a} \;=\; (a_1,\ a_2,\ \ldots), \quad a_i \;=\; 0 \text{ або } 1.$$

Легко бачити, що $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — булеве кільце з операціями покомпонентного додавання (за модулем 2) та множення.

Послідовність $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ називається *періодичною*, якщо існує натуральне число k таке, що $a_{i+k} = a_i$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. У цьому випадку число k називається *періодом послідовності* $\mathbf{a}$.

Нехай s — число Стейніца. Періодична послідовність $\mathbf{a}$ називається $s-$періодичною, якщо у неї є період, який ділить s.

Приклад 5.2. Позначимо через $\mathcal{H}(s)$ множину усіх $s-$періодичних послідовностей. Очевидно, що $\mathcal{H}(s)$ — підкільце булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Функція рангу

$$r_{\mathcal{H}(s)}(a_1,\ a_2,\ \ldots) \ = \ \frac{1}{k}\,(a_1 \ + \ \ldots \ + \ a_k),$$

де k — період (насправді довільний з періодів) послідовності $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, перетворює $(\mathcal{H}(s), r_{\mathcal{H}(s)})$ у простір Хемінга.

Приклад 5.3. Для послідовності

$$\mathbf{a} \ = \ (a_1,\ a_2,\ \ldots) \ \in \ \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

визначимо функцію псевдорангу

$$\tilde{r}(\mathbf{a}) \ = \ \lim_{n\to\infty} \ \sup \ \frac{1}{n}\,(a_1 \ + \ \ldots \ + \ a_n).$$

Ця функція задовольняє умову (3) означення функції рангу, але не задовольняє умови (1) та (2). Підмножина

$$I \ = \ \left\{\mathbf{a} \ \in \ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ \middle| \ \tilde{r}(\mathbf{a}) \ = \ 0\right\}$$

є ідеалом булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. На довільному класі суміжності

$$\mathbf{a} \ + \ I, \quad \mathbf{a} \ \in \ \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

функція $\tilde{r}$ постійна.

Розглянемо булеве кільце

$$B \ = \ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ / \ I$$

і функцію рангу

$$r_B\,(\mathbf{a} + I) = \tilde{r}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Простір Хемінга (B, r_B) називається простором Безиковича або ще простором Безиковича–Хемінга.

У класі унітальних просторів Хемінга природним чином визначається тензорний добуток.

Твердження 5.1. Нехай (H_1, r_1), (H_2, r_2) — унітальні простори Хемінга. Тоді існує єдина функція рангу r на тензорному добутку булевих кілець

$$H = H_1 \bigotimes{}_{\mathbb{Z}} H_2$$

така, що $r(a \otimes b) = r_1(a)\, r_2(b)$ для довільних елементів $a \in H_1$, $b \in H_2$.

Легко бачити, що тоді $H_n \bigotimes H_m \cong H_{nm}$.

Означення 5.6. Назвемо унітальний простір Хемінга (H, r) локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина елементів $a_1, \ldots, a_n \in H$ міститься в підпросторі $H' \subset H$, такому що

$$H' \cong H_m \quad \text{для деякого} \quad m \geq 1.$$

Неважко помітити, що в локально стандартному просторі Хемінга функція рангу завжди набуває раціональних значень.

Приклад 5.5. Для довільного числа Стейніца s простір Хемінга s–періодичних послідовностей $\mathcal{H}(s)$ є локально стандартним.

Приклад 5.6. Простір Безиковича (B, r_B) не є локально стандартним простором, позаяк неважко знайти елемент $x \in B$ такий, що число $r_B(x)$ буде ірраціональним.

Позначимо через $\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}$ множину всіх періодичних послідовностей з $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Тоді для булевого ідеалу

$$I = \left\{ a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \tilde{r}(a) = 0 \right\}$$

булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ отримаємо

$$\{0,1\}_p^{\mathbb{N}} \cap I = \{0\}.$$

Тому $\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}$ можна розглядати як підпростір Хемінга простору Безиковича. Матимемо

$$\{0,1\}_p^{\mathbb{N}} = \bigcup_{s \in \mathbb{S}\mathbb{N}} \mathcal{H}(s).$$

Отже, простір Хемінга $\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}$ є локально стандартним.

Означення 5.7. Нехай H — локально стандартний унітальний простір Хемінга. Розглянемо множину натуральних чисел

$$D(H) = \left\{ n \geq 2 \,\middle|\, H' \subset H,\, H' \cong H_n \right\}.$$

Найменше спільне кратне чисел з $D(H)$ називається числом Стейніца простору Хемінга H і позначається $\mathbf{st}(H)$.

У підрозділі 5.2 мова йде про тензорні добутки просторів Хемінга.

Лема 5.3. Для локально стандартних унітальних просторів Хемінга H_1 та H_2 їх тензорний добуток $H_1 \bigotimes H_2$ також є локально стандартним простором Хемінга і

$$\mathbf{st}\,(H_1 \bigotimes H_2) = \mathbf{st}\,(H_1) \cdot \mathbf{st}\,(H_2).$$

Наступна теорема є аналогом теореми Кьоте.

Теорема 5.1. Нехай H — зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга. Тоді

$$H \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i},$$

де усі p_i — прості числа.

Неважко помітити, що в цьому випадку

$$\mathbf{st}\,(H) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{s_i},$$

де s_i — число копій простору H_{p_i} у розкладі простору H.

З теореми 5.1 зразу ж випливатиме аналог теореми Глімма:
Нехай H_1 та H_2 – зліченні локально стандартні унітальні простори Хемінга. Числа Стейніца $\mathbf{st}\,(H_1)$ *та* $\mathbf{st}\,(H_2)$ *збігаються тоді й лише тоді, коли простори H_1 і H_2 ізоморфні.*

Простори Хемінга і локально матричні алгебри тісно пов'язані. Як саме — про це мова йде в **підрозділі 5.3**.

Нехай A — унітальна локально матрична алгебра з одиницею 1, $a \in A$. Виберемо підалгебру $B \subset A$ таку, що $1, a \in B$, $B \cong M_n(\mathbb{F})$ для деякого $n \geq 1$. Нехай також $r_B(a)$ — ранг образу елемента a в алгебрі $M_n(\mathbb{F})$ при ізоморфізмі $B \cong M_n(\mathbb{F})$. В.М. Курочкін довів, що число

$$r(a) \;=\; \frac{1}{n}\, r_B(a)$$

не залежить від вибору підалгебри B. Називатимемо $r(a)$ *відносним рангом* (або рангом Курочкіна) елемента a.

Нехай C — комутативна підалгебра алгебри A, яка містить одиницю 1. Позначимо через $E(C)$ множину всіх ідемпотентів алгебри C, включаючи 0 та 1. Для ідемпотентів $e, f \in E(C)$ розглянемо операції ef та $e + f - 2ef$ як булеві множення і додавання відповідно. Булеве кільце $E(C)$ разом з функцією відносного рангу $r : \; E(C) \to [0, 1]$ є унітальним простором Хемінга.

Нагадаємо, що підалгебра H матричної алгебри $M_n(\mathbb{F})$ називається підалгеброю Картана, якщо

$$H \;\cong\; \underbrace{\mathbb{F} \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}}_{n}.$$

Довільна підалгебра Картана спряжена з діагональною підалгеброю алгебри $M_n(\mathbb{F})$.

Нехай A — зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра. І нехай

$$1 \;\in\; A_1 \;\subset\; A_2 \;\subset\; \ldots$$

— зростаючий ланцюжок матричних підалгебр (скінченно–вимірних) такий, що

$$A \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

У кожній підалгебрі A_i виберемо підалгебру Картана H_i таким чином, що

$$1 \in H_1 \subset H_2 \subset \ldots .$$

Називатимемо алгебру

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$$

узагальненою підалгеброю Картана алгебри A. Як і раніше, функція $r: A \longrightarrow [0,1]$ є функцією відносного рангу. Тоді $(E(H), r)$ є унітальним локально стандартним простором Хемінга.

Означення 5.8. Підалгебра H унітальної локально матричної алгебри A називається підалгеброю Картана, якщо існує розклад

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i$$

у тензорний добуток матричних алгебр і існує розклад

$$H = \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_i$$

у тензорний добуток підалгебр Картана $H_i \subset A_i$, $i \geq 1$.

Теорема 5.2. Довільні дві підалгебри Картана алгебри A спряжені за допомогою автоморфізму алгебри A.

Довільна підалгебра Картана є узагальненою підалгеброю Картана. Чи справджується зворотне твердження? Іншими словами, чи завжди є спряженими узагальнені підалгебри Картана? Негативну відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 5.3. Кожна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра містить узагальнену підалгебру Картана, яка не є підалгеброю Картана.

Зв'язок між унітальними локально стандартними просторами Хемінга і піалгебрами Картана унітальних локально матричних алгебр описується такою теоремою.

Теорема 5.4.

(1) Довільний зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга S ізоморфний простору $E(H)$, де H — підалгебра Картана деякої зліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри A, причому $\mathbf{st}(S) = \mathbf{st}(A)$.

(2) Нехай A_1, A_2 — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри і нехай H_1, H_2 — підалгебри Картана алгебр A_1, A_2 відповідно. Якщо простори Хемінга $E(H_1)$ та $E(H_2)$ ізоморфні, то алгебри A_1 та A_2 ізоморфні.

Узагальнення означення просторів Хемінга на неунітальний випадок зроблено у **підрозділі 5.4**.

Означення 5.10. Нехай H — булеве кільце (не обов'язково містить одиницю) з функцією $r : H \longrightarrow [0, \infty)$. Назвемо (H, r) простором Хемінга, якщо

(1) $r(a) = 0$ тоді й лише тоді, коли $a = 0$;

(2) якщо $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

Тоді функція r називається функцією рангу.

Як і у випадку унітальних просторів Хемінга функція

$$d_H(a, b) = r(a - b)$$

перетворює (H, r) у метричний простір.

Приклад 5.9. Нехай X — нескінченна множина. Розглянемо неунітальне булеве кільце H, яке складається із скінченних підмножин множини X, включаючи порожню множину. Функція рангу

$$r(a) = |a|, \quad a \in H,$$

задає на H структуру простору Хемінга. Якщо множина X — злічення, то ми позначимо описаний вище простір Хемінга символом $H(\infty)$.

Якщо (H, r) — простір Хемінга, а h є ненульовим елементом простору H, то тоді hH — унітальне булеве кільце, одиницею якого є елемент h. Функція

$$r_h : hH \longrightarrow [0, 1], \quad r_h(a) = \frac{r(a)}{r(h)}, \quad a \in H,$$

перетворюватиме тоді $H_h = (hH, r_h)$ в унітальний простір Хемінга.

Нехай $H = (H, r)$ — простір Хемінга і нехай α — деяке додатне дійсне число. Тоді булеве кільце H з новою функцією рангу $\alpha\, r$ також є простором Хемінга. Будемо називати простори Хемінга (H, r) та $(H, \alpha\, r)$ *скалярно еквівалентними.*

Означення 5.12. Простір Хемінга $H = (H, r)$ називається локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина множини H міститься в підпросторі $(H', r) \subset (H, r)$, який скалярно еквівалентний стандартному простору Хемінга H_n для деякого $n \geq 1$.

Наприклад, простір Хемінга $H(\infty)$ є локально стандартним простором.

Нехай (H_1, r_1) та (H_2, r_2) — простори Хемінга. Як і в унітальному випадку на тензорному добутку

$$H \;=\; H_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} H_2$$

можна визначити єдиним чином функцію рангу r таку, що

$$r(a \otimes b) \;=\; r_1(a)\; r_2(b)$$

для довільних елементів $a \in H_1$ та $b \in H_2$.

Якщо (H_1, r_1) і (H_2, r_2) — локально стандартні простори Хемінга, то їх тензорний добуток $H_1 \bigotimes_{\mathbb{Z}} H_2$ також є локально стандартним протором Хемінга.

Ми вже відмічали раніше, що існує взаємо однозначна відповідність між зліченно–вимірними локально матричними алгебрами та повними множинами чисел Стейніца. Наступні результати показують, що така ж властивість притаманна і зліченним просторам Хемінга.

Для простору Хемінга H покладемо

$$\mathrm{Spec}\;(H) \;=\; \left\{\, \mathbf{st}\;(H_n)\,,\; 0 \neq h \in H \,\right\} \;\subseteq \mathbb{SN}$$

і називатимемо цю множину *спектром простору Хемінга* H.

Лема 5.11. Для кожного зліченного локально стандартного простору Хемінга H спектр $\mathrm{Spec}\;(H)$ є повною множиною чисел Стейніца.

Лема 5.12. Для кожної повної множини S чисел Стейніца знайдеться зліченний локально стандартний простір Хемінга H такий, що $\mathrm{Spec}\;(H) = S$.

Наприклад, нехай $S = S(\infty, s)$, де s — число Стейніца, а $H(s)$ — зліченний унітальний простір Хемінга, який відповідає числу s. Тоді

$$S \;=\; \mathrm{Spec}\;(\; H(\infty) \;\bigotimes\; H(s)\;).$$

Теорема 5.5. Якщо зліченні локально стандартні простори Хемінга (H_1, r_1) та (H_2, r_2) мають однакові спектри, то вони скалярно еквівалентні.

Таким чином, зліченні неунітальні простори Хемінга параметризуються (з точністю до скалярної еквівалентності) парами (s, α), де s — число Стейніца, а α — дійсне число, $0 \leq \alpha \leq 1$, тобто має місце аналог теореми Діксім'є.

У розділі 6 ми вивчаємо диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних локально матричних алгебр.

Ш.А. Аюпов та К.К. Кудайбергенов у статті 2020 р. побудували зовнішнє диференціювання в зліченно–вимірній унітальній локально матричній алгебрі з числом Стейніца 2^∞ та використали його як приклад зовнішнього диференціювання в регулярній в сенсі фон Неймана простій алгебрі. У 1999 р. Х. Штраде вивчав диференціювання локально скінченно–вимірних локально простих алгебр Лі над полем характеристики 0.

Нагадаємо, що лінійне відображення $d : A \to A$ називається *диференціюванням*, якщо

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \quad \text{для довільних елементів} \quad x, y \in A.$$

Для фіксованого елемента $a \in A$ оператор

$$\mathrm{ad}(a) : A \to A, \quad x \mapsto [a, x],$$

називається *внутрішнім диференціюванням* (або *приєднаним диференціюванням*, індукованим елементом a) алгебри A.

Нехай $\mathrm{Der}(A)$ — алгебра Лі усіх диференціювань алгебри A. Позначимо через $\mathrm{Inder}(A)$ ідеал алгебри $\mathrm{Der}(A)$, який складається з внутрішніх диференціювань. Фактор–алгебра

$$\mathrm{Outder}(A) = \mathrm{Der}(A) \,/\, \mathrm{Inder}(A)$$

називається алгеброю *зовнішніх диференціювань* алгебри A.

Позначимо через $\mathrm{Aut}(A)$ та $\mathrm{Inn}(A)$ *групу автоморфізмів* та *групу внутрішніх автоморфізмів* алгебри A відповідно. Фактор–група

$$\mathrm{OutAut}(A) = \mathrm{Aut}(A) \,/\, \mathrm{Inn}(A)$$

називається *групою зовнішніх автоморфізмів* алгебри A.

Разом з групами автоморфізмів алгебри A будемо розглядати напівгрупу $P(A)$, яка складається з усіх ін'єктивних ендоморфізмів $A \to A$. Зокрема, $\mathrm{Aut}(A) \subseteq P(A)$.

У підрозділі 6.1 ми розглядаємо топологію Тихонова на множині $\mathrm{Map}(A, A)$ усіх відображень $A \to A$ і доводимо таку теорему.

Теорема 6.1. Нехай A — локально матрична алгебра.

1) Ідеал $\mathrm{Inder}(A)$ щільний в алгебрі $\mathrm{Der}(A)$ в топології Тихонова.
2) Припустимо, що алгебра A містить 1. Тоді замиканням групи $\mathrm{Inn}(A)$ в $\mathrm{Map}(A, A)$ в топології Тихонова є напівгрупа $P(A)$ унітальних ін'єктивних ендоморфізмів. Зокрема, підгрупа $\mathrm{Inn}(A)$ щільна в групі $\mathrm{Aut}(A)$.

Метою **підрозділу 6.2** є опис диференціювань нескінченних тензорних добутків скінченно–вимірних матричних алгебр. Нагадаємо, що згідно з теоремою Кьоте довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра ізоморфна зліченному тензорному добутку матричних алгебр і тому є алгеброю такого типу.

Означення 6.2. Нехай $\mathcal{P}$ — деяка система непорожніх скінченних підмножин нескінченної множини I. Назвемо систему $\mathcal{P}$ *розрідженою*, якщо

(1) для довільного $S \in \mathcal{P}$ усі непорожні підмножини множини S також належать $\mathcal{P}$,
(2) довільний елемент $i \in I$ міститься в не більш, ніж у скінченній кількості підмножин з $\mathcal{P}$.

Нехай

$$A = \bigotimes_{i \in I} A_i,$$

де усі алгебри A_i — скінченно–вимірні матричні алгебри над $\mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} A_i > 1$.

Для підмножини $S = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$ підалгебра

$$A_S = A_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes A_{i_r}$$

є тензорним співмножником алгебри A.

Нехай, як і вище, $\mathcal{P}$ — система непорожніх скінченних підмножин множини I. Для кожної підмножини $S \in \mathcal{P}$ виберемо лінійний оператор $f_S : A \to A$. Сума

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} f_S$$

збігається в топології Тихонова до деякого оператора f, якщо для довільного елемента $a \in A$ множина $\{ S \in \mathcal{P} \mid f_S(a) \neq 0 \}$ скінченна. У цьому випадку f є лінійним оператором. Більше того, якщо кожен доданок f_S є диференціюванням алгебри A, то f також є диференціюванням алгебри A.

Нехай $\mathcal{P}$ — розріджена система. Для довільної підмножини $S \in \mathcal{P}$ виберемо елемент $a_S \in A_S$. Сума

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} \mathrm{ad}\,(a_S)$$

збігається в топології Тихонова до диференціювання алгебри A. Насправді, довільний елемент $a \in A$ лежить в одній з підагебр $A_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_{i_r}$. Завдяки розрідженості системи $\mathcal{P}$ для усіх підмножин $S \in \mathcal{P}$, окрім скінченного числа, ми маємо $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap S = \emptyset$. Тому $\mathrm{ad}(a_S)a = 0$.

Позначимо через $D_{\mathcal{P}}$ векторний простір усіх сум $\sum_{S \in \mathcal{P}} \mathrm{ad}(a_S)$, де a_S пробігає A_S. Тоді $D_{\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{Der}(A)$. В усіх алгебрах A_i, $i \in I$, виберемо підпростори A_i^0 такі, що

$$A_i \;=\; \mathbb{F} \,\cdot\, 1_{A_i} \bigoplus A_i^0$$

розкладається в пряму суму підпросторів, де 1_{A_i} — одиниця алгебри A_i. Виберемо базис E_i підпростору A_i^0.

Для підмножини $S = \{i_i, \ldots, i_r\} \subset I$ розглянемо

$$E_S \;:=\; E_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes E_{i_r} \;=$$

$$\left\{ a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \,\middle|\, a_k \in E_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq r \right\}$$

та

$$\mathrm{ad}\,(E_S) \;=\; \left\{ \mathrm{ad}\,(e) \,\middle|\, e \in E_S \right\}.$$

Наступна теорема описує диференціювання алгебри $A = \bigotimes_{i \in I} A_i$.

Теорема 6.4.

(1) Припустимо, що множина I зліченна. Тоді

$$\mathrm{Der}\,(A) \;=\; \bigcup_{\mathcal{P}} D_{\mathcal{P}},$$

де $\mathcal{P}$ пробігає усі розріджені системи скінченних підмножин множини I.

(2) Для довільної нескінченної (не обов'язково зліченної) множини I та будь-якої розрідженої системи $\mathcal{P}$ скінченних підмножин I множина

$$\bigcup_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}\,(E_S)$$

є топологічним базисом простору $D_{\mathcal{P}}$.

Х. Штраде у 1999 р. довів, що алгебри зовнішніх диференціювань зліченно-вимірних локально простих скінченно-вимірних алгебр Лі над полем характеристики 0 не є локально скінченно-вимірними. **У підрозділі 6.3** ми доводимо аналог результату Штраде для зліченно-вимірної локально матричної алгебри над полем довільної характеристики.

Теорема 6.5. Нехай A — зліченно-вимірна локально матрична алгебра. Тоді алгебра Лі $\mathrm{Outder}(A)$ не локально скінченно-вимірна.

У підрозділі 6.4 вивчаються автоморфізми і унітальні ін'єктивні ендоморфізми зліченно-вимірних унітальних локально матричних алгебр.

Зауважимо, що згідно з теоремою, доведеною О.Г. Курошем у 1942 р., напівгрупа $P(A)$ унітальних ін'єктивних ендоморфізмів строго більша, ніж $\mathrm{Aut}(A)$.

Нехай H_n — підгрупа групи $\mathrm{Inn}(A)$, яка складається зі спряжень оборотними елементами з $\bigotimes_{i\geq n} A_i$. Легко бачити, що

$$\mathrm{H}_n \;\cong\; \mathrm{Inn}\left(\bigotimes_{i\geq n} A_i\right) \quad \text{та} \quad \mathrm{Inn}\,(A) \;=\; \mathrm{H}_1 \;>\; \mathrm{H}_2 \;>\cdots\,.$$

Для довільного $n \geq 1$ оберемо систему представників лівих класів суміжності $h\mathrm{H}_{n+1}$, $h \in \mathrm{H}_n$, та позначимо її через $\mathcal{X}_n$. Припускаємо, що кожна система $\mathcal{X}_n$ містить тотожний автоморфізм Id.

Для довільної послідовності автоморфізмів $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$, нескінченний добуток $\varphi = \varphi_1\varphi_2\ldots$ збігається в топології Тихонова до ін'єктивного ендоморфізму. Очевидно, що $\varphi \in P(A)$.

Теорема 6.6. Довільний унітальний ін'єктивний ендоморфізм $\varphi \in P(A)$ єдиним чином зображується у вигляді добутку $\varphi = \varphi_1\varphi_2\cdots$, де $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$.

Коли добуток $\varphi_1\varphi_2\cdots$, де $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$ є автоморфізмом?

Означення 6.3. Назвемо послідовність автоморфізмів $\varphi_n \in \mathrm{H}_n$, $n \geq 1$, інтегровною, якщо для кожного елемента $a \in A$ підпостір, породжений усіма елементами $\varphi_n \ldots \varphi_1(a)$, $n \geq 1$, є скінченно–вимірним.

Теорема 6.7. Ін'єктивний ендоморфізм $\varphi = \varphi_1\varphi_2\ldots$, де $\varphi_n \in \mathrm{H}_n$, $n \geq 1$, є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність

$$\{\ \varphi_i^{-1}\ \}_{i\geq 1}$$

інтегровна.

У підрозділі 6.5 ми розглядаємо напівгрупу $P(A)$ як узагальнений простір Бера.

Твердження 6.1. Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Топологія, яка визначається узагальненою метрикою Бера на напівгрупі $P(A)$, збігається з топологією Тихонова.

Далі ми наводимо приклади автоморфізмів напівгрупи $P(A)$, які є ізометріями узагальненого простору Бера. Зокрема, ми показуємо, що проективна лінійна група

$$\prod_{i\geq 1} PGL_{n_i}(\mathbb{F}) \ \cong \ \prod_{i\geq 1} A_i^*$$

занурюється в групу $\mathrm{Aut}(P(A)) \bigcap \mathrm{Isom}(P(A))$, де $\mathrm{Isom}(P(A))$ — група ізометрій простору Бера $P(A)$.

У підрозділі 6.6 ми визначаємо розмірності алгебр Лі $\mathrm{Der}(A)$ та $\mathrm{Outder}(A)$ і порядки груп $\mathrm{Aut}(A)$ та $\mathrm{OutAut}(A)$, де A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра.

Як зазвичай, будемо позначати потужність множини X через $|X|$. Для двох множин X та Y позначимо через $\mathrm{Map}(Y, X)$ множину всіх відображень з Y в X. Якщо α, β — потужності множин X, Y відповідно, то покладемо $\alpha^{\beta} = |\mathrm{Map}(Y, X)|$. Традиційно, $\aleph_0$ — зліченна потужність.

Теорема 6.8. Нехай

$$A = \bigotimes_{i\in I} A_i,$$

де I — нескінченна множина, A_i — матричні алгебри над полем $\mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} A_i > 1$. Тоді

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Der}\ (A)\ =\ \dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Outder}\ (A)\ =\ |\,\mathbb{F}\,|^{|I|}.$$

Теорема 6.9. Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Der}(A)\ =\ \dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Outder}(A)\ =\ |\,\mathbb{F}\,|^{\aleph_0}.$$

Зауважимо, що для багатьох незліченних потужностей α справедлива рівність $\alpha^{\aleph_0} = \alpha$. Наприклад, це справедливо для $\alpha = \lambda^{\mu}$, де λ, μ — потужності і $\mu \geq \aleph_0$. Якщо $\mathbb{F}$ — поле рядів Лорана змінної z над деяким полем F_0 або його алгебричним розширенням, то

$$|\mathbb{F}|\ =\ |F_0|^{\aleph_0} \quad \text{і тому} \quad |\mathbb{F}|^{\aleph_0}\ =\ |\mathbb{F}|.$$

Теорема 6.10. Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді

$$|\,\mathrm{Aut}(A)\,|\ =\ |\,\mathrm{OutAut}(A)\,|\ =\ |\,\mathbb{F}\,|^{\aleph_0}.$$

У підрозділі 6.7 ми обговорюємо порядки груп автоморфізмів і груп ізометрій тензорних добутків стандартних просторів Хемінга, а також порядки груп автоморфізмів і груп ізометрій довільного зліченного (не обов'язково унітального) простору Хемінга. Зокрема, показуємо, що порядок групи ізометрій зліченного локально стандартного простору Хемінга дорівнює $2^{\aleph_0}$.

Розділ 7 присвячується групам нескінченних періодичних матриць. Розглянемо алгебру $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ усіх $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, котрі мають скінченне число ненульових елементів у кожному стовпчику.

Назвемо нескінченну $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матрицю *періодичною*, якщо вона має блочно–діагональний вигляд $\mathrm{diag}(a, a, \ldots)$, де a — це $(n \times n)$–матриця. У цьому випадку ми називатимемо число n *періодом матриці*, а саму матрицю n*–періодичною*. Позначимо через $M_n^p(\mathbb{F})$ алгебру усіх n–періодичних матриць. Легко бачити, що

$$M_n^p(\mathbb{F})\ \cong\ M_n(\mathbb{F}).$$

Множина усіх періодичних матриць

$$M^p(\mathbb{F})\ =\ \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n^p(\mathbb{F})\ =\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$.

Позначимо через $GL_n^p(\mathbb{F})$ та $GL^p(\mathbb{F})$ групи оборотних матриць з алгебр $M_n^p(\mathbb{F})$ та $M^p(\mathbb{F})$ відповідно. Матимемо, що

$$GL_n^p(\mathbb{F}) \;\cong\; GL_n(\mathbb{F}), \quad GL^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} GL_n^p(\mathbb{F}).$$

Нехай s — число Стейніца. Тоді

$$M_s^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n|s} M_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M^p(F)$, а група

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n|s} GL_n^p(\mathbb{F})$$

є групою оборотних елементів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$.

Алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є зліченно–вимірною унітальною локально матричною алгеброю, причому її число Стейніца дорівнює s. Розглянемо комутант групи $GL_s^p(\mathbb{F})$, а саме:

$$SL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; \left[\, GL_s^p(\mathbb{F})\,,\; GL_s^p(\mathbb{F})\,\right] \;=\; \bigcup_{n|s} SL_n^p(\mathbb{F})\,,$$

де

$$SL_n^p(\mathbb{F}) \;=\; \left[\, GL_n^p(\mathbb{F})\,,\; GL_n^p(\mathbb{F})\,\right] \;\cong\; SL_n(\mathbb{F})\,.$$

Центр C групи $GL_s^p(\mathbb{F})$ складається зі скалярних матриць

$$\varepsilon\cdot\mathrm{Id} \;=\; \mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,\ldots), \quad \varepsilon\in\mathbb{F}^*,$$

а перетин $C\cap SL_n^p(\mathbb{F})$ — з матриць $\varepsilon\cdot\mathrm{Id}$, де $\varepsilon^n = 1$. Тому

$$C_s \;=\; C \bigcap SL_s^p(\mathbb{F})$$

складаєтья зі скалярних матриць $\varepsilon\cdot\mathrm{Id}$, де ε є коренем n–го степеня з 1, а $n\in\Omega\,(s)$.

Теорема 7.2. Нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді спеціальна проективна лінійна група

$$PSL_s^p(\mathbb{F}) \;= SL_s^p(\mathbb{F})\big/ C_s$$

є простою. Якщо для кожного натурального числа $n \in \Omega\ (s)$ у полі $\mathbb{F}$ існують корені n–го степеня з усіх його ненульових елементів, то

$$PGL_s^p(\mathbb{F}) \ = \ GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C_s \ \cong \ PSL_s^p(\mathbb{F}).$$

Тепер нашою задачею є знайти умови ізоморфності груп $SL_s^p(\mathbb{F})$ та описати їх автоморфізми. Почнемо з більш загального випадку.

Теорема 7.6. Нехай A та B — унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то кільця A та B або ізоморфні, або антиізоморфні. Більш того, для довільного ізоморфізму $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ або знайдеться ізоморфізм кілець $\theta_1 : A \to B$ такий, що φ є звуженням θ_1 на $[A^*, A^*]$, або знайдеться антиізоморфізм кілець $\theta_2 : A \to B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо

$$\varphi(g) \ = \ \theta_2(g^{-1}).$$

Якщо алгебри A та B зліченно—вимірні, то теорему 7.6 можна уточнити. У цьому випадку, не обмежуючи загальності, можна припустити, що $A = M_s^p(\mathbb{F})$, де s — число Стейніца алгебри A. Алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ замкнена відносно транспонування

$$t : M_s^p(\mathbb{F}) \ \to \ M_s^p(\mathbb{F}),$$

яке є антиавтоморфізмом.

Теорема 7.7. Припустимо, що A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то алгебри A та B ізоморфні. Більш того, довільний ізоморфізм $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ або продовжується до ізоморфізму кілець $A \to B$, або знайдеться ізоморфізм кілець $\theta : A \to B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо

$$\varphi(g) \ = \ \theta\left((g^{-1})^t\right).$$

Наслідок 7.2. Групи $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ та $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли числа Стейніца s_1 та s_2 однакові.

Теореми 7.7 та 7.6 базуються на описі ізоморфізмів елементарних матричних груп над довільними кільцями, який отриманий у роботах І.З. Голубчика, О.В. Михальова та роботі Ю.І. Зельманова.

Позначимо через H циклічну групу порядку 2, породжену автоморфізмом

$$g \to (g^{-1})^t, \quad g \in SL_s^p(\mathbb{F}).$$

Теорема 7.12. Нехай $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\,(M_s^p(\mathbb{F}))$ — група автоморфізмів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$. Тоді

$$\mathrm{Aut}\,\big(SL_s^p(\mathbb{F})\big) = H \cdot \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\,(M_s^p(\mathbb{F})) \cdot \mathrm{Aut}\,(\mathbb{F}).$$

В останньому розділі 8 ми вивчаємо диференціювання асоціативних алгебр і алгебр Лі нескінченних матриць. **Підрозділ 8.1** починається з розгляду таких неунітальних локально матричних алгебр:

(1) Нехай I — нескінченна множина. Позначимо символом $M_\infty(I, \mathbb{F})$ асоціативну алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, що містять лише скінченну множину ненульових елементів.
(2) Нехай V — зліченно–вимірний векторний простір. В алгебрі $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ усіх лінійних перетворень розглянемо ідеал $\mathrm{End}_{fin}(V)$, який складається з перетворень скінченного рангу.

Разом з цими алгебрами ми також розглядатимемо алгебру $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка складається з $(I \times I)$–матриць, що мають скінченну множину ненульових елементів у кожному рядочку і в кожному стовпчику, і алгебру матриць Якобі $MJ(\mathbb{F})$, яка складається з $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$–матриць $(a_{ij})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, $a_{ij} \in \mathbb{F}$, для яких існує натуральне число k таке, що $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > k$. Ці алгебри містяться в алгебрі $M_I(\mathbb{F})$ $(I \times I)$–матриць, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику. Якщо V — векторний простір і $\dim_{\mathbb{F}} V = |I|$, то $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \cong M_I(\mathbb{F})$. Окремо відмітимо, що підалгебра $M_\infty(I, \mathbb{F})$ є ідеалом алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$.

Якщо A — алгебра, $a \in A$, J — ідеал алгебри A, то через $\mathrm{ad}_J(a)$ позначатимемо оператор $\mathrm{ad}_J(a) : x \mapsto [a, x]$, $x \in J$.

Використовуючи теорему 6.1 про апроксимацію в топології Тихонова, доводимо такі теореми:

Теорема 8.3. Кожне диференціювання алгебри $MJ(\mathbb{F})$ є внутрішнім.

Теорема 8.4. Кожне диференціювання алгебри $\mathrm{End}_{fin}(V)$ має вигляд

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{End}_{fin}(V)}(a), \quad \text{де} \quad a \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V).$$

Теорема 8.5.

1) Кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I,\mathbb{F})$ має вигляд

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in M_{rcf}(I,\mathbb{F}).$$

2) Кожне диференціювання алгебри $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$ є внутрішнім.

У підрозділі 8.2 ми вивчаємо алгебри Лі, які пов'язані з асоціативними алгебрами $M_\infty(I,\mathbb{F})$, $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$, $MJ(\mathbb{F})$, $M_I(\mathbb{F})$.

Довільній асоціативній алгебрі A відповідає приєднана алгебра Лі $A^{(-)}$ з тим же векторним простором і новою операцією: $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in A$.

Лінійне перетворення $*: A\to A$ називається *інволюцією*, якщо

$$(a^*)^*=a, \quad (ab)^*=b^*a^* \quad \text{для довільних елементів} \quad a,\ b\in A.$$

Підпростір кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів $\{\, a\in A\mid a^*=-a \,\}$ є підалгеброю алгебри Лі $A^{(-)}$.

В алгебрі $M_\infty(I,\mathbb{F})$ діють інволюція транспонування і симплектична інволюція. Відповідні алгебри кососиметричних елементів позначаються $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$ і $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$. Зауважимо, що обидві ці інволюції єдиним чином продовжуються до інволюцій алгебри $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

Алгебри Лі

$$\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})=M_\infty(I,\mathbb{F})^{(-)}, \quad \mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})=[\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F}),\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})],$$

$$\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F}), \quad \mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F}), \quad \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})=M_{rcf}(I,\mathbb{F})^{(-)},$$

$$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})=MJ(\mathbb{F})^{(-)}, \quad \mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})=M_I(\mathbb{F})^{(-)}$$

інтенсивно вивчалися. Ми не маємо на меті зробити повний огляд робіт за цією тематикою. Відмітимо лише серію робіт І. Пенкова і В. Серганової з теорії зображень алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, використання зображень алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$ у математичній фізиці у роботах І. Френкеля, І. Пенкова і В. Серганової, застосування алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ у теорії солітонів у роботах Б. Фейгана, Б. Циган та ін.

К.-Х. Нееб довів, що якщо поле $\mathbb{F}$ має нульову характеристику, то кожне диференціювання алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

Наступна теорема розповсюджує цей опис на випадок довільного поля характеристики, відмінної від 2, а також дає опис диференціювань алгебр Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$.

Теорема 8.8. Нехай $\mathbb{F}$ — поле характеристики, відмінної від 2. І нехай I — нескінченна множина.

1) Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

2) Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$ (відповідно $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$) має вигляд $\mathrm{ad}(a)$, де a — матриця з $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є кососиметричною відносно транспонування (відповідно відносно симплектичної інволюції).
3) Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ є внутрішніми.
4) Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

Зауважимо, що В. Голубовський і С. Журек довели, що довільне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$ є внутрішнім.

При доведенні теореми 8.8 використовуються теореми 8.3 та 8.5 про диференціювання відповідних асоціативних алгебр і доведення гіпотез Херстейна К. Бейдаром, М. Брешаром, М. Чеботарем і Дж. Мартиндейлом ([9, 10, 11, 12, 13]).

При доведенні теореми 8.8 використовується також результат, який представляє собою незалежний інтерес. Нагадаємо, що алгебра Лі L називається *досконалою*, якщо $L = [L, L]$.

Теорема 8.6. Для кожної нескінченної множини I алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є досконалими.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

Інтерес до класу локально матричних алгебр виник у зв'язку з тим, що цей клас нескінченно–вимірних алгебр є найбільш близьким до класу скінченно–вимірних матричних алгебр (див. [81, 107]).

Тензорні добутки. У 1931 році Г. Кьоте [81] довів, що будь–яка унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра єдиним чином розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр над полем. Більш того, Г. Кьоте поширив цей результат на більш широкий клас локально нормальних (тобто локально простих скінченно–вимірних центральних) алгебр.

У 1942 році О.Г. Курош [84] показав, що результат Кьоте не узагальнюється на незліченно–вимірні локально матричні алгебри. О.Г. Курош побудував приклад унітальної локально матричної алгебри розмірності $2^{\aleph_0}$, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр. З інших результатів роботи [84] відмітимо теорему про те, що довільна унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра ізоморфна власній підалгебрі, яка містить одиницю.

Робота [84] О.Г. Куроша була продовжена його аспірантом В.М. Курочкіним [83], який вивчав примарні розклади унітальних локально матричних алгебр. Використовуючи результат Г. Кьоте [81], В.М. Курочкін довів, що будь–яка унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра допускає єдиний примарний розклад. Більш того, якщо (не обов'язково зліченно–вимірна) унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток матричних алгебр, то вона допускає єдиний примарний розклад. В.М. Курочкін [83] сформулював питання, яке довго залишалося відкритим:

чи розкладається довільна унітальна локально матрична алгебра *в тензорний добуток примарних алгебр*?

Приклад О.Г. Куроша з [84] не може бути використаний при відповіді на це питання, оскільки цей приклад сам є примарною алгеброю. У дисертаційній роботі отримана негативна відповідь на проблему Курочкіна.

Відмітимо, що В.М. Курочкін увів важливий інструмент вивчення локально матричних алгебр — відносний ранг $r(a)$. Він же й показав, що якщо елемент a унітальної локально матричної алгебри міститься в підалгебрі $(n \times n)$–матриць і $r_B(a)$ — його матричний ранг, то $r(a) = \frac{1}{n}\, r_B(a)$ не залежить від вибору підалгебри.

Числа Стейніца. Наступний сплеск інтересу до локально матричних алгебр виник у зв'язку з їх застосуваннями в теорії C^*–алгебр. Дж. Глімм [59] показав, що будь–яка апроксимативно скінченно–вимірна C^*–алгебра містить щільну унітальну зліченно–вимірну локально матричну алгебру. Якщо $\mathbb{F} \cdot 1 \subset A_1 \subset A_2 \subset$ — зростаючий ланцюг матричних алгебр рангів $n_1 < n_2 < \cdots$ і його об'єднання дорівнює усій локально матричній алгебрі A, то нескінченний добуток $\mathbf{st}(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i}$ є так званим числом Стейніца (або "супернатуральним" числом). Дж. Глімм показав, що таким чином визначене число Стейніца не залежить від вибору зростаючого ланцюга матричних підалгебр і повністю визначає алгебру A. Іншими словами, якщо A, B — унітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри і $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B)$, то алгебри A та B — ізоморфні. Зрозуміло, метод Дж. Глімма визначення числа Стейніца за зростаючими ланцюгами матричних алгебр можна застосовувати лише за умови зліченної розмірності. У дисертаційній роботі знайдені необхідні і достатні умови Моріта еквівалентності зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр у термінах їх чисел Стейніца.

О. Брателлі [44] та Дж. Елліот [56] вивчали більш широкий клас локально напівпростих алгебр, тобто алгебр, які мають локальну систему підалгебр, що ізоморфні прямій сумі матричних алгебр. Ними ж були запропоновані описи таких алгебр на мові K–теорії і на мові діаграм Брателлі.

Продовжуючи роботу Дж. Глімма, Ж. Діксм'є [53] класифікував неунітальні (тобто такі, що не містять одиницю) зліченно–вимірні локально матричні алгебри. Ж. Діксм'є показав, що кожній такій алгебрі можна поставити у відповідність пару (s, α), де s — число Стейніца, а α — невід'ємне дійсне число, і що така відповідність є біекцією. У дисертаційній роботі побудовані спектральні Стейніцові інваріанти неунітальних локально матричних алгебр.

У роботах О. Брателлі, Дж. Елліота, Ж. Діксм'є використовувалися методи теорії C^*–алгебр і тому всі алгебри розглядалися над полем комплексних чисел. Щонайменше, суттєво використовувалася нульова характеристика поля.

О.О. Баранов [6] поширив теорему Ж. Діксм'є на випадок довільного поля. Більш того, він описав зліченно–вимірні локально інволютивно прості алгебри, тобто алгебри з інволюцією, які мають локальну систему скінченно–вимірних інволютивно простих підалгебр (див. [5, 8]).

Зауважимо, що використання стейніцового інваріанту $\mathbf{st}(A)$ помітно спрощує роботи Г. Кьоте [81], О.Г. Куроша [84], В.М. Курочкіна [83]. Неважко показати, що нескінченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A примарна тоді й лише тоді, коли $\mathbf{st}(A) = p^{\infty}$, де p — просте число. Зокрема, приклад О.Г. Куроша – це алгебра з числом Стейніца 2^{∞}. Відсутність прикладів нерозкладних алгебр у [84] з іншими числами Стейніца пояснюється тим, що єдиним способом побудови локально матричних алгебр була пряма границя. У дисертаційній роботі побудовані нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр з іншими числами Стейніца.

Диференціювання. У роботі [102] Ш. Сакай вивчав диференціювання UHF $\mathbb{C}^*$–алгебр (uniformly hyperfinite $\mathbb{C}^*$–algebras). Х. Штраде [104] вивчав алгебру Лі диференціювань зліченно–вимірної локально простої (тобто такої, для якої існує локальна система простих скінченно–вимірних підалгебр) алгебри Лі над полем нульової характеристики. Основними результатами роботи є те, що (i) алгебра Лі зовнішніх диференціювань не є локально скінченною, (ii) розмірність алгебри Лі зовнішніх диференціювань дорівнює $2^{\aleph_0}$.

Ця робота тісно пов'язана з нашою задачею вивчення диференціювань асоціативних локально матричних алгебр. Заміна асоціативного множення в A на комутування $[a, b] = ab - ba$ задає на A структуру приєднаної алгебри Лі $(A, [a, b])$. Її комутант $[A, A]$ є лінійною оболонкою усіх комутаторів алгебри A. Позначимо символом Z центр алгебри A. І. Херстейн [70] довів, що якщо A – проста асоціативна алгебра, то алгебра Лі $[A, A] \diagup [A, A] \cap Z$ є простою. Для локально матричної алгебри A над полем нульової характеристики алгебра Лі $[A, A]$ є локально простою. Кожне диференціювання алгебри A індукує диференціювання алгебри Лі $[A, A]$. При цьому внутрішнє диференціювання алгебри A індукує внутрішнє диференціювання алгебри Лі $[A, A]$ і навпаки. Як показано в дисертаційній роботі, результат (ii) роботи [104] неправильний.

У роботі [2] Ш.А. Аюпов і К.К. Кудайбергенов побудували ненульове зовнішнє диференціювання унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри з числом Стейніца 2^{∞}. У дисертаційній роботі описані диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр.

Простори Хемінга. Стандартним способом знаходження відстані між двома двійковими векторами тієї самої довжини є метрика Хемінга на просторі $\mathbb{Z}_2^n$. Ми називаємо такий простір стандартним простором Хемінга H_n.

У роботах Н.В. Крошко і В.І. Сущанського [82], П. Камерона і С. Тарзі [46], Б.В. Олійник [91], Б.В. Олійник і В.І. Сущанського [93] розглянуті приклади прямих границь стандартних просторів Хемінга. Зокрема, у роботі Б.В. Олійник і В.І. Сущанського [93] розглядалися простори $H(s)$ нескінченних періодичних двійкових послідовностей з періодами, які ділять фіксоване число Стейніца s, і описані їх групи ізометрій. У роботі [91] Б.В. Олійник показано, що замикання простору $H(s)$ у просторі Безіковича не залежить від числа Стейніца s.

Уже в роботі [93] Б.В. Олійник і В.І. Сущанського обговорювалося питання про вибір аксіоматичного контексту для вивчення існуючих прикладів нескінченних просторів Хемінга (тобто прямих границь стандартних просторів Хемінга H_n). Зокрема, відмічалося, що усі вони можуть бути сформульовані у термінах спадних послідовностей вимірних розбиттів з робіт А.М. Вершика [127, 128]. У свою чергу, у роботі [128] відмічено, що ці спадні послідовності можуть бути переформульовані в термінах алгебр з мірою. Булеві алгебри з мірою були уведені в 1948 році у роботі [73] А. Хорна і А. Тарського. У наступній серії робіт (див., наприклад, [78, 80, 105]) вивчалися умови на булеву алгебру, які дозволили б визначити на ній міру з тими чи іншими властивостями. Проте структурна теорія алгебр з мірою не розвивалася.

У дисертаційній роботі показано, що зліченний локально стандартний простір Хемінга визначається інваріантом Стейніца і розкладається в нескінченний тензорний добуток стандартних просторів Хемінга (аналог теорем Глімма і Кьоте), а також знайдена параметризація неунітальних локально стандартних просторів Хемінга числами Стейніца і дійсними числами (аналог теореми

Діксм'є).

Групи матриць. Серед груп оборотних лінійних перетворень нескінченно–вимірного векторного простору найбільш детально вивчалися фінітарні групи, тобто групи, які складаються з таких лінійних перетворень φ, що перетворення $\mathrm{Id} - \varphi$ мають скінченний ранг.

Класифікація простих локально скінченних фінітарних груп була отримана Дж. Холлом в [64, 65, 66] (див. також [79, 97, 98]). З отриманного опису випливає, що будь–яка проста локально скінченна фінітарна група ізоморфна або групі знакозмінних підстановок на нескінченній множині, або групі фінітарних елементів однієї з груп $[A^*, A^*] \diagup \mathbb{F} \cdot 1$ чи $U(A, \tau) = \{a \in A^* \mid a^\tau = a^{-1}\}$, де A — локально матрична алгебра, $\tau : A \to A$ – інволюція.

У серії робіт [14, 15, 16, 43, 67] були описані прості локально скінченні лінійні групи. Показано, що вони є групами лієвського типу над локально скінченним полем, тобто підполем алгебричного замикання поля $\mathbb{Z}_p$, де p — просте число.

У роботах [82, 86, 87, 110, 111] вивчалися нескінченні групи, які визначаються локальною системою підгруп і фіксованими (природними) гомоморфізмами між ними. У роботі [110] визначений підхід до теорії зображень таких груп: зображення також повинні бути прямими границями локальної системи зображень, які зв'язані між собою природними морфізмами.

Групи матриць над кільцями, у тому числі групи нескінченних матриць, розглядалися у великій кількості літератури. Зв'язки таких груп з алгебраїчною K–теорією висвітлені в монографії [113]. У роботах [121, 126] підведені деякі підсумки вивчення підгруп матричних груп над кільцями, які містять фіксовану підгрупу. З приводу ізоморфізмів матричних груп над комутативним кільцем див. книгу [63]. Ізомофізми матричних груп над алгебрами з діленням описані Ж. Д'єдонне (див. [131]).

У серії робіт І.З. Голубчика [60], І.З. Голубчика і О.В. Михальова [61] та Ю.І. Зельманова [112] описані ізоморфізми елементарних матричних груп над довільними кільцями. У дисертаційній роботі описані ізоморфізми груп нескінченних періодичних матриць.

Алгебри Лі і теорія зображень. Нагадаємо, що якщо A — асоціативна алгебра, то лінійна оболонка всіх комутаторів $[A, A]$ є алгеброю Лі відносно операції комутування. Якщо на алгебрі A визначена інволюція $* : A \to A$, то підпростір $K(A,*)$ усіх кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів замкнений відносно операції комутування і тому є також алгеброю Лі.

З локально матричними алгебрами пов'язані два важливі класи простих нескінченно–вимірних локально скінченно–вимірних алгебр.

(i) Фінітарні алгебри, тобто алгебри Лі, які складаються з перетворень скінченного рангу деякого векторного простору.

О.О. Баранов [4] і О.О. Баранов та Х. Штраде [7] довели, що будь–яка проста зліченно–вимірна фінітарна алгебра Лі ізоморфна одній з алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{o}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$, тобто має вигляд $[A,A]$ або $[K(A,*),K(A,*)]$, де $A = M_\infty(\mathbb{F})$ — алгебра фінітарних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матриць, а $*$ або транспонування, або симплектична інволюція.

(ii) Діагональною локально простою алгеброю Лі ми називаємо алгебру, яка має локальну систему простих скінченно–вимірних підалгебр, що вкладаються одна в одну діагонально.

Ю.О. Бахтурін, О.О. Баранов, О.Ю. Залеський [3] довели, що над алгебрично замкненим полем характеристики нуль такі алгебри вичерпуються алгебрами $[A,A]$, де A — локально матрична алгебра, і алгебрами $[K(A,*),K(A,*)]$, де $(A,*)$ — локально інволютивно проста алгебра.

Дж. Хеннінг [68] поширила цей результат на алгебри над полем характеристики більшої за 5. Зауважимо, що в роботі О.О. Баранова [6] зліченно–вимірні локально інволютивно прості алгебри параметризуються парами чисел Стейніца і парами невід'ємних дійсних чисел (аналог теорем Глімма і Діксм'є).

У дисертаційній роботі знайдені розмірність алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядок групи зовнішніх автоморфізмів довільної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.

Структура і зображення алгебр $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$ вивчалися в роботах [52, 94, 95]. Стаття [58] присвячена застосуванню теорії зображень алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$ у математичній фізиці.

Матриця $a = (a_{ij})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ називається матрицею Якобі, якщо вона має скінченне число ненульових діагоналей, іншими словами, існує натуральне число k таке, що $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > k$. У роботах [51, 137] розглядалися застосування алгебри Лі матриць Якобі в теорії солітонів.

К.Х. Нееб [90] описав диференціювання алгебр Лі $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{I},\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{I},\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{I},\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ нульової характеристики у випадку довільної (не обов'язково зліченної) множини I.

В. Голубовський та С. Журек [72] довели, що кожне диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ є внутрішнім.

Поряд з тематикою, відображеною в дисертаційній роботі, автор у ряді публікацій приділяв увагу тотожностям в групових кільцях, алгебрах і супералгебрах Лі (з основами згаданих областей алгебри можна ознайомитися в монографії [54]). Особливу увагу при цьому приділялося вивченню числових характеристик, асоційованих з тотожностями, і деяким умовам скінченності нескінченно–вимірних алгебр [39, 40, 120].

Розділ 2

Попередні відомості. Асимптотичні конструкції

У цьому розділі ми нагадаємо основні асимптотичні конструкції, які будуть використовуватися у подальшому, а саме, прямої границі, тензорного добутку, ультрадобутку. Ми зупинимося на тому рівні узагальнення, на якому ці конструкції будуть застосовуватися.

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

Означення 2.1. Алгебричною системою

$$A = (A;\ \ \varphi_i,\ i \in I;\ \ P_j,\ j \in J) \tag{2.1}$$

називається множина A з визначеними на ній операціями

$$\varphi_i : A^{n_i} \to A, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i \in I,$$

та предикатами

$$P_j \subseteq A^{m_j}, \quad m_j \in \mathbb{N}, \quad j \in J.$$

Пара множин I, J разом з функціями арності $i \mapsto n_i$, $j \mapsto m_j$ називається сигнатурою системи A.

Означення 2.2. Нехай

$$A = (A;\ \ \varphi_i,\ i \in I;\ \ P_j,\ j \in J) \quad \text{та} \quad A' = (A';\ \ \varphi'_i,\ i \in I;\ \ P'_j,\ j \in J)$$

— алгебричні системи однакової сигнатури. Відображення $\chi : A \to A'$ називається гомоморфізмом алгебричних систем, якщо

1) для довільного індекса $i \in I$ і довільних елементів $a_1, \dots, a_{n_i} \in A$ виконується умова:
$$\varphi_i'(\chi(a_1), \dots, \chi(a_{n_i})) = \chi(\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i}));$$
2) для довільного індекса $j \in J$ і довільних елементів $a_1, \dots, a_{m_j} \in A$ із включення $(a_1, \dots, a_{m_j}) \in P_j$ випливає включення
$$(\chi(a_1), \dots, \chi(a_{m_j})) \in P_j'.$$

2.1 Пряма границя алгебричних систем

Нехай T — спрямована впорядкована множина індексів. Розглянемо родину алгебричних систем
$$A_t = (A_t; \ \ \varphi_{t,i}, \ i \in I; \ \ P_{t,j}, \ j \in J), \quad t \in T,$$
тієї самої сигнатури.

Припустимо, що для довільних індексів $k, l \in T$ таких, що $k \leq l$, задано гомоморфізм
$$\chi_{k,l} \ : \ A_k \ \longrightarrow \ A_l$$
такий, що

(i) $\chi_{k,k}$ є тотожним відображенням на A_k,

(ii) якщо $k \leq l \leq t$, то $\chi_{k,t} = \chi_{l,t} \circ \chi_{k,l}$.

Визначимо відношення еквівалентності на об'єднанні
$$\bigcup_{t \in T} A_t$$
таким чином: для елементів $a \in A_k$ та $b \in A_l$ покладемо $a \sim b$, якщо знайдеться індекс t такий, що
$$k \leq t, \quad l \leq t \quad \text{та} \quad \chi_{k,t}(a) = \chi_{l,t}(b).$$
Легко перевірити, що відношення $\sim$ є еквівалентністю.

Для елемента

$$a \in \bigcup_{t \in T} A_t$$

позначимо через $[a]$ його клас еквівалентності. Розглянемо множину класів еквівалентності

$$A = \bigcup_{t \in T} A_t \,/\!\sim .$$

Нехай

$$[a_1], \ldots, [a_{n_k}] \in A, \quad a_i \in A_{t_i}, \quad 1 \leq i \leq n_k, \quad t_i \in T.$$

Відмітимо, що знайдеться індекс $r \in T$ такий, що

$$t_i \leq r, \qquad 1 \leq i \leq n_k.$$

Визначимо на множині A n_k–арну операцію φ_k таким чином:

$$\varphi_k\Big([a_1], \ldots, [a_{n_k}]\Big) = \Big[\varphi_r\big(\chi_{t,r}(a_1), \ldots, \chi_{t_{n_k},r}(a_{n_k})\big)\Big].$$

Неважко помітити, що це визначення не залежить від вибору представників у класах $[a_1], \ldots, [a_{n_k}]$.

Тепер визначимо на A m_k–арний предикат P_k. Нехай

$$a_i \in A_{t_i}, \quad 1 \leq i \leq m_k.$$

Покладемо $([a_1], \ldots, [a_{m_k}]) \in P_k$, якщо знайдеться

$$\text{індекс} \quad r \in T \quad \text{такий, що} \quad t_1 \leq r, \ \ldots, \ t_{m_k} \leq r$$

і

$$\big(\chi_{t,r}(a_1), \ldots, \chi_{t_{m_k},r}(a_{m_k})\big) \in P_{r,k}.$$

Операції φ_i і предикати P_j задають на множині A структуру *алгебричної системи* сигнатури

$$\big(I, \ J \ ; \ i \mapsto n_i, \ j \mapsto m_j \big).$$

Означення 2.3. Алгебрична система

$$A = (A; \ \ \varphi_i, \ i \in I; \ \ P_j, \ j \in J)$$

називається прямою границею систем A_t, $i \in T$, відносно гомоморфізмів $(\chi_{k,l}, \ k, l \in T, \ k \leq l)$.

Якщо всі гомоморфізми $\chi_{k,l}$ є зануреннями, тобто

(1) відображення $\chi_{k,l}$ ін'єктивне,

(2) має місце включення

$$(\chi_{k,l}(a_1),\ \ldots,\ \chi_{k,l}(a_{m_j})) \in P_{l,j}$$

тоді і тільки тоді, коли $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \in P_{k,j}$,

тоді відображення $A_t \to A$, $a \mapsto [a]$, також є зануренням.

У випадку лінійного порядку на множині індексів I, алгебричну систему A можна вважати об'єднанням алгебричних систем A_t, $t \in T$.

2.2 Тензорний добуток

Зафіксуємо поле $\mathbb{F}$ і розглянемо родину асоціативних $\mathbb{F}$−алгебр A_i з одиницями $1_{A_i} \in A_i$, $i \in I$, які називаються *унітальними алгебрами. Унітальна алгебра* A з одиницею 1_A *і родину гомоморфізмів*

$$u_i : A_i \to A, \quad i \in I, \quad u_i(1_{A_i}) = 1_A,$$

збалансовані, якщо

(1) $[u_i(A_i), u_j(A_j)] = \{0\}$ при $i \neq j$,

(2) алгебра A породжена множиною

$$\bigcup_{i \in I} u_i(A_i).$$

Розглянемо іншу унітальну алгебру A' і збалансовану систему гомоморфізмів $v_i : A_i \to A'$, $i \in I$. *Морфізмом збалансованих систем*

$$(A,\ u_i,\ i \in I) \to (A',\ v_i,\ i \in I)$$

ми називатимемо гомоморфізм алгебр $\chi : A \to A'$ такий, що для всіх $i \in I$ діаграми

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "x"] \\ A_i \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "v_i"'] & \\ & A' \end{tikzcd}$$

комутативні.

Відомо (див. [136]), що існує єдина (з точністю до ізоморфізму) збалансована система $(A, u_i : A_i \to A, i \in I)$, яка задовольняє таким універсальним властивостям:

для довільної збалансованої системи $(A',\ v_i : A_i \to A',\ i \in I)$ *знайдеться морфізм*

$$(A,\ u_i,\ i \in I) \to (A',\ v_i,\ i \in I).$$

Зауважимо, що тоді алгебра A є сумою підалгебр

$$u_{i_1}(A_{i_1}) \cdots u_{i_r}(A_{i_r}),$$

де $i_1, \ldots, i_r$ — різні елементи з I.

Також відомо (див. [136]), що всі універсальні гомоморфізми u_i — занурення. Ототожнимо елементи алгебри A_i з їх образами при гомоморфізмі u_i. Нехай

$$a_1 \in A_{i_1},\ \ldots,\ a_r \in A_{i_r},$$

де $i_1, \ldots, i_r$ — різні елементи з I. Ми будемо позначати добуток $u_{i_1}(a_1) \cdots u_{i_r}(a_r)$ в алгебрі A як $a_1 \otimes \cdots \otimes a_r$. Тоді

$$1_A \in A_i \subseteq A; \quad [A_i, A_j] = \{0\} \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

і алгебра A є сумою підалгебр

$$A_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes A_{i_r},$$

де $i_1, \ldots, i_r$ — різні елементи множини I.

Алгебра A і система вкладень $u_i : A_i \to A,\ i \in I$, називається *тензорним добутком* алгебр A_i, $i \in I$. Інколи ми будемо говорити просто про алгебру A і позначатимемо

$$A = \bigotimes_{i \in I} {}_{\mathbb{F}} A_i \quad \text{або} \quad A = \bigotimes_{i \in I} A_i.$$

Нам знадобляться такі властивості тензорних добутків (див. [77, 108]).

1. Нехай A, B — унітальні $\mathbb{F}$–алгебри. Припустимо, що елементи $a_1, \ldots, a_n \in A$ лінійно незалежні. Тоді для довільних елементів $b_1, \ldots, b_n \in B$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$$

лише у випадку, коли $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

2. Нехай

$$I \;=\; I_1 \bigsqcup I_2$$

— разклад множини I в об'єднання підмножин, що не перетинаються. Тоді

$$\bigotimes_{i \in I} A_i \;\cong\; \Big(\bigotimes_{i \in I_1} A_i \Big) \bigotimes \Big(\bigotimes_{j \in I_2} A_j \Big).$$

3. Для матричних алгебр $M_n(\mathbb{F})$, $M_m(\mathbb{F})$ матриць порядків n і m відповідно маємо

$$M_n(\mathbb{F}) \bigotimes M_m(\mathbb{F}) \;\cong\; M_{mn}(\mathbb{F}).$$

4. Для довільної унітальної алгебри A тензорний добуток

$$M_n(\mathbb{F}) \bigotimes A$$

ізоморфний алгебрі $M_n(A)$ матриць порядку n над алгеброю A.

5. Наступна теорема належить Х.М. Веддербарну (див. [55, 77]).

Теорема 2.1 (Веддербарн). *Розглянемо асоціативну* $\mathbb{F}$*–алгебру* A *с* 1_A*. Нехай* B *— підалгебра алгебри* A *така, що* $1_A \in B$ *і* $B \cong M_n(\mathbb{F})$*. Нехай*

$$C = \{ a \in A \mid [a, B] = \{0\} \}$$

— централізатор підалгебри B*. Тоді*

$$A \;\cong\; B \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C.$$

Тепер припустимо, що A та B — асоціативні алгебри на полем $\mathbb{F}$, які не обов'язково містять одиницю.

Означення 2.4. Унітальною оболонкою алгебри A ми називаємо пряму суму векторних просторів

$$A \bigoplus \mathbb{F} \cdot 1 \tag{2.2}$$

з множенням

$$(a + \alpha \cdot 1)\,(b + \beta \cdot 1) \;=\; (ab + \beta a + \alpha b) + \alpha\beta \cdot 1,$$

де $a, b \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Розглянемо тензорний добуток

$$\left(A \bigoplus \mathbb{F} \cdot 1\right) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \left(B \bigoplus \mathbb{F} \cdot 1\right).$$

У цьому добутку розглянемо підалгебру

$$A \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} B, \tag{2.3}$$

яка не містить одиницю. Підалгебра (2.3) називається (*неунітальним*) *тензорним добутком* алгебр A та B. Зауважимо, що алгебри A і B не обов'язково занурюються в неунітальний тензорний добуток.

2.3 Ультрадобуток

У цьому розділі ми обговоримо означення і основні факти, які відносяться до ультрадобутків. Більш детально про це можна почитати в [48, 88, 133].

Означення 2.5. Розглянемо множину X. Нехай $\mathfrak{F}$ — деяка родина підмножин множини X. Будемо говорити, що $\mathfrak{F}$ — фільтр, якщо

1. $X \in \mathfrak{F}$,
2. для довільної множини $Z \in \mathfrak{F}$ довільна її надмножина Y, $Z \subseteq Y \subseteq X$, також належить родині $\mathfrak{F}$,
3. перетин довільних двох множин з $\mathfrak{F}$ належить родині $\mathfrak{F}$,
4. порожня множина $\emptyset$ родині $\mathfrak{F}$ не належить.

Далі під словом фільтр завжди будемо розуміти саме власний фільтр.

Фільтр $\mathfrak{F}$ є *максимальним*, якщо він не міститься строго в іншому фільтрі. Відома така характеризація максимальних фільтрів (див. [88]):

$$\text{фільтр } \mathfrak{F} \text{ є максимальним тоді й лише тоді, коли для довільної підмножини}$$
$$Y \subseteq X \text{ або } Y \in \mathfrak{F}, \quad \text{або} \quad X \backslash Y \in \mathfrak{F}.$$

Звідси випливає, що для кожної родини підмножин $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ об'єднання

$$Y_1 \bigcup \cdots \bigcup Y_n$$

лежить в ультрафільтрі $\mathfrak{F}$ тоді й лише тоді, коли одна із підмножин Y_i лежить в $\mathfrak{F}$.

Максимальні серед власних фільтрів називаються *ультрафільтрами.* Звідси і з леми Цорна випливає, що кожен фільтр міститься в деякому ультрафільтрі.

Розглянемо родину алгебричних систем

$$(A_\alpha;\ \ \varphi_{\alpha_i},\ i \in I;\ \ P_{\alpha_j},\ j \in J)_{\alpha \in X}$$

тієї самої сигнатури. Нагадаємо, що *декартовим добутком множин* A_α, $\alpha \in X$, називається множина відображень

$$f : X \to \bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha,$$

таких що $f(\alpha) \in A_\alpha$ для будь–якого $\alpha \in X$. Позначатимемо декартовий добуток як

$$\prod_{\alpha \in X} A_\alpha. \tag{2.4}$$

На множині (2.4) ми визначимо операції φ_i, $i \in I$, та предикати P_j, $j \in J$. Нехай n_i — арність операції φ_{α_i} і нехай

$$a_1,\ \ldots,\ a_{n_i} \in \prod_{\alpha \in X} A_\alpha.$$

Розглянемо відображення

$$a : X \to \bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha, \quad a(\alpha) = \varphi_{\alpha_i}\big(a_1(\alpha), \ldots, a_{n_i}(\alpha)\big) \in A_\alpha.$$

Покладемо

$$\varphi_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) = a.$$

Предикат P_j визначається таким чином. Для відображень

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m_j} \in \prod_{\alpha \in X} A_\alpha$$

включення

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m_j}) \in P_j$$

еквівалентне тому, що

$$\big(a_1(\alpha),\ a_2(\alpha),\ \ldots,\ a_{m_j}(\alpha)\big) \in P_{\alpha_j}$$

для будь–якого $\alpha \in X$.

Тим самим ми визначили алгебричну систему

$$\Big(\prod_{\alpha\in X} A_\alpha;\ \ \varphi_i,\ i \in I;\ \ P_j,\ j \in J\Big),$$

яка називається *декартовим добутком алгебричних систем* A_α, $\alpha \in X$.

Нехай $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр у множині X. Визначимо на декартовому добутку (2.4) еквівалентність: *два відображення*

$$f,\ g : X \to \bigcup_{\alpha\in X} A_\alpha, \quad f(\alpha),\ g(\alpha) \in A_\alpha, \quad \alpha \in X,$$

— *еквівалентні* (позначатимемо $f \sim g$), якщо множина $\{\alpha \in X \,|\, f(\alpha) = g(\alpha)\}$ належить ультрафільтру $\mathfrak{F}$.

Визначимо на множині

$$\prod_{\alpha\in X} A_\alpha \,/\!\sim \tag{2.5}$$

класів еквівалентності операції φ_i, $i \in I$, та предикати P_j, $j \in J$.

Виберемо n_i елементів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{n_i} \in \prod_{\alpha\in X} A_\alpha$$

і покладемо

$$\varphi_i\big(a_1/\!\sim, \ldots, a_{n_i}/\!\sim\big) = \varphi_i(a_1, \ldots, a_{n_i})/\!\sim,$$

де $\varphi_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ — результат виконання операції φ_i на декартовому добутку (2.4). Легко бачити, що права частина не залежить від вибору представників у класах

$$a_1/\!\sim\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n_i}/\!\sim\ .$$

Тепер виберемо m_j елементів

$$b_1,\ \ \ldots,\ \ b_{m_j} \in \prod_{\alpha\in X} A_\alpha, \quad b_k : X \to \bigcup_{\alpha\in X} A_\alpha, \quad b_k(\alpha) \in A_\alpha, \quad \alpha \in X.$$

Будемо говорити, що m_j–кортеж $(b_1/\!\sim, \ldots, b_{m_j}/\!\sim)$ лежить у підмножині

$$P_j \subset \Big(\prod_{\alpha\in X} A_\alpha \,/\!\sim\Big)^{m_j},$$

якщо множина

$$\{\alpha \in X \mid \big(b_1(\alpha), \ldots, b_{m_j}(\alpha)\big) \in P_{\alpha_j}\}$$

належить ультрафільтру $\mathfrak{F}$. Легко бачити, що це означення не залежить від вибору представників у класах

$$b_{1\,/\sim}\,,\ \ldots\ ,\ b_{m_j\,/\sim}\,.$$

Ми визначили m_j–арний предикат на множині (2.5).

Алгебрична система

$$\Big(\prod_{\alpha\in X} A_\alpha \,/\sim;\ \ \varphi_i,\ i \in I;\ \ P_j,\ j \in J\Big)$$

називається *ультрадобутком систем* A_α, $\alpha \in X$, і позначається

$$\prod_{\alpha\in X} A_\alpha \,/_{\mathfrak{F}}\,. \tag{2.6}$$

Якщо усі системи A_α, $\alpha \in X$, збігаються, тобто маємо $A_\alpha = A'$ для всіх $\alpha \in X$, то ми будемо говорити про *ультрастепінь*

$$A'^X \,/_{\mathfrak{F}}\,.$$

У подальшому нам знадобляться такі результати про ультрадобутки.

1. Теорема Лося.

Теорема 2.2 (Лось). *Замкнена формула мови першого порядку виконується на ультрадобутку* (2.6) *тоді й лише тоді, коли множина таких* $\alpha \in X$, *що ця формула виконується на* A_α, *належить ультрафільтру* $\mathfrak{F}$.

2. Локальна теорема Мальцева

Розглянемо алгебричну систему (2.1). Позначимо через X множину непорожніх скінченних підмножин множини A. Для непорожньої скінченної підмножини $\alpha \in X$ розглянемо

$$X_\alpha = \big\{\beta \in X \mid \alpha \subseteq \beta\big\} \subseteq X.$$

Система підмножин

$$\mathfrak{F}_\alpha \subseteq X, \quad \alpha \in X,$$

є фільтром. Таким чином, існує ультрафільтр $\mathfrak{F}$ у множині X, який містить фільтр

$$\left\{\mathfrak{F}_\alpha, \ \ \alpha \in X\right\}.$$

Для непорожньої скінченної підмножини $\alpha \in X$ позначимо через $\langle\alpha\rangle$ підсистему системи A, яка породжена підмножиною α.

Теорема 2.3 (Мальцев). *Система A занурюється в ультрадобуток*

$$\prod_{\alpha\in X} \langle\alpha\rangle \diagup_{\mathfrak{F}} .$$

3. Потужності ультрастепенів

Нехай X, Y — непорожні множини. Розглянемо множину $\mathrm{Map}(Y, X)$ усіх відображень з множини Y у множину X. Наступний результат належить Ченгу і Кайслеру (див. [47], лема 2.3).

Теорема 2.4. *Якщо множина X нескінченна, то знайдеться ультрафільтр $\mathfrak{F}$ у множині Y такий, що*

$$\left|\mathrm{Map}(Y, X)\right| = \left|\mathrm{Map}(Y, X) \diagup_{\mathfrak{F}}\right|.$$

Розділ 3

Числа Стейніца і розклади в тензорний добуток локально матричних алгебр

3.1 Приклади локально матричних алгебр

Зафіксуємо поле $\mathbb{F}$. Наслідуючи О.Г. Куроша [84], називатимемо асоціативну $\mathbb{F}$–алгебру *локально матричною алгеброю*, якщо будь–яка скінченна множина елементів алгебри A міститься в підалгебрі, яка ізоморфна скінченно–вимірній матричній алгебрі над полем $\mathbb{F}$, тобто якщо довільні $a_1, \ldots, a_s \in A$ належать підалгебрі $B \subset A$, яка ізоморфна матричній алгебрі $M_n(F)$ для деякого $n \geq 1$.

У цьому підрозділі ми розглянемо основні приклади локально матричних алгебр. Результати цього розділу опубліковано в [33, 34, 35, 37].

3.1.1 Прямі границі матричних алгебр

Нехай $n_1 < n_2 < \cdots$ — зростаюча послідовність натуральних чисел. Для кожного $i \geq 1$ розглянемо занурення

$$\chi_{i,i+1} : M_{n_i}(\mathbb{F}) \to M_{n_{i+1}}(\mathbb{F}).$$

Зрозуміло, що матричну алгебру $M_{n_i}(\mathbb{F})$ можна занурити в $M_{n_{i+1}}(\mathbb{F})$ багатьма способами.

Для $1 \le i < j$ покладемо

$$\chi_{i,j} : M_{n_i}(\mathbb{F}) \to M_{n_j}(\mathbb{F}), \quad \chi_{i,j} = \chi_{j-1,j} \circ \cdots \circ \chi_{i,i+1},$$

і позначимо через $\chi_{i,i}$ тотожне занурення $M_{n_i}(\mathbb{F})$ в $M_{n_i}(\mathbb{F})$.

Система гомоморфізмів $\chi_{i,j}$, $i \le j$, задовольняє умови (i), (ii) на гомоморфізми з підрозділу 2.1. Розглянемо пряму границю алгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i \ge 1$, і позначимо її через A. Як відмічалося в підрозділі 2.1 усі матричні алгебри $M_{n_i}(\mathbb{F})$ занурюються в алгебру A і утворюють зростаючий ланцюг

$$M_{n_1}(\mathbb{F}) \subset M_{n_2}(\mathbb{F}) \subset \cdots, \quad A = \bigcup_{i\ge 1} M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Позаяк довільна скінченна множина елементів алгебри A міститься в одній з підалгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$, то алгебра A є локально матричною алгеброю.

Особливу роль у теорії локально матричних алгебр відіграють *унітальні локально матричні алгебри*, тобто локально матричні алгебри с одиницею 1. За необхідності будемо користуватися для позначення одиниці алгебри A замість символа 1 символом 1_A.

Якщо гомоморфізми

$$\chi_{i,i+1} : M_{n_i}(\mathbb{F}) \to M_{n_{i+1}}(\mathbb{F}), \quad i \ge 1,$$

переводять одиницю матричної алгебри $M_{n_i}(\mathbb{F})$ в одиницю матричної алгебри $M_{n_{i+1}}(\mathbb{F})$, то пряма границя цієї послідовності буде унітальною алгеброю, одиницею якої буде відповідна границя послідовності матричних одиниць.

Локально матричні алгебри, які виникають у вигляді прямих границь таким чином, є зліченно–вимірними алгебрами. Легко бачити, що

будь–яка зліченно–вимірна локально матрична алгебра
є прямою границею матричних алгебр.

Теорема 3.1. 1) *Довільна зліченно–вимірна локально матрична алгебра A є об'єднанням деякого зростаючого ланцюга підалгебр*

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{i \geq 1} A_i \ = \ A, \tag{3.1}$$

де кожна підалгебра A_i, $i \geq 1$, ізоморфна матричній алгебрі над полем $\mathbb{F}$.

2) *Довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A є об'єднанням деякого зростаючого ланцюга підалгебр*

$$1 \in A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{i \geq 1} A_i \ = \ A, \tag{3.2}$$

де кожна підалгебра A_i, $i \geq 1$, ізоморфна матричній алгебрі над полем $\mathbb{F}$.

Доведення. 1) Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Виберемо базис $e_1, e_2, \ldots,$ алгебри A. Ми побудуємо зростаючий ланцюг підалгебр

$$A_1 \ \subset \ A_2 \ \subset \ \cdots \tag{3.3}$$

такий, що A_n є найменшою за включенням підалгеброю, яка містить $e_1, e_2, \ldots, e_n \in A_n$ для довільного $n \geq 1$, і будь–яка підалгебра A_n ізоморфна матричній алгебрі над $\mathbb{F}$.

Елемент e_1 міститься в деякій підалгебрі $A_1 \subset A$, яка ізоморфна матричній алгебрі над полем $\mathbb{F}$. Припустимо, що підалгебри

$$A_1 \ \subset \ A_2 \ \subset \ \cdots \ \subset \ A_n$$

побудовані. Оскільки алгебра A_n скінченно–вимірна, то в силу локально матричності алгебри A знайдеться підалгебра $A_{n+1} \subset A$ така, що

$$e_{n+1} \ \in \ A_{n+1} \quad \text{і} \quad A_n \ \subseteq \ A_{n+1},$$

при цьому підалгебра A_{n+1} ізоморфна матричній алгебрі над полем $\mathbb{F}$. Таким чином, ланцюг (3.3) побудований. Об'єднання

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i$$

містить базис $e_1, e_2, \ldots$ і тому

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i \ = \ A.$$

Отже, (3.1) має місце.

2) Достатотньо при доведенні частини 1) покласти $e_1 = 1$. Тоді (3.2) виконується і теорема доведена. □

3.1.2 Тензорні добутки матричних алгебр

Розглянемо довільну непорожню множину I і систему матричних алгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i \in I$, яка індексована множиною I. Розглянемо тензорний добуток

$$A = \bigotimes_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

У підрозділі 2.2 ми відмічали, що для довільної скінченної множини $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$ алгебра

$$A_{i_1,\ldots,i_k} := M_{n_{i_1}}(\mathbb{F}) \bigotimes \cdots \bigotimes M_{n_{i_k}}(\mathbb{F})$$

занурюється в алгебру A і, більш того,

$$A = \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_k\}} A_{i_1,\ldots,i_k},$$

де об'єднання береться по всім непорожнім скінченним підмножинам $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$. Оскільки

$$A_{i_1,\ldots,i_k} \cong M_{n_{i_1} \cdots n_{i_k}}(\mathbb{F}),$$

то алгебра A є унітальною локально матричною алгеброю.

Варто відмітити, що коли множина I — нескінченна, то розмірність алгебри A дорівнює потужності множини I.

Теорема 3.2. *Для довільних унітальних локально матричних алгебр A та B їх тензорний добуток*

$$A \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} B \tag{3.4}$$

є унітальною локально матричною алгеброю.

Доведення. Виберемо в тензорному добутку (3.4) скінченну множину елементів

$$x_i = \sum_j a_{ij} \otimes b_{ij}, \quad a_{ij} \in A, \quad b_{ij} \in B.$$

Скінченні множини

$$\{a_{ij}\}_{i,j} \subset A \quad \text{і } \{b_{ij}\}_{i,j} \subset B$$

містяться в деяких підалгебрах $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, відповідно,

$$A_1 \;\cong\; M_n(\mathbb{F}), \quad B_1 \;\cong\; M_m(\mathbb{F}).$$

Тоді усі тензори

$$a_{ij} \otimes b_{ij}$$

і всі елементи x_i містяться в підалгебрі

$$A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} B_1 \;\cong\; M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Це доводить локальну матричність алгебри (3.4).

Унітальність алгебри (3.4) легко видна. □

3.1.3 Алгебри Кліфорда

Нехай V — векторний простір над полем $\mathbb{F}$ характеристики char $\mathbb{F}$, відмінної від 2.

Нагадаємо (див. [75, 129, 134]), що відображення $f : V \times V \to \mathbb{F}$ називається *білінійною формою*, якщо для довільного фіксованого елемента $v \in V$ відображення

$$V \;\to\; V, \quad x \;\mapsto\; f(v, x),$$

і відображення

$$V \;\to\; V, \quad x \;\mapsto\; f(x, v),$$

лінійні. Білінійна форма є *симетричною*, якщо

$$f(v, w) \;=\; f(w, v) \quad \text{для довільних елементів} \quad v,\ w \;\in\; V.$$

Симетрична білінійна форма називається *невиродженою*, якщо

$$f(v, V) \;=\; \{0\} \quad \text{тоді й лише тоді, коли} \quad v \;=\; 0.$$

У випадку, коли $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, *невиродженою* называется форма, яка задовольняє слабкішу умову:

$$\text{з того, що} \quad f(v, V) = \{0\} \quad \text{та} \quad f(v, v) = 0, \quad \text{випливає, що} \quad v = 0.$$

Означення 3.1. Відображення $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ називається квадратичною формою, якщо виконуються такі умови:

(1) для довільних скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ і вектора $v \in V$ має місце

$$f(\alpha v) = \alpha^2 f(v);$$

(2) відображення $f(u, v) = f(u + v) - f(u) - f(v)$ є білінійною формою.

Квадратична форма $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ називається *невиродженою*, якщо невиродженою є відповідна їй білінійна форма $f(u, v)$.

Означення 3.2. Алгеброю Кліфорда називається унітальна асоціативна $\mathbb{F}$–алгебра, яка породжена векторним простором V і елементом 1 та задана співвідношеннями:

$$v^2 = f(v) \cdot 1, \tag{3.5}$$

де v пробігає всі елементи простору V, а $f(v)$ — деяка квадратична форма над полем $\mathbb{F}$.

Алгебру Кліфорда, яка породжується простором V і визначається квадратичною формою $f(v)$, будемо позначати символом $Cl(V, f)$.

Для довільного підпростору $W \subset V$ простору V позначимо через $Cl(W)$ підалгебру алгебри Кліфорда $Cl(V, f)$, яка породжена підпростором W і 1. Нехай $f\,|_W$ — обмеження квадратичної форми f на підпростір W, тобто

$$f\big|_W : W \longrightarrow \mathbb{F}$$

така, що

$$f\big|_W(v) = f(v) \quad \text{для всіх} \quad v \in W.$$

З леми 3.1 (див. нижче) буде випливати, що

$$Cl\,(W) \cong Cl\,\big(W,\ f\big|_W\big).$$

Окремо зазначимо, що з визначальних співвідношень випливає, що в алгебрі Кліфорда $Cl(V, f)$ для довільних елементів v, w простору V виконуються співвідношення:

$$v\,w\;+\;w\,v\;=\;f(v,w)\cdot 1,$$

де $f(v, w)$ — білінійна форма, яка відповідає квадратичній формі $f(v)$.

Вибираємо базис $\{v_i\}_{i\in I}$ простору V. Припустимо, що множина індексів I лінійно впорядкована.

Наступна відома лема є стандартним застосуванням алгоритму Грьобнера–Ширшова (див. [42, 45]).

Лема 3.1. *Упорядковані добутки*

$$v_{i_1}\cdots v_{i_k},\quad i_1<\cdots<i_k,\quad \textit{та}\quad 1$$

утворюють базис алгебри Кліфорда $Cl(V, f)$.

Доведення. Алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ задається твірними елементами

$$1,\quad x_i,\quad i\in I, \tag{3.6}$$

і системою визначальних співвідношень

$$x_i^2=f(v_i)\cdot 1,\quad x_ix_j+x_jx_i=f(v_i,v_j)\cdot 1. \tag{3.7}$$

Продовжимо лінійний порядок на множині

$$X\;=\;\left\{\,x_i\,,\;i\;\in\;I\,\right\}$$

до лексикографічного порядку на множині усіх слів в алфавіті X. При цьому незвідними словами (відносно системи (3.6) із співвідношеннями (3.7)) будуть упорядковані слова

$$x_{i_1}\cdots x_{i_k},\quad i_1<\cdots<i_k,\quad \text{та}\quad 1.$$

Система співвідношень (3.7) замкнута відносно композиції. Згідно з лемою про композицію (відомою ще як діамантова лема (Diamond Lemma) або теорема Бухбергера (див., наприклад, [18])) образи незвідних слів утворюють базис алгебри Кліфорда $Cl(V, f)$. Лема доведена. □

Зауваження 3.1. Лема про композицію зазвичай формулюється для добре впорядкованих множин (тобто таких, у яких кожна непорожна підмножина містить мінімальний елемент). Однак у випадку, коли визначальні співвідношення мають такий вигляд

$$f = \bar{f} + f' = 0,$$

де $\bar{f}$ — старший моном елемента f, усі мономи, які входять у f', менші, аніж $\bar{f}$ і не містять нових змінних у порівнянні з $\bar{f}$, умова добре впорядкованості не є необхідною.

Згідно з лемою 3.1, якщо

$$\dim_{\mathbb{F}} V = n < \infty,$$

то розмірність алгебри Кліфорда дорівнює

$$\dim_{\mathbb{F}} Cl(V, f) = 2^n.$$

Якщо підпростір V нескінченно–вимірний, то розмірність алгебри Кліфорда дорівнює

$$\dim_{\mathbb{F}} Cl(V, f) = \dim_{\mathbb{F}} V.$$

У подальшому в цьому підрозділі ми припускаємо, що поле $\mathbb{F}$ алгебрично замкнене і має характеристику, яка відмінна від 2, а квадратична форма f є невиродженою.

Теорема 3.3 (див. [75]). *Припустимо, що*

$$\dim_{\mathbb{F}} V = n < \infty.$$

Якщо число n парне, то алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ ізоморфна матричній алгебрі

$$M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{F}).$$

Якщо число n непарне, то алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ ізоморфна прямій сумі матричних алгебр

$$M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{F}) \oplus M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{F}).$$

Якщо поле $\mathbb{F}$ не алгебрично замкнене, то при описі алгебр Кліфорда з’являються матриці над тілами узагальнених кватерніонів.

Окремо відмітимо, що для векторного простору над полем характеристики 2 потрібні більш сильніші обмеження на невиродженість, тому відповідна теорія буде відрізнятися.

Нашою найближчою метою є доведення такої теореми.

Теорема 3.4. *Нехай V — нескінченно–вимірний векторний простір над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$, характеристика якого $char\ \mathbb{F}$ не дорівнює 2, з невиродженою квадратичною формою $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$. Тоді алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ є локально матричною алгеброю.*

Усюди нижче векторний простір V і квадратична форма $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ задовольняють умови теореми 3.4.

Лема 3.2. *Для довільного скінченно–вимірного підпростору $W \subset V$ знайдеться підпростір $\widetilde{W} \subset V$ такий, що*

1) *W є підпростором $\widetilde{W}$, тобто $W \subset \widetilde{W}$,*
2) *для розмірностей підпросторів W і $\widetilde{W}$ має місце співвідношення:*

$$\dim_{\mathbb{F}} \widetilde{W} = 2 \dim_{\mathbb{F}} W,$$

3) *обмеження $f|_{\widetilde{W}}$ форми f на підпростір $\widetilde{W}$ є невиродженою квадратичною формою.*

Доведення. Ми доведемо лему 3.2 у декілька кроків.

Крок 1. Доведемо, що існує елемент $v \in V$ такий, що $f(v, v) \neq 0$.

Справді, в іншому випадку білінійна форма $f(u, v)$ була б нульовою.

Крок 2. Нехай $W \subset V$ — скінченно–вимірний підпростір простору V і нехай

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid f(v, W) = \{0\}\}.$$

Якщо обмеження $f|_W$ — невироджене, то доведемо, що тоді

$$V = W \bigoplus W^{\perp},$$

тобто V є прямою сумою підпросторів W і $W^{\perp}$.

Це твердження випливає з теорії систем лінійних рівнянь (див., наприклад [129, 134]).

Крок 3. Нехай W — скінченно–вимірний векторний простір з квадратичною формою $g : V \to \mathbb{F}$. Позначимо

$$\mathrm{Ker}\, W \;=\; \big\{w \in W \mid g(w, W) = \{0\}\big\}.$$

Доведемо, що тоді знайдеться підпростір $W' \subset W$ такий, що форма $g|_{W'}$ є невиродженою і

$$W \;=\; W' \bigoplus \mathrm{Ker}\, W.$$

Справді, як ми вже відмічали вище, якщо $g(w, w) = 0$ для довільного елемента $w \in W$, то $W = \mathrm{Ker}\, W$. Нехай $w \in W$, $g(w, w) \neq 0$. Тоді

$$W \;=\; \mathbb{F}\, w \bigoplus w^{\perp},$$

де

$$w^{\perp} = \{u \in W \mid g(w, u) = 0\}$$

— ортогональне доповнення елемента w. Очевидно, що

$$\mathrm{Ker}\, W \;\subseteq\; \mathrm{Ker}\, w^{\perp}.$$

За індукційним припущенням відносно $\dim_{\mathbb{F}} W$ знайдеться підпростір

$$W'' \;\subset\; w^{\perp}$$

такий, що форма $g|_{W''}$ невироджена і

$$w^{\perp} \;=\; W'' \bigoplus \mathrm{Ker}\, W.$$

Нам залишається покласти

$$W' \;=\; \mathbb{F}\, w \;+\; W''.$$

Крок 4. Доведемо, що для довільного натурального числа $n \geq 1$ знайдеться підпростір $W \subset V$ такий, що $\dim_{\mathbb{F}} W = n$ і форма $f|_W$ невироджена.

Скористаємося індукцією по n. При $n = 1$ твердження випливає з Кроку 1. Припустимо, що $n \geq 2$ і знайдеться підпростір $W' \subset V$ такий, що

$$\dim_{\mathbb{F}} W' \;=\; n - 1$$

і форма $f|_{W'}$ невироджена. Простір V розкладається в пряму суму

$$V \;=\; W' \bigoplus (W')^{\perp}.$$

Згідно з Кроком 1 знайдеться елемент v :

$$v \in (W')^{\perp}, \quad f(v,v) \neq 0.$$

Простір

$$W \;=\; W' \;+\; \mathbb{F}\,v$$

має розмірність n і форма $f|_W$ невироджена.

Крок 5. Доведемо лему 3.2 для часткового випадку, коли $f(W,W) = \{0\}$.

Виберемо базис $w_1, \ldots, w_n$ підпростору W. Згідно з невиродженістю форми f існує елемент $v_n \in V$ такий, що

$$f(w_n, v_n) \;\neq\; 0.$$

Легко бачити, що обмеження форми f на підпростір

$$\mathbb{F}\,w_n \;+\; \mathbb{F}\,v_n$$

є невиродженим. Розглянемо ортогональне доповнення

$$\langle w_n, v_n\rangle^{\perp} \;=\; \{v \in V \mid f(v, w_n) \;=\; f(v, v_n) = 0\}.$$

Згідно з Кроком 2

$$V \;=\; \big(\mathbb{F}\,w_n \;+\; \mathbb{F}\,v_n\big) \bigoplus \langle w_n, v_n\rangle^{\perp}.$$

Ми маємо

$$W' \;=\; W \bigcap \big\langle w_n, v_n \big\rangle^{\perp} \;=\; W \bigcap v_n^{\perp}.$$

Значить, підпростір W' має корозмірність 1 в W і

$$\dim_{\mathbb{F}} W' \;=\; n-1.$$

За припущенням індукції знайдеться підпростір

$$\widetilde{W}' \;\subset\; \big\langle w_n, v_n \big\rangle^{\perp}$$

такий, що

$$W' \subset \widetilde{W}', \quad \dim_{\mathbb{F}} \widetilde{W}' = 2(n-1)$$

і обмеження квадратичної форми f на $\widetilde{W}'$ є невиродженою формою. Підпростір

$$\widetilde{W} = \mathbb{F}w_n + \mathbb{F}v_n + \widetilde{W}'$$

задовольняє усі необхідні умови.

Крок 6. Тепер ми готові закінчити доведення леми. Нехай $W \subset V$ — скінченновимірний підпростір простору V. Згідно з Кроком 3 знайдеться підпростір $W' \subset W$ такий, що

$$W = W' \bigoplus \operatorname{Ker} W$$

є прямою сумою і квадратична форма $f|_{W'}$ є невиродженою.

Розглянемо розклад

$$V = W' \bigoplus \left(W'\right)^{\perp}, \quad \text{де} \quad \operatorname{Ker} W \subset \left(W'\right)^{\perp}.$$

У Кроці 5 ми показали, що знайдеться підпростір

$$\widetilde{\operatorname{Ker} W} \subset \left(W'\right)^{\perp}$$

такий, що

$$\operatorname{Ker} W \subset \widetilde{\operatorname{Ker} W}, \quad \dim_{\mathbb{F}} \widetilde{\operatorname{Ker} W} = 2 \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} W$$

і обмеження квадратичної форми f на $\widetilde{\operatorname{Ker}}\, W$ є невиродженою формою.

Розглянемо ортогональне доповнення до підпростору

$$\widetilde{\operatorname{Ker} W} \quad \text{в} \quad \left(W'\right)^{\perp}.$$

У цьому ортогональному доповненні знайдемо підпростір W'' (див. Крок 4) такий, що

$$\dim_{\mathbb{F}} W'' = \dim_{\mathbb{F}} W'$$

і обмеження f на W'' є невиродженою квадратичною формою. Підпростір

$$\widetilde{W} = W' + \widetilde{\operatorname{Ker} W} + W''$$

і буде шуканим. Лема доведена. □

Доведення теореми 3.4. Виберемо непорожню скінченну підмножину S елементів алгебри $Cl(V,f)$. Легко бачити, що знайдеться скінченно–вимірний підпростір W простору V такий, що S міститься в підалгебрі $Cl(W, f|_W)$ алгебри $Cl(V,f)$, породженої 1 і підпростором W. Нехай

$$\dim_{\mathbb{F}} W = n.$$

Згідно з лемою 3.2 існує підпростір $\widetilde{W} \subset V$ такий, що

$$W \subset \widetilde{W}, \quad \dim_{\mathbb{F}} \widetilde{W} = 2n$$

і обмеження $f|_{\widetilde{W}}$ є невиродженою квадратичною формою. Очевидно, що

$$S \ \subset \ Cl\ (\widetilde{W},\ f|_{\widetilde{W}}).$$

Згідно з теоремою 3.3

$$Cl\ (\widetilde{W},\ f|_{\widetilde{W}}) \ \cong \ M_{2^n}(\mathbb{F})$$

і теорема 3.4 доведена. □

3.1.4 Узагальнені алгебри Кліфорда

Виберемо натуральне число $l > 1$, яке взаємно просте з характеристикою поля $\mathbb{F}$, якщо ця характеристика додатна. Якщо ж характеристика поля $\mathbb{F}$ дорівнює 0, то за l можна взяти довільне натуральне число більше за 1. Зафіксуємо ξ — первісний корінь степеня l з одиниці в полі $\mathbb{F}$. І нехай m — деяке натуральне число.

Означення 3.3. Узагальненою алгеброю Кліфорда $Clg(l,m)$ називається алгебра, яка задана такими твірними елементами і визначальними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} Clg(l,m) \ = \ \Big\langle\ x_1,\ \ldots,\ x_m \mid x_i^l \ &= \ 1; \\ x_i^{-1} x_j x_i \ &= \ \xi x_j \quad \text{при} \quad i < j; \\ x_i^{-1} x_j x_i \ &= \ \xi^{-1} x_j \quad \text{при} \quad i > j; \\ 1 \le i, j \le m \ \Big\rangle&. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Алгебри (3.8) у більш загальній формі були введені фізиками (див., наприклад, [50, 99]).

Аналогічно означенню 3.3 для довільної впорядкованої множини I розглянемо узагальнену алгебру Кліфорда

$$\begin{aligned} Clg(l,I) \; = \; \Big\langle x_i,\; i\in I \mid x_i^l \; &= \; 1; \\ x_i^{-1}x_jx_i \; &= \; \xi x_j \quad \text{при} \quad i<j; \\ x_i^{-1}x_jx_i \; &= \; \xi^{-1}x_j \quad \text{при} \quad i>j; \\ &\qquad i,j\in I \Big\rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Лема 3.3. *Мономи*

$$x_{i_1}^{k_1}\,\cdots\,x_{i_n}^{k_n}, \quad 0\le k_i\le l-1, \quad i_1<\cdots<i_n, \quad i_1,\,\ldots,\,i_n\in I,$$

утворюють базис узагальненої алгебри Кліфорда $Clg(l,I)$.

Доведення. Продовжимо порядок, який визначений на множині твірних $X=\{x_i, i\in I\}$, до лексикографічного порядку на множині всіх слів в алфавіті X. Система визначальних співвідношень:

$$x_i^l=1 \quad \text{для} \quad i\in I;$$

$$x_jx_i \; = \; \xi x_ix_j \quad \text{при} \quad i<j;$$

$$x_jx_i \; = \; \xi^{-1}x_ix_j \quad \text{при} \quad i>j; \quad i,j\in I;$$

замкнена відносно композиції.

Незвідними словами відносно цієї системи співвідношень будуть слова

$$1,\; x_{i_1}^{k_1}\,\cdots\,x_{i_n}^{k_n}, \quad 0\le k_i\le l-1, \quad i_1<\cdots<i_n, \quad i_1,\,\ldots,\,i_n\in I.$$

Тепер для доведення леми 3.3 достатньо застосувати лему про композицію (див. [18]) і зауваження 3.1 на стор. 79. □

Наслідок 3.1. *Розмірність узагальненої алгебри Кліфорда $Clg(l,m)$ дорівнює*

$$\dim_{\mathbb{F}}\, Cl(l,m) \; = \; l^m.$$

Нашою наступною метою є доведення теореми, яка узагальнює теорему 3.3.

Теорема 3.5. 1) *Якщо число m парне, то узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l,m)$ ізоморфна*

$$Clg(l,m) \cong M_{l^{\frac{m}{2}}}(\mathbb{F}).$$

2) *Якщо число m непарне, то узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l,m)$ ізоморфна*

$$Clg(l,m) \cong \underbrace{M_{l^{\frac{m-1}{2}}}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus M_{l^{\frac{m-1}{2}}}(\mathbb{F})}_{l}.$$

Зафіксуємо натуральное число i таке, що $1 \le i \le m$. Відображення

$$\varphi_i\,(x_j) \;=\; \xi^{\delta_{ij}}\, x_j, \quad 1 \le j \le m, \quad \text{де} \quad \delta_{ij} \; - \; \text{символ Кронекера}, \tag{3.10}$$

зберігає визначальні співвідношення алгебри $Clg(l,m)$ і тому продовжується до автоморфізму.

Лема 3.4. *Нехай V — підпростір узагальненої алгебри Кліфорда $Clg(l,m)$, інваріантний відносно групи автоморфізмів* Aut $Clg(l,m)$. *Тоді V є лінійною оболонкою тих упорядкованих мономів*

$$x_1^{k_1} \,\cdots\, x_m^{k_m}, \quad 0 \le k \le l-1,$$

які лежать у V.

Доведення. Довільний елемент алгебри $Clg(l,m)$ єдиним чином зображується у вигляді

$$\sum_{k=0}^{l-1} x_i^k\, v_k,$$

де v_k лежить у підалгебрі, породженій елементами

$$x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_m.$$

Нехай

$$v = \sum_{k=0}^{l-1} x_i^k\, v_k \;\in\; V.$$

Тоді

$$\varphi_i^s(v) \;=\; \sum_{k=0}^{l-1} \xi^{sk}\, x_i^k\, v_k \;\in\; V, \quad s = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Розглядаючи ці l рівностей як систему рівнянь з невідомими

$$v_0, \;\; x_i\, v_1, \;\; \ldots, \;\; x_i^{l-1}\, v_{l-1}$$

і визначником Вандермонда

$$\det |\xi^{ij}| \neq 0$$

ми зобразимо кожний елемент $x_i^k\, v_k$ як лінійну комбінацію елементів

$$v, \;\; \varphi_i(v), \;\; \ldots, \;\; \varphi_i^{l-1}(v).$$

Отже, кожний доданок

$$x_i^k\, v_k \quad \text{лежить у} \quad V.$$

Тим самим ми довели, що елемент $v \in V$ зображається у вигляді лінійної комбінації

$$v \;=\; \alpha_1 v_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_r v_r,$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — ненульові скаляри з $\mathbb{F}$, а $v_1, \ldots, v_r$ — різні впорядковані мономи, такі що $v_1, \;\ldots, \;v_r \;\in\; V$. Звідси випливає твердження леми. □

Наслідком леми 3.4 є такі два твердження.

Наслідок 3.2. *Узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, m)$ не має власних ідеалів, які інваріантні відносно групи її автоморфізмів* Aut $Clg(l, m)$.

Наслідок 3.3. *Узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, m)$ є напівпростою.*

Доведення наслідків 3.2 *і* 3.3. Наслідки 3.2 і 3.3 безпосередньо отримуємо з того, що будь-який моном є оборотним в алгебрі $Clg(l, m)$, що, у свою чергу, випливає з леми 3.4, і того факту, що радикал алгебри $Clg(l, m)$ є інваріантним відносно Aut $Clg(l, m)$. □

Позначимо символом C центр алгебри $Clg(l, m)$. Згідно з лемою 3.4 простір C породжується центральними впорядкованими мономами, тобто впорядкованими мономами, що належать центру алгебри $Clg(l, m)$.

Лема 3.5. 1. *Якщо число m — парне, то єдиним центральним упорядкованим мономом є* 1.

2. *Якщо число m — непарне, то узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l,m)$ містить l центральних упорядкованих мономів*

$$x_1^i\, x_2^{-i}\, x_3^i\, \cdots\, x_m^i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1.$$

Доведення. Нехай, як і раніше, C — центр алгебри $Clg(l,m)$. І нехай

$$v\ =\ x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\ \cdots\ x_m^{k_m}\ \in\ C.$$

Ми маємо:

$$x_i^{-1}\, v\, x_i\ =\ \xi^{-k_1-k_2-\cdots-k_{i-1}+k_{i+1}+\cdots+k_m}\, v.$$

Тикам чином,

$$\begin{cases} k_2+\cdots+k_m & = 0 \mod l \\ -k_1+k_3+\cdots+k_m & = 0 \mod l \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -k_1-k_2-\cdots-k_{m-1} & = 0 \mod l \end{cases} \tag{3.11}$$

Якщо число m парне, то $(m\times m)$−матриця

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

над кільцем $\mathbb{Z}_l$ невироджена, причому її визначник дорівнює:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

У цьому випадку

$$k_i\ =\ 0 \mod l, \quad 1\ \le\ i\ \le\ m,$$

і тому $v = 1$. Якщо число m — непарне, то ранг матриці K дорівнює $m-1$. Отже, однорідна система рівнянь, яка розглядається, має таких l розв'язків у кільці $\mathbb{Z}_l$:

$$\big(i\ ,\ -i\ ,\ i\ ,\ \ldots\ ,\ -i\ ,\ i\,\big), \quad i\ =\ 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1.$$

Звідси випливає твердження леми. □

Доведення теореми 3.5. 1) У скінченно–вимірній напівпростій алгебрі над алгебрично замкненим полем розмірність центра дорівнює кількості простих компонент. Таким чином, для парного числа m узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, m)$ є простою згідно з лемою 3.5. Порівнюючи розмірності, ми отримаємо

$$Clg(l, m) \;\cong\; M_{l^{\frac{m}{2}}}(\mathbb{F}).$$

2) Якщо число m — непарне, то згідно з лемою 3.5

$$\dim_{\mathbb{F}} C \;=\; l.$$

Таким чином, алгебра $Clg(l, m)$ є прямою сумою деяких l мінімальних ідеалів $A_1, \ldots, A_l$:

$$Clg(l, m) \;=\; A_1 \bigoplus \cdots \bigoplus A_l.$$

Автоморфізми алгебри $Clg(l, m)$ переставляють ідеали $A_1, \ldots, A_l$. Згідно з наслідком 3.2 леми 3.4 довільні два ідеали A_i, A_j спряжені автоморфізмом алгебри $Clg(l, m)$, значить, вони є ізоморфними. Знову порівнюючи розмірності, отримаємо

$$A_1 \;\cong\; M_{l^{\frac{m-1}{2}}}(\mathbb{F}).$$

Теорема доведена. □

Теорема 3.6. *Для довільної впорядкованої нескінченної множини I узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, I)$ є локально матричною алгеброю.*

Доведення. Для довільної скінченної підмножини $S \subset Clg(l, I)$ знайдеться скінченна підмножина $J \subset I$ така, що $S \subset Clg(l, J)$. Не зменшуючи загальність, будемо вважати, що порядок $|J|$ множини J є парним натуральним числом. Тоді згідно з теоремою 3.5

$$Clg(l, J) \;\cong\; M_{l^{\frac{|J|}{2}}}(\mathbb{F}).$$

Теорема 3.6 доведена. □

3.2 Числа Стейніца локально матричних алгебр

Нехай $\mathbb{P}$ є множиною усіх простих чисел.

Означення 3.4. Числом Стейніца (або супернатуральним числом) називається формальний нескінченний добуток вигляду:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p}, \tag{3.12}$$

де $r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Позначимо символом $\mathbb{SN}$ — множину всіх чисел Стейніца. Легко бачити, що множина всіх натуральних чисел $\mathbb{N}$ є підмножиною множини всіх чисел Стейніца $\mathbb{SN}$. Усі числа Стейніца, які не є натуральними числами, тобто всі елементи з $\mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, будем називати *нескінченними числами Стейніца.* Число Стейніца називається *локально скінченним*, якщо $r_p \neq \infty$ для всіх $p \in \mathbb{P}$.

Зауваження 3.2. Числа Стейніца були уведені Ернестом Стейніцом (див. *[103]*) у 1910 році з метою класифікації алгебричних розширень скінченних полів.

На множині $\mathbb{SN}$ визначимо добуток двох чисел вигляду (3.12) таким чином: *добутком двох чисел Стейніца*

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p} \ \text{ і } \ \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p}, \quad \text{де} \quad r_p,\ k_p \ \in \ \mathbb{N} \cup \{0, \infty\},$$

буде число Стейніца:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p+k_p},$$

де ми припускаємо, що

$$t + \infty = \infty + t = \infty + \infty = \infty$$

для всіх натуральних чисел t або $t = 0$.

Відмітимо деякі властивості чисел Стейніца.

Будем говорити, що *число Стейніца v ділить число Стейніца u*, якщо існує таке число Стейніца $w \in \mathbb{SN}$, що $u = v \cdot w$. Той факт, що число v ділить число

u, будемо позначати як $v|u$. Відношення *подільності* $|$ задає на множині $\mathbb{SN}$ частковий порядок. Найбільшим елементом відносно цього часткового порядку є елемент

$$I = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\infty}$$

і найменшим елементом є елемент 1. Більш того, частково впорядкована множина $(\mathbb{SN}, |)$ є повною решіткою.

Кожній унітальній локально матричній алгебрі A ми зіставимо її інваріант, який є числом Стейніца.

Нехай 1_A — одиниця алгебри A. Розглянемо множину $\mathfrak{D}(A)$ усіх унітальних матричних підалгебр локально матричної алгебри A, тобто

$$\mathfrak{D}(A) := \left\{ A' \mid 1_A \in A' \subset A, \ \ A' \cong M_n(\mathbb{F}) \text{ для деякого } n \geq 1 \right\}.$$

Розглянемо множину натуральних чисел

$$D(A) := \left\{ n \geq 1 \mid \text{знайдеться підалгебра } A' \in \mathfrak{D}(A), \text{ ізоморфна алгебрі } M_n(\mathbb{F}) \right\}. \tag{3.13}$$

Якщо n — дільник числа m, то

$$M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} M_{\frac{m}{n}}(\mathbb{F}) \cong M_m(\mathbb{F}).$$

Тим самим, алгебра $M_m(\mathbb{F})$ містить унітальну підалгебру, яка ізоморфна алгебрі $M_n(\mathbb{F})$. Тому, якщо число m належить множині $D(A)$, то всі його дільники також належать множині $D(A)$.

Означення 3.5. Числом Стейніца алгебри A називається найменше спільне кратне $\mathbf{st}(A)$ чисел із множини $D(A)$.

Припустимо, що

$$1 \in A' \subseteq A'' \subset A$$

такі, що

$$A' \cong M_n(F), \quad A'' \cong M_m(F).$$

Якщо

$$C = \left\{ a \in A'' \mid [a, A'] = \{0\} \right\}$$

— централізатор підалгебри A' в A'', то згідно з теоремою Веддербарна (див. теорему 2.1):

$$A'' \cong A' \bigotimes_{\mathbb{F}} C.$$

Зокрема, число n ділить число m.

Звідси випливає, що якщо $\mathfrak{D}_1$ — підмножина множини $\mathfrak{D}(A)$ така, що довільна підалгебра $A' \in \mathfrak{D}(A)$ міститься в деякій підалгебрі $A'' \in \mathfrak{D}_1$ і

$$D_1 = \Big\{ n \geq 1 \mid \text{ знайдеться підалгебра } A' \in \mathfrak{D}_1,$$

$$\text{яка ізоморфна алгебрі матриць } M_n(\mathbb{F}) \Big\},$$

то

$$\text{НСК}(D_1) = \text{НСК}(D(A)) = \mathbf{st}(A)$$

(тут і в подальшому абревіатура НСК означає найменше спільне кратне).

Приклад 3.1. Нехай алгебра A є об'єднанням зростаючого ланцюга матричних алгебр таких, що

$$1 \in M_{n_1}(\mathbb{F}) \subset M_{n_2}(\mathbb{F}) \subset \cdots, \quad n_i \,|\, n_{i+1}, \ i \geq 1,$$

тобто

$$A = \bigcup_{i \geq 1} M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Тоді число Стейніца алгебри A дорівнює

$$\mathbf{st}\,(A) = \textit{НСК}\Big\{ n_i, \ i \geq 1 \Big\} = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right),$$

де $n_0 = 1$.

Приклад 3.2. Нехай A, B — унітальні локально матричні алгебри. Згідно з теоремою 3.2 їх тензорний добуток

$$A \bigotimes_{\mathbb{F}} B$$

також є унітальною локально матричною алгеброю.

Теорема 3.7. *Нехай A і B — унітальні локально матричні алгебри. Тоді має місце наступне співвідношення:*

$$\mathbf{st}\left(A \bigotimes_{\mathbb{F}} B \right) = \mathbf{st}\,(A) \cdot \mathbf{st}\,(B).$$

Доведення. Розглянемо родину унітальних матричних підалгебр

$$\mathfrak{D}_1 \;=\; \left\{ A' \bigotimes{}_{\mathbb{F}} B' \mid A' \in \mathfrak{D}(A),\; B' \in \mathfrak{D}(B) \right\}.$$

Позаяк кожна унітальна матрична підалгебра алгебри

$$A \bigotimes{}_{\mathbb{F}} B$$

занурюється в підалгебру з $\mathfrak{D}_1$, то

$$\mathbf{st}\left(A \bigotimes{}_{\mathbb{F}} B\right) \;=\; \text{НСК}\left\{\, d_1 \cdot d_2 \mid d_1 \in D(A),\; d_2 \in D(B) \right\} \;=$$

$$\text{НСК}\left\{\, d_1 \mid d_1 \in D(A) \right\} \;\cdot\; \text{НСК}\left\{\, d_2 \mid d_2 \in D(B) \right\} \;=$$

$$\mathbf{st}\;(A) \;\cdot\; \mathbf{st}\;(B).$$

Теорема 3.7 доведена. □

Наслідок 3.4. *Нехай I — непорожна множина і нехай*

$$\left\{\, n_i \,\right\}_{i \,\in\, I}$$

— родина натуральних чисел, які індексовані множиною I. Тоді

$$\mathbf{st}\left(\bigotimes_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{F}) \right) \;=\; \prod_{i \in I} n_i \;\in\; \mathbb{SN}.$$

Приклад 3.3. Якщо V — нескінченно–вимірний векторний простір з невиродженою квадратичною формою $f : V \to \mathbb{F}$, то число Стейніца алгебри Кліфорда $Cl(V, f)$ дорівнює

$$\mathbf{st}\;\left(\, Cl(V, f) \,\right) \;=\; 2^{\infty}.$$

Твердження прикладу 3.3 випливає з теореми 3.3 і теореми 3.4.

Приклад 3.4. Нехай I — нескінченна множина і натуральне число l взаємно просте з характеристикою поля $\mathbb{F}$, якщо ця характеристика є додатним числом, або l — довільне натуральне число, $l > 1$, якщо характеристика поля дорівнює нулю. Тоді число Стейніца узагальненої алгебри Кліфорда $Clg(l, I)$ дорівнює

$$\mathbf{st}\;\left(\, Clg(l, I) \,\right) \;=\; l^{\infty}.$$

Твердження прикладу 3.4 випливає з теореми 3.5.

Дж. Глімм (див. [59]) довів:

Теорема 3.8 (Дж. Глімм, [59]). *Дві унітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца рівні.*

У роботі [36] ця теорема була поширена на більш широкий клас — клас так званих реляційних структур.

У наступному підрозділі ми побудуємо приклади, які показують, що для алгебр незліченної розмірності це твердження неправильне. Яку ж інформацію про алгебри несе її число Стейніца в незліченно–вимірному випадку? Про це мова піде в підрозділі 3.4.

3.3 Тензорний і примарний розклад

Нехай A — зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра. У підрозділі 3.1 (теорема 3.1) ми показали, що алгебра A може бути зображена у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга матричних алгебр

$$1 \in A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad \bigcup_{i\geq 1} A_i = A, \quad A_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 1.$$

Згідно з теоремою Веддербарна 2.1 (див. підрозділ 2.2) кожна алгебра A_i, $i \geq 1$, є тензорним множником алгебри A_{i+1}. Позначимо через A'_{i+1} централізатор підалгебри A_i в A_{i+1}. Тоді

$$A_{i+1} \cong A_i \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} A'_{i+1}.$$

Покладемо $A'_1 = A_1$. Тоді

$$A_i \cong A'_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \ldots \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} A'_i.$$

Таким чином,

$$A \cong \bigotimes_{i\geq 1} A'_i.$$

Ми довели таке твердження, яке належить Кьоте [81].

Теорема 3.9 (Кьоте, [81]). *Довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.*

Для добутку натуральних чисел $n = n_1 \cdots n_k$ ми маємо

$$M_n(\mathbb{F}) \;\cong\; M_{n_1}(\mathbb{F}) \bigotimes{}_{\mathbb{F}} \cdots \bigotimes{}_{\mathbb{F}} M_{n_k}(\mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра ізоморфна тензорному добутку

$$A \;\cong\; \bigotimes_{i\geq 1} M_{p_i}(\mathbb{F}),$$

де всі числа p_i є простими. Як відмічалося у підрозділі 3.4 (див. наслідок 3.4)

$$\mathbf{st}\,(A) \;=\; \prod_{i\geq 1} p_i.$$

Означення 3.6 (див. [83])**.** Називатимемо унітальну локально матричну алгебру A примарною, якщо

$$\mathbf{st}\,(A) \;=\; p^k,$$

де p — просте число, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

У роботі [84] О.Г. Куроша побудований приклад незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри A, число Стейніца якої дорівнює

$$\mathbf{st}\,(A) \;=\; 2^{\infty}$$

і яка не ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр.

Важливу роль у цьому прикладі зіграв такий критерій:

Лема 3.6 (**Курош**, [84])**.** *Якщо незліченно–вимірна алгебра A ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр, то A не містить зліченно–вимірного підпростору V такого, що централізатор $C_A(V)$ простору V*

$$C_A(V) \;=\; \left\{ a \;\in\; A \;\mid\; [a,\, V] \;=\; \{0\} \right\}$$

дорівнює $\mathbb{F} \cdot 1$.

Доведення. Припустимо, що I — незліченна множина, і нехай

$$A \;=\; \bigotimes_{i\in I} M_{n_i}(\mathbb{F}), \qquad n_i \geq 2.$$

Якщо V — зліченно–вимірний підпростір алгебри A, то знайдеться зліченна підмножина $J \subset I$ така, що

$$V \;\subset\; \bigotimes_{j\in J} M_{n_j}(\mathbb{F}).$$

У цьому випадку централізатор $C_A(V)$ простору V містить

$$\bigotimes_{i\in I\setminus J} M_{n_i}(\mathbb{F})$$

і не може бути рівним $\mathbb{F}\cdot 1$. Лема доведена. □

Наступна теорема дає новий приклад унітальної локально матричної алгебри, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Розглянемо векторний простір

$$V \;=\; \left\{ \,(a_1,\; a_2,\; \dots\,)\;\middle|\; a_i\in\mathbb{C},\;\; \sum_{i=1}^{\infty}\, |a_i|^2 \;<\; \infty \right\} \tag{3.14}$$

над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Його розмірність дорівнює

$$\dim_{\mathbb{C}}\, V \;=\; 2^{\aleph_0}.$$

Також розглянемо невироджену квадратичну форму

$$f\,\big(\,(a_1,\; a_2,\; \dots\,)\,\big) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\, a_i^2 \;\in\; \mathbb{C}.$$

Теорема 3.10. *Алгебра Кліфорда $Cl(V,f)$ не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.*

Для доведення нам знадобляться декілька лем.

Як і раніше, для підпростору $W \subset V$ позначимо через $Cl(W)$ підалгебру алгебри $Cl(V,f)$, яка породжена 1 та W, тобто $Cl(W) \cong Cl(W, f|_W)$.

Лема 3.7. *Нехай V — нескінченно–вимірний простір над полем $\mathbb{F}$, $f : V \to \mathbb{F}$ — невироджена квадратична форма. Нехай*

$$V \;=\; V_0 \;\supset\; V_1 \;\supset\; V_2 \;\supset\; \cdots$$

— спадний ланцюг підпросторів такий, що

(1) *кожний підпростір V_i простору V має скінченну корозмірність у V,*

(2) *для підпросторів V_i, $i \geq 0$, маємо*

$$\bigcap_{i \geq 0} V_i = \{0\}.$$

Тоді

$$\bigcap_{i \geq 0} Cl\,(V_i) = \mathbb{F} \cdot 1.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати простір V зліченно–вимірним. Дійсно, нехай

$$a \in \bigcap_{i \geq 0} Cl\,(V_i), \quad a \notin \mathbb{F} \cdot 1.$$

Для довільного $i \geq 0$ знайдеться скінченно–вимірний підпростір $W_i \subset V_i$ такий, що $a \in Cl(W_i)$. Розглянемо підпростір

$$V' = \sum_{i \geq 0} W_i \quad \text{та} \quad V'_i = V' \bigcap V_i.$$

Тоді

$$V' = V'_0 \supset V'_1 \supset V'_2 \supset \cdots, \quad \bigcap_{i \geq 0} V'_i = \{0\}$$

і

$$a \in \bigcap_{i \geq 0} Cl\,(V'_i).$$

Очевидно, що

$$\dim_{\mathbb{F}} V' \leq \aleph_0,$$

звідки випливає

$$\dim_{\mathbb{F}} V' = \aleph_0.$$

З цього моменту будемо припускати, що простір V — зліченно–вимірний. Нехай

$$U = \{u_0, u_1, \dots\}$$

— базис простору V.

Позначимо через U_0 максимальну множину базисних векторів, лінійно незалежних за модулем V_1. З того, що

$$\dim_{\mathbb{F}} \left(V \diagup V_1\right) < \infty,$$

випливає що $|U_0| < \infty$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u_0 \in U_0$.

Припустимо, що $u_1 \notin U_0$. Покажемо, що тоді знайдеться натуральне число $n_1 \geq 1$ таке, що елементи множини

$$U_0 \bigcup \{u_1\}$$

є лінійно незалежними за модулем V_{n_1}. Справді, нехай

$$W = \text{Span}\,(U_0,\ u_1), \quad \dim_{\mathbb{F}} W < \infty,$$

де Span (U_0, u_1) — підпростір, породжений U_0 та u_1. Якщо елементи множини $U_0 \bigcup \{u_1\}$ є лінійно залежними за модулем підпростору V_s, то

$$W \bigcap V_s \neq \{0\}.$$

Якщо $U_0 \bigcup \{u_1\}$ є лінійно залежними за модулем довільного V_s, $s \geq 1$, то спадний ланцюг ненульових підпросторів у скінченно–вимірному просторі W має ненульовий перетин. Це суперечить тому, що

$$\bigcap_{s\geq 1} \left(W \bigcap V_s\right) \subseteq \bigcap_{s\geq 1} V_s = \{0\}.$$

Позначимо через U_1 максимальну підмножину базисних векторів таку, що $U_0 \subset U_1$, $u_1 \in U_1$ і елементи з U_1 є лінійно незалежними за модулем підпростору V_{n_1} (коротко будемо говорити, що підмножина U_1 є лінійно незалежною за модулем підпростору V_{n_1}).

Якщо $u_1 \in U_0$, то покладемо $n_1 = 2$ і виберемо максимальну підмножину $U_1 \subset U$ таку, що $U_0 \subseteq U_1$ і U_1 є лінійно незалежною за модулем підпростору V_2.

Міркуючи таким же чином, ми знайдемо натуральне число $n_2 > n_1$ і максимальну підмножину U_2 базису U таку, що $U_1 \subseteq U_2$, $u_2 \in U_2$, і яка є лінійно незалежною за модулем підпростору V_{n_2}. І так далі.

Очевидно, що

$$\bigcup_{k\geq 0} U_k = U.$$

Розглядаючи підпростір V_{n_k} замість V_{k+1}, $k \geq 1$, будемо припускати, що U_k — базис простору V за модулем підпростору V_{k+1}, $k \geq 0$.

Виберемо в просторі V новий упорядкований базис $w_1, w_2, \ldots$. Покладемо $B_0 = U_0$. Далі, нехай

$$U_1 = U_0 \bigsqcup \left\{w_1, \ldots, w_k\right\}.$$

Для кожного вектора w_i, $1 \le i \le k$, знайдеться вектор

$$w_i' \in \mathrm{Span}(U_0), \quad \text{такий, що} \quad w_i - w_i' \in V_1.$$

Покладемо

$$B_1 = \left\{w_1 - w_1', \ \ldots, \ w_k - w_k'\right\} \subset V_1.$$

З побудови випливає, що

$$\mathrm{Span}\left(B_0 \bigcup B_1\right) = \mathrm{Span}\left(U_1\right).$$

Міркуючи таким же чином, ми побудуємо сукупність скінченних множин, що не перетинаються:

$$B_1, \ B_2, \ \ldots \quad \text{таких, що} \quad B_n \subset V_n$$

і

$$\mathrm{Span}\left(B_0 \bigsqcup B_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup B_n\right) = \mathrm{Span}\left(U_n\right), \quad n \ge 0.$$

Об'єднання

$$B = \bigcup_{i \ge 0} B_i$$

буде базисом простору V.

Визначимо лінійний порядок на базисі B :

1) $v < w$ для довільних векторів $v \in B_i$, $w \in B_j$, де $i < j$,
2) для кожного $i \ge 0$ вектори в B_i впорядковуються довільним чином.

Таким чином, строго впорядковані добутки базисних елементів з B утворюють базис алгебри Кліфорда $Cl(V, f)$, а впорядковані добутки

$$b_1 \ \cdots \ b_n, \quad \text{де} \quad b_1, \ \ldots, \ b_n \in B \bigcap V_i, \quad n \le \dim V_i,$$

утворюють базис алгебри $Cl(V_i)$. Звідси випливає твердження леми 3.7. □

В алгебрі Кліфорда $Cl(V, f)$ є природне $\mathbb{Z}_2$–градуювання:

$$Cl\ (V, f) = Cl\ (V, f)_{\bar{0}} + Cl\ (V, f)_{\bar{1}},$$

де простори $Cl(V, f)_{\bar{0}}$ та $Cl(V, f)_{\bar{1}}$ породжені добутками

$$\underbrace{V \ \cdots \ V}_{2i}$$

парної довжини і добутками

$$\underbrace{V \cdots V}_{2i+1}$$

непарної довжини відповідно.

Як зазвичай, для вектора $v \in V$ позначимо через $C(v)$ його централізатор в алгебрі $Cl(V, f)$.

Лема 3.8. *Нехай V — векторний простір над полем $\mathbb{F}$ з невиродженою квадратичною формою $f : V \to \mathbb{F}$. Нехай $v \in V$, $f(v) = 1$. Тоді*

$$C(v) \;=\; v\, Cl\,(v^{\perp})_{\bar{0}} \;+\; Cl\,(v^{\perp})_{\bar{0}}.$$

Доведення. Ми маємо:

$$V \;=\; \mathbb{F} \cdot v \bigoplus v^{\perp}. \tag{3.15}$$

Визначимо лінійний оператор

$$Q_v \;:\; Cl\,(V, f) \;\to\; Cl\,(V, f), \quad x \;\mapsto\; vxv.$$

З $f(v) = 1$ випливає

$$Q_v^2\,(x) \;=\; vvxvv \;=\; x.$$

Отже, оператор Q_v має власні значенн 1 та -1. Для довільного вектора $u \in V^{\perp}$ маємо

$$uv \;+\; vu \;=\; f(u, v) \;\cdot\; 1 \;=\; 0,$$

$$Q_v(u) \;=\; vuv \;=\; -uvv \;=\; -u.$$

Розклад (3.15) є розкладом простору V в суму власних підпросторів з власними значеннями 1 та -1 відповідно.

Для довільних векторів

$$v_1,\; \ldots,\; v_n \;\in\; v^{\perp}$$

їх добуток $v_1 \cdots v_n$ в алгебрі $Cl(V, f)$ відповідає власному значенню 1, якщо число n — парне, і власному значенню -1, якщо n — непарне. Те ж саме правильне і для добутку $vv_1 \cdots v_n$. Звідси випливає твердження леми 3.8. □

Повернемося до простору V нескінченних сумовних послідовностей

$$V \;=\; \left\{ \,(a_1,\; a_2,\; \ldots\,) \,\middle|\, a_i \in \mathbb{C},\;\; \sum_{i=1}^{\infty}\; |a_i|^2 \;<\; \infty \right\}$$

над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з квадратичною формою

$$f\,\big((a_1,\ \ldots)\big)\ =\ \sum_{i=1}^{\infty}\ a_i^2$$

(див. (3.14)). Розглянемо вектор

$$v_i\ =\ \big(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 1,}_{i}\ 0,\ \ldots\big).$$

Лема 3.9. *Нехай n — непарне натуральне число. Тоді*

$$C(v_1)\bigcap\cdots\bigcap C(v_n)\ =$$

$$v_1\cdots v_n\,Cl\left(v_1^{\perp}\ \cap\ \cdots\ \cap\ v_n^{\perp}\right)_{\bar{0}}\ +\ Cl\left(v_1^{\perp}\ \cap\ \cdots\ \cap\ v_n^{\perp}\right)_{\bar{0}}.$$

Доведення. Розглянемо лінійні оператори

$$Q_i : Cl\ (V, f)\ \to\ Cl\ (V, f),\quad Q_i(x)\ =\ v_i\, x\, v_i,\quad 1\le i\le n.$$

Очевидно, що

$$Q_i^2\ =\ \mathrm{Id},\quad Q_i\,Q_j\ =\ Q_j\,Q_i\quad \text{для довільних}\quad 1\le i,\ j\le n.$$

Таким чином, оператори $Q_1, \ldots, Q_n$ породжують елементарну абелеву 2−групу G. Розглянемо розклад простору $Cl(V, f)$ в суму власних підпросторів відносно дії групи G.

Векторний простір $Cl(V, f)$ породжений добутками

$$v_{i_1}\ \cdots\ v_{i_p}\, w_1\ \cdots\ w_q, \tag{3.16}$$

де

$$1\le i_1<\cdots<i_p\le n,\quad w_1,\ \ldots,\ w_q\ \in\ v_1^{\perp}\ \cap\ \cdots\ \cap\ v_n^{\perp}.$$

Будь−який добуток (3.16) є власним вектором відносно дії групи G. Ми повинні з'ясувати, в якому випадку елемент (3.16) має власне значення 1 відносно довільного оператора Q_i, $1\le i\le n$.

Нехай $i\notin\{i_1, \ldots, i_p\}$. Якщо

$$v_{i_1}\ \cdots\ v_{i_p}\, w_1\ \cdots\ w_q\ \in\ C(v_i),$$

то згідно з лемою 3.8 число $p+q$ є парним.

Нехай тепер $j \in \{i_1, \dots, i_p\}$. Якщо

$$v_{i_1} \cdots v_{i_p} w_1 \cdots w_q \in C(v_j),$$

то згідно з лемою 3.8 число $p+q$ є непарним.

Отже, якщо

$$v_{i_1} \cdots v_{i_p} w_1 \cdots w_q \in \bigcap_{i=1}^{n} C(v_i),$$

то або $p=0$, або $p=n$ і

$$v_{i_1} \cdots v_{i_p} = v_1 \cdots v_n.$$

Знову, згідно з лемою 3.8 число q є парним. Лема 3.9 доведена. □

Доведення теореми 3.10. Згідно критерію Куроша (лема 3.6) достатньо довести, що

$$C(v) = \mathbb{F} \cdot 1.$$

Очевидно, що $C(v)$ є $\mathbb{Z}_2$−градуйованим підпростором,

$$C(v) = C_{\bar{0}} + C_{\bar{1}}.$$

Нехай $a \in C_{\bar{1}}$. Тоді

$$a \in \sum_{i=0}^{m} \underbrace{V \cdots V}_{2i+1}$$

для деякого $m \geq 0$. Покладемо $n = 2m+3$. Згідно з лемою 3.9 маємо

$$a \in v_1 \cdots v_n \, Cl\left(v_1^{\perp} \cap \cdots \cap v_n^{\perp}\right).$$

Виберемо базис $\{w_j\}_{j \in J}$ простору

$$v_1^{\perp} \cap \cdots \cap v_n^{\perp},$$

де J — добре впорядкована множина. Тоді

$$\left\{ v_1, \dots, v_n, w_j, j \in J \right\}$$

— упорядкований базис простору V. Упорядковані добутки векторів з цього базису утворюють базис алгебри $Cl(V, f)$. Добутки

$$v_1 \cdots v_n w_{j_1} \cdots w_{j_k}, \quad j_1 < \cdots < j_k,$$

лежать у цьому базисі. Отже,

$$v_1 \cdots v_n \, Cl \left(v_1^{\perp} \cap \cdots \cap v_n^{\perp}\right) \bigcap \left(\sum_{i=0}^{2m+2} \underbrace{V \cdots V}_{i} \right) = \{0\}.$$

Ми довели, що $a = 0$. Таким чином,

$$C_{\bar{1}} = \{0\}, \quad C(v) = C_{\bar{0}}.$$

Згідно з лемою 3.9

$$C_{\bar{0}} = \bigcap_{n \geq 1} Cl \left(v_1^{\perp} \cap \cdots \cap v_n^{\perp}\right)_{\bar{0}}.$$

Зауважимо, що

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} v_i^{\perp} = \{0\}.$$

З леми 3.7 тоді випливає, що $C_{\bar{0}} = \mathbb{F} \cdot 1$. Теорема 3.10 доведена. □

Обидва приклади — приклад О.Г. Куроша [84] незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри, яка нерозкладна в тензорний добуток матричних алгебр, і приклад алгебри Кліфорда з теореми 3.10, мають число Стейніца 2^{∞}.

Наша задача: *побудувати приклади незліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр, які нерозкладні в тензорний добуток матричних алгебр, з іншими числами Стейніца.*

Розглянемо множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ з природним порядком. Для натурального числа $l > 1$ розглянемо узагальнену $\mathbb{F}$–алгебру Кліфорда $Clg(l, \mathbb{R})$. Нагадаємо, що натуральне число l є взаємно простим з характеристикою поля $\mathbb{F}$, якщо $\operatorname{char} \mathbb{F} > 0$, або l — довільне натуральне число, $l > 1$, якщо характеристика поля дорівнює нулю. Крім того (див. (3.9)), ξ — фіксований первісний корінь l–го степеня з 1. Маємо:

$$x_i^l = 1; \quad x_i^{-1} x_j x_i = \xi x_j, \quad \text{якщо} \quad i < j;$$

$$x_i^{-1} x_j x_i = \xi^{-1} x_j, \quad \text{якщо} \quad i > j; \quad i, \ j \in \mathbb{R}.$$

У підрозділі 3.4 ми показали (див. приклад 3.4), що $Clg(l, \mathbb{R})$ — локально матрична алгебра з числом Стейніца l^{∞}.

Алгебра $Clg(l, \mathbb{R})$ породжена твірними елементами x_i, $i \in \mathbb{R}$. Позначимо символом $X_{\mathbb{Q}}$ — множину твірних елементів з раціональними індексами.

Лема 3.10. *Припустимо, що число l непарне. Тоді централізатор множини $X_{\mathbb{Q}}$ в алгебрі $Clg(l, \mathbb{R})$ дорівнює* $\mathbb{F} \cdot 1$.

Зауваження 3.3. Твердження леми 3.10 неправильне для $l = 2$, тобто у випадку звичайних алгебр Кліфорда. Якщо α, β — різні ірраціональні числа, то $x_\alpha x_\beta$ лежить у централізаторі множини $X_{\mathbb{Q}}$.

Справді, нехай $q < \alpha,\ \beta$, де $q \in \mathbb{Q}$. Тоді

$$x_q^{-1}\, x_\alpha\, x_q \;=\; \xi\, x_\alpha, \quad x_q^{-1}\, x_\beta\, x_q \;=\; \xi\, x_\beta, \quad x_q^{-1}\, x_\alpha\, x_\beta\, x_q \;=\; \xi^2\, x_\alpha\, x_\beta.$$

Оскільки $l = 2$, то $\xi^2 = 1$. Аналогічно, для $\alpha,\ \beta < q$, де $q \in \mathbb{Q}$, ми маємо

$$x_q^{-1}\, x_\alpha\, x_\beta\, x_q \;=\; \xi^{-2}\, x_\alpha\, x_\beta \;=\; x_\alpha\, x_\beta.$$

Якщо $\alpha < q < \beta$, де $q \in \mathbb{Q}$, то

$$x_q^{-1}\, x_\alpha\, x_q \;=\; \xi^{-1}\, x_\alpha, \quad x_q^{-1}\, x_\beta\, x_q \;=\; \xi\, x_\beta, \quad x_q^{-1}\, x_\alpha\, x_\beta\, x_q \;=\; x_\alpha\, x_\beta.$$

Ми показали, що для довільного $q \in \mathbb{Q}$ елемент x_q комутує з $x_\alpha\, x_\beta$.

Доведення леми 3.10. Нагадаємо (див. підрозділ 3.1), що для довільного фіксованого $i \in \mathbb{R}$ відображення (3.10)

$$\varphi_i\ (x_j) \;=\; \xi^{\delta_{ij}}\, x_j; \quad j \;\in\; \mathbb{R},$$

продовжується до автоморфізму алгебри $Clg(l, \mathbb{R})$. Згідно з лемою 3.4 довільний підпростір алгебри $Clg(l, \mathbb{R})$, який є інваріантним відносно всіх автоморфізмів φ_i, $i \in \mathbb{R}$, є лінійною оболонкою всіх упорядкованих мономів

$$x_{i_1}^{k_1}\ \cdots\ x_{i_r}^{k_r}; \quad i_1 < \cdots < i_r, \quad 1 \le k_i \le l - 1,$$

які лежать у цьому підпросторі. Лінійна оболонка множини $X_{\mathbb{Q}}$ інваріантна відносно автоморфізмів φ_i, $i \in \mathbb{R}$. Отже, і централізатор множини $X_{\mathbb{Q}}$ інваріантний відносно автоморфізмів φ_i, $i \in \mathbb{R}$.

Припустимо, що моном

$$v \;=\; x_{i_1}^{k_1}\ \cdots\ x_{i_r}^{k_r}$$

лежить у централізаторі множини

$$X_{\mathbb{Q}}, \quad i_1 < \cdots < i_r, \quad r \geq 1, \quad 1 \leq k_1, \ \ldots, \ k_r \leq l-1.$$

Якщо j — раціональне число, таке що $j < i_1$, то

$$x_j^{-1} \, v \, x_j \ = \ \xi^{k_1 \, + \, \cdots \, + \, k_r} \, v \ = \ v,$$

звідки випливає, що

$$k_1 \ + \ \cdots \ + \ k_r \ = \ 0 \mod l. \tag{3.17}$$

Якщо j — раціональне число, таке що $i_1 < j < i_2$, то

$$x_j^{-1} \, v \, x_j \ = \ \xi^{-k_1 \, + \, k_2 \, + \, \cdots \, + \, k_r} \, v \ = \ v,$$

звідки випливає, що

$$-k_1 \ + \ k_2 \ + \ \cdots \ + \ k_r \ = \ 0 \mod l. \tag{3.18}$$

Віднімаючи порівняння (3.17) і (3.18), отримаємо

$$2k_1 \ = \ 0 \mod l.$$

Позаяк число l непарне, то

$$k_1 \ = \ 0 \mod l,$$

притиріччя. Лема 3.10 доведена. □

З леми 3.10 і леми 3.6 (критерію Куроша) випливатиме

Теорема 3.11. *Нехай l — непарне натуральне число, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел зі стандартним порядком. Тоді узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, \mathbb{R})$ не ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр.*

Зауваження 3.4. Розмірність алгебри $Clg(l, \mathbb{R})$ дорівнює $2^{\aleph_0}$. При спробі побудувати приклад алгебри довільної незліченної розмірності виникає питання:

чи правильно, що для будь–якої достатньо великої потужності α знайдеться впорядкована множина X потужності α і щільна в ній підмножина $Y \subset X$ меншої потужності?

Відповідь на це питання негативна.

Автор вдячна Олександру Кекрису (Alexander S. Kechris, California Institute of Technology) за роз'яснення цього питання.

Ми побудували приклади нерозкладних унітальних локально матричних алгебр з числами Стейніца p^{∞} для довільного простого числа p, відмінного від характеристики поля char $\mathbb{F}$.

У роботі [83] В.М. Курочкін сформулював запитання:

чи правильно, що довільна унітальна локально матрична алгебра має примарний розклад?

Зараз ми доведемо існування нерозкладних унітальних локально матричних алгебр з довільним нескінченним локально скінченним числом Стейніца. Більш того, ми покажемо, що ці алгебри не допускають примарного розкладу.

Це даватиме негативну відповідь на запитання В.М. Курочкіна.

Теорема 3.12. *Для довільного нескінченного локально скінченного числа Стейніца s знайдеться незліченно–вимірна унітальная локально матрична алгебра з числом Стейніца s. Ця алгебра не має примарного розкладу, тобто не ізоморфна тензорному добутку примарних локально матричних алгебр.*

Доведення. Важливу роль при доведенні цього твердження відіграє наступна теорема О.Г. Куроша ([84], теорема 10, див. також інше доведення цієї теореми у підрозділі 3.4):

Теорема 3.13 (Курош). *Для довільної зліченно–вимірної локально матричної алгебри A з одиницею 1_A знайдеться власна підалгебра $1_A \in B \subset A$ така, що $A \cong B$.*

Нехай s — нескінченне локально скінченне число Стейніца. Припустимо, що всі унітальні локально матричні алгебри з числом Стейніца s не більш, ніж зліченно–вимірні.

Нехай γ — незліченне трансфінітне число. Для довільного трансфінітного числа α такого, що $\alpha \leq \gamma$, ми побудуємо унітальну локально матричну алгебру A_{α}, яка задовольняє умови:

(1) $\mathbf{st}(A_{\alpha}) = s$,

(2) якщо $\alpha < \beta \leq \gamma$, то A_{α} є власною підалгеброю алгебри A_{β}.

Нехай

$$s = \prod_i p_i, \quad \text{де} \quad p_i \quad \text{— прості числа.}$$

Зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра

$$B = \bigotimes_i M_{p_i}(\mathbb{F})$$

має число Стейніца s, тобто $s = \mathbf{st}(B)$. Покладемо $A_1 = B$. Якщо α є граничним трансфінітним числом, то ми вважаємо

$$A_\alpha = \bigcup_{\mu<\alpha} A_\mu,$$

де $\mathbf{st}(A_\mu) = s$, і таким чином, $\mathbf{st}(A_\alpha) = s$.

Якщо трансфінітне число α не є граничним, то існує число $\alpha - 1$ і, за припущенням індукції, алгебра $A_{\alpha-1}$ є алгеброю з числом Стейніца $\mathbf{st}(A_{\alpha-1}) = s$. За нашим припущенням алгебра $A_{\alpha-1}$ — зліченно–вимірна. Згідно з теоремою Куроша існує унітальна локально матрична алгебра A' така, що

$$1_{A'} \in A_{\alpha-1} \subsetneqq A', \quad \mathbf{st}(A') = s.$$

Покладемо $A_\alpha = A'$.

Тим самим ми отримали суперечність, позаяк алгебра A_γ не може бути зліченно–вимірною.

Отже, ми довели існування незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри A з числом Стейніца s. Покажемо, що алгебра A не допускає примарного розкладу.

Нехай

$$s = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p}, \quad r_p < \infty \quad \text{для всіх} \quad p \in \mathbb{P}.$$

Припустимо, що

$$A \cong \bigotimes_{p\in\mathbb{P}} A_p.$$

Тоді

$$\mathbf{st}\,(A) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbf{st}\,(A_p) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p},$$

звідки випливає, що

$$\mathbf{st}\,(A_p) = p^{r_p}$$

для кожного простого числа $p \in \mathbb{P}$. Значить,

$$A_p \cong M_{p^{r_p}}(\mathbb{F})$$

і алгебра A є зліченно–вимірною. Теорема 3.12 доведена. □

Зауваження 3.5. Ми довели існування незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри з нескінченним локально скінченним числом Стейніца. Проте, це доведення не дає нам інформації про розмірність цієї алгебри, окрім того, що вона має розмірність більшу ніж $\aleph_0$.

Теорема 3.14. *Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не можна зобразити у вигляді*

$$\left(\operatorname{char} \mathbb{F}\right)^{\infty} \cdot n, \quad \text{де} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує унітальна локально матрична алгебра A з числом Стейніца $\mathbf{st}\,(A) = s$, *яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.*

Доведення. 1) Нехай $s = 2^{\infty}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$. Відомі два приклади нерозкладних унітальних локально матричних алгебр: приклад О.Г. Куроша з [84] і приклад алгебри Кліфорда (теорема 3.10).

2) Для довільного простого числа p, відмінного від $\operatorname{char} \mathbb{F}$, узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(p, \mathbb{R})$ має число Стейніца p^{∞} і не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр згідно з теоремою 3.11.

3) Якщо s — нескінченне локально скінченне число Стейніца, то шукана алгебра існує згідно з теоремою 3.12.

4) Залишилося розглянути випадок не локально скінченного числа Стейніца

$$s = p^{\infty} \cdot s'.$$

За умовою $p \neq \operatorname{char} \mathbb{F}$. Ми показали вище, що для довільного числа Стейніца s' знайдеться зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A' така, що $\mathbf{st}\,(A') = s'$.

Нехай $A(p)$ — унітальна локально матрична алгебра з числом Стейніца p^{∞}, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр: приклад О. Г. Куроша [84] або алгебра Кліфорда (теорема 3.10). В обох випадках нерозкладність була доведена за допомогою критерію Куроша:

алгебра $A(p)$ містить зліченно–вимірний підпростір W, централізатор якого дорівнює $\mathbb{F} \cdot 1_{A(p)}$.

Розглянемо унітальну локально матричну алгебру

$$A = A(p) \bigotimes{}_{\mathbb{F}} A',$$

причому

$$\mathbf{st}\,(A) = \mathbf{st}\,(A(p)) \cdot \mathbf{st}\,(A') = p^{\infty} \cdot s' = s.$$

Підпростір

$$W \bigotimes{}_{\mathbb{F}} A' \tag{3.19}$$

алгебри A є зліченно–вимірним. Покажемо, що централізатор

$$C_A\Big(W \bigotimes{}_{\mathbb{F}} A'\Big) \tag{3.20}$$

підпростору (3.19) в алгебрі A дорівнює $F \cdot 1_A$. Дійсно, нехай елемент

$$a = \sum_i a_i \otimes a_i'$$

лежить у централізаторі (3.20), де елементи a_i' є лінійно незалежними. Для довільного елемента $w \in W$ маємо

$$\Big[\, \sum_i a_i \otimes a_i',\ w \otimes 1_{A'} \Big] = \sum_i \,[a_i, w] \otimes a_i' = 0.$$

Звідси випливає, що всі елементи a_i лежать у централізаторі W, тобто в $F \cdot 1_{A(p)}$. Отже,

$$a = 1_{A(p)} \otimes a', \quad a' \in A'.$$

Таким чином, елемент a' лежить у центрі алгебри A', тобто в $F \cdot 1_{A'}$. Ми довели, що

$$C_A\Big(W \bigotimes{}_{\mathbb{F}} A'\Big) = \mathbb{F} \cdot 1_A.$$

Згідно критерію Куроша алгебра A є нерозкладною в тензорний добуток матричних алгебр. Теорема 3.14 доведена. □

Лема 3.11. *Для довільного не локально скінченного числа Стейніца s, яке не зображується у вигляді*

$$(\mathrm{char}\,\mathbb{F})^{\infty} \cdot s',$$

де s' є локально скінченним, для будь–якої нескінченної потужності α знайдеться унітальна локально матрична алгебра A така, що

$$\dim_{\mathbb{F}} A = \alpha, \quad \mathbf{st}(A) = s$$

і алгебра A розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр.

Доведення. Число Стейніца s розкладається в нескінченний добуток простих чисел

$$s = p_1 p_2 \cdots,$$

при цьому деяке просте число $p \neq \operatorname{char} \mathbb{F}$ зустрічається в цьому добутку нескінченну кількість разів. Нехай I — множина потужності α. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що I містить множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ як підмножину. Розглянемо функцію

$$n : I \to \mathbb{N}, \quad i \mapsto n_i,$$

яка визначається таким чином:

$$n_i = p_i \quad \text{для} \quad i \in \mathbb{N}; \quad n_i = p \quad \text{для} \quad i \in I \setminus \mathbb{N}.$$

Тензорний добуток

$$A = \bigotimes_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{F})$$

задовольняє усі необхідні умови. Лема 3.11 доведена. □

Наступна теорема показує, що теорема Глімма 3.8 не розповсюджується на незліченну розмірність.

Теорема 3.15. *Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не зображується у вигляді*

$$\left(\operatorname{char} \mathbb{F}\right)^{\infty} \cdot n, \quad \text{де} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді існують неізоморфні унітальні локально матричні алгебри A та B такі, що

$$\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B > \aleph_0 \quad \text{і} \quad \mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B) = s.$$

Доведення. Нехай A — унітальна локально матрична алгебра з теореми 3.14, яка нерозкладна в тензорний добуток матричних алгебр, $\mathbf{st}(A) = s$. Нехай $\dim_{\mathbb{F}} A = \alpha$. За теоремою Кьоте (див. [81])

$$\dim_{\mathbb{F}} A = \alpha > \aleph_0.$$

Крім того, згідно з лемою 3.11 існує унітальна локально матрична алгебра B розмірності α, $\mathbf{st}(B) = s$, яка розкладається в тензорний добуток матричних алгебр. Очевидно, що алгебри A та B — неізоморфні. Теорема 3.15 доведена. □

3.4 Числа Стейніца і універсальна еквівалентність

Ми розглядаємо унітальну $\mathbb{F}$−алгебру як алгебричну систему з двома бінарними операціями + та ·, родиною унарних операцій множення на скаляри з поля $\mathbb{F}$ і 0−арною операцією 1.

Означення 3.7 (див. [88])**.** Нагадаємо, що замкнена формула $\Phi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ мови 1-го порядку називається універсальною, якщо вона має вигляд

$$\Phi\left(x_1,\ldots,x_n\right) \;=\; \forall x_1,\;\ldots,\;\forall x_n\;\psi\left(x_1,\ldots,x_n\right),$$

де $\psi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ — формула, яка не містить кванторів.

Очевидно, що з виконуваності універсальної формули на алгебричній системі випливає її виконуваність на любій підсистемі.

Для алгебричної системи A позначимо через $UTh(A)$ множину всіх універсальних формул, які виконуються на системі A.

Означення 3.8 (див. [88])**.** Алгебричні системи тієї самої сигнатури A і B називаються універсально еквівалентними, якщо

$$UTh\,(A) \;=\; UTh\,(B).$$

Теорема 3.16. *Унітальні локально матричні алгебри A та B — універсально еквівалентні тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathbf{st}\left(\,A\,\right) \;=\; \mathbf{st}\left(\,B\,\right).$$

Для доведення цієї теореми нам знадобиться така лема.

Нехай $D(A)$ — множина усіх натуральних чисел, які ділять $\mathbf{st}(A)$ (див. (3.13)).

Лема 3.12. *Нехай A — унітальна локально матрична алгебра. Властивість*

$$n \notin D(A) \tag{3.21}$$

записується у вигляді універсальної замкненої формули.

Доведення. Розглянемо замкнену універсальну формулу

$$\Phi\big(x_{ij},\ 1 \le i,\ j \le n\ \big)\ \leftrightharpoons\ \forall x_{ij},\ 1 \le i,\ j \le n$$
$$\Big(\,(\,(\bigwedge_{i,j,t,s} x_{ij}\,x_{ts}\ =\ \delta_{jt}x_{is}\,)\,)\ \bigwedge\ \big(x_{11}\ +\ x_{22}\ +\ \ldots\ +\ x_{nn}\ =\ 1\,)\,\Big)$$
$$\rightarrow\ (1 \ne 1).$$

Ця формула виконується на унітальній локально матричній алгебрі A тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.21) Лема доведена. □

Доведення теореми 3.16. Якщо унітальні локально матричні алгебри A і B універсально еквівалентні, то згідно з лемою 3.12

$$D(A)\ =\ D(B). \tag{3.22}$$

Таким чином,

$$\mathbf{st}\ \big(A\big)\ =\ \text{НСК}\, D(A)\ =\ \text{НСК}\, D(B)\ =\ \mathbf{st}\ \big(B\big).$$

Припустимо тепер, що $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B)$. Оскільки $D(A)$ складається з усіх натуральних чисел, які ділять $\mathbf{st}(A)$, то звідси випливає рівність (3.22).

Згідно з локальною теоремою Мальцева 2.3 (див. підрозділ 2.3) алгебра A занурюється в ультрадобуток матричних алгебр

$$M_n\ (\mathbb{F}),\quad n\ \in\ D(A). \tag{3.23}$$

З рівності (3.22) випливає, що довільна матрична алгебра (3.23) унітально занурюється в алгебру B. Отже, алгебра A унітально занурюється в деякий ультрастепінь алгебри B. Згідно з теоремою Лося 2.2 (див. підрозділ 2.3)

$$UTh\ (B)\ \subseteq\ UTh\ (A).$$

Аналогічно,

$$UTh\ (A)\ \subseteq\ UTh\ (B).$$

Теорема доведена. □

Зауваження 3.6. Теорема 3.16 перестає бути правильною, якщо сигнатура алгебри не містить константу 1. У цьому випадку кожна матрична алгебра $M_n(\mathbb{F})$ буде занурюватися у будь–яку нескінченно–вимірну локально матричну алгебру. А тому довільні дві нескінченно–вимірні локально матричні алгебри будуть універсально еквівалентними.

3.5 Моріта еквівалентність локально матричних алгебр

Означення 3.9 (див. [89, 55, 62])**.** Нагадаємо, що унітальні алгебри A та B називаються Моріта еквівалентними, якщо категорії їх лівих модулів еквівалентні.

Нехай $e \in A$ — ідемпотент. Підалгебру eAe, яка є пірсівською компонентою, називатимемо *кутом алгебри* A. Ідемпотент e називається *повним*, якщо $AeA = A$.

К. Моріта (див. [85, 89, 55]) довів, що алгебри A та B є Моріта еквівалентними тоді й лише тоді, коли знайдуться $n \geq 1$ і повний ідемпотент e матричної алгебри $M_n(A)$ такі, що

$$B \;\cong\; e\, M_n(A)\, e.$$

Означення 3.10. Назвемо властивість P Моріта інваріантною, якщо дві Моріта еквівалентні алгебри A та B мають або не мають властивість P одночасно.

Лема 3.13. 1) *Локальна матричність є Моріта інваріантною властивістю.*

2) *Властивість унітальної алгебри A розкладатися в тензорний добуток матричних алгебр є Моріта інваріантною властивістю.*

Доведення. Припустимо, що унітальні алгебри A та B є Моріта еквівалентними. Тоді існує $n \geq 1$ і повний ідемпотент $e \in M_n(A)$ такі, що

$$B \;\cong\; e\, M_n(A)\, e.$$

Якщо алгебра A є локально матричною, то алгебра матриць $M_n(A)$ також є локально матричною. Ж. Діксм'є [53] показав, що кут локально матричної алгебри є локально матричною алгеброю. Звідси випливає, що B є локально матричною алгеброю.

Тепер припустимо, що

$$A \;\cong\; \bigotimes_{i\in I} A_i, \quad A_i \;\cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 1.$$

Тоді
$$M_n(A) \;\cong\; M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} A \;\cong\; M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \Big(\bigotimes_{i\in I} A_i \Big).$$

Ототожнимо елементи алгебри $M_n(A)$ з їх образами при такому ізоморфізмі. Існує скінченна підмножина $I_0 \subset I$ така, що
$$e \in M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \Big(\bigotimes_{i\in I_0} A_i \Big).$$

Як і раніше, ми помічаємо, що кут
$$e \left(M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \left(\bigotimes_{i\in I_0} A_i \right) \right) e$$

є матричною алгеброю.

Ми маємо:
$$B \;\cong\; e \left(M_n(\mathbb{F}) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \left(\bigotimes_{i\in I_0} A_i \right) \right) e \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} \left(\bigotimes_{i\in I\diagup I_0} A_i \right).$$

Лема 3.13 доведена. □

Означення 3.11. Будемо говорити, що числа Стейніца s_1 та s_2 є раціонально зв'язними, якщо знайдеться раціональне число $q \in \mathbb{Q}$ таке, що
$$s_2 \;=\; q \;\cdot\; s_1. \tag{3.24}$$

У цьому підрозділі ми доведемо таку теорему.

Теорема 3.17. 1) *Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B Моріта еквівалентні, то їх числа Стейніца раціонально зв'язні.*

2) *Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B зліченно–вимірні, то вони Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца раціонально зв'язні.*

3) *Для довільного нескінченного не локально скінченного числа Стейніца s, яке не зображується у вигляді* $(\mathrm{char}\ \mathbb{F})^{\infty} \cdot s'$*, де число Стейніца* s' *є локально скінченним, існують не Моріта еквівалентні локально матричні алгебри A і B такі, що*
$$\dim_{\mathbb{F}} A \;=\; \dim_{\mathbb{F}} B, \quad \mathbf{st}(A) \;=\; \mathbf{st}(B) \;=\; s.$$

4) *Для зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр їх класи Моріта*
тальних локально матричних алгебр довільної розмірності їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до універсальної еквівалентності.

Зауваження 3.7. Зліченність класів Моріта еквівалентності для скінченно–визначених алгебр обговорювалася у роботах *[1, 17, 49]*.

Розглянемо унітальну локально матричну алгебру A. Нехай $a \in A$. Існує підалгебра $A_1 \subset A$ така, що

$$1 \in A_1, \quad a \in A_1 \quad \text{і} \quad A_1 \cong M_n(\mathbb{F}) \quad \text{для деякого} \quad n \geq 1.$$

Нехай φ задає ізоморфізм A_1 та $M_n(\mathbb{F})$. Позначимо через r ранг матриці $\varphi(a) \in M_n(F)$. Покладемо

$$r(a) = \frac{r}{n}, \quad 0 \leq r(a) \leq 1.$$

Лема 3.14 (Курочкін, [83]**).** *Число $r(a)$ не залежить від вибору підалгебри A_1.*

Доведення. Нехай

$$1 \in A_1 \subset A, \quad 1 \in A_2 \subset A, \quad A_1 \cong M_{n_1}(\mathbb{F}), \quad A_2 \cong M_{n_2}(\mathbb{F}),$$

$$a \in A_1 \bigcap A_2.$$

Позначимо через r_1 та r_2 ранги елемента a в матричних алгебрах $M_{n_1}(\mathbb{F})$ та $M_{n_2}(\mathbb{F})$ відповідно.

Існує підалгебра $A_3 \subset A$ така, що

$$A_3 \cong M_{n_3}(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad A_1 \subset A_3, \quad A_2 \subset A_3.$$

За теоремою Веддербарна (див. теорему 2.1, підрозділ 2.2) підалгебри A_1 та A_2 є тензорними множниками в алгебрі A_3. Таким чином, в алгебрі $M_{n_3}(\mathbb{F})$ елемент a має ранг

$$r_1 \cdot \frac{n_3}{n_1} = r_2 \cdot \frac{n_3}{n_2}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{r_1}{n_1} = \frac{r_2}{n_2}.$$

Лема 3.14 доведена. □

Називатимемо число $r(a)$ *відносним рангом* (*або рангом Курочкіна*) елемента a в алгебрі A.

Лема 3.15. *Нехай e — ідемпотент унітальної локально матричної алгебри A. Тоді*

$$\mathbf{st}\,(e\,A\,e) \;=\; r(e)\;\cdot\;\mathbf{st}\,(A).$$

Доведення. Розглянемо родину підалгебр $A_i \subset A$ таких, що

$$1 \in A_1, \quad A_i \;\cong\; M_{n_i}(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad e \in A_i, \quad i \in I.$$

Тоді

$$\mathbf{st}\,(A) \;=\; \text{НСК}\,\{n_i,\; i \in I\}.$$

Ми матимемо, що

$$e\,A_i\,e \;\cong\; M_{r(e)\cdot n_i}(\mathbb{F}).$$

Отже,

$$\mathbf{st}\,(e\,A\,e) \;=\; \text{НСК}\,\Big\{r(e)\cdot n_i,\; i \in I\Big\} \;=\; r(e)\;\cdot\;\mathbf{st}\,(A).$$

Лема 3.15 доведена. □

Доведення теореми 3.17. 1) Нехай A і B — унітальні локально матричні Моріта еквівалентні алгебри. Тоді існує $n \geq 1$ і ідемпотент $e \in M_n(A)$ такі, що

$$B \;\cong\; e\,M_n(A)\,e.$$

Нехай $r(a)$ — відносний ранг ідемпотента e в локально матричній алгебрі $M_n(A)$. За лемою 3.15

$$\mathbf{st}\,(B) \;=\; r(e)\;\cdot\;\mathbf{st}\,(M_n(A)) \;=\; r(e)\;\cdot\;n\;\cdot\;\mathbf{st}\,(A).$$

Оскільки $r(e)\cdot n$ є раціональним числом, то числа Стейніца $\mathbf{st}(A)$ та $\mathbf{st}(B)$ — раціонально зв'язні.

2) Припустимо, що унітальні локально матричні алгебри A та B зліченно–вимірні, а їх числа Стейніца $\mathbf{st}(A)$ і $\mathbf{st}(B)$ — раціонально зв'язні. Наша мета — довести, що алгебри A та B є Моріта еквівалентними.

Існують натуральні числа k, l такі, що

$$k\;\cdot\;\mathbf{st}\,(A) \;=\; l\;\cdot\;\mathbf{st}\,(B).$$

Розглянемо матричні алгебри $M_k(A)$ і $M_l(B)$. Ми маємо

$$\mathbf{st}\ (M_k(A)) \ = \ k \ \cdot \ \mathbf{st}\ (A) \ = \ l \ \cdot \ \mathbf{st}\ (B) \ = \ \mathbf{st}\ (M_l(B)).$$

За теоремою Глімма 3.8 алгебри $M_k(A)$ і $M_l(B)$ ізоморфні. Отже, алгебри A та B — Моріта еквівалентні.

3) Нехай s — нескінченне не локально скінченне число Стейніца, яке не зображується у вигляді $(\text{char } \mathbb{F})^{\infty} \cdot s'$, де число Стейніца s' є локально скінченним. При доведенні теореми 3.15 ми побудували дві унітальні локально матричні алгебри A та B такі, що

$$\dim_{\mathbb{F}}\ (A) \ = \ \dim_{\mathbb{F}}\ (B), \quad \mathbf{st}\ (A) \ = \ \mathbf{st}\ (B) \ = \ s,$$

при цьому алгебра B ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр, а алгебра A — не ізоморфна. Тоді за лемою 3.13 алгебри A та B не Моріта еквівалентні.

4) Для зліченно–вимірної локально матричної алгебри A всі алгебри в її класі Моріта еквівалентності мають числа Стейніца

$$q \ \cdot \ \mathbf{st}(A), \quad \text{де} \quad q \text{ — ненульове раціональне число.}$$

Більш того, ці алгебри однозначно визначатимуться своїми числами Стейніца. Звідси випливає, що клас Моріта еквівалентності зліченний.

Якщо алгебра A не обов'язково є зліченно–вимірною, то згідно з теоремою 3.16 числа Стейніца $q \cdot \mathbf{st}(A)$ визначають універсальні елементарні теорії алгебр з класу Моріта еквівалентності. Звідси випливає, що цей клас зліченний з точністю до універсальної еквівалентності. Теорема 3.17 доведена. □

Якщо ненульові числа Стейніца s_1 та $_2$ — раціонально зв'язні, то ми можемо говорити про їх частку

$$q \ = \ \frac{s_2}{s_1} \ \in \ \mathbb{Q}.$$

Це дозволяє нам визначити порядок на класі Моріта еквівалентності зліченно–вимірних локально матричних алгебр:

для алгебр A_1, A_2 з цього класу еквівалентності покладемо

$$A_1 \ < \ A_2, \quad \text{якщо} \quad \frac{\mathbf{st}\ (A_1)}{\mathbf{st}\ (A_2)} \ < \ 1.$$

Тим самим отримаємо таке твердження.

Твердження 3.1. *Клас Моріта еквівалентності унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри є зліченною лінійно впорядкованною множиною.*

Твердження 3.2. *Якщо A_1 та A_2 — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри, то*

$$\frac{\mathbf{st}\,(A_1)}{\mathbf{st}\,(A_2)} \;<\; 1$$

тоді й лише тоді, коли алгебра A_1 ізоморфна власному куту алгебри A_2.

Доведення. Якщо $A_1 \cong e\,A_2\,e$, де e — повний ідемпотент алгебри A_2, то згідно з лемою 3.15

$$\mathbf{st}\,(A_1) \;=\; r(e) \;\cdot\; \mathbf{st}\,(A_2),$$

де $r(e)$ — відносний ранг ідемпотента e в алгебрі A_2. Звідси випливає, що

$$\frac{\mathbf{st}\,(A_1)}{\mathbf{st}\,(A_2)} \;=\; r(e) \;<\; 1.$$

Тепер припустимо, що

$$\frac{\mathbf{st}\,(A_1)}{\mathbf{st}\,(A_2)} \;=\; \frac{m}{n} \;<\; 1,$$

де m, n — взаємно прості натуральні числа. Це можливо лише в тому випадку, коли

$$n \,|\, \mathbf{st}\,(A_2).$$

Отже, алгебра A_2 містить підалгебру A_2' таку, що

$$1 \;\in\; A_2' \;\subset\; A \quad \text{i} \quad A_2' \;\cong\; M_n(\mathbb{F}).$$

Згідно з теоремою Веддербарна (див. теорема 2.1, підрозділ 2.2)

$$A_2 \;\cong\; A_2' \bigotimes{}_{\mathbb{F}}\, C \;\cong\; M_n(C),$$

де C — централізатор підалгебри A_2' в A_2.

Розглянемо ідемпотент

$$e \;=\; \mathrm{diag}(\underbrace{1\;1\;\ldots\;1}_{m}\;0\;\ldots\;0) \;\in\; M_n(C), \qquad r(e) \;=\; \frac{m}{n}\,.$$

Згідно з лемою 3.15

$$\mathbf{st}\,\big(e\,M_n(C)\,e\big) = \frac{m}{n}\cdot\mathbf{st}\,\big(A_2\big) \;=\; \mathbf{st}\,\big(A_1\big).$$

За теоремою Глімма 3.8 алгебра A_1 ізоморфна куту $e\,M_n(C)\,e$ алгебри $M_n(C)$, а тому вона ізоморфна і куту алгебри A_2. Твердження 3.2 доведене. □

Висновки до розділу 3

У цьому розділі вивчалися числа Стейніца і розклади в тензорний добуток локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є такі.

- Показано, що алгебра Кліфорда невиродженої квадратичної форми на нескінченно–вимірному векторному просторі над полем характеристики, відмінної від 2, є локально матричною алгеброю.
- Досліджена будова скінченно–вимірних узагальнених алгебр Кліфорда $Clg(l,m)$ над полем характеристики, яка є взаємно простою з числом l.
- Показано, що для нескінченної впорядкованної множини I і поля $\mathbb{F}$, характеристика якого є взаємно простою з числом l, узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l,I)$ є локально матричною алгеброю.
- Визначений інваріант довільної унітальної локально матричної алгебри, а саме, число Стейніца, яке в зліченно–вимірному випадку збігається з числом Стейніца, визначеним Дж. Гліммом.
- Побудовані приклади неізоморфних унітальних локально матричних алгебр розмірностей більших за $\aleph_0$, але таких, що мають однакові числа Стейніца. Таким чином, показано, що теорема Глімма не узагальнюється на незліченно–вимірний випадок.
- Доведено існування незліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються в тензорний добуток примарних компонент. Таким чином, отримана відповідь на питання В.М. Курочкіна: "чи розкладається довільна унітальна локально матрична алгебра в тензорний добуток примарних алгебр?"

- Побудована нова велика серія прикладів унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються у тензорний добуток матричних алгебр. Зокрема, показано, що для довільного нескінченного числа Стейніца s, відмінного від $p^{\infty} \cdot n$, де p — характеристика основного поля, а n — деяке натуральне число, знайдеться незліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра, яка має число Стейніца s і яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.
- Показано, що унітальні локально матричні алгебри (довільної розмірності) мають однакові числа Стейніца тоді й лише тоді, коли їх універсальні елементарні теорії збігаються.
- Показано, що Моріта еквівалентні унітальні локально матричні алгебри мають раціонально зв'язні числа Стейніца. Причому, якщо алгебри зліченно–вимірні, то умова раціональної зв'язності їх чисел Стейніца є необхідною і достатньою умовою для того, щоб вони були Моріта еквівалентними.
- Побудовані приклади не Моріта еквівалентних незліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр, які мають однакові числа Стейніца.
- Показано, що клас Моріта еквівалентності унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри є зліченною лінійно впорядкованною множиною.

Розділ 4

Спектри локально матричних алгебр

У цьому розділі вивчаються спектри локально матричних алгебр. Результати цього розділу опубліковано в [27].

4.1 Спектри і повні підмножини множини чисел Стейніца

Припустимо, що A — не обов'язково унітальна локально матрична алгебра. Для довільного ідемпотента $0 \neq e \in A$ підалгебра eAe є унітальною локально матричною алгеброю, тому доцільно розглядати число Стейніца $\mathbf{st}\,(eAe)$.

Означення 4.1. Назвемо множину чисел Стейніца

$$Spec\,(A) \;=\; \left\{\, \mathbf{st}\,(eAe) \mid e \;\in\; A,\; e^2 \;=\; e \,\right\}, \tag{4.1}$$

де e пробігає всі ідемпотенти алгебри A, спектром алгебри A.

Для числа Стейніца s позначимо через

$$\Omega\;(s) \;=\; \left\{\, n \;\in\; \mathbb{N} \;\middle|\; \text{число } n \text{ ділить число } s \,\right\}$$

— множину натуральних чисел, які ділять s. Нехай s_1, s_2 — числа Стейніца.

Означення 4.2. Скажемо, що число Стейніца s_1 скінченно ділить число Стейніца s_2, якщо знайдеться натуральне число

$$b \;\in\; \Omega\;(s_2) \quad \text{таке, що} \quad s_1 \;=\; \frac{s_2}{b}.$$

Позначаємо: $s_1 \big|_{fin} s_2$.

Зрозуміло, у випадку, коли число s_1 скінченно ділить число s_2, то числа Стейніца s_1, s_2 є раціонально зв'язними.

Лема 4.1. 1) *Нехай* $s_1,\ s_2 \in \mathrm{Spec}\,(A)$. *Тоді знайдуться натуральні числа* $a \in \mathbb{N}$, $b \in \Omega\,(s_1)$ *такі, що*
$$s_2 \ = \ \frac{a}{b}\, s_1.$$
2) *Нехай число Стейніца* s_1 *скінченно ділить число Стейніца* s_2 *та* $s_2 \in \mathrm{Spec}\,(A)$. *Тоді* $s_1 \in \mathrm{Spec}\,(A)$.

3) *Нехай числа Стейніца* s, ns *такі, що*
$$s,\ ns \ \in \ \mathrm{Spec}\,(A), \quad \textit{де} \quad s \ \in \ \mathbb{SN}, \quad n \ \in \ \mathbb{N}.$$
Тоді $is \in \mathrm{Spec}\,(A)$ *для довільного* i, $1 \le i \le n$.

Доведення. 1) Нехай e_1, e_2 — ідемпотенти алгебри A,
$$s_1 \ = \ \mathbf{st}\,(e_1\, A\, e_1), \quad s_2 \ = \ \mathbf{st}\,(e_2\, A\, e_2).$$
Визначимо частковий порядок на множині усіх ідемпотентів. Для ідемпотентів $e, f \in A$ скажемо, що
$$e \ \ge \ f, \quad \text{якщо} \quad f \ \in \ e\, A\, e.$$
Ми стверджуємо, що для довільних ідемпотентів $e_1, e_2 \in A$ знайдеться ідемпотент $e_3 \in A$ такий, що $e_1 \le e_3$, $e_2 \le e_3$. Справді, оскільки алгебра A є локально матричною алгеброю, то існує матрична підалгебра $M_k(\mathbb{F})$, така що
$$e_1,\ e_2 \ \in \ M_k(\mathbb{F}).$$
Якщо e_3 — одиничний елемент підалгебри $M_k(\mathbb{F})$, то
$$e_1 \ \le \ e_3, \quad e_2 \ \le \ e_3.$$
Нехай q_1, q_2 — відносні ранги ідемпотентів e_1, e_2 відповідно в унітальній локально матричній алгебрі e_3Ae_3. За лемою 3.15
$$\mathbf{st}\,(e_1\, A\, e_1) \ = \ q_1\, \mathbf{st}\,(e_3\, A\, e_3), \quad \mathbf{st}\,(e_2\, A\, e_2) \ = \ q_2\, \mathbf{st}\,(e_3\, A\, e_3).$$
Звідси випливає твердження 1).

2) Припустимо, що $e \in A$ — ідемпотент і

$$s_2 \;=\; \mathbf{st}\,(e\,A\,e).$$

Нехай натуральне число k задовольняє умову

$$k \;\in\; \Omega\,(s_2), \quad s_1 \;=\; \frac{s_2}{k}.$$

Унітальна локально матрична алгебра eAe містить підалгебру

$$M_k(\mathbb{F}) \quad \text{таку, що} \quad e \;\in\; M_k(\mathbb{F}).$$

Розглянемо матричну одиницю e_{11} алгебри $M_k(\mathbb{F})$. Відносний ранг ідемпотента e_{11} в алгебрі eAe дорівнює $\frac{1}{k}$. Знову ж таки, за лемою 3.15 ми маємо

$$\mathbf{st}\,(e_{11}\,A\,e_{11}) \;=\; \frac{1}{k}\,\mathbf{st}\,(e\,A\,e) \;=\; s_1.$$

3) Нехай $e_1, e_2 \in A$ — ідемпотенти, такі що

$$s \;=\; \mathbf{st}\,(e_1\,A\,e_1), \quad n\,s \;=\; \mathbf{st}\,(e_2\,A\,e_2), \quad n \;\geq\; 1.$$

Існує матрична підалгебра

$$M_k(\mathbb{F}) \;\subset\; A,$$

яка містить e_1 і e_2. Так як і вище, e_3 — одиниця алгебри $M_k(\mathbb{F})$. Позначимо через $\operatorname{rang}(e_i)$ ранг елемента e_i в алгебрі матриць $M_k(\mathbb{F})$ для $i = 1,\ 2,\ 3$. За лемою 3.15

$$s \;=\; \frac{\operatorname{rang}(e_1)}{k}\;\cdot\;\mathbf{st}\,(e_3\,A\,e_3), \quad n\,s \;=\; \frac{\operatorname{rang}(e_2)}{k}\;\cdot\;\mathbf{st}\,(e_3\,A\,e_3),$$

звідки випливає

$$\operatorname{rang}(e_2) \;=\; n \;\cdot\; \operatorname{rang}(e_1).$$

Зокрема,

$$n \;\cdot\; \operatorname{rang}(e_1) \;\leq\; k.$$

Розглянемо ідемпотент

$$e \;=\; \operatorname{diag}\Big(\,\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1,}_{i\cdot\operatorname{rang}(e_1)}\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\,\Big)$$

в алгебрі матриць

$$M_k(\mathbb{F}), \quad 1 \;\leq\; i \;\leq\; n.$$

За лемою 3.15

$$\mathbf{st}\,(e\,A\,e) \;=\; \frac{i\cdot \mathrm{rang}(e_1)}{k} \;\cdot\; \mathbf{st}\,(e_3\,A\,e_3) \;=$$

$$i \;\cdot\; r(e_1) \;\cdot\; \mathbf{st}\,(e_3\,A\,e_3) \;=\; i \;\cdot\; \mathbf{st}\,(e_1\,A\,e_1) \;=\; i\,s,$$

де $r(e_1)$ позначає відносний ранг елемента e_1 (див. стор. 116). Лема 4.1 доведена. □

Означення 4.3. Назвемо множину $S \subset \mathbb{SN}$ повною, якщо виконуються умови:

1) довільні два числа Стейніца із S раціонально зв'язні,
2) якщо $s_2 \in S$ і $s_1 \,\big|_{fin}\, s_2$, то $s_1 \in S$,
3) якщо s, $ns \in S$, де $s \in \mathbb{SN}$, $n \in \mathbb{N}$, то $is \in S$ для довільного i, $1 \leq i \leq n$.

Лема 4.1 стверджує, що для довільної локально матричної алгебри A її спектр Spec (A) є повною множиною чисел Стейніца.

Тепер нашою задачею є классификація усіх повних підмножин множини чисел Стейніца $\mathbb{SN}$.

Зазначимо, що коли хоча б одне число Стейніца з повної множини S є нескінченним, то завдяки умові 1) означення 4.3 усі числа з S є нескінченними.

Нехай S — повна множина чисел Стейніца. Для числа Стейніца $s \in S$ і натурального числа $b \in \Omega\,(s)$ покладемо

$$r_s(b) \;=\; \max\,\left\{\, i \;\geq\; 1 \,\middle|\, i \;\cdot\; \frac{s}{b} \;\in\; S \,\right\}.$$

Лема 4.2. *Якщо знайдеться число Стейніца* $s_0 \in S$ *і натуральне число* $b_0 \in \Omega\,(s_0)$ *такі, що*

$$r_{s_0}(b_0) \;=\; \infty,$$

то для довільних $s \in S$ *та* $b \in \Omega\,(s)$ *ми маємо*

$$r_s(b) = \infty. \tag{4.2}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що

$$r_{s_0}(b) \;=\; \infty \quad \text{для довільного} \quad b \;\in\; \Omega\,(s_0).$$

Справді, існує

$$c \;\in\; \Omega\,(s_0) \quad \text{таке, що} \quad b_0 \,|\, c \quad \text{і} \quad b \,|\, c.$$

Для довільного $i \geq 1$

$$i \cdot \frac{s_0}{b_0} = \left(i \cdot \frac{c}{b_0} \right) \cdot \frac{s_0}{c} \in S.$$

Звідси випливає, що

$$r_{s_0}(c) = \infty.$$

А також

$$i \cdot \frac{s_0}{b} = \left(i \cdot \frac{c}{b} \right) \cdot \frac{s_0}{c} \in S.$$

Інакше кажучи,

$$r_{s_0}(b) = \infty.$$

Тепер розглянемо довільне число Стейніца $s \in S$. Згідно з умовою 1) означення 4.3

$$s = \frac{a}{b} \cdot s_0, \quad \text{де} \quad b \in \Omega\,(s_0), \quad a,\ b \in \mathbb{N}.$$

Тоді з умови 2) означення 4.3 маємо

$$\frac{s_0}{b} \in S.$$

Виберемо

$$c \in \Omega\left(\frac{s_0}{b}\right).$$

Тоді

$$c \in \Omega\,(s) \quad \text{і} \quad bc \in \Omega\,(s_0).$$

Для довільного $i \geq 1$ ми маємо

$$i \cdot \frac{s}{c} = i \cdot a \cdot \frac{s_0}{bc} \in S$$

через те, що

$$r_{s_0}(bc) = \infty.$$

Звідси випливає

$$r_s(c) = \infty.$$

Отже, рівність (4.2) виконується і лема 4.2 доведена. □

Якщо повна множина чисел Стейніца S задовольняє умови леми 4.2, то будемо називати таку множину *повною множиною нескінченного типу.* В іншому випадку S — *повна множина скінченного типу.*

Для довільного числа Стейніца s_0 розглянемо множину

$$S(\infty, s_0) := \left\{ \frac{a}{b} \cdot s_0 \,\middle|\, a \in \mathbb{N},\ b \in \Omega(s_0) \right\}.$$

Лема 4.3. 1) *$S(\infty, s_0)$ є повною множиною нескінченного типу.*

2) *Якщо S — повна множина нескінченного типу, то для довільного числа Стейніца $s \in S$ виконується:*

$$S = S(\infty, s).$$

Доведення. Перевіримо для множини $S(\infty, s_0)$ умови 1), 2), 3) означення 4.3. Умова 1) очевидно виконується.

Нехай

$$s = \frac{a}{b} \cdot s_0, \quad b \in \Omega(s_0).$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що найбільший спільний дільник чисел a і b дорівнює одиниці. (Позначимо найбільший спільний дільник a і b через НСД(a, b)). Нехай $c \in \Omega(s)$. Також нехай

$$d = \text{НСД}(c, a), \quad a = a' d, \quad c = c' d, \quad \text{НСД}(a', c') = 1.$$

Тоді

$$\frac{a}{bc} \cdot s_0 = \frac{a'}{bc'} \cdot s_0 .$$

Звідси випливає, що

$$d\, c' \in \Omega(s_0).$$

Тому

$$\frac{a}{bc} \cdot s_0 = \frac{a'}{bc'} \cdot s_0 \in S(\infty, s_0),$$

тобто умова 2) означення 4.3 також виконана.

Перевіримо умову 3) означення 4.3. Нехай

$$s = \frac{a}{b} \cdot s_0 \in S(\infty, s_0), \quad b \in \Omega(s_0).$$

Нехай $c \in \Omega(s)$. Нам потрібно перевірити, що для довільного $i \geq 1$

$$i \cdot \frac{s}{c} = \frac{ia}{bc} \cdot s_0 \in S(\infty, s_0).$$

Нехай

$$\frac{a}{bc} = \frac{a'}{b'}, \quad \text{де} \quad a',\ b' \quad \text{— взаємно прості числа.}$$

Оскільки

$$\frac{a}{bc} \cdot s_0 = \frac{s}{c}$$

— число Стейніца, то $b' \in \Omega\ (s_0)$. Отже,

$$i \cdot \frac{a'}{b'} \cdot s_0 \in S\ (\infty, s_0).$$

Умову 3) означення 4.3 перевірено.

Нехай тепер S — повна множина чисел Стейніца нескінченного типу. Нехай $s_0 \in S$. Наша задача: показати, що

$$S = S\ (\infty, s_0).$$

З означення множини нескінченного типу випливає, що

$$S\ (\infty, s_0) = \left\{ \frac{a}{b} \cdot s_0\ ,\ s \in \Omega\ (s_0) \right\} \subseteq S.$$

Оскільки усі числа в множині S раціонально зв'язні (умова 1) означення 4.3), то для довільного числа $s \in S$ знайдуться $a, b \in \mathbb{N}$ такі, що

$$s = \frac{a}{b} \cdot s_0\,.$$

Не обмежуючи загальності вважаємо, що числа a, b взаємно прості. Це тягне за собою те, що $b \in \Omega\ (s_0)$. Отже, $s \in S\ (\infty, s_0)$. Лема 4.3 доведена. □

Припустимо тепер, що S — повна множина чисел Стейніца скінченного типу, тобто, для довільного $s \in S$, довільного $d \in \Omega\ (s)$ маємо:

$$r_s(b) = \max \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, i \cdot \frac{s}{b} \in S \right\} < \infty$$

і тому

$$\left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, i \cdot \frac{s}{b} \in S \right\} = [\ 1\ ,\ r_s(b)\ ].$$

Оскільки

$$b \cdot \frac{s}{b} \in S, \quad \text{то} \quad b \le r_s(b).$$

Нехай

$$s \in S, \quad b,\ c \in \Omega\ (s), \quad b \mid c.$$

Якщо
$$i \cdot \frac{s}{b} \in S, \quad \text{то} \quad \frac{ic}{b} \cdot \frac{s}{c} \in S.$$
Звідси випливає, що
$$r_s(b) \cdot \frac{c}{b} \leq r_s(c).$$
Іншими словами,
$$\frac{r_s(b)}{b} \leq \frac{r_s(c)}{c}. \tag{4.3}$$
Припустимо, що
$$i \cdot \frac{s}{c} \in S.$$
Нехай
$$k = \left[\frac{i}{c\,/\,b} \right], \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad k \cdot \frac{c}{b} \leq i.$$
Згідно з умовою 3) означення повних множин,
$$k \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{s}{c} \in S.$$
Отже,
$$k \cdot \frac{s}{b} \in S, \quad \text{тому} \quad k \leq r_s(b).$$
Ми довели, що
$$\left[\frac{r_s(c)}{c\,/\,b} \right] \leq r_s(b). \tag{4.4}$$
З нерівностей (4.3), (4.4) маємо
$$\left[\frac{r_s(c)}{c\,/\,b} \right] \leq r_s(b) \leq \frac{r_s(c)}{c\,/\,b}.$$
Оскільки $r_s(b)$ є натуральним числом, то
$$r_s(b) = \left[\frac{r_s(c)}{c\,/\,b} \right].$$
Отже,
$$\frac{r_s(c)}{c\,/\,b} - 1 < r_s(b),$$
$$\frac{r_s(c)}{c\,/\,b} < r_s(b) + 1.$$
Тому
$$\frac{r_s(b)}{b} \leq \frac{r_s(c)}{c} < \frac{r_s(b)}{b} + \frac{1}{b}. \tag{4.5}$$

Лема 4.4. *Нехай $s \in S$ — нескінченне число Стейніца. Тоді існує границя*

$$r_S(s) = \lim_{\substack{b \in \Omega(s) \\ b \to \infty}} \frac{r_s(b)}{b}, \quad \textit{причому} \quad 1 \le r_S(s) < \infty.$$

Якщо множина чисел Стейніца S фіксована, то ми далі замість $r_S(s)$ часто будемо писати просто $r(s)$.

Доведення леми 4.4. Покажемо, що множина

$$\left\{ \frac{r_s(b)}{b} \,\middle|\, b \in \Omega(s) \right\}$$

обмежена згори. Справді, нехай $b_0 \in \Omega(s)$. Для довільного числа $b \in \Omega(s)$ існує число $c \in \Omega(s)$ таке, що

$$b_0 \,|\, c, \quad b \,|\, c.$$

Тоді згідно (4.3) і (4.5)

$$\frac{r(b)}{b} \le \frac{r(c)}{c} < \frac{r(b_0)}{b_0} + \frac{1}{b_0}.$$

Таким чином, множина

$$\left\{ \frac{r(b)}{b}, \, b \in \Omega(s) \right\}$$

обмежена згори числом

$$\frac{r(b_0)}{b_0} + \frac{1}{b_0}.$$

Нехай

$$r = r(s) = \sup \left\{ \frac{r_s(b)}{b} \,\middle|\, b \in \Omega(s) \right\}.$$

Ясно, що $1 \le r < \infty$. Оберемо $\varepsilon > 0$. Покладемо

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{2r}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Покажемо, що для довільного $b \in \Omega(s)$, $b \ge N(\varepsilon)$, виконується

$$r - \varepsilon < \frac{r_s(b)}{b}.$$

Справді, нехай

$$b \in \Omega(s), \quad b \ge \left[\frac{2r}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{2r}{\varepsilon}.$$

Помітимо, що

$$\frac{1}{b} < \frac{\varepsilon}{2r} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Знайдемо число $b_0 \in \Omega\ (s)$ таке, що

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{r_s(b_0)}{b_0}.$$

Існує $c \in \Omega\ (s)$ таке, що $b_0 \,|\, c$ та $b \,|\, c$. Тоді завдяки (4.5) ми маємо

$$\frac{r(b)}{b} > \frac{r(c)}{c} - \frac{1}{b} \geq \frac{r(b_0)}{b_0} - \frac{1}{b} > r - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = r - \varepsilon.$$

Отже,

$$r = \lim_{\substack{b \in \Omega\ (s) \\ b \to \infty}} \frac{r_s(b)}{b}.$$

Лема 4.4 доведена. □

Зауваження 4.1. По суті границя $r(s)$ дорівнює оберненому значенню інваріанта щільності Баранова в *[6]*.

Лема 4.5. *Нехай $s,\ s' \in S$ — нескінченні числа Стейніца,*

$$s' = \frac{a}{b}\, s, \quad a,\, b \in \mathbb{N}, \quad b \in \Omega\ (s).$$

Тоді

$$r(s') = \frac{a}{b}\, r(s).$$

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що якщо $s \in S$, $ms \in S$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$m \cdot r(m\, s) = r(s).$$

Якщо $b \in \Omega\ (s)$ та

$$i \cdot \frac{m\, s}{b} \in S, \quad \text{то} \quad i \cdot m \cdot \frac{s}{b} \in S.$$

Маємо, що

$$r_{ms}(b) \cdot m \leq r_s(b).$$

Тому

$$r(m\, s) \cdot m \leq r(s).$$

З іншого боку, якщо

$$i \cdot \frac{s}{b} \in S, \quad \text{то} \quad \left[\frac{i}{m}\right] \cdot m \leq i.$$

Тому

$$\left[\frac{i}{m} \right] \cdot m \cdot \frac{s}{b} \in S.$$

Ми показали, що

$$\left[\frac{r_s(b)}{m} \right] \le r_{ms}(b), \quad \frac{r_s(b)}{m} - 1 < r_{ms}(b),$$

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{r_s(b)}{b} - \frac{1}{b} < \frac{r_{ms}(b)}{b}.$$

Переходячи до границі при $b \longrightarrow \infty$, маємо

$$\frac{1}{m} \cdot r(s) \le r(m\,s).$$

Лема 4.5 доведена. □

Переходячи в нерівності (4.5) до границі при $c \longrightarrow \infty$, одержуємо:

$$\frac{r_s(b)}{b} \le r(s) \le \frac{r_s(b)}{b} + \frac{1}{b},$$

звідки

$$r_s(b) \le r(s)\,b \le r_s(b) + 1.$$

Якщо число $r(s)$ є ірраціональним, то

$$r_s(b) = \left[r(s)\,b \right] \quad \text{для довільного} \quad b \in \Omega\,(s).$$

Тепер припустимо, що число $r = r_s(b)$ є раціональним, тобто $r = u/v$, де u, v — взаємно прості натуральні числа.

Якщо число b не є кратним числу v, то, як і вище, отримаємо

$$r_s(b) = \left[\frac{u}{v}\,b \right].$$

Якщо число b є кратним числу v, то

$$r_s(b) = \left[\begin{array}{ll} r\,b & \text{або} \\ r\,b - 1 & . \end{array} \right.$$

Лема 4.6. *Якщо хоча б для одного числа*

$$b_0 \in \Omega\,(s) \bigcap v\,\mathbb{N}$$

має місце $r_s(b_0) = rb_0$, *то для всіх*

$$b \in \Omega(s) \bigcap v\,\mathbb{N}$$

виконується

$$r_s(b) = rb. \tag{4.6}$$

Доведення. Нехай

$$b,\ c \in \Omega(s) \bigcap v\,\mathbb{N} \quad \text{та} \quad b\,|\,c.$$

Якщо виконується (4.6), то згідо з нерівністю (4.3) ми маємо

$$r = \frac{r_s(b)}{b} \le \frac{r_s(c)}{c},$$

звідки випливає $r_s(c) = rc$. З іншого боку, якщо $r_s(c) = rc$, то згідно з нерівністю (4.5) отримаємо:

$$r = \frac{r_s(c)}{c} < \frac{r_s(b)}{b} + \frac{1}{b}.$$

Звідси випливає: $r_s(b) > rb - 1$. Отже, $r_s(b) = rb$. Ми довели, що (4.6) справджується тоді і тільки тоді, коли $r_s(c) = rc$.

Тепер нехай

$$b_1,\ b_2 \in \Omega(s) \bigcap v\,\mathbb{N} \quad \text{і} \quad r_s(b_1) = r\,b_1.$$

Існує число

$$c \in \Omega(s) \bigcap v\,\mathbb{N} \quad \text{таке, що} \quad b_1\,|\,c \quad \text{і} \quad b_2\,|\,c.$$

Згідно з доведеним вище, $r_s(b_1) = rb_1$ тягне за собою $r_s(c) = rc$, що, у свою чергу, тягне за собою $r_s(b_2) = rb_2$. Лема 4.6 доведена. □

Виберемо нескінченне число Стейніца s і дійсне число r, $1 \le r < \infty$. Розглянемо такі множини чисел Стейніца

$$S(r,s) = \left\{ \frac{a}{b}\,s \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{N},\ b \in \Omega(s),\ a \le rb \right\},$$

$$S^{+}(r,s) = \left\{ \frac{a}{b}\,s \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{N},\ b \in \Omega(s),\ a < rb \right\}.$$

Якщо r є ірраціональним числом або r є раціональним числом, але таким, що $r = u/v$, де u, v — взаємно прості натуральні числа і $v \notin \Omega(s)$, то

$$S(r,s) = S^{+}(r,s).$$

Якщо ж r є раціональним числом таким, що $r = u/v$, $v \in \Omega\,(s)$, то

$$S^{+}\,(r,s) \;\subsetneqq\; S\,(r,s).$$

Лема 4.7. *Множини чисел Стейніца* $S\,(r,s)$ *і* $S^{+}\,(r,s)$ *є повними.*

Доведення. Умова 1) означення 4.3 повних множин очевидним чином виконана. Перевіримо умову 2). Нехай

$$\frac{a}{b}\,s \;\in\; S\,(r,s) \quad (\text{ відповідно } \;\frac{a}{b}\,s \;\in\; S^{+}\,(r,s)\;),$$

де a, b — взаємно прості натуральні числа, $b \in \Omega\,(s)$. Тоді

$$a \;\le\; rb \quad (\text{ відповідно } \; a \;<\; rb\;).$$

Припустимо, що

$$c \;\in\; \Omega\left(\frac{a}{b}\,s\right).$$

Нам потрібно перевірити, що

$$\frac{a}{b\,c}\,s \;\in\; S\,(r,s) \quad (\text{ відповідно } \;\frac{a}{b\,c}\,s \;\in\; S^{+}\,(r,s)\;).$$

Нехай

$$d \;=\; \text{НСД}\,(a,c), \quad a \;=\; d\,a', \quad c \;=\; d\,c'.$$

Тоді

$$\frac{a\,s}{b\,c} \;=\; \frac{a'}{b\,c'}\,s.$$

Оскільки число a' є взаємно простим з числом bc', то $bc' \in \Omega\,(s)$. Нерівність

$$a' \;\le\; rbc' \quad (\text{ відповідно } \; a' \;<\; rbc'\;)$$

рівносильна нерівності

$$a \;\le\; rbc \quad (\text{ відповідно } \; a \;<\; rbc\;).$$

Остання нерівність випливає з

$$a \;\le\; rb \quad (\text{ відповідно } \; a \;<\; rb\;).$$

Отже, умова 2) означення 4.3 справджується.

Перевіримо умову 3). Так як і вище, припустимо, що a, b — взаємно прості натуральні числа, $b \in \Omega(s)$ і

$$\frac{a}{b} \in S\,(r,s) \quad (\text{ відповідно } \frac{a}{b} \in S^{+}\,(r,s)\ ).$$

Нехай

$$c \in \Omega\left(\frac{a}{b}\,s\right), \quad \text{НСД}\,(a,c) = d, \quad a = da', \quad c = dc'.$$

Як було показано вище, $bc' \in \Omega\ (s)$. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і

$$n\,\frac{as}{bc} \in S\,(r,s) \quad (\text{ відповідно } n\,\frac{as}{bc} \in S^{+}\,(r,s)\ ).$$

Тоді

$$na' \leq rbc' \quad (\text{ відповідно } na' < rbc'\ ).$$

Звідси безпосередньо випливає, що для довільного i, $1 \leq i \leq n$, ми маємо

$$ia' \leq rbc' \quad (\text{ відповідно } ia' < rbc'\ ),$$

тобто

$$i\,\frac{as}{b} \in S\,(r,s) \quad (\text{ відповідно } i\,\frac{as}{b} \in S^{+}\,(r,s)\ ).$$

Лема 4.7 доведена. □

Лема 4.8. *Нехай $r = u/v$, де u, v взаємно прості натуральні числа, s — нескінченне число Стейніца і нехай $v \in \Omega\ (s)$. Тоді множина $S^{+}\ (r,s)$ не збігається ні з однією з множин $S\ (r',s')$, $r' \in [1,\infty)$, $s' \in \mathbb{SN}$.*

Доведення. З леми 4.5 випливає, що якщо $s_2 \in S\ (r,s_1)$ (відповідно $s_2 \in S^{+}\ (r,s_1)$) та

$$s_2 = \frac{a}{b}\,s_1, \quad s_2 \in \mathbb{SN}, \quad \text{де} \quad a,\ b \in \mathbb{N},$$

то

$$S\,(r,s_1) = S\left(r\,\frac{b}{a}, s_2\right) \ \left(\text{відповідно } S^{+}\,(r,s_1) = S^{+}\left(r\,\frac{b}{a}, s_2\right)\right).$$

Тому для даного числа r множина $S\ (r,s)$ (відповідно $S^{+}\ (r,s)$) повністю визначається довільним числом Стейніца $s' \in S\ (r,s)$ (відповідно $s' \in S^{+}\ (r,s)$).

Припустимо, що

$$S = S\,(r_1,s_1) = S^{+}\,(r_2,s_2).$$

Обираючи довільне число Стейніца $s \in S$, ми отримаємо

$$S\,(r'_1, s) \;=\; S^{+}\,(r'_2, s)$$

для деяких r'_1, $r'_2 \in [1, \infty)$. При цьому число $r'_2 = u/v$ є раціональним, де НСД $(u, v) = 1$ і $v \in \Omega\,(s)$. Число r однозначно визначається повною множиною S і вибором числа Стейніца s, тому

$$r'_1 \;=\; r'_2.$$

Тепер залишилось відмітити, що для раціонального числа $r = u/v$, де НСД $(u, v) = 1$, і нескінченного числа Стейніца s такого, що $v \in \Omega\,(s)$, отримаємо

$$S\,(r, s) \;\neq\; S^{+}\,(r, s).$$

Лема 4.8 доведена. □

Лема 4.9. *Нехай*

$$S \;\subset\; \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$$

— повна множина чисел Стейніца скінченного типу,

$$s \;\in\; S, \quad r \;=\; r_S(s) \;\in\; [1,\; \infty).$$

Тоді

$$S \;=\; S\,(r, s) \quad \textit{або} \quad S \;=\; S^{+}\,(r, s).$$

Доведення. Нагадаємо, що для числа $b \in \Omega\,(s)$ ми визначили

$$r_s(b) \;=\; \max\,\left\{\, i \;\in\; \mathbb{N} \;\middle|\; i\,\frac{s}{b} \;\in\; S \,\right\}.$$

Ми показали, що якщо число r є ірраціональним або число r є раціональним, де $r = u/v$ для u, v — взаємно простих натуральних чисел і $v \notin \Omega\,(s)$, то

$$r_s(b) \;=\; [\; rb \;] \quad \text{для довільного} \quad b \;\in\; \Omega\,(s).$$

Довільне число Стейніца $s' \in S$ може бути зображене у вигляді

$$s' \;=\; \frac{a}{b}\,s,$$

де a, b — взаємно прості натуральні числа. Очевидно, що

$$b \in \Omega\ (s), \quad a \ \leq \ r_s(b) \ = \ [\ rb\ ].$$

Тому, якщо число r є ірраціональним або число r є раціональним таким, що $r = u/v$, де u, v — взаємно прості натуральні числа і $v \notin \Omega\ (s)$, то

$$S \ = \ S\ (r, s) \ = \ S^{+}\ (r, s).$$

Припустимо тепер, що

$$r \ = \ \frac{u}{v}, \quad \text{НСД}\ (u, v) \ = \ 1, \quad v \ \in \ \Omega\ (s).$$

Якщо

$$b \ \in \ \Omega\ (s) \setminus v\mathbb{N},$$

то, як і вище,

$$r_s(b) \ = \ [\ rb\ ].$$

За лемою 4.6

- або для всіх $b \ \in \ \Omega\ (s) \ \bigcap \ v\mathbb{N}$ ми маємо $r_s(b) \ = \ rb$,
- або для всіх $b \ \in \ \Omega\ (s) \ \bigcap \ v\mathbb{N}$ ми маємо $r_s(b) \ = \ rb \ - \ 1$.

У першому випадку $S = S\ (r, s)$. У другому випадку $S = S^{+}\ (r, s)$. Лема 4.9 доведена. □

Лема 4.10. *Нехай S — повна множина натуральних чисел. Тоді або $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, або $S = \mathbb{N}$.*

Доведення. Те, що множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ і $\mathbb{N}$ є повними, перевіряється безпосередньо. Покажемо, що інших повних підмножин $S \subseteq \mathbb{N}$ немає. Нехай $S \subseteq \mathbb{N}$ — повна множина. Якщо $n \in S$, то $n \in \Omega\ (n)$ і

$$n \ \cdot \ \frac{n}{n} \ \in \ S.$$

Тому згідно з умовою 3) означення 4.3 усі натуральні числа

$$i \ = \ i \ \cdot \ \frac{n}{n}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

лежать в S. Звідси випливає твердження леми 4.10. □

Результати цього підрозділу можна резюмувати такою теоремою.

Теорема 4.1. *Кожна повна множина чисел Стейніца належить до одного з таких типів:*

1) $S(r,s)$, *де* $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r \in [1,\infty)$;
2) $S^+(r,s)$, *де* $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r = u/v$, u, v *— взаємно прості натуральні числа,* $v \in \Omega(s)$;
3) $\mathbb{N}$ *або* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *для деякого* $n \in \mathbb{N}$;
4) $S(\infty, s)$, *де* $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$.

Кожна з множин $S(r,s)$, $S^+(r,s)$, $\mathbb{N}$, $\{1, 2, \ldots, n\}$, $S(\infty, s)$ *є повною.*

4.2 Зліченно–вимірні неунітальні локально матричні алгебри

Класифікація неунітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр над полем комплексних чисел була отримана Ж. Діксм'є [53]. О.О. Баранов [5, 6, 8] узагальнив її на алгебри над довільним полем. В обох випадках алгебри, що вивчалися, параметризувалися числом Стейніца s і дійсним числом r, а інваріанти s і r будувалися за зростаючими ланцюгами матричних підалгебр.

У цьому підрозділі ми дамо нове трактування теореми Діксм'є–Баранова, яке базується на класифікації повних множин чисел Стейніца (теорема 4.1). Переваги цього підходу буде продемонстровано в підрозділі 5.4 розділу 5.

Ми доведемо таку теорему.

Теорема 4.2. 1) *Для довільної повної множини чисел Стейніца* S *знайдеться зліченно–вимірна локально матрична алгебра* A *така, що* $\mathrm{Spec}(A) = S$.

2) *Якщо* A, B *— зліченно–вимірні локально матричні алгебри, то*

$$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B) \quad \textit{тоді й лише тоді, коли} \quad A \cong B.$$

Нехай

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \qquad (4.7)$$

— зростаючий ланцюг унітальних локально матричних алгебр, A_i — кут в алгебрі A_{i+1}, $i \geq 1$. Тоді

$$\mathrm{Spec}\,(A_1) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A_2) \subseteq \cdots .$$

Нехай

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Лема 4.11. *Для зростаючого ланцюга* (4.7) *унітальних локально матричних алгебр* A_i, $i \geq 1$,

$$\mathrm{Spec}\,(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Spec}\,(A_i).$$

Доведення. Для довільного ідемпотента $e \in A_i$ ми маємо

$$eA_ie = eAe.$$

Тому

$$\mathrm{Spec}\,(A_i) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A).$$

З іншого боку, довільний ідемпотент $e \in A$ лежить в одній із підалгебр A_i. Тому

$$\mathbf{st}\,(eAe) = \mathbf{st}\,(eA_ie) \in \mathrm{Spec}\,(A_i).$$

Лема 4.11 доведена. □

Доведення теореми 4.2. 1) Зауважимо, що

$$\{\,1,\ 2,\ \ldots,\ n\,\} = \mathrm{Spec}\,(M_n(\mathbb{F})).$$

Нехай s — число Стейніца. Ми вже відмічали, що існує не більш ніж зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A така, що $\mathbf{st}(A) = s$. Справді, якщо

$$s = \prod_i p_i, \quad \text{де} \quad p_i \quad \text{— прості числа,}$$

то досить покласти

$$A = \bigotimes_i M_{p_i}(\mathbb{F}).$$

Розглянемо алгебру $M_\infty(A)$ нескінченних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матриць, які мають скінченне число ненульових входжень. Алгебра $(n\times n)$–матриць $M_n(A)$ занурюється в алгебру $M_\infty(A)$ як верхній лівий кут і

$$M_1(A) \subset M_2(A) \subset \cdots, \quad M_\infty(A) = \bigcup_{n\geq 1} M_n(A).$$

Звідси, зокрема, випливає, що $M_\infty(A)$ — локально матрична алгебра. Покажемо, що

$$\text{Spec}\left(M_\infty(A) \right) = S\,(\infty, s). \tag{4.8}$$

За лемою 4.11

$$\text{Spec}\left(M_\infty(A) \right) = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} \text{Spec}\left(M_n(A) \right).$$

Ми маємо:

$$\mathbf{st}\left(M_n(A)\right) = n\,s.$$

Нехай e — ідемпотент алгебри $M_n(A)$ відносного рангу r. Згідно з лемою 3.15

$$\mathbf{st}\left(eM_n(A)e \right) = r\cdot \mathbf{st}\big(M_n(A) \big) = r\,n\,s.$$

Отже,

$$\text{Spec}\left(M_n(A) \right) = \Big\{ \frac{a}{b}\, n\, s, \quad b \in \Omega\,(ns),$$

$$a,\ b \text{ — натуральні числа} \quad \text{і} \quad 1 \leq a \leq b \Big\}.$$

Звідси випливає, що

$$\text{Spec}\left(M_n(A) \right) \subseteq S\,(\infty, s).$$

Число Стейніца

$$\frac{a}{b}\, s, \quad b \in \Omega\,(s),$$

лежить у Spec $(M_n(A))$ для довільного n такого, що $a/b \leq n$. Рівність (4.8) доведена.

Зокрема,

$$\text{Spec}\left(M_\infty(\mathbb{F}) \right) = \mathbb{N}.$$

Нехай тепер

$$S = S\,(r,s) \quad \text{або} \quad S = S^+\,(r,s), \quad 1 \leq r < \infty,$$

де s — нескінченне число Стейніца.

Оберемо послідовність

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ \in\ \Omega\,(s),$$

таку що

$$b_i \mid b_{i+1}, \quad i\ \geq\ 1,$$

і s — найменше спільне кратне чисел b_i, $i\ \geq\ 1$. Як ми вже відмічали вище, існує єдина (з точністю до ізоморфізму) унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра

$$A_{s/b_i} \quad \text{така, що} \quad \mathbf{st}\,(A_{s/b_i})\ =\ \frac{s}{b_i}\,.$$

Нехай

$$A_i\ =\ M_{r_s(b_i)}\left(A_{s/b_i}\right).$$

Варто зауважити, що алгебри

$$A_{s/b_i} \quad \text{і} \quad M_{b_{i+1}/b_i}\left(A_{s/b_{i+1}}\right)$$

мають однакові числа Стейніца. За теоремою Глімма (див. 3.8)

$$A_{s/b_i}\ \cong\ M_{b_{i+1}/b_i}\left(A_{s/b_{i+1}}\right)$$

і, отже,

$$A_i\ =\ M_{r_s(b_i)}\left(A_{s/b_i}\right)\ \cong\ M_{r_s(b_i)\,\cdot\,\frac{b_{i+1}}{b_i}}\left(A_{s/b_{i+1}}\right).$$

З нерівності (4.3) випливає

$$r_s(b_i)\ \cdot\ \frac{b_{i+1}}{b_i}\ \leq\ r_s(b_{i+1}).$$

Таким чином, алгебра A_i занурюється в алгебру A_{i+1} як верхній лівий кут. Покладемо

$$A\ =\ \bigcup_{i\geq 1} A_i.$$

Ми покажемо, що $\operatorname{Spec}\,(A)\ =\ S$. Нехай $e\ \in\ A$ — ідемпотент. Тоді $e\ \in\ A_i$ для деякого i. Згідно з лемою 3.15 маємо

$$\mathbf{st}\,(eA_ie)\ =\ \frac{a}{b}\,\mathbf{st}\,(A_i),$$

де a і b — взаємно прості натуральні числа,

$$b\ \in\ \Omega\left(\mathbf{st}\,(A_i)\right), \quad a\ \leq\ b.$$

Далі,

$$\mathbf{st}\,(A_i) \;=\; r_s(b_i)\,\frac{s}{b_i}, \quad \mathbf{st}\,(eA_ie) \;=\; \frac{a}{b}\,r_s(b_i)\,\frac{s}{b_i}.$$

Нехай

$$d \;=\; \text{НСД}\,(b, r_s(b_i)), \quad b \;=\; d\,b', \quad r_s(b_i) \;=\; d \,\cdot\, r_s(b_i)'.$$

Тепер

$$\mathbf{st}\,(eA_ie) \;=\; \frac{a \cdot r_s(b_i)'}{b'} \;\cdot\; \frac{s}{b_i} \;\in\; \mathbb{SN}.$$

Звідси випливає, що

$$b' \;\in\; \Omega\,\left(\frac{s}{b_i}\right)$$

і тому $b'b_i \in \Omega\,(s)$. Для того, щоб показати, що $\mathbf{st}\,(eA_ie)$ належить $S\,(r,s)$ (відповідно $\mathbf{st}\,(eA_ie)$ належить $S^+\,(r,s)$) нам треба перевірити, чи

$$a \cdot r_s(b_i)' \;\le\; r\,b'\,b_i \quad (\text{відповідно} \quad a \cdot r_s(b_i)' \;<\; r\,b'\,b_i\,).$$

Домножуючи обидві частини цих нерівностей на d, отримаємо

$$a \cdot r_s(b_i) \;\le\; r\,b\,b_i \quad (\text{відповідно} \quad a \cdot r_s(b_i) \;<\; r\,b\,b_i\,).$$

Ці нерівності виконуються, оскільки

$$a \;\le\; b \quad \text{і} \quad r_s(b_i) \;\le\; r \cdot b_i$$

$$(\text{відповідно} \quad a \;\le\; b \quad \text{і} \quad r_s(b_i) \;<\; r \cdot b_i\,).$$

Ми показали, що $\mathrm{Spec}\,(A) \subseteq S$.

Покажемо, що $S \subseteq \mathrm{Spec}\,(A)$. Розглянемо число Стейніца

$$\frac{a}{b}\,s \;\in\; S, \quad b \;\in\; \Omega\,(s); \quad a,\; b \;\in\; \mathbb{N},$$

де

$$a \;\le\; r\,b \quad \text{для випадку} \quad S \;=\; S\,(r,s)$$

або

$$a \;<\; r\,b \quad \text{для випадку} \quad S \;=\; S^+\,(r,s).$$

Існує член нашої послідовності b_i такий, що

$$b \mid b_i, \quad b_i \;=\; k \cdot b, \quad k \;\in\; \mathbb{N}.$$

Тоді
$$\frac{a}{b}\,s \;=\; \frac{a\,k}{b_i}\,s.$$

Покажемо, що
$$a\,k \le r_s(b_i). \tag{4.9}$$

Домножуючи обидві сторони нерівності (4.9) на b, ми отримаємо
$$a\,b_i \;\le\; r_s(b_i)\,b.$$

Припустимо, що $S = S\ (r,s)$. Тоді $a \le rb$. Оскільки a — натуральне число, то звідси випливає $a \le [r\,b]$. Далі,
$$r_s(b_i) \;=\; [r\,b_i] \;=\; [r\,b\,k].$$

Тепер нам достатньо довести, що
$$[r\,b]\,k \;\le\; [r\,b\,k]. \tag{4.10}$$

Нерівність (4.10) виконується зважаючи на те, що
$$[r\,b]\,k \quad \text{— натуральне число і} \quad [r\,b]\,k \;\le\; r\,b\,k.$$

Тепер припустимо, що $S = S^{+}\ (r,s)$. Тоді $a < rb$,
$$r_s(b_i) = \begin{cases} [r\,b_i], & \text{якщо} \quad r\,b_i \notin \mathbb{N}, \\ r\,b_i - 1, & \text{якщо} \quad r\,b_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Можливі три випадки:

1) $r\,b \in \mathbb{N}$ і, таким чином, $r\,b_i \in \mathbb{N}$. У цьому випадку
$$a \;\le\; r\,b - 1, \quad r_s(b_i) \;=\; r\,b_i - 1.$$

Тоді
$$a\,b_i \;\le\; (r\,b - 1)\,b_i \;\le\; (r\,b_i - 1)\,b \;=\; r_s(b_i)\,b.$$

2) $r\,b \notin \mathbb{N}$, але $r\,b_i \in \mathbb{N}$. Тоді
$$a \;\le\; [r\,b], \quad r_s(b_i) \;=\; r\,b_i - 1.$$

Ми маємо:
$$a\,b_i \;\le\; [r\,b]\,b_i, \quad r_s(b_i)\,b \;=\; (r\,b_i - 1)\,b,$$

тому достатньо довести, що

$$[r\,b]\,k \;\le\; r\,b_i \,-\, 1 \;=\; r\,b\,k \,-\, 1.$$

Число $[r\,b]\,k$ лежить у $\mathbb{N}$ і

$$[r\,b]\,k \;<\; r\,b\,k, \quad \text{оскільки} \quad [r\,b] \;<\; r\,b.$$

Звідси випливає необхідна нерівність.

3) $r\,b_i \notin \mathbb{N}$, і, таким чином, $r\,b \notin \mathbb{N}$. У цьому випадку

$$a\,b_i \;\le\; [r\,b]\,b\,k, \quad r_s(b_i)\,b \;=\; [r\,b\,k]\,b.$$

Залишилось відмітити, що $[r\,b]\,k \le [r\,b\,k]$.

Ми довели, що для $S = S\,(r,s)$ та $S = S^{+}\,(r,s)$ справедлива нерівність (4.9).

Нагадаємо, що

$$A_i \;=\; M_{r_s(b_i)}\,\left(A_{s/b_i}\right).$$

Розглянемо підалгебру $M_{ak}\left(A_{s/b_i}\right)$ алгебри A_i, котра лежить у лівому верхньому куті. Ми маємо:

$$\mathbf{st}\;\left(M_{ak}\left(A_{s/b_i}\right)\right) \;=\; a\,k\;\cdot\;\frac{s}{b_i} \;=\; \frac{a}{b}\,s,$$

і, отже, $S \subseteq \mathrm{Spec}\;(A)$. Частина 1) теореми 4.2 доведена. □

Для доведення частини 2) теореми 4.2 нам знадобляться декілька лем.

Лема 4.12. *Нехай A — локально матрична алгебра, $M_n(\mathbb{F}) < A$. Тоді кожен автоморфізм алгебри $M_n(F)$ продовжується до автоморфізму алгебри A.*

Зауваження 4.2. Зазначимо, що $M_n(\mathbb{F})$ є підалгеброю алгебри A у такому сенсі: існує ізоморфізм $\varphi : A' \to M_n(\mathbb{F})$, де A' — підалгебра алгебри A.

Доведення. Нехай e — одиничний елемент алгебри $M_n(\mathbb{F})$. Тоді кут eAe — унітальна локально матрична алгебра. Позначимо через C централізатор підалгебри $M_n(\mathbb{F})$ в eAe. За теоремою Веддербарна (див. теорему 2.1, підрозділ 2.2)

$$e\,A\,e \;=\; M_n(\mathbb{F})\;\bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}}\,C.$$

Довільний автоморфізм φ алгебри $M_n(\mathbb{F})$ є внутрішнім, тобто існує оборотний елемент $x \in GL_n(\mathbb{F})$ такий, що

$$\varphi(a) = x^{-1}ax \quad \text{для всіх елементів} \quad a \in M_n(\mathbb{F}).$$

Спряження елементом $x \otimes 1$ продовжує автоморфізм φ до автоморфізму алгебри eAe. Розглянемо пірсівський розклад (див., наприклад, [96])

$$A = eAe + eA(1-e) + (1-e)Ae + (1-e)A(1-e)$$

і відображення

$$\tilde{\varphi}\colon A \ni a \mapsto x^{-1}ax + x^{-1}a(1-e) + (1-e)ax + (1-e)a(1-e).$$

Відображення $\tilde{\varphi}$ є автоморфізмом алгебри A і продовжує автоморфізм φ. Лема 4.12 доведена. □

Лема 4.13. *Нехай A — унітальна локально матрична алгебра, $e \in A$ — ідемпотент. Тоді довільний автоморфізм кута eAe продовжується до автоморфізму алгебри A.*

Доведення. Припустимо спочатку, що автоморфізм φ алгебри eAe є внутрішнім, тобто, знайдеться елемент $x_e \in eAe$, оборотний в алгебрі eAe, такий, що

$$\varphi(a) = x_e^{-1}\, a\, x_e \quad \text{для довільного елемента} \quad a \in e\,A\,e.$$

Тоді елемент $x = x_e + (1-e)$ є оборотним в алгебрі A. Можна помітити, що автоморфізм спряження елементом x продовжує φ.

Тепер виберемо підалгебру $A_1 \subset A$ таку, що

$$1, \quad e \in A_1 \quad \text{і} \quad A_1 \cong M_m(\mathbb{F}) \quad \text{для деякого} \quad m \geq 1.$$

Оберемо також підалгебру $A_2 \subset A$ таку, що

$$A_1 \subseteq A_2, \quad \varphi(e\,A_1\,e) \subseteq A_2 \quad \text{і} \quad A_2 \cong M_n(\mathbb{F}).$$

Розглянемо унітальне занурення

$$\varphi: \; e\,A_1\,e \;\to\; \varphi\,(e\,A_1\,e) \;\subset\; e\,A_2\,e.$$

За теоремою Сколема–Нетер (див. [69])) існує елемент $x_e \in eA_2e$, оборотний в алгебрі eA_2e, такий, що

$$\varphi(a) \ = \ x_e^{-1} \, a \, x_e \quad \text{для довільного елемента} \quad a \ \in e \, A_1 \, e.$$

Вище ми зазначали, що існує автоморфізм ψ алгебри A, який продовжує автоморфізм

$$e \, A \, e \ \to \ e \, A \, e, \quad a \ \mapsto \ x_e^{-1} \, a \, x_e.$$

Тоді композиція $\psi^{-1} \circ \varphi$ залишає кожен елемент алгебри eA_1e нерухомим. Достатньо довести, що автоморфізм

$$\psi^{-1} \circ \varphi \ \in \ \mathrm{Aut} \ (e \, A \, e)$$

продовжується до автоморфізму алгебри A. Тому, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що φ залишає кожен елемент алгебри eA_1e нерухомим.

Нехай C — централізатор підалгебри A_1 в алгебрі A. Тоді за теоремою Веддербарна

$$A \ = \ A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C \quad \text{і} \quad e \, A \, e \ = \ e \, A_1 \, e \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C.$$

Оскільки підалгебра

$$e \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C \tag{4.11}$$

є централізатором підалгебри

$$e \, A_1 \, e \bigotimes 1 \quad \text{в алгебрі} \quad e \, A \, e,$$

то автоморфізм φ переводить підалгебру (4.11) в себе. Отже, існує автоморфізм $\theta \in \mathrm{Aut} \ (C)$ такий, що

$$\varphi \ (a \ \otimes \ c) \ = \ a \ \otimes \ \theta(c) \quad \text{для довільних елементів} \quad a \ \in \ e \, A \, e, \quad c \ \in \ C.$$

Тепер автоморфізм

$$\tilde{\varphi} \ (a \ \otimes \ c) \ = \ a \ \otimes \ \theta(c), \quad a \ \in \ A_1, \quad c \ \in \ C,$$

продовжує φ. Лема 4.13 доведена. □

Лема 4.14. *Нехай A — унітальна локально матрична алгебра, $e_1, e_2 \in A$ — ідемпотенти. Довільний ізоморфізм*

$$\varphi \ : \ e_1 \, A \, e_1 \ \to \ e_2 \, A \, e_2$$

продовжується до автоморфізму алгебри A.

Доведення. Існує матрична підалгебра алгебри A, яка містить 1, e_1, e_2. Будемо вважати, що

$$1,\ e_1,\ e_2\ \in\ M_n(\mathbb{F})\ \subset\ A.$$

Довільний ідемпотент матричної алгебри є діагоналізованим, тобто існують автоморфізми ψ_1 і ψ_2 алгебри $M_n(\mathbb{F})$ такі, що

$$\psi_1(e_1)\ =\ \mathrm{diag}\,\big(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{r_1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\big),$$

$$\psi_2(e_2)\ =\ \mathrm{diag}\,\big(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{r_2},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\big).$$

За лемою 4.12 автоморфізми ψ_1, ψ_2 продовжуються до автоморфізмів алгебри A. У підрозділі 3.5 було показано, що

$$\mathbf{st}\ \ (e_1\,A\,e_1)\ =\ \frac{r_1}{n}\,\mathbf{st}\ (A),$$

$$\mathbf{st}\ \ (e_2\,A\,e_2)\ =\ \frac{r_2}{n}\,\mathbf{st}\ (A).$$

Оскільки

$$e_1\,A\,e_1\ \cong\ e_2\,A\,e_2,\quad \text{то}\quad r_1\ =\ r_2,\quad \psi_1(e_1)\ =\ \psi_2(e_2).$$

Лема 4.14 доведена. □

Лема 4.15. *Нехай A, B — ізоморфні унітальні локально матричні алгебри, $e\in A$ і $f\in B$ — ідемпотенти. Тоді довільний ізоморфізм*

$$e\,A\,e\ \to\ f\,B\,f\quad \textit{продовжується до ізоморфізму}\quad A\ \to\ B.$$

Доведення. Припустимо, що

$$A\ \xrightarrow{\varphi}\ B\quad \text{і}\quad e\,A\,e\ \xrightarrow{\psi}\ f\,B\,f$$

— ізоморфізми. Тоді

$$\varphi^{-1}\circ\psi\ :\ e\,A\,e\ \to\ \varphi^{-1}(f)\,A\,\varphi^{-1}(f)$$

є ізоморфізмом двох кутів в алгебрі A. За лемою 4.14 цей ізоморфізм продовжується до автоморфізму χ алгебри A. Ізоморфізм $\varphi\circ\chi$ продовжує ψ. Лема 4.15 доведена. □

Лема 4.16. *Припустимо, що A — локально матрична алгебра, s_1 та s_2 — числа Стейніца, що належать* $\mathrm{Spec}\,(A)$, *причому* $s_2/s_1 > 1$. *Нехай e_1 — ідемпотент алгебри A такий, що* $\mathbf{st}\ (e_1Ae_1) = s_1$. *Тоді знайдеться ідемпотент $e_2 > e_1$ такий, що* $\mathbf{st}\ (e_2Ae_2) = s_2$.

Доведення. Оскільки $s_2 \in \mathrm{Spec}\,(A)$, то існує ідемпотент $e' \in A$, такий що

$$\mathbf{st}\,(e'\,A\,e') \ = \ s_2.$$

Розглянемо матричну підалгебру $M_n(\mathbb{F}) \subset A$, яка містить e_1 і e'. Існують автоморфізми φ, ψ алгебри $M_n(\mathbb{F})$ такі, що

$$\varphi(e_1) \ = \ \mathrm{diag}\,\big(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{r_1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\big),$$

$$\psi(e') \ = \ \mathrm{diag}\,\big(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{r_2},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\big).$$

За лемою 4.12 φ і ψ продовжуються до автоморфізмів $\widetilde{\varphi}$ та $\widetilde{\psi}$ алгебри A відповідно. Згідно з підрозділом 3.5

$$\mathbf{st}\,(e_1\ A\ e_1) \ = \ s_1 \ = \ \frac{r_1}{n}\,\mathbf{st}\,(A),$$

$$\mathbf{st}\,(e'\ A\ e') \ = \ s_2 \ = \ \frac{r_2}{m}\,\mathbf{st}\,(A).$$

Тому $r_2 > r_1$. Розглянемо ідемпотент

$$\widetilde{\varphi}^{\,-1}\,(\psi\,(e')) \ = \ e_2.$$

Тоді

$$e_2 \ > \ e_1 \quad \text{і} \quad \mathbf{st}\,(e_2\ A\ e_2) \ = \ s_2.$$

Лема 4.16 доведена. □

Доведення теореми 4.2 2). Нехай A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри, $\mathrm{Spec}\ (A) = \mathrm{Spec}\ (B)$. Оберемо базиси $a_1, a_2, \ldots$ та $b_1, b_2, \ldots$ в алгебрах A, B відповідно. Ми побудуємо зростаючі ланцюги кутів

$$\{0\} \ = \ A_0 \ \subset \ A_1 \ \subset \ A_2 \ \subset \ \cdots \tag{4.12}$$

і

$$\{0\} = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \tag{4.13}$$

в алгебрах A, B такі, що

$$\bigcup_i A_i = A, \quad \bigcup_i B_i = B,$$

$$\text{і для всіх} \quad i \leq 1 \quad a_1, \ldots, a_i \in A_i, \quad b_1, \ldots, b_i \in B_i,$$

$$\mathbf{st}\,(A_i) = \mathbf{st}\,(B_i).$$

Припустимо, що ланцюги

$$\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$$

та

$$\{0\} = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n,$$

які задовольняють усі необхідні умови, побудовані, де $n \geq 0$. Існують кути $A' \subset A$, $B' \subset B$ алгебр A, B відповідно, такі що

$$A_n \subset A', \quad a_{n+1} \in A' \quad \text{і} \quad B_n \subset B', \quad b_{n+1} \in B'.$$

Числа Стейніца $\mathbf{st}\,(A')$, $\mathbf{st}\,(B')$ лежать в одній повній підмножині множини $\mathbb{SN}$ і тому є раціонально зв'язними.

Припустимо, що

$$\mathbf{st}\,(B') \geq \mathbf{st}\,(A').$$

Нехай $A' = e' A e'$, де e' — ідемпотент алгебри A. Число Стейніца $\mathbf{st}\,(B')$ належить $\mathrm{Spec}\,(A)$, тому за лемою 4.16 знайдеться ідемпотент e алгебри A такий, що

$$e \geq e' \quad \text{і} \quad \mathbf{st}\,(e\,A\,e) = \mathbf{st}\,(B').$$

Покладемо

$$A_{n+1} = e\,A\,e, \quad B_{n+1} = B'.$$

Ланцюги (4.12) і (4.13) побудовано.

За лемою 4.15 довільний ізоморфізм $A_i \to B_i$ продовжується до ізоморфізму $A_{i+1} \to B_{i+1}$. А отже, існує ланцюг ізоморфізмів

$$\varphi_i : A_i \to B_i, \quad i \geq 0,$$

такий, що φ_{i+1} продовжує φ_i. Об'єднання

$$\bigcup_{i\geq 0} \varphi_i$$

є ізоморфізмом алгебри A в алгебру B. Теорема 4.2 доведена. $\square$

Теорема 4.3. *Зліченно-вимірні (не обов'язково унітальні) локально матричні алгебри однозначно відповідають таким нескінченним повним підмножинам множини* $\mathbb{SN}$:

- $S(\infty, s), \quad s \in \mathbb{SN}$;
- $S(r, s), \quad r \in [1, \infty), \quad s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$;
- $S^+(r, s), \quad r \in [1, \infty), \quad s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, *де*

$$r = \frac{u}{v}, \quad u, v \quad \text{— взаємно прості натуральні числа}, \quad v \in \Omega(s).$$

Зазначимо, що

$$S^+(r, s) = S^+\left(u, \frac{s}{v}\right).$$

Які з цих повних підмножин визначають зліченно-вимірні унітальні локально матричні алгебри?

Ми показали, що

$$S(\infty, s) = \mathrm{Spec}\,(M_\infty(A)),$$

де A — унітальна локально матрична алгебра, $\mathbf{st}\,(A) = s$. Очевидно, що алгебра $M_\infty(A)$ не є унітальною.

При побудові зліченно–вимірних локально матричних алгебр, які відповідають $S(r, s)$ та $S^+(r, s)$ (див. доведення теореми 4.2) ми занурювали алгебру

$$M_{r_s(b_i)}\left(A_{s/b_i}\right) = M_{r_s(b_i)\,\cdot\,\frac{b_{i+1}}{b_i}}\left(A_{s/b_{i+1}}\right)$$

в алгебру

$$M_{r_s(b_{i+1})}\left(A_{s/b_{i+1}}\right)$$

як верхній лівий кут і переходили до об'єднання.

Очевидно, що об'єднання зростаючого ланцюга кутів є унітальною алгеброю тоді і тільки тоді, коли цей ланцюг стабілізується. Іншими словами, тоді і тільки тоді, коли послідовність

$$\frac{r_s(b_i)}{b_i}, \quad i \to \infty,$$

стабілізується.

Якщо число r є ірраціональним або якщо число r є раціональним, де $r = u/v$, НСД $(u, v) = 1$ і v не ділить s, то послідовність

$$\frac{[r\ b_i]}{b_i}$$

не стабілізується.

Якщо $v \in \Omega\ (s)$, то

$$S\left(\frac{u}{v}\ ,\ s\right)\ =\ S\left(u\ ,\ \frac{s}{v}\right) \quad \text{і} \quad S^{+}\left(\frac{u}{v}\ ,\ s\right)\ =\ S^{+}\left(u\ ,\ \frac{s}{v}\right).$$

Для натурального числа u послідовність

$$\frac{[u\ b_i]}{b_i}\ =\ u$$

стабілізується, а послідовність

$$\frac{u\ b_i\ -\ 1}{b_i}$$

не стабілізується.

Таким чином, зліченно-вимірні локально матричні алгебри є унітальними тоді й лише тоді, коли їм відповідають такі повні множини:

$$S\left(\frac{u}{v}\ ,\ s\right), \quad v\ \in\ \Omega\ (s).$$

У підрозділі 6.3 нам двічі знадобиться така лема.

Лема 4.17. *Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра, яка містить ненульовий ідемпотент e такий, що* $\dim_{\mathbb{F}}\ e\,A\,e < \infty$. *Тоді*

$$A\ \cong\ M_{\infty}\ (\mathbb{F}).$$

Доведення. Якщо повна множина містить натуральне число, то вона належить $\mathbb{N}$. У цьому випадку або Spec $(A) = \{1, 2, \ldots, n\}$, або Spec $(A) = \mathbb{N}$. У першому випадку алгебра A — скінченно–вимірна, що суперечить умові леми. У другому випадку $A \cong M_{\infty}\ (\mathbb{F})$. Лема 4.17 доведена. $\square$

4.3 Занурення локально матричних алгебр

Лема 4.18. *Нехай S_1 і S_2 — повні множини чисел Стейніца. Тоді або $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$, або одна із множин S_1, S_2 містить іншу множину.*

Доведення. Нехай $s \in S_1 \bigcap S_2$. Якщо число Стейніца s належить $\mathbb{N}$, то за лемою 4.10 множини S_1 і S_2 є або початковими сегментами натуральних чисел, або усією множиною $\mathbb{N}$. У цьому випадку твердження леми є очевидним.

Припустимо, що число s є нескінченним. Тоді за теоремою 4.1

$$S_i \ = \ S\,(r_i, s) \quad \text{або} \quad S_i \ = \ S^+\,(r_i, s),$$

де

$$r_i \ = \ r_{S_i}(s) \ \in \ [1,\ \infty) \bigcup \{\infty\}, \quad i \ = \ 1,\ 2.$$

Очевидно, що

$$\text{якщо} \quad r_{S_1}(s) \ < \ r_{S_2}(s), \quad \text{то} \quad S_1 \ \subsetneqq \ S_2.$$

Якщо ж

$$r_{S_1}(s) \ = \ r_{S_2}(s), \quad \text{то} \quad S_1,\ S_2 \ = \ \begin{cases} S\,(r, s) & , \\ S^+\,(r, s) & , \\ S\,(\infty, s) & . \end{cases}$$

Але

$$S^+\,(r, s) \ \subsetneqq \ S\,(r, s) \ \subset \ S\,(\infty, s) \quad \text{при} \quad r \ \in \ [1,\ \infty).$$

Лема 4.18 доведена. □

Означення 4.4. Нехай A — локально матрична алгебра. Підалгебра $B \subseteq A$ називається апроксимативним кутом, якщо алгебра B є об'єднанням зростаючого ланцюга пірсівських компонент, тобто існує послідовність ідемпотентів e_1, e_2, ... така, що

$$e_1\,Ae_1 \ \subseteq \ e_2\,Ae_2 \ \subseteq \ \cdots, \quad B \ = \ \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\,A\,e_i.$$

Очевидно, що апроксимативний кут локально матричної алгебри в свою чергу є локально матричною алгеброю.

Якщо B — апроксимативний кут алгебри A, то довільний кут алгебри B є кутом алгебри A. Отже, Spec $(B) \subseteq$ Spec (A).

Лема 4.19. *Нехай A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри,*

$$\mathrm{Spec}\ (B)\ \subseteq \mathrm{Spec}\ (A). \tag{4.14}$$

Тоді алгебра B занурена в алгебру A як апроксимативний кут.

Доведення. Якщо алгебра B є унітальною, то вона може бути занурена в алгебру A як кут. Справді, позаяк справджується включення (4.14), то знайдеться ідемпотент $e \in A$ такий, що

$$\mathbf{st}\ (B)\ =\ \mathbf{st}\ (e\,A\,e).$$

За теоремою Глімма (див. 3.8) $B \cong e\,A\,e$.

Припустимо, що алгебра B не є унітальною. Тоді знайдеться послідовність ідемпотентів

$$0\ =\ f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots \quad \text{алгебри} \quad B$$

така, що

$$\{0\}\ \neq\ f_1\,B\,f_1\ \subsetneqq\ f_2\,B\,f_2\ \subsetneqq\ \cdots,$$

$$\bigcup_{i\geq 0} f_i\,B\,f_i\ =\ B.$$

Покажемо, що алгебра A містить послідовність ідемпотентів

$$0\ =\ e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots \tag{4.15}$$

таку, що

$$e_1\,A\,e_1\ \subset\ e_2\,A\,e_2\ \subset\ \cdots$$

і

$$\mathbf{st}\ (f_i\,B\,f_i)\ =\ \mathbf{st}\ (e_i\,A\,e_i) \quad \text{для кожного} \quad i\ \geq\ 0.$$

Покладемо $e_0 = 0$. Припустимо, що $e_0, e_1, \ldots, e_n$ — ідемпотенти такі, що

$$e_1\,A\,e_1\ \subset\ e_2\,A\,e_2\ \subset\ \cdots\ \subset\ e_n\,A\,e_n$$

і

$$\mathbf{st}\ (f_i\,B\,f_i)\ =\ \mathbf{st}\ (e_i\,A\,e_i), \quad 0\ \leq\ i\ \leq\ n.$$

Ми маємо:

$$\mathbf{st}\,(f_{n+1}\,B\,f_{n+1})\ >\ \mathbf{st}\,(f_n\,B\,f_n)\ =\ \mathbf{st}\,(e_n\,A\,e_n).$$

Згідно з лемою 4.16 знайдеться ідемпотент $e_{n+1} \in A$ такий, що справджується включення

$$e_n\,A\,e_n\ \subset\ e_{n+1}\,A\,e_{n+1}$$

і при цьому

$$\mathbf{st}\,(e_{n+1}\,A\,e_{n+1})\ =\ \mathbf{st}\,(f_{n+1}\,B\,f_{n+1}).$$

Існування послідовності (4.15) доведено.

Нехай

$$A'\ =\ \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\,A\,e_i.$$

За теоремою Глімма 3.8

$$e_i\,A\,e_i\ \cong\ f_i\,B\,f_i,\quad i\ \geq\ 1.$$

Згідно з лемою 4.11

$$\mathrm{Spec}\,(A')\ =\ \bigcup_{i\geq 1}\mathrm{Spec}\,(e_i\,A\,e_i)$$

та

$$\mathrm{Spec}\,(B)\ =\ \bigcup_{i\geq 1}\mathrm{Spec}\,(f_i\,B\,f_i).$$

Таким чином,

$$\mathrm{Spec}\,(A')\ =\ \mathrm{Spec}\,(B).$$

За теоремою 4.2 частина 1) маємо $A' \cong B$. Лема 4.19 доведена. □

Легко бачити, що якщо A — унітальна локально матрична алгебра, а B — її власний апроксимативний кут, то $A \ncong B$ і $\mathrm{Spec}\,(B)$ строго міститься в $\mathrm{Spec}\,(A)$. Справді, якщо $s = \mathbf{st}\,(A)$, то згідно з лемою 3.15 усі числа Стейніца із $\mathrm{Spec}\,(B)$ строго менші, ніж s.

З іншого боку, неунітальна локально матрична алгебра A може містити власний апроксимативний кут, ізоморфний алгебрі A.

Нехай C — унітальна локально матрична алгебра. Розглянемо алгебру A усіх фінітарних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$−матриць над C, тобто $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$−матриць, котрі мають лише скінченну кількість ненульових елементів. Розглянемо підалгебру B алгебри A, яка складається з матриць, в яких усі рядки і стовпчики з непарними номерами є нульовими. Очевидно, що B — власний апроксимативний кут алгебри A і $A \cong B$.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі вивчалися спектри локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є такі.

- Для довільної локально матричної алгебри визначено її спектр, який є повною множиною чисел Стейніца.
- Класифіковані всі повні множини чисел Стейніца.
- Для довільної повної множини чисел Стейніца побудована зліченно–вимірна локально матрична алгебра, для якої ця множина є спектром.
- Показано, що зліченно–вимірні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються. Таким чином, отримане нове доведення теореми Діксм'є–Баранова про класифікацію неунітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр.
- Показано, що для двох зліченно–вимірних локально матричних алгебр A та B алгебра A занурюється в алгебру B як апроксимативний кут тоді й лише тоді, коли спектр алгебри A є підмножиною спектру алгебри B.

Розділ 5

Простори Хемінга

Метрика Хемінга — стандартний інструмент обчислення відстані між двома двійковими векторами однакової довжини.

Означення 5.1. Нехай $n \geq 1$. Стандартним простором Хемінга H_n називається множина всіх векторів довжини n

$$x^n = \big(x_1, \ldots, x_n\big), \quad \text{де} \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

а відстань d_{H_n} між цими векторами є числом позицій, де ці вектори є різними.

У цьому розділі ми вивчаємо нескінченно–вимірні аналоги таких просторів з абстрактного погляду в контексті алгебр з мірою (див. [46]). У роботі [92] вони визначалися як простори Хемінга. Оскільки наші приклади близькі до стандартних просторів Хемінга, ми будемо в основному наслідувати термінологію робіт [91, 92, 93]

У роботах [46, 91, 92, 93] розглянуто нескінченні аналоги просторів Хемінга, які виникають як прямі границі скінченних просторів H_n. У цому розділі ми вводимо абстрактне означення просторів Хемінга, а також вивчаємо їх будову і зв'язок з локально матричними алгебрами. Результати цього розділу опубліковано в [30].

5.1 Абстрактне визначення і приклади просторів Хемінга

Нагадаємо, що *булевим кільцем* називається комутативне кільце, всі елементи якого задовольняють тотожність

$$x^2 = x. \tag{5.1}$$

Означення 5.2. Нехай H — булеве кільце з 1. Функція

$$r : H \to [\,0,\ 1\,] \tag{5.2}$$

називається функцією рангу (або мірою, див. *[46]*), якщо

(1) $r(a) = 0$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 0$;

(2) $r(a) = 1$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 1$;

(3) якщо $a, b \in H$ і $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

Означення 5.3. Унітальним простором Хемінга (H, r) будемо називати булеве кільце H з одиницею 1 та функцією рангу $r\ : H \to [0, 1]$ виду (5.2).

На булевому кільці з функцією рангу природно визначається структура лінійного векторного простору над $\mathbb{Z}_2$, яка перетворює це кільце в лінійну алгебру. Тому за необхідності будемо вважати, що простір Хемінга — це саме таким чином визначена лінійна алгебра з функцією рангу. Тим самим, простори Хемінга є алгебричними системами з двома бінарними операціями, унарною операцією і родиною предикатів p_α, $\alpha \in [0, 1]$, де функція рангу, яка задана на ньому — це зліченна адитивна додатна міра.

Лема 5.1. *Якщо (H, r) — простір Хемінга, то функція*

$$d_H(a, b) = r(a - b), \qquad a, b \in H,$$

задає метрику на просторі (H, r).

Доведення. Згідно з умовою (1) означення 5.2 відстань між різними елементами простору H завжди додатна. Доведемо нерівність трикутника, тобто що для довільних елементів a, b, $c \in H$

$$d_H(a, c) \ \le\ d_H(a, b) \ +\ d_H(b, c).$$

Ми маємо:

$$d_H(a, c) \ =\ r(a - c), \quad d_H(a, b) \ =\ r(a - b),$$

$$d_H(b,c) = r(b-c), \quad a - c = (a-b) + (b-c).$$

Покажемо, що для довільних елементів $a, b \in H$

$$r(a+b) \le r(a) + r(b).$$

Дійсно,

$$a = ab + a(1-b), \quad b = ab + b(1-a),$$

$$a + b = a(1-b) + b(1-a).$$

Згідно з умовою (3) означення 5.2

$$r(a) = r(ab) + r(a(1-b)), \quad r(b) = r(ab) + r(b(1-a)),$$

$$r(a+b) = r(a(1-b)) + r(b(1-a)).$$

Отже,

$$r(a) + r(b) - r(a+b) = 2\,r(ab) \ge 0.$$

Лема 5.1 доведена. □

Приклад 5.1. Булеве кільце

$$H_n = \{0, 1\}^n$$

з покомпонентним додаванням (за модулем 2) і множенням, а також функцією рангу

$$r_{H_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \text{ для довільних } x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\},$$

задовольняють умови (1), (2), (3) означення 5.2. Ми назвемо простір Хемінга (H_n, r_{H_n}) стандартним.

Нехай $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ позначає множину всіх нескінченних $(0,1)$−послідовностей

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots), \quad a_i = 0 \text{ або } 1.$$

Очевидно, що $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — булеве кільце з операціями покомпонентного додавання (за модулем 2) і множення.

Означення 5.4. Послідовність $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ називається періодичною, якщо існує натуральне число k таке, що

$$a_{i+k} = a_i \quad \text{для довільного} \quad i \in \mathbb{N}.$$

У цьому випадку число k називається періодом послідовності $\mathbf{a}$.

Очевидно, що існує *мінімальний період* k_{min} послідовності $\mathbf{a}$ і що число k є періодом тоді і тільки тоді, коли k ділиться на k_{min}.

Означення 5.5. Нехай u — число Стейніца. Періодична послідовність $\mathbf{a}$ називається u−періодичною, якщо її мінімальний період ділить u.

Приклад 5.2. Позначимо через $\mathcal{H}(u)$ множину u−періодичних послідовностей. Очевидно, що $\mathcal{H}(u)$ — підкільце булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Функція рангу

$$r_{\mathcal{H}(u)}(a_1,\ a_2,\ \ldots\ )\ =\ \frac{1}{k}\,(a_1\ +\ \ldots\ +\ a_k),$$

де k — період (довільний з періодів) послідовності $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, задає на $(\mathcal{H}(u), r_{\mathcal{H}(u)})$ структуру простору Хемінга.

Приклад 5.3. Для послідовності

$$\mathbf{a}\ =\ (a_1,\ a_2,\ \ldots)\ \in\ \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

визначимо функцію псевдорангу

$$\tilde{r}(\mathbf{a})\ =\ \lim_{n\to\infty}\ \sup\ \frac{1}{n}\,(a_1\ +\ \ldots\ +\ a_n).$$

Ця функція задовольняє умові (3) означення 5.2, але не задовольняє умови (1), (2). Підмножина

$$I\ =\ \left\{\mathbf{a}\ \in\ \{0,1\}^{\mathbb{N}}\ \middle|\ \tilde{r}(\mathbf{a})\ =\ 0\right\}$$

є ідеалом булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. На довільному класі суміжності

$$\mathbf{a}\ +\ I,\quad \mathbf{a}\ \in\ \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

функція $\tilde{r}$ є сталою.

Розглянемо булеве кільце

$$B\ =\ \{0,1\}^{\mathbb{N}}\ /\ I$$

з функцією рангу

$$r_B\ (\mathbf{a}\ +\ I)\ =\ \tilde{r}(\mathbf{a}),\quad \mathbf{a}\ \in\ \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Простір Хемінга (B, r_B) називається простором Безиковича або простором Безиковича–Хемінга (див. *[41, 106]*).

5.2 Тензорний добуток просторів Хемінга

Твердження 5.1. *Нехай* (H_1, r_1), (H_2, r_2) — *унітальні простори Хемінга. Тоді існує єдина функція рангу* r *на тензорному добутку булевих кілець*

$$H = H_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} H_2$$

така, що

$$r(a \otimes b) = r_1(a)\, r_2(b)$$

для довільних елементів $a \in H_1$, $b \in H_2$.

Зауважимо, що оскільки $2H_1 = \{0\}$, $2H_2 = \{0\}$, то між тензорними добутками $H_1 \bigotimes_{\mathbb{Z}} H_2$ та $H_1 \bigotimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_2$ різниці немає. Тому тут і в схожих ситуаціях у подальшому будемо використовувати запис $H_1 \bigotimes_{\mathbb{Z}} H_2$.

Доведення твердження 5.1. Для довільного булевого кільця H позначимо через $S(H)$ множину всіх непорожніх скінченних підмножин $H \setminus \{0\}$. Покладемо

$$O(H) = \{A \in S(H) \mid A = \{a_1, \dots, a_r\}, \quad a_i \neq 0, \quad a_i a_j = 0,$$

$$\text{для довільних} \quad i \neq j, \quad 1 \leq i,\ j \leq r\}.$$

Будемо говорити, що множина $X \in S(H)$ *покривається* множиною $E \in O(H)$, якщо довільний елемент $x \in X$ є сумою елементів з E, тобто

$$x = \sum_{e \in E,\ xe = e} e.$$

Нехай

$$X = \{a_1, \dots, a_r\} \in S(H).$$

Розглянемо множину E, яка складається з добутків

$$b_1 \cdots b_r, \quad \text{де} \quad b_i = a_i \quad \text{або} \quad b_i = 1 - a_i.$$

Тоді $E \in O(H)$ і E *покриває* X.

Для довільного елемента

$$x \in H_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} H_2$$

існують множини

$$E_1 = \{e_1, \ldots, e_n\} \in O(H_1) \quad \text{і} \quad E_2 = \{f_1, \ldots, f_m\} \in O(H_2)$$

такі, що

$$x \in \mathrm{Span}\,(E_1) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} \mathrm{Span}\,(E_2),$$

$$x = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \alpha_{ij}\, e_i \otimes f_j, \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{або} \quad \alpha_{ij} = 1.$$

у цьому випадку будемо говорити, що *елемент x покривається множинами* E_1 та E_2. Тут $\mathrm{Span}(E_i)$ означає лінійну оболонку, натягнуту на E_i, $i = 1, 2$.

Покладемо

$$r_{E_1,E_2}\,(x) = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \alpha_{ij}\, r_1(e_i)\, r_2(f_j).$$

Припустимо, що підмножини $E_1' \in O(H_1)$ і $E_2' \in O(H_2)$ покривають підмножини E_1 та E_2 відповідно. Нехай

$$e_i = \sum_p e_{i_p}, \quad e_{i_p} \in E_1',$$

і

$$f_j = \sum_q f_{j_q}, \quad f_{j_q} \in E_2'.$$

Бачимо, що

$$e_{i_p} = e_{i_{1 p_1}}$$

тільки, якщо $(i, p) = (i_1, p_1)$. Це випливає з того, що ідемпотенти e_i та e_{i_p} ортогональні. Аналогічно,

$$f_{j_q} = f_{j_{1 q_1}}$$

тільки, якщо $(j, q) = (j_1, q_1)$. Ми маємо:

$$x = \sum_{i, j, p, q} \alpha_{ij}\, e_{i_p} \otimes f_{j_q}.$$

За означенням

$$r_{E_1', E_2'}(x) = \sum_{i, j, p, q} \alpha_{ij}\, r_1(e_{i_p})\, r_2(f_{j_q}).$$

Але, згідно з властивістю (3) функції рангу (5.2), див. означення 5.2,

$$r_1(e_i) = \sum_p r_1(e_{i_p}) \quad r_2(f_j) = \sum_q r_2(f_{j_q}).$$

Отже,

$$r_{E_1,E_2}(x) = r_{E_1{}',E_2{}'}(x).$$

Покажемо, що число $r_{E_1,E_2}(x)$ не залежить від вибору множин E_1 та E_2, які покривають елемент x. Нехай

$$E_1,\ E_1' \in O(H_1), \quad E_2,\ E_2' \in O(H_2)$$

і

$$x \in \Big(\text{Span } (E_1) \bigotimes \text{Span } (E_2) \Big) \bigcap \Big(\text{Span } (E_1') \bigotimes \text{Span } (E_2') \Big).$$

Існують підмножини

$$E_1'' \in O(H_1), \quad E_2'' \in O(H_2)$$

такі, що обидві підмножини E_1 та E_1' покриваються підмножиною E_1''. Аналогічно, E_2 та E_2' покриваються підмножиною E_2''.

Згідно з доведеним вище, тоді

$$r_{E_1,E_2}(x) = r_{E_1'',E_2''}(x).$$

Аналогічно,

$$r_{E_1{}',E_2{}'}(x) = r_{E_1'',E_2''}(x).$$

Таким чином,

$$r_{E_1,E_2}(x) = r_{E_1',E_2'}(x),$$

що доводить незалежність числа $r_{E_1,E_2}(x)$ від вибору покриваючих множин.

Покладемо

$$r(x) = r_{E_1,E_2}(x),$$

де $E_1 \in O(H_1)$, $E_2 \in O(H_2)$ — підмножини, які покривають елемент x. Покажемо, що функція $r(x)$ є функцією рангу.

Нехай

$$E_1 = \{e_1,\ \ldots,\ e_n\}, \quad E_2 = \{f_1,\ \ldots,\ f_m\}$$

і

$$x = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \alpha_{ij}\ e_i \otimes f_j, \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{або} \quad \alpha_{ij} = 1.$$

Очевидно, що

$$r(x) \;=\; \sum_{1\le i\le n,\; 1\le j\le m} \alpha_{ij}\, r_1(e_i) r_2(f_j) \;\ge\; 0.$$

Якщо $x \neq 0$, то знайдуться i, j такі, що $\alpha_{ij} \neq 0$. Тоді

$$r(x) \;\ge\; r_1(e_i) r_2(f_j) \;>\; 0.$$

Також,

$$r(x) \;=\; \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \alpha_{ij}\, r_1(e_i)\, r_2(f_j) \;\le$$

$$\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} r_1(e_i)\, r_2(f_j) \;=$$

$$r_1\big(e_1 \,+\, \cdots \,+\, e_n)\, r_2(f_1 \,+\, \cdots \,+\, f_m) \;\le\; 1.$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли

$$e_1 \,+\, \cdots \,+\, e_n \;=\; 1_{H_1}, \quad f_1 \,+\, \cdots \,+\, f_m \;=\; 1_{H_2}$$

і $\alpha_{ij} = 1$ для довільних i, j. Тобто

$$x \;=\; 1 \quad \text{у} \quad H_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} H_2.$$

Нарешті припустимо, що

$$x,\; y \;\in\; H_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} H_2$$

і $xy = 0$. Виберемо підмножини $E_1 \in O(H_1)$, $E_2 \in O(H_2)$, які покривають обидва елементи x та y. Як і вище, нехай

$$E_1 \;=\; \big\{e_1,\; \ldots,\; e_n\big\}, \quad E_2 \;=\; \big\{f_1,\; \ldots,\; f_m\big\}.$$

Також, нехай

$$x \;=\; \sum_{1\le i\le n,\; 1\le j\le m} \alpha_{ij}\, e_i \,\otimes\, f_j, \quad y \;=\; \sum_{1\le i\le n,\; 1\le j\le m} \beta_{ij}\, e_i \,\otimes\, f_j.$$

Тоді

$$x \,+\, y \;=\; \sum_{1\le i\le n,\; 1\le j\le m} \big(\, (\alpha_{ij} \,+\, \beta_{ij}) \mod 2 \,\big)\, e_i \,\otimes\, f_j.$$

З умови $xy = 0$ випливає, що для довільних i, j ми маємо:

$$\alpha_{ij}\, \beta_{ij} \;=\; 0.$$

Тому випадок

$$\alpha_{ij} \;=\; \beta_{ij} \;=\; 1$$

виключається і

$$\alpha_{ij} \;+\; \beta_{ij} \;=\; 0 \quad \text{або} \quad \alpha_{ij} \;+\; \beta_{ij} \;=\; 1.$$

Тепер,

$$r(x+y) \;=\; \sum_{1\le i\le n,\; 1\le j\le m} \left(\, \alpha_{ij} \;+\; \beta_{ij} \,\right) r_1(e_i)\, r_2(f_j) \;=$$

$$r(x) \;+\; r(y).$$

Твердження 5.1 доведене. □

Легко бачити, що для тензорного добутку стандартних просторів Хемінга H_n та H_m має місце ізоморфізм:

$$H_n \bigotimes H_m \;\cong\; H_{nm}. \tag{5.3}$$

Лема 5.2. *Нехай має місце включення $H_n \subset H_s$. Тоді знайдеться підпростір Хемінга $H' \;\subset\; H_s$ такий, що*

$$H_s \;=\; H_n\, H' \;\cong\; H_n \bigotimes H', \quad H' \;\cong\; H_{s/n}, \quad 1_{H_n} \;\in\; H'.$$

Доведення. Одиниця 1_{H_n} булевого кільця H_n розкладається в суму n ортогональних ідемпотентів $e_1, \ldots, e_n$:

$$1_{H_n} \;=\; e_1 \;+\; \cdots \;+\; e_n,$$

де кожен ідемпотент цього розкладу має ранг

$$r_{H_n}\left(e_i\right) \;=\; \frac{1}{n} \quad \text{для довільного} \quad i,\; 1 \le i \le n.$$

Оскільки кільце H_n занурене в H_s як підпростір Хемінга, тобто зі збереженням функції рангу, то

$$r_{H_s}(e_1) \;=\; \cdots \;=\; r_{H_s}(e_n) \;=\; \frac{1}{n}.$$

У просторі Хемінга H_s розклад одиниці 1_{H_n} в суму n ортогональних ідемпотентів одного й того ж рангу відповідає розбиттю множини $\{1, \ldots, s\}$ в об'єднання підмножин, що не перетинаються, однієї й тієї ж потужності r. Це означає, що

$$n\, r \;=\; s, \quad \text{тобто} \quad n \,|\, s.$$

Довільний елемент простору H_s рангу r/s є сумою r ортогональних ідемпотентів, кожен з яких має ранг $1/s$. Нехай

$$e_i = \sum_{j=1}^{s/n} e_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

І нехай ідемпотенти

$$\left\{ e_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq \frac{s}{n} \right\}$$

— попарно ортогональні, де

$$r\left(e_{ij}\right) = \frac{1}{s}.$$

Покладемо

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ij}, \quad 1 \leq j \leq \frac{s}{n}.$$

Підпростір Хемінга

$$H' = \sum_{j=1}^{s/n} \mathbb{Z}\, e'_j$$

має необхідні властивості і лема 5.2 доведена. □

Простір Хемінга $H' \subset H_s$ такий, що

$$H' \cong H_{s/n} \quad \text{i} \quad H_s = H_n\, H',$$

не є єдиним, як буде видно з наступного прикладу.

Приклад 5.4. Розглянемо простір Хемінга

$$H = \mathbb{Z}_2\, e_1 + \mathbb{Z}_2\, e_2\,,$$

$$e_i\, e_j = \delta_{ij}\,, \quad r(e_1) = r(e_2) = \frac{1}{2}\,,$$

який ізоморфний стандартному простору Хемінга H_2, та його тензорний квадрат $H \otimes_{\mathbb{Z}} H$, який ізоморфний стандартному простору Хемінга H_4.

Розглянемо підпростори простору $H \otimes_{\mathbb{Z}} H$:

$$H' = \mathbb{Z}_2\,(e_1 \otimes 1) + \mathbb{Z}_2\,(e_2 \otimes 1) \cong H_2,$$

$$H'' = \mathbb{Z}_2\,(1 \otimes e_1) + \mathbb{Z}_2\,(1 \otimes e_2) \cong H_2.$$

Очевидно, що

$$H \bigotimes_{\mathbb{Z}} H = H' \cdot H''.$$

Елементи

$$f_1 = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \quad \text{та} \quad f_2 = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

ортогональні і мають ранг $\frac{1}{2}$. Таким чином, підпростір

$$H''' = \mathbb{Z}_2 f_1 + \mathbb{Z}_2 f_2$$

також ізоморфний H_2. Легко бачити, що

$$H''' \neq H'' \quad \text{і} \quad H \bigotimes_{\mathbb{Z}} H = H' \cdot H'''.$$

Неєдиність тензорного доповнення до H' доведена.

Якщо $H_n \subset H_s$, а $H', H'' \subset H_s$ — два тензорних доповнення до H_n, тобто

$$H' \cong H'' \cong H_{s/n} \quad \text{і} \quad H_s = H_n H' = H_n H'',$$

то існуватиме автоморфізм $\varphi \in Aut\, H_s$, який переводить H' у H'' і такий, що $\varphi(h) = h$ для довільного елемента $h \in H_n$.

Означення 5.6. Називатимемо унітальний простір Хемінга (H, r) локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина елементів

$$a_1, \ \ldots, \ a_n \in H$$

міститься в підпросторі $H' \subset H$ такому, що

$$H' \cong H_m \quad \text{для деякого} \quad m \geq 1.$$

Можна бачити, що для локально стандартного простору Хемінга функція рангу завжди набуває раціональних значень.

Приклад 5.5. Для довільного числа Стейніца u простір Хемінга $u-$періодичних послідовностей

$$\mathcal{H}(u) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

є локально стандартним. Справді, для довільного натурального числа $n \geq 1$ простір $n-$періодичних послідовностей $\mathcal{H}(n)$ ізоморфний H_n. Якщо u — число Стейніца, то

$$\mathcal{H}(u) = \bigcup_n \mathcal{H}(n),$$

де об’єднання береться за всіма натуральними дільниками числа u.

Приклад 5.6. Простір Безиковича (B, r_B) (див. приклад 5.3) не є локально стандартним. Дійсно, не важко знайти елемент $x \in B$ такий, що число $r_B(x)$ є ірраціональним.

Позначимо через

$$\{0,1\}_p^{\mathbb{N}} \tag{5.4}$$

множину всіх періодичних послідовностей з $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Нагадаємо, що

$$I = \left\{ a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \tilde{r}(a) = 0 \right\}$$

— булевий ідеал булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (див. приклад 5.3). Очевидно, що

$$\{0,1\}_p^{\mathbb{N}} \cap I = \{0\}.$$

Тому $\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}$ можна розглядати як підпростір Хемінга простору Безиковича (B, r_B). Ми маємо:

$$\{0,1\}_p^{\mathbb{N}} = \bigcup_{u \in \mathbb{SN}} \mathcal{H}(u).$$

Тому простір Хемінга $\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}$ буде локально стандартним.

Теорема 5.1. *Нехай H — зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга. Тоді*

$$H \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i},$$

де всі p_i — прості числа.

Доведення. Оскільки простір H є зліченним і локально стандартним, то існує зростаючий ланцюг підпросторів

$$1 \in X_1 \subset X_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = H,$$

такий що кожен X_i є стандартним підпростором Хемінга. Згідно з лемою 5.2 знайдеться стандартний підпростір Хемінга

$$X'_{i+1} \subset X_{i+1}, \quad i \geq 2,$$

такий, що

$$X_i \bigotimes X'_{i+1} \cong X_{i+1}.$$

Покладемо $X'_1 = X_1$. Тоді

$$H \;\cong\; \bigotimes_{i=1}^{\infty} X'_i.$$

Припустимо тепер, що

$$X'_i \;\cong\; H_{n_i}, \quad n_i \;\geq\; 2.$$

Розглянемо розклад числа n_i у добуток простих співмножників

$$n_i \;=\; p_1 \;\cdots\; p_k.$$

Тоді

$$H_{n_i} \;\cong\; H_{p_1} \bigotimes \cdots \bigotimes H_{p_k}.$$

Звідси випливає твердження теореми 5.1. □

Означення 5.7. Нехай H — локально стандартний унітальний простір Хемінга. Розглянемо множину натуральних чисел

$$D(H) \;=\; \left\{ n \;\geq\; 2 \,\middle|\, H' \;\subset\; H,\, H' \;\cong\; H_n \right\}.$$

Найменше спільне кратне чисел з $D(H)$ називається числом Стейніца простору Хемінга H і позначається $\mathbf{st}(H)$.

Лема 5.3. *Для локально стандартних унітальних просторів Хемінга H_1 та H_2 їх тензорний добуток*

$$H_1 \bigotimes H_2 \tag{5.5}$$

також є локально стандартним простором Хемінга і

$$\mathbf{st}\,(H_1 \bigotimes H_2) \;=\; \mathbf{st}\,(H_1) \;\cdot\; \mathbf{st}\,(H_2).$$

Доведення. Розглянемо непорожню скінченну підмножину елементів алгебри (5.5)

$$a_k \;=\; \sum_i b_{k_i} \,\otimes\, c_{k_i}, \quad \text{де} \quad b_{k_i} \;\in\; H_1, \quad c_{k_i} \in H_2.$$

Нехай

$$X \;=\; \left\{ b_{k_i} \right\}_{k_i}, \quad Y \;=\; \left\{ c_{k_i} \right\}_{k_i}.$$

Позаяк простори H_1 та H_2 є локально стандартними, то знайдуться підпростори $H_1{}'$, $H_2{}'$ просторів H_1 і H_2 відповідно такі, що

$$X \;\subset\; H_1{}', \quad Y \;\subset\; H_2{}'.$$

Легко бачити, що всі елементи a_k містяться в тензорному добутку просторів

$$H_1{}' \bigotimes H_2{}'.$$

Якщо $H_1{}' \cong H_n$, $H_2{}' \cong H_m$, то

$$H_1{}' \bigotimes H_2{}' \cong H_{mn}.$$

Ми довели локальну стандартність простору (5.5). З наведених міркувань також випливає, що

$$\mathbf{st}\,(H_1 \bigotimes H_2) = \text{НСК}\left(D(H_1 \bigotimes H_2)\right) =$$
$$\text{НСК}\left(D(H_1)\right) \cdot \text{НСК}\left(D\,(H_2)\right) = \mathbf{st}\,(H_1) \cdot \mathbf{st}\,(H_2).$$

Лема 3.1 доведена. □

Якщо

$$H = \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i}$$

— розклад з теореми 5.1, то

$$\mathbf{st}\,(H) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{s_i},$$

де s_i — число копій простору H_{p_i} в розкладі простору H.

У роботі [37] було доведено, що зліченні локально стандартні унітальні простори Хемінга H' і H'' ізоморфні тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{st}\,(H') = \mathbf{st}\,(H'').$$

Цей факт також легко випливає з теореми 5.1.

Приклад 5.7. Число Стейніца простору Хемінга $\mathcal{H}(u)$ $u-$періодичних послідовностей дорівнює u. Більше того, якщо

$$u = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{s_i},$$

тоді

$$\mathcal{H}(u) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \left(\bigotimes_{j=1}^{s_i} H_{p_i} \right).$$

Приклад 5.8. Число Стейніца підпростору Хемінга (5.4) простору Безиковича з прикладу 5.6 дорівнює:

$$\mathbf{st}\left(\{0,1\}_p^{\mathbb{N}}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\infty},$$

де добуток береться за всіма простими числами $p_i \in \mathbb{P}$.

5.3 Підалгебри Картана локально матричних алгебр

Розглянемо унітальну локально матричну $\mathbb{F}$–алгебру A з одиницею 1. Нехай C — комутативна підалгебра алгебри A, яка містить 1. Позначимо через $E(C)$ множину всіх ідемпотентів алгебри C, включаючи 0 та 1. Визначимо на $E(C)$ операції множення та додавання ef й $e+f-2ef$ відповідно, де $e, f \in E(C)$. Тоді $E(C)$ разом з функцією відносного рангу $r : E(C) \to [0,1]$ (див. підрозділ 3.5, стр. 116) є простором Хемінга.

Означення 5.8 (див. [74, 122, 130]). Підалгебра H матричної алгебри $M_n(\mathbb{F})$ називається підалгеброю Картана, якщо

$$H \cong \underbrace{\mathbb{F} \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}}_{n}.$$

Іншими словами, H породжена як лінійний простір n попарно ортогональними ідемпотентами. Неважко показати, що довільна підалгебра Картана спряжена з діагональною підалгеброю алгебри $M_n(\mathbb{F})$.

До кінця цього підрозділу ми розглядатимемо лише зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри.

Нехай

$$1 \in A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$

— зростаючий ланцюг скінченно–вимірних матричних підалгебр такий, що

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

У кожній підалгебрі A_i виберемо підалгебру Картана H_i таким чином, що

$$1 \in H_1 \subset H_2 \subset \ldots .$$

Назвемо підалгебру

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$$

узагальненою підалгеброю Картана алгебри A. Нехай, як і вище, $r : E(H) \to [0,1]$ — функція відносного рангу. Тоді $(E(H), r)$ є локально стандартним простором Хемінга.

Означення 5.9. Підалгебра H унітальної локально матричної алгебри A називається підалгеброю Картана, якщо існує розклад

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i$$

у тензорний добуток матричних алгебр і існує розклад

$$H = \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_i$$

у тензорний добуток підалгебр Картана $H_i \subset A_i$, $i \geq 1$.

Теорема 5.2. *Довільні підалгебри Картана алгебри A спряжені за допомогою автоморфізму алгебри A.*

Доведення. Розглянемо дві підалгебри Картана H' та H'' алгебри A, які відповідають тензорним розкладам

$$A \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad A \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{m_i}(\mathbb{F})$$

відповідно. Не зменшуючи загальності, будемо вважати всі натуральні числа n_i, m_i простими. Тоді

$$\mathbf{st}\,(A) = \prod_{i=1}^{\infty} n_i = \prod_{i=1}^{\infty} m_i.$$

Отже, з точністю до перестановки можна вважати, що $n_i = m_i$. Нехай H'_i, H''_i — підалгебри Картана алгебри $M_{n_i}(\mathbb{F})$ і нехай при ізоморфізмі підалгебрі H' відповідає

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} H'_i, \tag{5.6}$$

а алгебрі H'' відповідає

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} H_i''. \tag{5.7}$$

Існує автоморфізм φ_i алгебри $M_{n_i}(\mathbb{F})$ такий, що

$$\varphi_i(H_i') \;=\; H_i''.$$

Тоді автоморфізм

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \varphi_i$$

переводить (5.6) у (6.32). Звідси отримуємо твердження теореми 5.2. □

Легко видно, що будь–яка підалгебра Картана H є узагальненою підалгеброю Картана. Обернене, взагалі кажучи, не правильне. Також зазначимо, що простір $E(H)$, який визначається за підалгеброю Картана H, з функцією відносного рангу r, як і у випадку узагальненої підалгебри Картана, буде локально стандартним простором Хемінга.

Теорема 5.3. *Кожна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра містить узагальнену підалгебру Картана, яка не є підалгеброю Картана.*

Позначимо через A^* групу оборотних елементів алгебри A.

Лема 5.4. *Для кожної підалгебри Картана $H \subset A$ знайдеться оборотний елемент $x \in A^* \setminus H$ такий, що*

$$x^{-1}\, H\, x \;=\; H.$$

Доведення. Виберемо підалгебру

$$1 \;\in\; A_1 \;\subset\; A, \quad A_1 \;\cong\; M_n(\mathbb{F}), \quad n \geq 2.$$

Позначимо через A_2 централізатор підалгебри A_1 :

$$A_2 \;=\; \Big\{\, a \;\in\; A \,\Big|\, [a,\; A_1] \;=\; \{0\} \,\Big\}.$$

Тоді за теоремою Веддербарна (див. теорему 2.1, підрозділ 2.2)

$$A \;\cong\; A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} A_2.$$

Нехай H_1 та H_2 — підалгебри Картана алгебр A_1 та A_2 відповідно,

$$H = H_1 \bigotimes_{\mathbb{F}} H_2.$$

Існує елемент

$$a \in A_1^* \setminus H_1 \quad \text{такий, що} \quad a^{-1} H_1 a = H_1.$$

Тоді

$$\big(a \otimes 1\big)^{-1} H \big(a \otimes 1\big) = H \quad \text{і} \quad a \otimes 1 \notin H.$$

Лема 5.4 доведена. □

Доведення теореми 5.3. Розглянемо зліченно–вимірну локально матричну алгебру A. Наша задача:

побудувати узагальнену підалгебру Картана H в алгебрі A таку, що для довільного оборотного елемента $x \in A^* \setminus H$ мало б місце $x^{-1}Hx \neq H$.

Існує зростаючий ланцюг матричних підалгебр алгебри A такий, що

$$1 \in A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A, \quad A_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 2.$$

У випадку, коли поле $\mathbb{F}$ скінченне, ми додатково вимагатимемо, щоб

$$n_i^2 \leq n_{i+1} \quad \text{для довільного} \quad i \geq 1.$$

Для того, щоб вибрати підалгебри Картана $H_k \subset A_k$ так, щоб вони утворювали зростаючий ланцюг

$$H_k \subset H_{k+1} \quad \text{для довільного} \quad k \geq 1,$$

скористаємося індукцією.

В алгебрі A_1 виберемо довільну підалгебру Картана $H_1 \subset A_1$ і припустимо, що підалгебри Картана

$$H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_k$$

вже вибрані.

Алгебра H_k ізоморфна прямій сумі n_k копій поля $\mathbb{F}$. Нехай

$$H_k = \mathbb{F}\, e_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{F}\, e_{n_k},$$

де $e_1, \ldots, e_{n_k}$ — попарно ортогональні ідемпотенти.

Позначимо через $A_k^{'}$ централізатор підалгебри A_k в алгебрі A_{k+1}. За теоремою Веддербарна

$$A_k^{'} \cong M_{n_{k+1}/n_k}(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad A_{k+1} \cong A_k \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} A_k^{'}.$$

Якщо поле $\mathbb{F}$ нескінченне, то алгебра $A_k^{'}$ містить нескінченно багато різних підалгебр Картана. Якщо поле $\mathbb{F}$ скінченне, то алгебра $A_k^{'}$ містить, принаймні,

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq n_k$$

різних підалгебр Картана. У будь–якому випадку, нехай

$$H_1^{'}, \ \ldots, \ H_{n_k}^{'}$$

— різні підалгебри Картана алгебри $A_k^{'}$. Покладемо

$$H_{k+1} = e_1 \bigotimes H_1^{'} + \cdots + e_{n_k} \bigotimes H_{n_k}^{'}.$$

Легко бачити, що H_{k+1} — підалгебра Картана алгебри A_{k+1}.

Оскільки

$$1_{A_k^{'}} \in H_1^{'} \bigcap \cdots \bigcap H_{n_k}^{'},$$

то підалгебра H_{k+1} містить

$$e_i \otimes 1_{A_k^{'}} = e_i \quad \text{для довільного} \quad i.$$

Отже, $H_k \subset H_{k+1}$. Неважко побачити також, що

$$H_{k+1} \bigcap A_k = H_k.$$

Об’єднання

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$$

є узагальненою підалгеброю Картана алгебри A. Для довільного $k \geq 1$ маємо

$$H \bigcap A_k = H_k.$$

Нехай $x \in A^*$ — оборотний елемент. Припустимо, що $x \notin H$. Знайдеться число $k \geq 1$ таке, що $x \in A_k$. Якщо

$$x^{-1} H_k x \neq H_k, \quad \text{то} \quad x^{-1} H x \neq H.$$

Дійсно, якщо

$$x^{-1}\,H\,x \;=\; H, \quad \text{то} \quad x^{-1}\,H_k\,x \;\subseteq\; A_k \bigcap H \;=\; H_k.$$

Тому припустимо, що

$$x \;\in\; A_k \setminus H_k, \quad x^{-1}\,H_k\,x \;=\; H_k.$$

Тоді

$$x^{-1}\,e_i\,x \;=\; e_{\pi(i)},$$

де π перестановка чисел $1, 2, \ldots, n_k$. Якщо перестановка π — тотожна, то елемент x лежить у централізаторі підалгебри H_k в A_k. Централізатор довільної підалгебри Картана в матричній алгебрі збігається з самою підалгеброю Картана. Оскільки $x \notin H_k$, то перестановка π не є тотожною. Отже,

$$x^{-1}\,H_{k+1}\,x \;=\; \sum_{i=1}^{n_k} e_{\pi(i)} \otimes H_i{}' \;\neq\; H_{k+1},$$

позаяк усі підалгебри Картана $H_1{}', \ldots, H_{n_k}{}'$ різні. Звідси випливає $x^{-1}Hx \neq H$ і теорема 5.3 доведена. □

Наслідок 5.1. *Узагальнені підалгебри Картана алгебри A не обов'язково спряжені автоморфізмом алгебри A.*

Теорема 5.4. (1) *Довільний зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга S ізоморфний простору $E(H)$, де H — підалгебра Картана деякої зліченно–вимірної локально матричної алгебри A, причому* $\mathbf{st}(S) = \mathbf{st}(A)$.

(2) *Нехай A_1, A_2 — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри і нехай H_1, H_2 — підалгебри Картана алгебр A_1, A_2 відповідно. Якщо простори Хемінга $E(H_1)$ та $E(H_2)$ ізоморфні, то алгебри A_1 та A_2 ізоморфні.*

Питання. *Нехай A — локально матрична алгебра, і нехай H — підалгебра Картана алгебри A. Чи вірно, що для довільного автоморфізму φ простору Хемінга $E(H)$ знайдеться автоморфізм ψ алгебри A такий, що*

$$\psi(H) \;=\; H \quad і \quad \varphi \;=\; \psi\big|_{E(H)}?$$

Лема 5.5. *Нехай $M_n(\mathbb{F})$, $M_m(\mathbb{F})$ — матричні алгебри і нехай D_n, D_m — їх діагональні підалгебри. Тоді*

$$E\left(D_n \bigotimes{}_{\mathbb{F}} D_m\right) \ \cong\ E(D_n) \bigotimes{}_{\mathbb{F}} E(D_m),$$

де тензорний добуток у лівій частині є тензорним добутком алгебр, а тензорний добуток у правій частині є тензорним добутком просторів Хемінга.

Назвемо ідемпотент e матричної алгебри $M_n(\mathbb{F})$ *мінімальним*, якщо його ранг дорівнює одиниці, іншими словами, якщо e не можна зобразити у вигляді суми двох ортогональних ненульових ідемпотентів.

Доведення леми 5.5. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональні мінімальні ідемпотенти алгебри D_n,

$$E(D_n) \ = \ \left\{ e_{i_1} \ + \ \cdots \ + \ e_{i_r} \,\middle|\, 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n \right\}.$$

Аналогічно позначимо через $f_1, \ldots, f_m$ — попарно ортогональні мінімальні ідемпотенти алгебри D_m. Тоді

$$E(D_m) \ = \ \left\{ f_{j_1} \ + \ \cdots \ + \ f_{j_t} \,\middle|\, 1 \le j_1 < \cdots < j_t \le m \right\}.$$

Довільний елемент a тензорного добутку

$$D_n \bigotimes{}_{\mathbb{F}} D_m$$

однозначно зображується у вигляді лінійної комбінації

$$a = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \alpha_{ij}\, e_i \ \otimes\ f_j, \quad \alpha_{ij} \ \in\ \mathbb{F}.$$

Ми маємо:

$$a^2 \ = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \alpha_{ij}^2\, e_i \ \otimes\ f_j.$$

Тому елемент a є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли

$$\alpha_{ij} \ = \ 0 \quad \text{або} \quad \alpha_{ij} \ = \ 1 \quad \text{для всіх} \quad i,\ j.$$

Звідси випливає твердження леми 5.5. $\square$

Доведення теореми 5.4. За теоремою 5.1 простір Хемінга S ізоморфний тензорному добутку стандартних просторів Хемінга,

$$S \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i},$$

де p_i — прості числа. Розглянемо матричні алгебри $M_{p_i}(\mathbb{F})$ та їх діагональні підалгебри D_i. Покладемо

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{p_i}(\mathbb{F}).$$

Підалгебра

$$D = \bigotimes_{i=1}^{\infty} D_i$$

є підалгеброю Картана алгебри A. Згідно з лемою 5.5 ми маємо:

$$E(D) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} E(D_i) \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i} \cong S.$$

Це доводить першу частину теореми.

Якщо $E(H_1) \cong E(H_2)$, то

$$\mathbf{st}\,(A_1) = \mathbf{st}\,(E(H_1)) = \mathbf{st}\,(E(H_2)) = \mathbf{st}\,(A_2).$$

Згідно з теоремою Глімма 3.8 алгебри A_1 та A_2 ізоморфні. Теорема 5.4 доведена. □

Нагадаємо, що елемент a локально скінченно–вимірної алгебри називається *напівпростим*, якщо скінченно–вимірна алгебра, яка породжена елементом a, напівпроста.

Лема 5.6. *Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$. Тоді для довільного напівпростого елемента алгебри A знайдеться підалгебра Картана, яка містить цей елемент.*

Доведення. За теоремою Кьоте ми можемо вважати алгебру A тензорним добутком матричних алгебр, тобто

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що $a \in A$ — напівпростий елемент,

$$a \ \in \ M_{n_1}(\mathbb{F}) \bigotimes \cdots \bigotimes M_{n_k}(\mathbb{F}) \ = \ B.$$

Відомо (див., наприклад, [74, 122, 130]), що будь–який напівпростий елемент матричної алгебри над алгебрично замкненим полем міститься в деякій підалгебрі Картана цієї алгебри, тобто $a \in H'$, де H' — підалгебра Картана алгебри B. Нехай H_i — довільна підалгебра Картана матричної алгебри $M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i > k$. Тоді

$$H \ = \ H' \bigotimes{}_{\mathbb{F}} \Big(\bigotimes_{i=k+1}^{\infty} H_i \Big)$$

— підалгебра Картана алгебри A і $a \in H$. Лема 5.6 доведена. □

Наслідок 5.2. *Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$. Тоді для довільного ідемпотента алгебри A знайдеться підалгебра Картана, яка містить цей елемент.*

5.4 Неунітальні простори Хемінга

У підрозділі 5.1 ми сформулювали означення простору Хемінга з одиницею, тобто означення унітального простору Хемінга. У цьому підрозділі ми узагальнимо це на неунітальний випадок.

Означення 5.10. Нехай H — булеве кільце з функцією $r : H \to [0, \infty)$. Назвемо (H, r) простором Хемінга, якщо

(1) $r(a) = 0$ тоді й лише тоді, коли $a = 0$;

(2) якщо $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

Тоді функція r називається функцією рангу.

Як і у випадку унітальних просторів Хемінга функція

$$d_H(a, b) = r(a - b)$$

перетворює (H, r) у метричний простір.

За потреби розглядатимемо на булевому кільці H також структуру лінійного простору над полем $\mathbb{Z}_2$ і будемо говорити про алгебру H з функцією рангу r.

Приклад 5.9. Нехай X — нескінченна множина. Розглянемо неунітальне булеве кільце H, яке складається із скінченних підмножин множини X, включаючи порожню множину. Функція

$$r(a) = |a|, \quad a \in H,$$

задає на кільці H структуру простору Хемінга. Якщо множина X — зліченна, то ми позначатимемо такий простір Хемінга символом $H(\infty)$.

Якщо (H, r) — простір Хемінга, а h — ненульовий елемент простору H, то тоді hH — унітальне булеве кільце, одиницею якого є елемент h. Кільце hH з функцією

$$r_h : hH \to [0, 1], \quad r_h(a) = \frac{r(a)}{r(h)}, \quad a \in H,$$

буде унітальним простором Хемінга, який позначатимемо символом $H_h = (hH, r_h)$.

Означення 5.11. Нехай $H = (H, r)$ — простір Хемінга і нехай α — деяке додатне дійсне число. Тоді булеве кільце H з новою функцією рангу $\alpha\, r$ також є простором Хемінга. Називатимемо простори Хемінга (H, r) та $(H, \alpha\, r)$ скалярно еквівалентними.

Означення 5.12. Простір Хемінга $H = (H, r)$ називається локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина множини H міститься в підпросторі $(H', r) \subset (H, r)$, який скалярно еквівалентний стандартному простору Хемінга H_n для деякого $n \geq 1$.

Приклад 5.10. Простір Хемінга з прикладу 5.9 є локально стандартним простором.

Твердження 5.2. *Нехай (H_1, r_1), (H_2, r_2) — простори Хемінга. І нехай*

$$H = H_1 \bigotimes{}_{\mathbb{Z}_2} H_2$$

— неунітальний тензорний добуток булевих кілець H_1 і H_2. Тоді існує єдина функція рангу на просторі H така, що

$$r(a \otimes b) = r_1(a) r_2(b)$$

для довільних елементів $a \in H_1$ та $b \in H_2$.

Ми довели аналогічне твердження у підрозділі 5.2 (твердження 5.1) для унітальних просторів Хемінга і унітального тензорного добутку. Але при доведенні наявність одиниці ніде не використовувалася. Тому аналогічне доведення має місце і для неунітального випадку, тобто твердження 5.2 справджується.

Якщо (H_1, r_1) і (H_2, r_2) — локально стандартні простори Хемінга, то їх тензорний добуток $H_1 \bigotimes H_2$ також є локально стандартним протором Хемінга.

Нехай s — деяке число Стейніца і нехай $H(s)$ є зліченним унітальним простором Хемінга, який відповідає числу s. Тоді матимемо, що

$$H(\infty, s) = H(\infty) \bigotimes H(s)$$

є зліченним локально стандартним неунітальним простором Хемінга.

У підрозділі 5.2 ми параметризували унітальні зліченні простори Хемінга числами Стейніца. У цьому ж підрозділі ми доведемо аналог теореми Діксм'є для неунітальних зліченних просторів Хемінга. Для цього ми параметризуємо неунітальні зліченні простори Хемінга парами (s, r), де s — деяке число Стейніца, а r — деяке дійсне число.

Для простору Хемінга H позначимо символом

$$\mathrm{Spec}\ (H)\ =\ \left\{ \mathbf{st}\ (H_n)\,,\ 0 \neq h \in H \right\}\ \subseteq \mathbb{SN}$$

і називатимемо цю множину *спектром простору Хемінга* H.

Як звичайно, для елементів h_1, h_2 простору Хемінга H покладемо $h_1 \geq h_2$, якщо $h_1 H \supseteq h_2 H$.

Лема 5.7. *Нехай* (H, r) *— локально стандартний простір Хемінга. Тоді*

1) *для довільних ненульових елементів* h_1, h_2 *простору* H *знайдеться елемент* h_3 *простору* H *такий, що*

$$h_1 \leq h_3, \quad h_2 \leq h_3; \tag{5.8}$$

2) *якщо* $h_2 \leq h_1$, *то*

$$\mathrm{Spec}\ (H_{h_2})\ \subseteq\ \mathrm{Spec}\ (H_{h_1}). \tag{5.9}$$

Доведення. 1) Позаяк простір H є локально стандартним простором Хемінга, то знайдеться підпростір H' простору H, який містить h_1, $h_2 \in H'$, і такий, що H'

скалярно еквівалентний стандартному простору Хемінга H_n для деякого $n \in \mathbb{N}$. Нехай також α — додатне дійсне число і нехай

$$\varphi : (H_n, \alpha\, r) \to H'$$

— деякий ізоморфізм указаних просторів. Також нехай e — одиниця булевого кільця H_n і $h_3 = \varphi(e)$. Тоді нерівності (5.8) одразу матимуть місце.

2) Тепер припустимо, що $h_2 \leq h_1$, і покажемо, що має місце включення (5.9). Нехай $s \in \mathrm{Spec}\ (H_{h_2})$, тобто нехай існує елемент $h \in h_2 H$ такий, що

$$\mathbf{st}\ \big((H_{h_2})_h \big) = s.$$

Легко бачити, що

$$h\, h_2 H \ = \ h\, h_1 H \ = \ hH.$$

Функція рангу в $(H_{h_2})_h$ збігається з функцією рангу в $(H_{h_1})_h$. Отже, $s \in \mathrm{Spec}\ (H_{h_1})$ і лема доведена. □

Лема 5.8. *Нехай A — зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра, H — підалгебра Картана алгебри A, r — функція відносного рангу, а $(E(H), r)$ — відповідний унітальний простір Хемінга. Тоді*

$$\mathrm{Spec}\ (E(H), r) \ = \ \mathrm{Spec}\ (A). \tag{5.10}$$

Доведення. Нехай $0 \neq e \in E(H)$. Тоді eH є підалгеброю Картана в унітальній локально скінченно–вимірній алгебрі eAe. Неважко побачити, що $eE(H) = E(eH)$. Згідно з теоремою 5.4 матимемо

$$\mathbf{st}\ \big(E(eH) \big) \ = \ \mathbf{st}\ (eAe).$$

Звідси випливає, що

$$\mathrm{Spec}\ (E(H), r) \ \subseteq \ \mathrm{Spec}\ (A).$$

Доведемо тепер включення в інший бік. Нехай e — ідемпотент алгебри A. Згідно з наслідком 5.2 з леми 5.6 знайдеться підалгебра Картана $H' \subset A$ алгебри A, яка містить ідемпотент e. Тоді згідно з теоремою 5.2 існує автоморфізм φ алгебри A, який відображає H' в H. Як і раніше, матимемо, що

$$\mathbf{st}\ \big(\varphi(e) A \varphi(e) \big) \ = \ \mathbf{st}\ \big(E(\varphi(e) H) \big).$$

Звідси випливає, що

$$\mathbf{st}\left(eAe\right) \in \mathrm{Spec}\,(E(H), r).$$

Отже, рівність (5.10) має місце і лема доведена. $\square$

Лема 5.9. *Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра, $0 \neq e$ — ідемпотент алгебри A. Припустимо, що H — підалгебра Картана алгебри eAe. Тоді існує підалгебра Картана $\widetilde{H}$ алгебри A, яка містить H.*

Доведення. Згідно з теоремою Кьоте 3.9 маємо:

$$A \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Тоді знайдеться таке натуральне число $r \geq 1$, що

$$e \in M_{n_1}(\mathbb{F}) \bigotimes \cdots \bigotimes M_{n_r}(\mathbb{F}) \cong M_{n_1 \cdots n_r}(\mathbb{F}).$$

Нехай H' — підалгебра Картана кута

$$e\, M_{n_1 \cdots n_r}(\mathbb{F})\, e.$$

Легко бачити, що H' занурюється в підалгебру Картана $\widetilde{H}'$ алгебри $M_{n_1 \cdots n_r}(\mathbb{F})$. Нехай H'' — підалгебра Картана алгебри

$$\bigotimes_{i=r+1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Тоді $H' \bigotimes H''$ — підалгебра Картана алгебри eAe, а $\widetilde{H}' \bigotimes H''$ — підалгебра Картана алгебри A і

$$H' \bigotimes H'' \subseteq \widetilde{H}' \bigotimes H''.$$

Згідно з теоремою 5.2 існує автоморфізм φ унітальної алгебри eAe, який переводить $H' \bigotimes H''$ в H. Згідно з лемою 4.14 автоморфізм φ продовжується до автоморфізму $\widetilde{\varphi}$ алгебри A. Отже, образ

$$\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{H}' \bigotimes H''\right)$$

є підалгеброю Картана алгебри A, яка містить H. Лема доведена. $\square$

Нехай тепер A — неунітальна локально матрична алгебра, яка є об'єднанням кутів, що строго занурюються один в другий:

$$A_1 \subsetneqq A_2 \subsetneqq \cdots, \quad \text{де} \quad A_i = e_i A e_i, \quad e_i^2 = e_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A. \tag{5.11}$$

Виберемо в A_1 довільну підалгебру Картана H_1. Згідно з лемою 5.9 існують підалгебри Картана H_i в алгебрах A_i, які утворюють зростаючий ланцюжок

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots .$$

Визначимо на

$$H = \bigcup_{i \geq 1} H_i \tag{5.12}$$

функцію рангу. Нехай $r_{A_i}(a)$ — відносний ранг елемента $a \in A_i$ в алгебрі A_i для $i \geq 1$. Тоді (див. підрозділ 3.5)

$$r_{A_i}(e_i) = \alpha_i, \quad \text{де} \quad 0 < \alpha_i < 1.$$

Якщо елемент a належить алгебрі A_i та $i < j$, то матимемо:

$$r_{A_j}(a) = r_{A_i}(a) \cdot r_{A_j}(e_i). \tag{5.13}$$

Припустимо, що елемент $a \in H$ належить підалгебрі H_i. Покладемо

$$r(a) = \frac{r_{A_i}(a)}{\alpha_i}. \tag{5.14}$$

Якщо $i < j$, то з рівності (5.13) випливає, що

$$\frac{r_{A_i}(a)}{\alpha_i} = \frac{r_{A_j}(a)}{\alpha_j}.$$

Отже, означення (5.14) рангу $r(a)$ є коректним.

Неважко побачити, що функція r на булевому кільці $E(H)$ задовольняє умови функції рангу. Тому $(E(H), r)$ — простір Хемінга. Більш того, простір $(E(H), r)$ є локально стандартним. Справді, кожна скінченна підмножина множини H лежить в H_i для деякого i. Простір $(E(H_i), r)$ скалярно еквівалентний унітальному простору $(E(H_i), r_{A_i})$, оскільки функції рангів $r\big|_{E(H_i)}$ та $r_{A_i}\big|_{E(H_i)}$ відрізняються скалярним множником α_i. У свою чергу, простір $(E(H_i), r_{A_i})$ є локально стандартним (див. підрозділ 5.3).

Лема 5.10. *Спектри неунітальної локально матричної алгебри* A (5.11) *та простору Хемінга* $(E(H), r)$, *де узагальнена підалгебра Картана* H *виду* (5.12), *збігаються, тобто*

$$\text{Spec}\,\big(E(H)\big) \;=\; \text{Spec}\,(A). \tag{5.15}$$

Доведення. Для довільного елемента $0 \neq h \in E(H)$ кут hH є підалгеброю Картана кута hAh алгебри A. Отже, див. підрозділ 5.3, унітальний простір Хемінга $E(hH) = E(H)_h$ має те ж саме число Стейніца, що і підалгебра hAh. Тим самим ми довели включення:

$$\text{Spec}\,\big(E(H)\big) \subseteq \text{Spec}\,(A).$$

Припустимо тепер, що $0 \neq e \in A$ — ідемпотент алгебри A. Нехай $e \in A_i$. Згідно з наслідком 5.2 ідемпотент e належить деякій підалгебрі Картана алгебри A_i. Тоді згідно з теоремою 5.2 існує автоморфізм φ алгебри A_i такий, що $\varphi(e) \in H_i$. Тепер

$$\mathbf{st}\,(eAe) \;=\; \mathbf{st}\,(eA_ie) \;=\; \mathbf{st}\,\big(\varphi(e)A_i\varphi(e)\big).$$

Знову, згідно з результатами підрозділу 5.3, маємо:

$$\mathbf{st}\,\big(\varphi(e)A_i\varphi(e)\big) \;=\; \mathbf{st}\,\big(E(H_i)_{\varphi(e)}\big) \;=\; \mathbf{st}\,\big(E(H)_{\varphi(e)}\big) \;\in\; \text{Spec}\,\big(E(H)\big).$$

Лема доведена. □

Лема 5.11. *Для кожного зліченного локально стандартного простору Хемінга* H *спектр* $\text{Spec}\,(H)$ *є повною множиною чисел Стейніца.*

Доведення. Простір H є зліченним. Тому знайдеться послідовність $h_1 \leq h_2 \leq \cdots$ елементів простору H така, що

$$\bigcup_{i\geq 1} h_iH \;=\; H.$$

Тоді

$$\text{Spec}\,(H) \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Spec}\,\big(H_{h_i}\big).$$

Згідно з результатами підрозділу 5.3 і леми 5.8 існує унітальна локально матрична алгебра A_i така, що

$$\text{Spec}\,\big(H_{h_i}\big) \;=\; \text{Spec}\,(A_i).$$

Згідно з лемою 4.1 спектр Spec (H_{h_i}) — повна множина. Легко бачити, що об'єднання повних множин є повною множиною. Отже, лема доведена. $\square$

Згідно з лемою 5.11 та теоремою 4.1 спектр зліченного локально стандартного простору Хемінга може бути однією з таким множин:

$$\mathbb{N}; \quad \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \text{де} \quad n \in \mathbb{N}; \quad S(\infty, s), \quad \text{де} \quad s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N},$$

$$S(r, s) \quad \text{або} \quad S^{+}(r, s), \quad \text{де} \quad r \in [1, \infty), \ s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}.$$

Лема 5.12. *Для кожної повної множини S чисел Стейніца знайдеться зліченний локально стандартний простір Хемінга H такий, що* Spec $(H) = S$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.2 існує зліченно–вимірна локально матрична алгебра A така, що Spec $(A) = S$. Припустимо, що алгебра A унітальна і нехай r_A — відносний ранг алгебри A. Нехай H — підалгебра Картана алгебри A. Згідно з лемою 5.10 унітальний простір Хемінга $(E(H), r_A)$ має спектр S.

Припустимо тепер, що алгебра A не містить одиницю, тобто не є унітальною. Тоді існує послідовність ідемпотентів

$$e_1 < e_2 < \cdots \quad \text{така, що} \quad \bigcup_{i \geq 1} e_i A e_i \ = \ A.$$

Раніше ми показали, що знайдуться підалгебри Картана $H_i \subset e_i A e_i$, які утворюють ланцюжок $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$, а також визначили функцію рангу $r : H \longrightarrow [0, \infty)$ на об'єднанні

$$H \ = \ \bigcup_{i \geq 1} H_i.$$

Згідно з лемою 5.8 неунітальний простір Хемінга $(E(H), r)$ має спектр S. Лема доведена. $\square$

Для завершення класифікації зліченних локально стандартних просторів Хемінга залишилося довести таку теорему.

Теорема 5.5. *Якщо зліченні локально стандартні простори Хемінга (H_1, r_1) та (H_2, r_2) мають однакові спектри, то вони скалярно еквівалентні.*

Для доведення теореми 5.5 нам знадобляться аналоги леми 4.12, леми 4.13 та леми 4.14, які у випадку просторів Хемінга виглядають значно простіше.

Лема 5.13. *Нехай (H, r) — зліченний унітальний локально стандартний простір Хемінга.*

1) *Нехай $H_n \subset H$ — стандартний підпростір простору H. Тоді довільний автоморфізм простору H_n продовжується до автоморфізму простору H.*
2) *Нехай $0 \neq h \in H$. Кожний автоморфізм простору (hH, r) піднімається до автоморфізму простору H.*
3) *Нехай a, b — ненульові елементи простору H. Довільний ізоморфізм $\varphi : H_a \to H_b$ продовжується до автоморфізму простору H.*
4) *Нехай (H_1, r_1) та (H_2, r_2) — ізоморфні унітальні локально стандартні простори Хемінга і нехай $a \in H_1$, $b \in H_2$. Тоді кожний ізоморфізм*

$$\left(H_1\right)_a \;\to\; \left(H_2\right)_b$$

продовжується до ізоморфізму $H_1 \to H_2$.

Доведення. 1) У підрозділі 5.2 ми показали, що знайдеться підпростір $H' \subset H$ такий, що

$$H \;\cong\; H_n \bigotimes H'.$$

Нехай φ — автоморфізм простору H_n. Тоді

$$\widetilde{\varphi} \;:\; \sum_i a_i \otimes b_i \;\mapsto\; \sum_i \varphi(a_i) \otimes b_i, \quad \text{де} \quad a_i \in H_n,\; b_i \in H',$$

продовжує автоморфізм φ.

2) Ми маємо

$$H \;=\; hH \bigoplus (1-h)H.$$

Нехай $\varphi : hH \mapsto hH$ — автоморфізм простору (hH, r). Тоді відображення

$$ha \;+\; (1-h)b \;\mapsto\; \varphi(ha) \;+\; (1-h)b$$

є автоморфізмом.

3) Існує стандартний підпростір H_n простору H, який містить елементи 1, a, b. Оскільки

$$\mathbf{st}\,(H_a) \;=\; r(a)\cdot \mathbf{st}\,(H), \quad \mathbf{st}\,(H_b) \;=\; r(b)\cdot \mathbf{st}\,(H),$$

то маємо: $r(a) = r(b)$. Звідси випливає, що існує автоморфізм ψ простору H_n, який переводить a в b. Згідно з пунктом 1) цієї леми автоморфізм ψ простору H_n продовжується до автоморфізму $\widetilde{\psi}$ пространу H. Покладемо

$$\chi \;=\; \widetilde{\psi}^{-1} \circ \varphi \;:\; aH \;\to\; aH.$$

Згідно з пунктом 2) цієї леми автоморфізм $\chi : aH \to aH$ продовжується до автоморфізму простору H. Звідси випливає, що й ізоморфізм φ також буде продовжуватися до автоморфізму простору H.

4) Нехай відображення

$$\varphi \ : \ aH_1 \ \to \ bH_2 \quad \text{та} \quad \psi \ : \ H_1 \ \to \ H_2$$

є ізоморфізмами. Тоді суперпозиція

$$\psi^{-1} \circ \varphi \ : \ aH_1 \ \to \ \psi^{-1}(b)H_1$$

— також ізоморфізм. Згідно з пунктом 3) цієї леми ізоморфізм $\psi^{-1} \circ \varphi$ продовжується до автоморфізму простору H_1. Звідси випливає твердження 4). Лема доведена. □

Лема 5.14. *Нехай* (H, r) *— зліченний локально стандартний простір Хемінга та нехай* $0 \neq h \in H$ *і* $s = \mathbf{st}\,(H_h)$. *Припустимо, що* $s' \in \mathrm{Spec}\,(H)$, $s \leq s'$. *Тоді знайдеться елемент* $h' \in H$ *такий, що*

$$hH \ \subseteq \ h'H \quad i \quad \mathbf{st}\,(H_{h'}) \ = \ s'.$$

Доведення. Оскільки $s' \in \mathrm{Spec}\ (H)$, то знайдеться елемент $e \in H$ такий, що $\mathbf{st}\,(H_e) = s'$. З локальної стандартності простору H випливає існування підпростору $(H_n, \alpha \cdot r_{H_n})$ простору H, де α — деяке дійсне додатне число, такого, що h, $e \in H_n$. Тоді маємо:

$$H_n \ = \ \mathbb{Z}_2^n,$$

$$r(i_1, \ldots, i_n) \ = \ \frac{\alpha}{n}\Big(i_1 + \cdots + i_n\Big), \quad i_1, \ \ldots, \ i_n \ \in \ \{0, 1\}.$$

Якщо $a \in H_n$, то

$$\mathbf{st}\,(H_a) \ = \ r_{H_n}(a) \cdot \mathbf{st}\,(H).$$

Позаяк $s' \geq s$, то

$$r_{H_n}(e) \ \geq \ r_{H_n}(h).$$

Існує автоморфізм φ простору H_n такий, що $hH_n \subseteq \varphi(e)H_n$. Згідно з лемою 5.13 пункт 1) автоморфізм φ продовжується до автоморфізму $\widetilde{\varphi}$ простору H. Елемент $h' = \varphi(e)$ задовольняє усі необхідні вимоги. Отже, лема доведена. □

Доведення теореми 5.5. Припустимо, що (H', r') та (H'', r'') — зліченні локально стандартні простори Хемінга такі, що $\mathrm{Spec}\,(H') = \mathrm{Spec}\,(H'')$. Нехай

$$H' \;=\; \{\, 0 = h'_1,\; h'_2,\; \ldots,\; \}, \quad H'' \;=\; \{\, 0 = h''_1,\; h''_2,\; \ldots,\; \}.$$

Скориставшись індукцією за n, побудуємо послідовність елементів

$$a_1,\; \ldots,\; a_n \;\in\; H', \quad b_1,\; \ldots,\; b_n \;\in\; H'', \tag{5.16}$$

таких, що

$$a_1H' \;\subseteq\; a_2H' \;\subseteq\; \cdots \;\subseteq\; a_nH', \quad b_1H'' \;\subseteq\; b_2H'' \;\subseteq\; \cdots \;\subseteq\; b_nH'',$$

і таких, що

$$h'_1,\; \ldots,\; h'_n \;\in\; a_nH', \quad h''_1,\; \ldots,\; h''_n \;\in\; b_nH''$$

і числа Стейніца збігаються

$$\mathbf{st}\,\left(H'_{a_i}\right) \;=\; \mathbf{st}\,\left(H''_{b_i}\right)$$

для всіх i.

Нехай $a_1 = b_1 = 0$. Припустимо, що послідовності $a_1, \ldots, a_n$ та $b_1, \ldots, b_n$ побудовані.

Простір H' є локально стандартним. Тому існує підпростір

$$\left(H_p, \alpha \cdot r_{H_p}\right) \;\subset\; \left(H', r'\right),$$

який містить a_n та h'_{n+1}. Нехай x_{n+1} — одиниця H_p. Легко бачити, що

$$a_n,\; h'_{n+1} \;\in\; x_{n+1}H.$$

Ми маємо:

$$\mathbf{st}\,\left(H'_{x_{n+1}}\right) \;\geq\; \mathbf{st}\,\left(H'_{a_n}\right).$$

Позаяк

$$\mathbf{st}\,\left(H'_{x_{n+1}}\right) \;\in\; \mathrm{Spec}\,(H') \;=\; \mathrm{Spec}\,\left(H''\right),$$

то згідно з лемою 5.14 знайдеться елемент $y_{n+1} \in H''$ такий, що

$$b_n \in y_{n+1}H'' \quad \text{та} \quad \mathbf{st}\,\left(H''_{y_{n+1}}\right) \;=\; \mathbf{st}\,\left(H'_{x_{n+1}}\right).$$

Простір H'' є локально стандартним. Тому існує підпростір

$$\big(H_q, \beta \cdot r_{H_q}\big) \ \subset \ \big(H, r\big),$$

який містить h''_{n+1} та y_{n+1}. Нехай z_{n+1} — одиниця H_q. Очевидно, що

$$h''_{n+1},\ y_{n+1} \ \in \ z_{n+1}H'', \quad \mathbf{st}\,(H''_{z_{n+1}}) \ \geq \ \mathbf{st}\,(H''_{y_{n+1}}).$$

Насамкінець, знову згідно з лемою 5.14 існує елемент $t_{n+1} \in H'$ такий, що

$$x_{n+1} \ \in \ t_{n+1}H' \quad \text{і} \quad \mathbf{st}\,(H'_{t_{n+1}}) \ = \ \mathbf{st}\,(H''_{z_{n+1}}).$$

Покладемо $a_{n+1} = t_{n+1}$, $b_{n+1} = z_{n+1}$. Послідовності

$$a_1,\ a_2,\ \ldots \ \in \ H' \quad \text{та} \quad b_1,\ b_2,\ \ldots \ \in \ H''$$

побудовані.

Згідно з лемою 5.13 існує оборотне лінійне відображення $\varphi : H' \to H''$ таке, що для довільного i матимемо:

$$\varphi\big(a_i H'\big) \ = \ b_i H''$$

і звуження φ на H'_{a_i} є ізоморфізмом просторів Хемінга

$$H'_{a_i} \ \to \ H''_{b_i}, \quad i \geq 1.$$

Це означає, що для довільного елемента $a \in a_i H'$

$$\frac{r'(a)}{r'(a_i)} \ = \ \frac{r''(\varphi(a))}{r''(b_i)}, \qquad \frac{r''(\varphi(a))}{r'(a)} \ = \ \frac{r''(b_i)}{r'(a_i)}.$$

Звідси випливає, що коли $i < j$, то

$$\frac{r''(b_i)}{r'(a_i)} \ = \ \frac{r''(\varphi(b_j))}{r'(a_j)} \ = \ \alpha \ > \ 0.$$

Отже, для довільного елемента $a \in H'$

$$r''\big(\varphi(a)\big) \ = \ \alpha \cdot r'(a),$$

тобто простори H' та H'' скалярно еквівалентні. Теорема 5.5 доведена. □

Висновки до розділу 5

Природним аксіоматичним контекстом для нескінченних узагальнень стандартних просторів Хемінга є клас булевих кілець з мірою та структурою лінійного векторного простору, які ще називаються просторами Хемінга. У цьому розділі вивчався клас таких просторів. Основними результатами розділу є:

- Визначено тензорний добуток у класі просторів Хемінга.
- Доведено, що кожен унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга є тензорним добутком стандартних просторів Хемінга, що є аналогом теореми Кьоте.
- Визначено інваріант довільного унітального локально стандартного простору Хемінга, а саме — число Стейніца, і показано, що унітальні зліченні локально стандартні простори Хемінга ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца збігаються, що є аналогом теореми Глімма.
- Показано, що для довільної узагальненої підалгебри Картана H унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри її підалгебра ідемпотентів $E(H)$ з функцією відносного рангу в ролі міри є унітальним локально стандартним простором Хемінга.
- Доведено, що кожен унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга може бути реалізований як алгебра ідемпотентів $E(H)$ для деякої підалгебри Картана H унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.
- Доведено, що довільні дві підалгебри Картана унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри спряжені за допомогою автоморфізму.
- Показано, що в будь–якій унітальній зліченно–вимірній локально матричній алгебрі знайдеться узагальнена підалгебра Картана, яка не спряжена з жодною підалгеброю Картана. Зокрема, не довільні дві узагальнені підалгебри Картана є спряженими.
- Доведено, що якщо підалгебри Картана унітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр A та B ізоморфні як простори Хемінга, то ці алгебри A та B також ізоморфні.
- Для кожного локально стандартного (не обов'язково унітального) простору Хемінга визначено його спектр і доведено, що він є повною множиною

чисел Стейніца.

- Для кожної повної множини чисел Стейніца побудовано зліченний локально стандартний простір Хемінга, спектром якого є ця множина.
- Показано, що зліченні простори Хемінга ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються. Таким чином, неунітальні зліченні локально стандартні простори Хемінга параметризуються парами, які складаються з числа Стейніца і невід'ємного дійсного числа, що є аналогом теореми Діксм'є.

Розділ 6

Автоморфізми і диференціювання локально матричних алгебр

Нехай A, як і раніше, асоціативна $\mathbb{F}$−алгебра. Розглянемо векторний простір A з новою операцією

$$[\,a,\,b\,] \;=\; a\,b \;-\; b\,a.$$

Отримана таким чином алгебра є приєднаною алгеброю Лі (див. [130]). Позначатимемо її символом $A^{(-)}$.

Означення 6.1. Нагадаємо, що лінійне відображення $d : A \to A$ алгебри A в себе називається диференціюванням, якщо

$$d(xy) \;=\; d(x)\,y \;+\; x\,d(y) \tag{6.1}$$

для довільних елементів $x, y \in A$.

Векторний простір $\mathrm{Der}(A)$ усіх диференціювань алгебри A замкнений відносно комутування і тому є алгеброю Лі. Для довільного елемента $a \in A$ оператор комутування

$$\mathrm{ad}(a) : \; A \;\to\; A, \quad x \;\mapsto\; [a, x],$$

є (*внутрішнім*) *диференціюванням* (або ще кажуть *приєднаним диференціюванням*, індукованим елементом a) алгебри A. Розглянемо векторний простір

$$\mathrm{Inder}\,(A) \;=\; \Big\{\,\mathrm{ad}(a),\; a \;\in\; A\,\Big\} \;\subset\; \mathrm{Der}\,(A).$$

Для кожного елемента $a \in A$ і диференціювання $d \in \mathrm{Der}(A)$ ми маємо:

$$[d,\; \mathrm{ad}(a)] \;=\; \mathrm{ad}\big(d(a)\big). \tag{6.2}$$

Таким чином, $\mathrm{Inder}(A)$ — ідеал алгебри Лі $\mathrm{Der}(A)$. Ідеал $\mathrm{Inder}(A)$ будемо називати *алгеброю внутрішніх диференціювань* алгебри A.

Легко бачити, що коли Z — центр алгебри A, то

$$\mathrm{Inder}(A) \;\cong\; A^{(-)} \,/\, Z. \tag{6.3}$$

Розглянемо фактор–алгебру

$$\mathrm{Outder}(A) \;=\; \mathrm{Der}(A) \,/\, \mathrm{Inder}(A).$$

Така алгебра називається *алгеброю зовнішніх диференціювань* алгебри A.

Основні означення можна подивитися в [74, 123].

Позначимо через $\mathrm{Aut}(A)$ *групу автоморфізмів алгебри A* і розглянемо її нормальну підгрупу $\mathrm{Inn}(A)$, яка складається з внутрішніх автоморфізмів

$$x \;\mapsto\; a^{-1}xa, \quad x \;\in\; A,$$

де a — оборотний елемент алгебри A. Групу $\mathrm{Inn}(A)$ будемо називати *групою внутрішніх автоморфізмів алгебри A*.

Фактор–група

$$\mathrm{OutAut}(A) \;=\; \mathrm{Aut}(A) \,/\, \mathrm{Inn}(A)$$

називається *групою зовнішніх автоморфізмів алгебри A*.

Результати цього розділу опубліковано в [19, 20, 28, 32, 118].

6.1 Топологія Тихонова

Нагадаємо означення топології Тихонова на декартовому добуткові топологічних просторів (див., наприклад, [57, 109, 124, 132]). Нехай

$$\{\, X_i \,\}_{i\in I} \tag{6.4}$$

— родина топологічних просторів, які індексуються множиною I. Декартовим добутком

$$\prod_{i\in I} X_i \tag{6.5}$$

топологічних просторів (6.4) ми називаємо множину функцій

$$f \; : \; I \;\to\; \bigcup_{i \in I} X_i$$

таку, що $f(i) \in X_i$ для кожного $i \in I$.

Зафіксуємо скінченну непорожню підмножину $\left\{ \, i_1, \; \ldots, \; i_r \, \right\} \; \subset \; I$. Нехай

$$U_{i_1}, \; \ldots, \; U_{i_r}$$

— відкриті множини у просторах $X_{i_1}, \; \ldots, \; X_{i_r}$ відповідно. Розглянемо підмножину

$$M(i_1, \ldots, i_r; \; U_1, \ldots, U_{i_r}) \tag{6.6}$$

декартового добутку (6.5), яка складається з функцій

$$f \;\in\; \prod_{i \in I} X_i$$

таких, що

$$f(i_1) \;\in\; U_{i_1}, \;\; \ldots \;, \quad f(i_r) \;\in\; U_{i_r}.$$

Топологія Тихонова на добутку (6.5) породжується відкритими множинами (6.6), де $\{i_1, \ldots, i_r\}$ пробігає всі непорожні скінченні підмножини множини I, а

$$U_{i_1}, \; \ldots, \; U_{i_r}$$

пробігають усі відкриті множини просторів $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$ відповідно.

Нехай X — довільна непорожня множина. Задамо на X дискретну топологію, тобто топологію, в якій усі підмножини відкриті і замкнені одночасно. Множину відображень

$$\mathrm{Map}\;(X, X) \;=\; \left\{ \, f : \; X \;\to\; X \, \right\} \tag{6.7}$$

можна ототожнити з декартовим степенем множини X. У цьому випадку топологія Тихонова на множині (6.7) породжуватиметься підмножинами

$$M(a_1, \ldots, a_n; \; b_1, \ldots, b_n) \;= \tag{6.8}$$

$$\left\{ f : \; X \;\to\; X \;\mid\; f(a_i) \;=\; b_i, \quad 1 \le i \le n \, \right\},$$

де $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ — елементи множини X, причому елементи $a_1, \ldots,$ a_n — усі різні.

Для непорожньої підмножини $Y \subset \mathrm{Map}(X, X)$ її замикання $\overline{Y}$ у топології Тихонова складається з функцій $f : X \to X$, що задовольняють умову:

$$\text{для довільних різних елементів } a_1, \ldots, a_n \in X,\ n \geq 1,$$
$$\text{знайдеться функція } g \in Y \text{ така, що}$$

$$f(a_i) \;=\; g(a_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Теорема 6.1. *Нехай A — локально матрична алгебра.*

1) *Ідеал $Inder(A)$ щільний в алгебрі $Der(A)$ в топології Тихонова.*
2) *Припустимо, що алгебра A містить 1. Тоді замиканням групи $Inn(A)$ в $Map(A, A)$ в топології Тихонова є напівгрупа $P(A)$ унітальних ін'єктивних ендоморфізмів. Зокрема, підгрупа $Inn(A)$ щільна в групі $Aut(A)$.*

Доведення теореми 6.1. 1) Легко бачити, що векторний простір $\mathrm{Der}(A)$ замкнений у $\mathrm{Map}(X, X)$ у топології Тихонова. Звідси випливає, що

$$\overline{\mathrm{Inder}(A)} \;\subseteq\; \mathrm{Der}(A).$$

Для доведення зворотнього включення необхідно перевірити, що для будь–якого диференціювання $d : A \to A$ і довільних елементів $a_1, \ldots, a_n \in A$ знайдеться елемент $b \in A$ такий, що

$$d(a_i) \;=\; \big[\, b,\; a_i \,\big], \quad 1 \;\leq\; i \;\leq n.$$

Виберемо підалгебру $B_1 \subset A$ алгебри A таку, що

$$a_1,\; \ldots,\; a_n \;\in\; B_1 \quad \text{і} \quad B_1 \;\cong\; M_k(\mathbb{F}).$$

Далі виберемо підалгебру $B_2 \subset A$ алгебри A таку, що

$$B_1 \;+\; d(B_1) \;\subseteq\; B_2 \quad \text{і} \quad B_2 \;\cong\; M_l(\mathbb{F}).$$

Підалгебра B_2 містить підалгебру B_1, тому є B_1–бімодулем.

Нагадаємо, що для довільної алгебри R та будь–якого R–бімодуля лінійне відображення $\varphi : R \to V$ називається *диференціюванням*, якщо

$$\varphi(ab) \;=\; \varphi(a)\, b \;+ a\, \varphi(b)$$

для довільних елементів $a, b \in R$.

Зафіксуємо елемент $v \in V$. Тоді відображення

$$R \;\to\; V, \quad a \;\mapsto\; [a,\, v],$$

є (внутрішнім) диференціюванням алгебри R у бімодуль V. Відомо (див. [55]), що для матричної алгебри $R = M_n(\mathbb{F})$ і довільного R–бімодуля V будь–яке диференціювання $R \to V$ є внутрішнім.

Таким чином, відображення

$$d \;:\; B_1 \;\to\; B_2$$

є бімодульним диференціюванням. Отже, знайдеться оборотний елемент $b \in B_2$ такий, що $d(a) = [a, b]$ для довільного елемента $a \in B_1$. Перша частина теореми 6.1 доведена.

2) Припустимо тепер, що локально матрична алгебра A містить 1. Нехай $\varphi \in P(A)$. Як і раніше, нам потрібно довести, що для довільних елементів $a_1, \ldots,$ $a_n \in A$ знайдеться оборотний елемент $b \in A$ такий, що

$$\varphi(a_i) \;=\; b^{-1}\, a_i\, b, \quad 1 \le i \le n.$$

Виберемо підалгебру $B_1 \subset A$ алгебри A таку, що

$$1,\; a_1,\; \ldots,\; a_n \;\in\; B_1$$

і алгебра B_1 ізоморфна деякій матричній алгебрі $M_k(\mathbb{F})$. Далі виберемо підалгебру $B_2 \subset A$ алгебри A таку, що

$$B_1 \;+\; \varphi(B_1) \;\subseteq\; B_2 \quad \text{і} \quad B_2 \;\cong\; M_l(\mathbb{F}).$$

Згідно з теоремою Сколема–Нетер (див. [55, 69]) відображення

$$\varphi \;: B_1 \;\to\; B_2$$

продовжується до внутрішнього автоморфізму алгебри B_2. Тим самим знайдеться оборотний елемент $b \in B_2$ такий, що $d(a) = [a, b]$ для всіх елементів $a \in B_1$. Теорема 6.1 доведена. □

Лема 6.1. *Нехай A — нескінченно–вимірна локально матрична алгебра. Припустимо, що $d \in Der(A)$ та $d([A, A])$ лежить у центрі алгебри A. Тоді $d = 0$.*

Доведення. Позначимо символом Z центр алгебри A. Якщо алгебра A неунітальна, то $Z = \{0\}$.

Якщо ж $1 \in A$, то $Z = \mathbb{F} \cdot 1$. Розглянемо матричну підалгебру

$$M_n(\mathbb{F}) \ \subset \ A, \quad n \ \geq \ 4.$$

Виберемо різні індекси i, j, s, t, що лежать між 1 та n. Довільна матрична одиниця

$$e_{ij}, \quad 1 \ \leq \ i \ \neq \ j \ \leq \ n,$$

належить комутанту $[M_n(\mathbb{F}), M_n(\mathbb{F})]$. Тоді

$$e_{ij} \ = \ [\ e_{is},\ e_{sj}\ ].$$

Таким чином,

$$d(e_{ij}) \ \in \ Z\, e_{is} \ + \ Z\, e_{sj}.$$

З іншого боку,

$$e_{ij} \ = \ [\ e_{it},\ e_{tj}\ ].$$

Отже,

$$d(e_{ij}) \ \in \ Z\, e_{it} \ + \ Z\, e_{tj}.$$

Тому $d(e_{ij}) = 0$. Асоціативна алгебра $M_n(\mathbb{F})$ породжується матричними одиницями $e_{ij,}$ $1 \leq i \neq j \leq n$. Таким чином,

$$d\,\big(M_n(\mathbb{F})\big) \ = \ \{\ 0\ \}.$$

Лема 6.1 доведена. □

Нагадаємо, що топологічна алгебра називається *топологічно простою*, якщо вона не містить власних замкнених ідеалів.

Теорема 6.2. *Нехай A — локально матрична алгебра.*

1) *Алгебра Лі*
$$\Big[\ \mathrm{Inder}\ (A),\ \mathrm{Inder}\ (A)\ \Big] \tag{6.9}$$
проста;

2) *алгебра Лі*
$$\Big[\ \mathrm{Der}\ (A),\ \mathrm{Der}\ (A)\ \Big] \tag{6.10}$$
топологічно проста.

Доведення. 1) І. Херстейн [69] довів, що якщо R — проста асоціативна алгебра з центром Z, то алгебра Лі

$$\big[\, R,\ R \,\big] \,/\, \big(\big[\, R,\ R \,\big] \,\cap\, Z\big)$$

є також простою.

Нехай тепер Z — центр локально матричної алгебри A. Тоді (див. (6.3))

$$\mathrm{Inder}\,(A) \;\cong\; A^{(-)} / \, Z.$$

За теоремою Херстейна алгебра

$$\big[\,\mathrm{Inder}\,(A),\ \mathrm{Inder}\,(A),\ \big] \;\cong\; [\,A,\ A\,] \,/\, \big([\,A,\ A\,] \,\cap\, Z\big)$$

є простою.

2) Нехай тепер I — ненульовий замкнений ідеал алгебри Лі (6.10). Нехай $0 \neq d \in I$. Для довільного елемента $a \in [A, A]$ ми маємо (див. (6.2)):

$$\big[\, d,\ \mathrm{ad}(a) \,\big] \;=\; \mathrm{ad}(d(a)).$$

Елемент $a \in [A, A]$ можна вибрати таким чином, щоб виконувалася нерівність:

$$\mathrm{ad}\big(\, d(a) \,\big) \;\neq\; 0.$$

Справді, $\mathrm{ad}(d(a)) = 0$ означає, що елемент $d(a)$ лежить у центрі алгебри A. Якщо для будь–якого елемента $a \in [A, A]$ його диференціювання $d(a)$ належить центру, то за лемою 6.1 матимемо, що $d = 0$. А це суперечить вибору диференціювання d.

Таким чином,

$$I \bigcap \big[\,\mathrm{Inder}\,(A)\,,\ \mathrm{Inder}\,(A)\,\big] \;\neq\; \{0\}.$$

З простоти алгебри (6.9) тоді випливатиме, що

$$\big[\,\mathrm{Inder}\,(A),\ \mathrm{Inder}\,(A)\,\big] \;\subseteq\; I.$$

Згідно з теоремою 6.1 множина $\mathrm{Inder}(A)$ щільна в $\mathrm{Der}(A)$ і тому множина (6.9) щільна в (6.10). Але ідеал I — замкнений, тому

$$I \;=\; \big[\,\mathrm{Der}\,(A)\,,\ \mathrm{Der}\,(A)\,\big].$$

Теорема 6.2 доведена. □

Питання про простоту алгебри $\mathrm{Inder}(A)$ і топологічну простоту алгебри $\mathrm{Der}(A)$ є більш делікатним. Обмежимося розглядом унітальної нескінченно–вимірної локально матричної алгебри A, одиницею якої є 1. Нехай

$$s = \mathbf{st}\,(A) \quad \text{і нехай} \quad s = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p}, \tag{6.11}$$

де p пробігає множину всіх простих чисел $\mathbb{P}$. Позначимо

$$v_p(s) = k_p.$$

Лема 6.2. *Якщо* $char\,\mathbb{F} = 0$, *то*

$$A = \big[\,A,\ A\,\big] + \mathbb{F}\cdot 1.$$

Якщо $char\,\mathbb{F} = p > 0$, *то*

$$A = \big[\,A,\ A\,\big] + \mathbb{F}\cdot 1 \quad \textit{тоді й лише тоді, коли}$$

$$v_p(s) = 0 \quad \textit{або} \quad v_p(s) = \infty.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $A = M_n(\mathbb{F})$. Очевидно, що

$$\big[\,M_n(\mathbb{F})\,,\ M_n(\mathbb{F})\,\big] = \big\{\,a \in M_n(\mathbb{F})\,\big|\,\mathrm{tr}(a) = 0\,\big\} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}),$$

тобто $[M_n(\mathbb{F}), M_n(\mathbb{F})]$ є спеціальною лінійною алгеброю Лі $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ (тут $\mathrm{tr}(a)$ означає слід матриці $a \in M_n(\mathbb{F})$, тобто суму всіх її діагональних елементів). Якщо

$$\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0 \quad \text{або} \quad \mathrm{char}\,\mathbb{F} = p > 0, \quad p \nmid n, \tag{6.12}$$

то $\mathrm{tr}(1) = n \neq 0$. Тому для кожного елемента $a \in M_n(\mathbb{F})$

$$a = \Big(a - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(a)\cdot 1\Big) + \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(a)\cdot 1 \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) + \mathbb{F}\cdot 1,$$

тобто

$$A = \big[\,A,\ A\,\big] + \mathbb{F}\cdot 1.$$

Якщо $p \mid n$, то $\mathrm{tr}(1) = 0$. Отже,

$$\big[\,M_n(\mathbb{F})\,,\ M_n(\mathbb{F})\,\big] + \mathbb{F}\cdot 1 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \neq M_n(\mathbb{F}).$$

Якщо має місце (6.12), то для довільної матричної підалгебри

$$1 \in A_1 \subset A, \quad A_1 \cong M_n(\mathbb{F}),$$

маємо:

$$A_1 = \left[A_1 , A_1 \right] + \mathbb{F} \cdot 1.$$

Таким чином,

$$A = \left[A , A \right] + \mathbb{F} \cdot 1.$$

Припустимо, що

$$p^{\infty} \,\Big|\, s, \tag{6.13}$$

де s — число Стейніца (6.11). Розглянемо матричну підалгебру

$$1 \in A_1 \subset A, \quad A_1 \cong M_n(\mathbb{F}),$$

де n — дільник числа s. Число pn також ділить число Стейніца s. Тому знайдеться підалгебра $A_2 \subset A$, така, що

$$A_1 \subset A_2, \quad A_2 \cong M_m(\mathbb{F}), \quad p \,\Big|\, \frac{m}{n}\,.$$

Позначимо символом C централізатор підалгебри A_1 в A_2,

$$A_2 = A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C, \quad C \cong M_{m/n}(\mathbb{F}).$$

Для довільних елементів $a \in A_1$, $b \in C$ ми маємо:

$$\mathrm{tr}_{A_2}\big(a \otimes b \big) = \mathrm{tr}_{A_1}(a) \cdot \mathrm{tr}_C(b),$$

де tr_{A_2}, tr_{A_1}, tr_C означають сліди (тобто суми діагональних елементів) у підалгебрах A_2, A_1, C відповідно. Тоді

$$\mathrm{tr}_C(1) = \frac{m}{n} = 0.$$

Таким чином,

$$\mathrm{tr}_{A_2}\big(A_1 \bigotimes 1 \big) = \mathrm{tr}_{A_1}(A_1) \cdot \mathrm{tr}_C(1) = \{0\}.$$

Тому

$$A_1 \subseteq \left[A_2 , A_2 \right].$$

Ми показали, що у випадку, коли має місце (6.13), виконується рівність $A = [A, A]$.

Припустимо, насамкінець, що

$$\nu_p(s) \ = \ k, \quad 1 \ \le \ k \ < \ \infty.$$

Розглянемо підалгебру

$$1 \ \in \ A_1 \ \subset \ A, \quad A_1 \ \cong \ M_{p^k}(\mathbb{F}).$$

Зафіксуємо елемент $a \in A_1$ такий, що $\mathrm{tr}_{A_1}(a) \neq 0$. Покажемо, що

$$a \ \notin \ \big[\, A \, , \, A \, \big] \ + \ \mathbb{F} \ \cdot \ 1.$$

Справді, якщо це не так, то знайдеться підалгебра A_2 алгебри A така, що

$$A_2 \ \cong \ M_n(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad a \ \in \ \big[\, A_2 \, , \, A_2 \, \big] \ + \ \mathbb{F} \ \cdot \ 1.$$

Позаяк $p \mid n$, то $\mathrm{tr}_{A_2}(1) = 0$ і, отже,

$$\mathrm{tr}_{A_2}(a) \ = \ 0.$$

Як і раніше, розглянемо централізатор C алгебри A_1 в A_2,

$$A_2 \ = \ A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C.$$

Алгебра C ізоморфна матричній алгебрі $M_m(C)$, де

$$m \ = \ \frac{n}{p^k}.$$

При цьому $p \nmid m$, $\mathrm{tr}_C(1) = m \neq 0$. Тепер

$$\mathrm{tr}_{A_2}(a) \ = \ \mathrm{tr}_{A_2}\big(\, a \ \otimes \ 1 \, \big) \ = \ \mathrm{tr}_{A_1}(a) \ \cdot \ \mathrm{tr}_C(1) \ \neq \ 0.$$

Отримана суперечність завершує доведення леми 6.2. □

Теорема 6.3. *Нехай A — унітальна нескінченно–вимірна локально матрична алгебра.*

1) *Алгебра Лі* $\mathrm{Inder}(A)$ *проста тоді й лише тоді, коли*

$$\mathrm{char}\, \mathbb{F} \ = \ 0 \tag{6.14}$$

або

$$\mathrm{char}\, \mathbb{F} \ = \ p \ > \ 0 \quad \text{та} \quad \nu_p(\ \mathbf{st}(A)\ ) \ = \ 0 \quad \text{або} \quad \nu_p(\ \mathbf{st}(A)\ ) \ = \ \infty. \tag{6.15}$$

2) *Алгебра Лі* $\mathrm{Der}(A)$ *топологічно проста тоді й лише тоді, коли*

$$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \;=\; 0 \quad \textit{або}$$

$$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \;=\; p \;>\; 0 \quad \textit{та} \quad v_p(\,\mathbf{st}(A)\,) \;=\; 0 \quad \textit{або} \quad v_p(\,\mathbf{st}(A)\,) \;=\; \infty.$$

Доведення. Частина 1) випливає з леми 6.2 і теореми 6.1. Справді,

$$\mathrm{Inder}\,(A) \;\cong\; A^{(-)} \big/\, \mathbb{F}\cdot 1\,.$$

Якщо виконуються умови (6.14) та (6.15), то згідно з лемою 6.2 ми матимемо

$$A^{(-)} \big/\, \mathbb{F}\cdot 1 \;=\; \big[\,A\,,\,A\,\big] \,\big/\, [A\,,\,A] \cap \mathbb{F}\cdot 1$$

— проста алгебра Лі за згаданою на стор. 197 теоремою Херстейна із [69]. Якщо ж

$$1 \;\le\; v_p(\,\mathbf{st}(A)\,) \;<\; \infty,$$

то

$$\big[\,A\,,\,A\,\big] \;+\; \mathbb{F} \;\cdot\; 1 \;\subsetneqq\; A.$$

Тому

$$\big[\,\mathrm{Inder}\,(A)\,,\;\mathrm{Inder}\,(A)\,\big] \;\subsetneqq\; \mathrm{Inder}\,(A).$$

2) Нехай I — ненульовий замкнений ідеал в алгебрі Лі $\mathrm{Der}(A)$. Якщо виконуються умови (6.14) та (6.15), то, міркуючи аналогічно, як це було при доведенні теореми 6.2, ми отримаємо

$$I \bigcap \mathrm{Inder}\,(A) \;\neq\; \{0\}.$$

Оскільки алгебра $\mathrm{Inder}\,(A)$ у цьому випадку є простою, то $\mathrm{Inder}\,(A) \;\subseteq\; I$. За теоремою 6.1 звідси випливає

$$I \;=\; \overline{\mathrm{Inder}\,(A)} \;=\; \mathrm{Der}\,(A).$$

Тепер припустимо, що

$$v_p(\,\mathbf{st}(A)\,) \;=\; k, \quad 1 \;\le\; k \;<\; \infty.$$

Знайдеться підалгебра

$$1 \;\in\; A_1 \;\subset\; A$$

така, що
$$A_1 \;\cong\; M_{p^k}(\mathbb{F}).$$
Виберемо елемент $a \in A_1$ такий, що
$$\mathrm{tr}_{A_1}(a) \;\neq\; 0.$$
Покажемо, що внутрішнє диференціювання $\mathrm{ad}(a)$ не лежить у замиканні
$$\overline{\big[\,\mathrm{Der}\,(A)\,,\;\mathrm{Der}\,(A)\,\big]} \;=\; \overline{\big[\,\mathrm{Inder}\,(A)\,,\;\mathrm{Inder}\,(A)\,\big]},$$
і отже,
$$\overline{\big[\,\mathrm{Inder}\,(A)\,,\;\mathrm{Inder}\,(A)\,\big]}$$
— власний замкнений ідеал в алгебрі Лі $\mathrm{Der}(A)$.

Справді, якщо це не так, то знайдуться елементи a_i, $b_i \in A$, $1 \le i \le n$, такі що
$$\Big(\,\mathrm{ad}(a) \;-\; \sum_{i=1}^{n}\;\mathrm{ad}\big(\,[a_i\,,\;b_i]\,\big)\,\Big)\big(A_1\big) \;=\; \{0\}.$$
Також існуватиме підалгебра $A_2 \subset A$ така, що
$$a,\; a_i,\; b_i \;\in\; A_2, \quad 1 \;\le\; i \;\le\; n, \quad A_2 \;\cong\; M_m(\mathbb{F}).$$
Як і вище, розглянемо централізатор C підалгебри A_1 в A_2. Тоді
$$A_2 \;=\; A_1 \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C, \quad C \;\cong\; M_t(\mathbb{F}), \quad t \;=\; \frac{m}{p^k}, \quad p \;\nmid\; t.$$
Розглянемо також елемент
$$b \;=\; \sum_{i=1}^{n}\;\big[\;a_i\,,\;b_i\big] \;\in\; A_2.$$
Елемент $a - b$ комутує з усіма елементами з A_1. Отже,
$$a \;-\; b \;=\; c \;\in\; C.$$
В алгебрі A_2 усі елементи з підалгебри C мають нульовий слід. Таким чином, з одного боку
$$\mathrm{tr}_{A_2}\,(a) \;=\; \mathrm{tr}_{A_1}\,(a) \;\cdot\; t \;\neq\; 0,$$
а з іншого боку
$$\mathrm{tr}_{A_2}\,(a) \;=\; \mathrm{tr}_{A_2}\,(b) \;+\; \mathrm{tr}_{A_2}\,(c) \;=\; 0.$$
Тим самим отримали суперечність. Теорема 6.3 доведена. □

6.2 Диференціювання тензорних добутків матричних алгебр

Метою цього підрозділу є опис диференціювань тензорних добутків

$$A = \bigotimes_{i \in I} A_i, \tag{6.16}$$

де A_i — скінченно–вимірні матричні алгебри, а I — довільна нескінченна множина. Згідно з теоремою Кьоте [81] кожна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток матричних алгебр і тому є алгеброю такого типу.

Означення 6.2. Нехай $\mathcal{P}$ — деяка система непорожніх скінченних підмножин нескінченної множини I. Назвемо систему $\mathcal{P}$ розрідженою, якщо

(1) для кожної підмножини $S \in \mathcal{P}$ усі непорожні підмножини множини S також належать $\mathcal{P}$,

(2) кожний елемент $i \in I$ міститься в не більш ніж скінченній кількості підмножин з $\mathcal{P}$.

Якщо $\mathcal{P}_1$ та $\mathcal{P}_2$ — розріджені системи підмножин множини I, то система

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2$$

також є розрідженою. Позначимо через

$$\mathcal{P}_1 \coprod \mathcal{P}_2 \tag{6.17}$$

систему підмножин, яка складається з об'єднань

$$X \bigcup Y, \quad X \in \mathcal{P}_1, \quad Y \in \mathcal{P}_2, \quad \text{таких що} \quad X \bigcap Y \neq \emptyset,$$

і всіх їх непорожніх підмножин. Легко бачити, що система (6.17) також є розрідженою.

Нехай $S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ — скінченна підмножина множини I. Алгебра

$$A_S = A_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes A_{i_r}$$

занурюється в алгебру A і є в ній тензорним співмножником.

Нехай $\mathcal{P}$ — система непорожніх скінченних підмножин множини I. Нехай

$$f_S \,:\, A \;\to\; A, \quad S \;\in\; \mathcal{P},$$

система лінійних операторів, індексованих множиною $\mathcal{P}$.

Умова збіжності. Сума

$$\sum_{S\in\mathcal{P}} f_S$$

збігається в топології Тихонова тоді й лише тоді, коли для довільного елемента $a \in A$ множина

$$\left\{\, S \;\in\; \mathcal{P} \mid f_S(a) \;\neq\; 0 \,\right\}$$

є скінченною. У цьому випадку сума

$$f \;=\; \sum_{S\in\mathcal{P}} f_S \tag{6.18}$$

є лінійним оператором. Більш того, якщо кожний доданок f_S є диференціюванням алгебри A, то сума (6.18) також є диференціюванням алгебри A.

Припустимо, що система скінченних підмножин $\mathcal{P}$ розріджена. Для кожної підмножини $S \in \mathcal{P}$ виберемо елемент $a_S \in A_S$. Тоді сума

$$\sum_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}\;(a_S) \tag{6.19}$$

задовольняє сформульовану вище умову збіжності. Справді, виберемо довільний елемент $a \in A$. Знайдуться різні індекси $i_1, \ldots, i_r \in I$, такі що

$$a \;\in\; A_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes A_{i_r}.$$

Оскільки система $\mathcal{P}$ розріджена, то перетин

$$\left\{\, i_1, \;\ldots,\; i_r \,\right\} \bigcap S$$

може бути непорожнім лише для скінченного числа підмножин $S \in \mathcal{P}$. Тому

$$\mathrm{ad}\;(a_S)\;(a) \;\neq\; 0$$

для не більше аніж скінченного числа множин $S \in \mathcal{P}$.

Сума (6.19) є диференціюванням алгебри A.

Позначимо символом $D_{\mathcal{P}}$ множину усіх сум (6.19):

$$D_{\mathcal{P}} \;=\; \Big\{ \sum_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}\,(a_S) \,\Big|\, a_S \;\in A_S \Big\}. \tag{6.20}$$

Для векторного простору усіх таких сум має місце включення:

$$D_{\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{Der}(A).$$

Для кожної алгебри A_i, $i \in I$, позначимо через 1_{A_i} одиницю алгебри A_i і нехай підпростір A_i^0 такий, що

$$A_i^0 \;\subset\; A_i$$

та A_i розкладається в пряму суму

$$A_i \;=\; \mathbb{F} \,\cdot\, 1_{A_i} \bigoplus A_i^0. \tag{6.21}$$

Виберемо базис E_i у підпросторі A_i^0. Для підмножини $S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ множини I покладемо

$$E_S \;:=\; E_{i_1} \bigotimes \cdots \bigotimes E_{i_r} \;=$$

$$\Big\{ a_1 \;\otimes\; \cdots \;\otimes\; a_r \,\Big|\, a_k \;\in\; E_{i_k}, \quad 1 \;\le\; k \;\le\; r \Big\}$$

і нехай

$$\mathrm{ad}\,(E_S) \;=\; \Big\{ \mathrm{ad}\,(e) \,\Big|\, e \;\in\; E_S \Big\}.$$

Теорема 6.4. (1) *Припустимо, що множина I зліченна. Тоді*

$$\mathrm{Der}\,(A) \;=\; \bigcup_{\mathcal{P}} D_{\mathcal{P}}, \tag{6.22}$$

де $\mathcal{P}$ пробігає всі розріджені системи скінченних підмножин множини I.

(2) *Для довільної нескінченної (не обов'язково зліченної) множини I та будь–якої розрідженої системи $\mathcal{P}$ скінченних підмножин I множина*

$$\bigcup_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}\,(E_S) \tag{6.23}$$

є топологічним базисом простору $D_{\mathcal{P}}$.

Для доведення теореми 6.4 нам потрібні будуть декілька лем.

Лема 6.3. *Нехай $i \in I$. Централізатором підалгебри A_i в алгебрі A є підалгебра*

$$C = \bigotimes_{j \neq i} A_j.$$

Доведення. Ми маємо

$$A = A_i \bigotimes\nolimits_{\mathbb{F}} C.$$

Очевидно, що підалгебра C лежить у централізаторі підалгебри A_i в алгебрі A. Припустимо, що $x \in A$ і $[A_i, x] = \{0\}$. Нехай

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes c_k,$$

де $a_k \in A_i$, та $c_1, \ldots, c_n \in C$ — лінійно незалежні елементи. Тоді для довільного елемента $a \in A_i$ маємо:

$$\left[a \otimes 1 , x \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[a , a_k \right] \otimes c_k = 0.$$

Звідси випливає, що

$$[a , a_k] = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Отже, елементи $a_1, \ldots, a_n$ лежать у центрі підалгебри A_i, тобто в $\mathbb{F} \cdot 1_{A_i}$. Тому $x \in C$. Лема 6.3 доведена. □

Лема 6.4. *Нехай $i \in I$, $d \in \mathrm{Der}(A)$. Якщо $d(A_i) = \{0\}$, то підалгебра*

$$C = \bigotimes_{j \neq i} A_j$$

є d−інваріантною.

Доведення. Ми маємо

$$\left[A_i , d\,(C) \right] \subseteq d\left([A_i , C] \right) + [d\,(A_i) , C] = \{0\},$$

звідки згідно з лемою 6.3 отримаємо, що $d(C) \subseteq C$. Лема 6.4 доведена. □

Доведення теореми 6.4. (1) Нехай $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ і нехай $d \in \mathrm{Der}(A)$. Оскільки алгебра Лі внутрішніх диференціювань $\mathrm{Inder}(A)$ щільна в $\mathrm{Der}(A)$ у топології Тихонова, то знайдеться елемент $a_1 \in A$ такий, що

$$\left(d - \mathrm{ad}\,(a_1) \right) (A_{i_1}) = \{0\}.$$

Існує скінченна підмножина $S_1 \subset I$ така, що $a_1 \in A_{S_1}$. Згідно з лемою 6.4 диференціювання $d - \mathrm{ad}(a_1)$ відображає підалгебру

$$\bigotimes_{j \neq i_1} A_j$$

в себе. Міркуючи як раніше, знайдемо скінченну підмножину

$$S_2 \subset I \setminus \{i_1\}$$

та елемент $a_2 \in A_{S_2}$ такі, що

$$\big(d - \mathrm{ad}\,(a_1) - \mathrm{ad}\,(a_2) \big)\,(A_{i_2}) = \{0\},$$

і так далі. Урешті решт, ми отримаємо послідовність $S_1, S_2, \ldots$ непорожніх скінченних підмножин множини I, де

$$S_n \subset I \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}, \quad n \geq 2,$$

і послідовність елементів

$$a_n \in A_{S_n}, \quad n \geq 1,$$

таких що

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{ad}\,(a_n).$$

Приєднуючи до підмножин $S_1, S_2, \ldots$ усі їх непорожні підмножини, отримаємо розріджену систему $\mathcal{P}$. Легко бачити, що $d \in D_{\mathcal{P}}$. Частина (1) теореми 6.4 доведена.

Доведемо частину (2). Нехай I — довільна, не обов'язково злічення множина. Нехай $\mathcal{P}$ — розріджена система скінченних непорожніх підмножин множини I. Виберемо підмножину

$$S = \big\{ i_1, \ldots, i_r \big\} \in \mathcal{P}$$

та елементи

$$a_k \in A_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Нехай

$$a_k = \gamma_k \cdot 1_{A_{i_k}} + a_k^0, \quad \text{где} \quad \gamma_k \in \mathbb{F}, \quad a_k^0 \in A_{i_k}^0.$$

Розкриваючи дужки у тензорному добутку

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_r = \left(\gamma_1 \cdot 1 + a_1^0\right) \otimes \cdots \otimes \left(\gamma_r \cdot 1 + a_r^0\right),$$

ми отримаємо, що

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \in \mathbb{F} \cdot 1 +$$

$$\sum_{k=1}^{r} 1 \otimes \cdots \otimes A_{i_k}^0 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + A_{i_1}^0 \otimes \cdots \otimes A_{i_r}^0.$$

Таким чином, простір $\mathrm{ad}(A_s)$ породжується операторами

$$\bigcup_{\emptyset \neq S' \subseteq S} \mathrm{ad}\,(E_{S'}).$$

Звідси випливає, що довільний елемент з $D_{\mathcal{P}}$ зображується у вигляді збіжної суми

$$\sum_k \alpha_k \ \mathrm{ad}\,(e_k),$$

де $\alpha_k \in \mathbb{F}$ і

$$\left\{ e_k \right\}_k = \bigcup_{S \in \mathcal{P}} E_S.$$

Нам залишилося довести, що з того, що

$$\sum_k \alpha_k \ \mathrm{ad}\,(e_k) = 0,$$

випливає $\alpha_k = 0$ для довільного k.

Нехай

$$S \in \mathcal{P}, \quad i \in S, \quad S^0 = S \setminus \{i\}.$$

Довільний елемент $e \in E_S$ зображується (з точністю до перестановки тензорів) у вигляді

$$e = e' \otimes e'', \quad \text{де} \quad e' \in E_i, \quad e'' \in E_{S^0}.$$

Для кожного елемента $a \in A_i$ маємо:

$$\left[\, e\,,\, a \,\right] = \left[\, e'\,,\, a \,\right] \otimes e''.$$

Зафіксуємо $i \in I$. Нехай $S_1, \ldots, S_t$ — усі підмножини з системи $\mathcal{P}$, які містять i. Покладемо

$$S_j^0 = S_j \setminus \{i\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Якщо

$$e_k \;=\; e' \otimes e'', \quad \text{де} \quad e' \in E_i, \quad e'' \in \bigcup_{j=1}^{t} E_{S_j^0},$$

то позначимо

$$\alpha_{e',e''} \;:=\; \alpha_k.$$

Для довільного елемента $a \in A_i$ маємо:

$$\Big[\sum_k \alpha_k\, e_k\,,\; a \Big] \;=\; \sum \alpha_{e',e''}\, [\, e'\,,\; a\,] \,\otimes\, e'' \;=\; 0,$$

де сума береться за усіма парами

$$(e'\,,\; e'') \;\in\; E_i \,\times\, \Big(\bigcup_{j=1}^{t} E_{S_j^0} \Big).$$

Отже,

$$\Big[\sum_{e'} \alpha_{e',e''}\, e'\,,\; a \Big] \;=\; 0 \quad \text{для кожного} \quad e'' \;\in\; \bigcup_{j=1}^{t} E_{S_j^0}.$$

Елемент

$$\sum_{e'} \alpha_{e',e''}\, e'$$

лежить у A_i^0 і, у той же час, цей елемент лежить у центрі алгебри A_i. Таким чином,

$$\sum_{e'} \alpha_{e',e''}\, e' \;=\; 0.$$

Звідки випливає, що

$$\alpha_{e',e''} \;=\; 0.$$

Теорема 6.4 доведена. □

Для переходу від унітального до неунітального випадку нам знадобиться така лема.

Лема 6.5. *Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Нехай $e \in A$ — ненульовий ідемпотент. Тоді кожне диференціювання кута eAe продовжується до диференціювання алгебри A.*

Доведення. Припустимо спочатку, що алгебра A унітальна. Згідно з теоремою Кьоте [81] ми можем вважати, що

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{6.24}$$

де кожна алгебра A_i є скінченно–вимірною матричною алгеброю над полем $\mathbb{F}$. Нехай ідемпотент e лежить у підалгебрі

$$A_1 \bigotimes \cdots \bigotimes A_n$$

для деякого $n \geq 1$. Замінюючи перші n тензорних співмножників $A_1, \ldots, A_n$ в (6.24) одним тензорним співмножником, ми будемо вважати, що $e \in A_1$. Тоді

$$eAe = eA_1e \bigotimes \Big(\bigotimes_{i=2}^{\infty} A_i \Big).$$

Нехай $d \in \mathrm{Der}(eAe)$. За теоремою 6.4 (1) знайдеться розріджена система $\mathcal{P}$ непорожніх скінченних підмножин множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ така, що

$$d = \sum_{S \in \mathcal{P}} \mathrm{ad}_{eAe}\,(a_S), \quad a_S \in (eAe)_S.$$

Очевидно, що $(eAe)_S \subseteq A_S$. Оскільки система $\mathcal{P}$ розріджена, то нескінченна сума

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} \mathrm{ad}_A\,(a_S)$$

збігається в топології Тихонова до деякого диференціювання алгебри A. Це диференціювання продовжує диференціювання d.

Відмовимося тепер від припущення, що алгебра A унітальна. Оскільки алгебра A зліченно–вимірна, то знайдеться послідовність ідемпотентів $e = e_1$, $e_2, \ldots$ така, що

$$e_iAe_i \subset e_{i+1}Ae_{i+1}, \quad i \geq 1,$$

та

$$\bigcup_{i \geq 1} e_iAe_i = A.$$

Нехай $d \in \mathrm{Der}(eAe)$. Застосуємо вже доведену частину леми до унітальних алгебр

$$e_iAe_i, \quad i \geq 2.$$

Тоді отримаємо послідовність диференціювань

$$d_i \in \mathrm{Der}\,(e_iAe_i) \quad \text{таку, що} \quad d_1 = d \quad \text{і} \quad d_{i+1}\big|_{e_iAe_i} = d_i.$$

Диференціювання

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} d_i \in \mathrm{Der}(A)$$

продовжує диференціювання d. Лема 6.5 доведена. □

6.3 Алгебри зовнішніх диференціювань Outder(A) не локально скінченно–вимірні

Х. Штраде [104] довів, що якщо $\mathbb{F}$ — поле характеристики 0, а L — зліченно–вимірна локально проста скінченно–вимірна алгебра Лі, то алгебра зовнішніх диференціювань $\mathrm{Outder}(L)$ не локально скінченно–вимірна. Ми доведемо аналогічний результат для зліченно–вимірної локально матричної алгебри над полем довільної характеристики.

Теорема 6.5. *Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Тоді алгебра Лі* $\mathrm{Outder}(A)$ *не локально скінченно–вимірна.*

Доведення. Припустимо спочатку, що алгебра A унітальна. За теоремою Кьоте [81] будемо вважати, що

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 2, \quad i \geq 1. \tag{6.25}$$

Алгебри A_i занурюються в алгебру A за допомогою відображень

$$u_i : a \mapsto \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a}_{i} \otimes 1 \otimes \cdots, \quad a \in A_i.$$

Для матричної одиниці

$$e_{pq} \in A_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad 1 \leq p\,,\, q \leq n_i,$$

позначимо

$$e_{pq}(i) \ := \ u_i(e_{pq}).$$

Іншими словами,

$$e_{pq}(i) \ = \ \underbrace{1 \ \otimes \ \cdots \ \otimes \ 1 \ \otimes \ e_{pq}}_{i} \otimes 1 \ \otimes \ \cdots \ . \qquad (6.26)$$

Оскільки образи алгебр A_i, A_j, $i \neq j$, комутують в A (див. підрозділ 2.2, стор. 64, та підрозділ 3.1, стор. 75), то

$$\Big[\, e_{pq}(i) \, , \, e_{rs}(j) \, \Big] \ = \ 0 \quad \text{при} \quad i \ \neq \ j.$$

Для натуральних чисел t, l, $t \leq l$, позначимо

$$\Big[\, t \, , \, l \, \Big] \ = \ \Big\{ \, t, \ t+1, \ \ldots . \, l \, \Big\}.$$

Розглянемо такі диференціювання алгебри A :

$$z \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{ad} \big(e_{12}(i) \, e_{11}(i+1) \big) \ \in \ \operatorname{ad} \, (A_{[1,2]}) \ + \ \operatorname{ad}(A_{[2,3]}) \ + \ \cdots$$

та

$$y_k \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{ad} \big(e_{12}(j) \ \cdots \ e_{12}(j+k-1) \, \big) \ \in \ \operatorname{ad} \, (A_{[1,k]}) \ + \ \operatorname{ad} \, (A_{[2,k+1]}) \ + \ \cdots ,$$

де $k \geq 1$.

Покажемо, що тоді

$$\Big[\, z \, , \, y_k \, \Big] \ = \ y_{k+1} \quad \text{для довільного} \quad k \ \geq \ 1. \qquad (6.27)$$

Справді,

$$\Big[\, z \, , \, y_k \, \Big] \ = \ \sum_{i,j} \ \Big[\, \operatorname{ad} \big(e_{12}(i) \, e_{11}(i+1) \, \big) \, , \, \operatorname{ad} \big(e_{12}(j) \ \cdots \ e_{12}(j+k-1) \, \big) \, \Big] \ =$$

$$\sum_{i,j} \ \operatorname{ad} \Big(\, [\, e_{12}(i) \, e_{11}(i+1) \, , \, e_{12}(j) \ \cdots \ e_{12}(j+k-1) \,] \, \Big).$$

Якщо

$$\Big\{ \, i, \ i+1 \, \Big\} \ \cap \ \Big\{ \, j, \ j+1, \ \ldots, \ j+k-1 \, \Big\} \ = \ \emptyset,$$

то довільний співмножник добутку

$$e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)$$

комутує з будь–яким співмножником добутку

$$e_{12}(j)\ \cdots\ e_{12}(j+k-1).$$

Якщо

$$i\ \in\ \left\{\ j,\ j+1,\ \ldots,\ j+k-1\ \right\},$$

то

$$e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)\ e_{12}(j)\ \cdots\ e_{12}(j+k-1)\ =$$

$$e_{12}(j)\ \cdots\ e_{12}(j+k-1)\ e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)\ =\ 0,$$

оскільки

$$\left(\ e_{12}\ (i)\ \right)^2\ =\ 0.$$

Нам залишилося розглянути один випадок: $j = i+1$. У цьому випадку:

$$e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)\ e_{12}(i+1)\ \cdots\ e_{12}(i+k)\ =$$

$$e_{12}(i)\ e_{12}(i+1)\ \cdots\ e_{12}(i+k).$$

Перемножуючи ці ж елементи в іншому порядку, ми отримаємо

$$e_{12}(i+1)\ \cdots\ e_{12}(i+k)\ e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)\ =\ 0,$$

оскільки

$$e_{12}(i+1)\ e_{11}(i+1)\ =\ 0.$$

Таким чином,

$$\left[\ z\ ,\ y_k\ \right]\ =\ \sum_{i=1}^{\infty}\ \mathrm{ad}\left(\ \left[\ e_{12}(i)\ e_{11}(i+1)\ ,\ e_{12}(i+1)\ \cdots\ e_{12}(i+k)\ \right]\ \right)\ =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ \mathrm{ad}\left(\ e_{12}(i)\ e_{12}(i+1)\ \cdots\ e_{12}(i+k)\ \right)\ =\ y_{k+1}. \tag{6.28}$$

Підалгебра Лі алгебри $\mathrm{Der}(A)$, яка породжується диференціюваннями z та y_1, містить усі елементи y_k, $k \geq 1$.

Покажемо, що диференціювання y_k, $k \geq 1$, лінійно незалежні за модулем $\mathrm{Inder}(A)$.

Нагадаємо, що в підрозділі 6.2 (див. (6.21)) у кожній алгебрі A_i ми вибрали підпростір A_i^0 так, щоб A_i розкладалася в пряму суму

$$A_i \;=\; \mathbb{F}\cdot\, 1_{A_i} \bigoplus A_i^0.$$

Можна вибрати підпростір A_i^0 таким, щоб він містив елемент $e_{12}(i)$. Тоді знайдемо в A_i^0 базис E_i так, щоб $e_{12}(i) \in E_i$. Матимемо:

$$e_{12}(i)\ \cdots\ e_{12}(i+k-1) \;\in\; E_{[i,\ i+k-1]}.$$

Припустимо, що

$$\alpha_1\, y_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_k\, y_k \;\in\; \mathrm{Inder}(A)$$

і не всі скаляри $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k \in \mathbb{F}$ дорівнюють нулю 0.

Тоді знайдеться число $p \geq 1$ таке, що

$$\alpha_1\, y_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_k\, y_k \;\in\; A_{[1,\ p]}.$$

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $k \leq p$.

Розглянемо розріджену систему $\mathcal{P}$, яка складається з інтервалів

$$\big[\, i\,,\ i+p-1\,\big], \quad i \;\geq\; 1,$$

та їх непорожніх підмножин. За теоремою 6.4 (2) елементи

$$\mathrm{ad}\,\left(e_{12}(i)\ \cdots\ e_{12}(i+l-1)\right), \quad l \;\leq\; k \;\leq p,$$

лежать у топологічному базисі простору $D_{\mathcal{P}}$.

Нехай E — топологічний базис векторного простору $D_{\mathcal{P}}$, який відповідає базису E_i підпростору A_i^0 (такий, як в теоремі 6.4 (2)). Тоді матимемо:

$$\alpha_1\, y_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_k\, y_k \;=\; \sum_{1\leq j\leq k,\ 1\leq i<\infty} \alpha_j\ \mathrm{ad}_A\,\big(\,e_{12}(i)\ \cdots\ e_{12}(i+j-1)\,\big). \qquad (6.29)$$

Оператори

$$\mathrm{ad}_A(e_{12}(i)\ \cdots\ e_{12}(i+j-1))$$

є різними елементами базису E. Якщо хоча б один із коефіцієнтів α_j, $1 \leq j \leq k$, не дорівнює 0, то сума (6.29) міститиме нескінченно багато базисних елементів з E з ненульовими коефіцієнтами. Але очевидно, що тоді така сума не може дорівнювати скінченній лінійній комбінації базисних елементів з E. А кожен елемент з $\mathrm{ad}_A(A_{[1,p]})$ є саме скінченною лінійною комбінацією базисних елементів з E. Отже, $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$, що і доводить необхідне твердження.

Тим самим ми показали, що підалгебра Лі алгебри $\mathrm{Der}(A)$, яка породжена диференціюваннями z та y_1, є нескінченно–вимірною за модулем $\mathrm{Inder}(A)$ алгеброю. Цим завершуємо доведення теореми у випадку, коли алгебра A є унітальною.

Припустимо тепер, що зліченно–вимірна локально матрична алгебра алгебра A не унітальна.

Припустимо, що знайдеться ідемпотент $e \in A$ такий, що унітальна алгебра eAe є нескінченно–вимірною. Раніше ми довели, що знайдуться диференціювання z та y_1 алгебри eAe такі, що диференціювання

$$y_k \;=\; [\; \underbrace{z,\; [\, z,\; \ldots,\; [z,}_{k-1}\; y_1\;]\; \ldots\;]\;], \quad k \;\geq\; 1,$$

лінійно незалежні за модулем $\mathrm{Inder}(eAe)$.

Згідно з лемою 6.5 існують диференціювання

$$\tilde{z},\; \tilde{y}_1 \;\in\; \mathrm{Der}\;(A),$$

які продовжують диференціювання z та y_1 відповідно. Покажемо, що диференціювання

$$\tilde{y}_k \;=\; [\; \underbrace{\tilde{z},\; [\, \tilde{z},\; \ldots,\; [\, \tilde{z},}_{k-1}\; \tilde{y}_1\;]\; \ldots\;]\;], \quad k \;\geq\; 1,$$

лінійно незалежні за модулем $\mathrm{Inder}(A)$.

Припустимо, що

$$d \;:=\; \alpha_1\, \tilde{y}_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_n\, \tilde{y}_n \;\in\; \mathrm{Inder}\;(A) \quad \text{і} \quad \alpha_1,\; \ldots,\; \alpha_n \;\in\; \mathbb{F}.$$

Ми покажемо, що в цьому випадку

$$\alpha_1\, y_1 \;+\; \cdots \;+\; \alpha_n\, y_n \;\in\; \mathrm{Inder}\;(eAe).$$

Кожне диференціювання $\tilde{y}_k$ продовжує диференціювання y_k. Отже, простір eAe інваріантний відносно диференціювання d. Зауважимо, що $d \in \mathrm{Inder}(A)$. Тому можна припустити, що існує елемент $u \in A$ такий, що

$$d(x) = \left[u\,, \, x \right] \quad \text{для довільного елемента} \quad x \in A.$$

Розглянемо пірсівський розклад

$$u = e\,u\,e + e\,u\,(1-e) + (1-e)\,u\,e + (1-e)\,u\,(1-e),$$

де 1 — формально приєднана одиниця. Для довільного елемента $x \in eAe$ ми маємо:

$$\left[u\,, \, x \right] = \left[e\,u\,e\,, \, x \right] + (1-e)\,u\,e\,x - x\,e\,u\,(1-e).$$

Позаяк

$$\left[u\,, \, x \right] \in eAe, \quad \text{то} \quad \left[u\,, \, x \right] = \left[e\,u\,e\,, \, x \right].$$

Таким чином, звуження диференціювання d на eAe є внутрішнім диференціюванням і, таким чином,

$$\alpha_1\, y_1 + \cdots + \alpha_n\, y_n \in \operatorname{Inder}\,(eAe).$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Згідно з лемою 4.17 *якщо A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$ така, що для довільного ідемпотента $e \in A$ кут eAe є скінченно–вимірною алгеброю, то алгебра A ізоморфна алгебрі $M_\infty(\mathbb{F})$ фінітарних матриць, тобто $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць, які містять лише скінченну кількість ненульових елементів.*

Таким чином, нам залишилося перевірити, що алгебра зовнішніх диференціювань $\operatorname{Outder}(M_\infty(\mathbb{F}))$ не локально скінченно–вимірна. Нескінченні матриці

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i,\; 2i+2}$$

та

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i,\; 2i+2k-1}, \quad k \geq 1,$$

не є фінітарними. Проте

$$\left[z\,, \, M_\infty\,(\mathbb{F}) \right] \subseteq M_\infty\,(\mathbb{F})$$

і

$$\left[\, y_k \, , \, M_\infty \, (\mathbb{F}) \, \right] \; \subseteq \; M_\infty \, (\mathbb{F}), \quad k \; \geq \; 1.$$

Ми маємо (див. (6.28)):

$$\left[\, z \, , \, y_k \, \right] \; = \; y_{k+1}, \quad k \; \geq \; 1.$$

Підалгебра, яка породжена диференціюваннями

$$\mathrm{ad}(z), \quad \mathrm{ad}(y_1) \; \in \; \mathrm{Der} \; (M_\infty(\mathbb{F})),$$

містить усі диференціювання

$$\mathrm{ad}(y_k), \quad k \; \geq \; 1. \tag{6.30}$$

Легко бачити, що оператори (6.30) лінійно незалежні за модулем $\mathrm{Inder}(M_\infty(\mathbb{F}))$. Теорема 6.5 доведена. □

6.4 Автоморфізми і занурення

У цьому підрозділі ми опишемо автоморфізми зліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри A. Поряд з автоморфізмами ми вивчатимемо напівгрупу $P(A)$ ін'єктивних ендоморфізмів $A \to A$, які відображають 1 в 1, тобто напівгрупу унітальних занурень $A \to A$.

О.Г. Курош (див. [84], теорема 10) довів, що
будь–яка зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A *містить власну підалгебру* $1 \in B \subsetneqq A$, *яка ізоморфна алгебрі* A.

Це еквівалентно тому, що напівгрупа $P(A)$ за потужністю строго більша за групу $\mathrm{Aut}(A)$. У кінці цього підрозділу ми наведемо приклад занурення $A \to A$, яке не є автоморфізмом.

Нехай

$$A \; = \; \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \; \cong \; M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \; \geq \; 2, \quad i \; \geq \; 1.$$

Позначимо символом H_n підгрупу групи автоморфізмів $\mathrm{Inn}(A)$, яка породжена спряженням за допомогою елементів

$$a \in \bigotimes_{i \geq n} A_i.$$

Очевидно, що

$$\mathrm{H}_n \cong \mathrm{Inn}\left(\bigotimes_{i\geq n} A_i\right)$$

і

$$\mathrm{Inn}\,(A) = \mathrm{H}_1 > \mathrm{H}_2 > \cdots .$$

Для кожного $n \geq 1$ виберемо систему представників лівих класів суміжності

$$h\mathrm{H}_{n+1}, \quad h \in \mathrm{H}_n,$$

і позначимо її $\mathcal{X}_n$. Ми припускаємо, що $\mathcal{X}_n$ містить тотожний автоморфізм Id.

Нехай

$$\varphi_i \in \mathcal{X}_i, \quad i \geq 1.$$

Кожний елемент $a \in A$ лежить в одній з алгебр

$$A_{[1,n]} = A_1 \bigotimes \cdots \bigotimes A_n.$$

Тоді

$$\varphi_i(a) = a \quad \text{при} \quad i > n.$$

Таким чином, послідовність

$$\varphi_1 \cdots \varphi_i(a) \quad \text{стабілізується при} \quad i \to \infty.$$

Нескінченний добуток

$$\varphi = \varphi_1\, \varphi_2 \,\cdots$$

збігається в топології Тихонова. Легко бачити, що $\varphi \in P(A)$. Однак, як ми це побачимо далі, нескінченний добуток автоморфізмів може не бути сюр'єктивним відображенням.

Теорема 6.6. *Довільний унітальний ін'єктивний ендоморфізм $\varphi \in P(A)$ єдиним чином зображується у вигляді добутку*

$$\varphi = \varphi_1\, \varphi_2 \,\cdots, \quad \text{де} \quad \varphi_i \in \mathcal{X}_i, \quad i \geq 1.$$

Доведення. Розглянемо унітальне занурення $\varphi : A \to A$. Знайдеться скінченна підмножина $S_1 \subset \mathbb{N}$ така, що

$$\varphi\,(A_1) \;\subseteq\; A_{S_1}.$$

Застосовуючи теорему Сколема–Нетер (див. [55, 69]) до гомоморфізму

$$\varphi \;:\; A_1 \;\to\; A_{S_1},$$

отримаємо оборотний елемент

$$a_1 \;\in\; A_{S_1}$$

такий, що

$$\varphi(x) \;=\; a_1^{-1}\, x\, a_1 \quad \text{для всіх елементів} \quad x \;\in\; A_1.$$

Позначимо через $\hat{a}_1$ автоморфізм спряження за допомогою елемента a_1,

$$\hat{a}_1 \;\in\; \mathrm{H}_1.$$

Нехай φ_1 — представник класу суміжності $\hat{a}_1\mathrm{H}_2$ в $\mathcal{X}_1$. Занурення

$$\psi_1 \;=\; \varphi_1^{-1}\, \varphi$$

залишає всі елементи алгебри A_1 нерухомими. Для кожного елемента

$$a \;\in\; \bigotimes_{j>1} A_j$$

тоді матимемо:

$$\{0\} \;=\; \psi_1\Big(\,\big[\,A_1\,,\;a\,\big]\,\Big) \;=\; \Big[\,\psi_1(A_1)\,,\;\psi_1(a)\,\Big] \;=\; \Big[\,A_1\,,\;\psi_1(a)\,\Big].$$

Таким чином, елемент $\psi_1(a)$ лежить у централізаторі підалгебри A_1. Згідно з лемою 6.3

$$\psi_1(a) \;\in\; \bigotimes_{j>1} A_j.$$

Іншими словами, ψ_1 є унітальним зануренням алгебри

$$\bigotimes_{j>1} A_j \tag{6.31}$$

в себе. Міркуючи як раніше, ми знайдемо автоморфізм $\varphi_2 \in \mathcal{X}_2$ такий, що $\varphi_2^{-1}\,\psi_1$ залишає всі елементи підалгебри A_2 нерухомими, і продовжуємо так далі. У результаті отримаємо

$$\varphi = \varphi_1\,\varphi_2\,\cdots, \quad \varphi_n \in \mathcal{X}_n, \quad n \geq 1. \tag{6.32}$$

Тепер доведемо єдиність зображення (6.32). Припустимо, що

$$\varphi_1\,\varphi_2\,\cdots = \varphi'_1\,\varphi'_2\,\cdots, \quad \text{де} \quad \varphi'_n \in \mathcal{X}_n, \quad n \geq 1.$$

Застосовуючи обидва добутки до елементів з підалгебри A_1, ми отримаємо

$$\varphi_1\big|_{A_1} = \varphi'_1\big|_{A_1}.$$

Припустимо, що автоморфізми φ_1, φ'_1 є автоморфізмами спряження за допомогою елементів a та b відповідно. Тоді елемент ba^{-1} лежить у централізаторі підалгебри A_1, тобто належить (6.31). Звідси випливає, що

$$\varphi_1^{-1}\,\varphi'_1 \in \mathrm{H}_2.$$

Оскільки φ_1 та φ'_1 лежать у системі представників лівих класів суміжності за підгрупою H_2, то

$$\varphi_1 = \varphi'_1.$$

Тому

$$\varphi_2\,\varphi_3\,\cdots = \varphi'_2\,\varphi'_3\,\cdots.$$

Знову, міркуючи як раніше, отримаємо

$$\varphi_2 = \varphi'_2,$$

і так далі. Теорема 6.6 доведена. □

Природним є наступне запитання:

коли зануреня $\varphi = \varphi_1\varphi_2\cdots$ є автоморфізмом?

Означення 6.3. Назвемо послідовність автоморфізмів

$$\varphi_n \in \mathrm{H}_n, \quad n \geq 1, \tag{6.33}$$

інтегровною, якщо для кожного елемента $a \in A$ підпростір, породжений усіма елементами

$$\varphi_n^{-1} \cdots \varphi_1^{-1}(a), \quad n \geq 1,$$

є скінченно–вимірним.

Теорема 6.7. *Ін'єктивний ендоморфізм*

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \cdots, \quad \text{де} \quad \varphi_n \in H_n, \quad n \geq 1, \tag{6.34}$$

є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність

$$\{ \varphi_n^{-1} \}_{n \geq 1} \tag{6.35}$$

інтегровна.

Доведення. Припустимо, що послідовність автоморфізмів (6.35) інтегровна. Тоді для довільного натурального числа $p \geq 1$ підпростір, породжений

$$\varphi_n^{-1} \cdots \varphi_1^{-1}(A_p), \quad n \geq 1,$$

є скінченно–вимірним. Отже, існує $q \geq 1$ таке, що

$$\varphi_n^{-1} \cdots \varphi_1^{-1}(A_p) \subseteq A_{[1,q]} \quad \text{для кожного} \quad n \geq 1.$$

Це еквівалентне тому, що

$$A_p \subseteq \varphi_1 \cdots \varphi_n\big(A_{[1,q]} \big), \quad n \geq 1.$$

Позаяк

$$\varphi_1 \cdots \varphi_q\big(A_{[1,q]} \big) = \varphi\big(A_{[1,q]} \big),$$

то

$$A_p \subseteq \varphi\big(A_{[1,q]} \big).$$

Ми показали, що занурення φ є сюр'єктивним відображенням, тому воно є автоморфізмом.

Тепер припустимо, що занурення (6.34) є сюр'єкцією. Для довільного $p \geq 1$ знайдеться $q \geq 1$ таке, що

$$A_{[1,p]} \subseteq \varphi\big(A_{[1,q]} \big) = \varphi_1 \cdots \varphi_n\big(A_{[1,q]} \big) \quad \text{при} \quad n \geq q.$$

Таким чином,

$$\varphi_n^{-1}\cdots\varphi_1^{-1}(\,A_{[1,p]}\,)\ \subseteq\ A_{[1,q]}\quad \text{при}\quad n\ \geq\ q.$$

Звідси випливає, що підпростір, породжений

$$\varphi_n^{-1}\cdots\varphi_1^{-1}(\,A_{[1,p]}\,),\quad n\ \geq\ 1,$$

є скінченно–вимірним, тобто послідовність (6.35) інтегровна. Теорема 6.7 доведена. □

Приклад 6.1. У кожній алгебрі A_i, $i\ \geq\ 1$, виберемо оборотний елемент a_i. Позначимо через $\hat{a}_i$ автоморфізм спряження за допомогою елемента a_i. Тоді послідовність

$$\hat{a}_i^{\,-1},\quad i\ \geq\ 1,\tag{6.36}$$

інтегровна.

Справді, для кожної підалгебри

$$A_{i_1}\bigotimes\cdots\bigotimes A_{i_r}\quad \text{та довільного}\quad j\geq 1$$

матимемо:

$$\hat{a}_j^{\,-1}\cdots\hat{a}_1^{\,-1}\Big(\,A_{i_1}\bigotimes\cdots\bigotimes A_{i_r}\,\Big)\ =$$

$$a_j\cdots a_1\Big(\,A_{i_1}\bigotimes\cdots\bigotimes A_{i_r}\,\Big)a_1^{-1}\cdots a_j^{-1}\ \subseteq\ A_{i_1}\bigotimes\cdots\bigotimes A_{i_r}.$$

Зокрема, підпростір, породжений

$$\hat{a}_j^{\,-1}\cdots\hat{a}_1^{\,-1}\Big(\,A_{i_1}\bigotimes\cdots\bigotimes A_{i_r}\,\Big),\quad j\ \geq\ 1,$$

є скінченно–вимірним і послідовність (6.36) є інтегровною.

Приклад 6.2. Нагадаємо, що e_{pq} позначає матричну одиницю в алгебрі

$$M_{n_i}\,(\mathbb{F}),\quad 1\ \leq\ p\,,\ q\ \leq\ n_i,$$

а $e_{pq}(i)$ позначає елемент

$$e_{pq}(i)\ =\ \underbrace{1\ \otimes\ \cdots\ \otimes\ 1\ \otimes\ e_{pq}}_{i}\otimes 1\ \otimes\ \cdots\ \in\ A_i\ \subset\ A$$

(як у теоремі 6.5, див. (6.26)). Нехай

$$a_i \;=\; e_{11}(i)\, e_{12}(i+1).$$

Очевидно, що

$$a_i^2 \;=\; e_{11}(i)^2\, e_{12}(i+1)^2 \;=\; 0.$$

Позначимо через ϕ_i автоморфізм спряження за допомогою елемента

$$\big(\,1 \;+\; a_i\,\big)^{-1} \;=\; 1 \;-\; a_i.$$

Доведемо, що послідовність автоморфізмів

$$\phi_i^{-1}, \quad i \;\geq\; 1, \tag{6.37}$$

не є інтегровною, а тому занурення

$$\phi \;=\; \phi_1\, \phi_2\, \cdots \tag{6.38}$$

є ін'єктивним ендоморфізмом, який не є автоморфізмом.

Дійсно, позначимо окремо $a_0 = e_{12}(1)$. Легко бачити, що

$$(1 + a_0)^{-1} = 1 - a_0.$$

Покажемо індукцією за i, що

$$(1 \;+\; a_i)\;\cdots\;(1 \;+\; a_1)\, e_{12}(1)\;(1 \;+\; a_1)^{-1}\;\cdots\;(1 \;+\; a_i)^{-1} \;=$$

$$e_{12}(1) \;+\; e_{12}(1)\, e_{12}(2) \;+\; \cdots \;+\; e_{12}(1)\, e_{12}(2)\;\cdots\; e_{12}(i+1).$$

При $i = 0$ твердження очевидне. Розглянемо елемент

$$\big(1 \;+\; a_{i+1}\big)\,\Big(\;\sum_{k=1}^{i+1}\; e_{12}(1)\;\cdots\; e_{12}(k)\,\Big)\,\big(1 \;-\; a_{i+1}\big).$$

Для кожного числа k, $1 \leq k \leq i+1$, ми маємо:

$$a_{i+1}\, e_{12}(1)\;\cdots\; e_{12}(k)\; a_{i+1} \;=$$

$$e_{11}(i+1)\, e_{12}(i+2)\, e_{12}(1)\;\cdots\; e_{12}(k)\, e_{11}(i+1)\, e_{12}(i+2) \;=\; 0,$$

оскільки

$$e_{12}(i+2)^2 \;=\; 0.$$

Таким чином,

$$(1 \;+\; a_{i+1}) \left(\sum_{k=1}^{i+1} e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(k) \right) (1 \;-\; a_{i+1}) \;=$$

$$\sum_{k=1}^{i+1} e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(k) \;+\; \Big[\, a_{i+1} \, , \, \sum_{k=1}^{i+1} e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(k) \, \Big].$$

Як і в підрозділі 6.3 для $k \le i$ матимемо:

$$\big[\, e_{11}(i+1) \, e_{12}(i+2) \, , \, e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(k) \, \big] \;=\; 0.$$

Для $k = i+1$ отримаємо:

$$\big[\, e_{11}(i+1) \, e_{12}(i+2) \, , \, e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(i) \, e_{12}(i+1) \, \big] \;=$$

$$e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(i) \, \big[\, e_{11}(i+1) \, , \, e_{12}(i+1) \, \big] \, e_{12}(i+2) \;=$$

$$e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(i+2).$$

Оскільки елементи

$$e_{12}(1) \;\cdots\; e_{12}(i), \quad i \;\ge\; 1,$$

лінійно незалежні в алгебрі A, то підпростір, породжений елементами

$$\phi_i \cdots \phi_1\big(e_{12}(1)\big) \;=$$

$$(1 \;+\; a_i) \;\cdots\; (1 \;+\; a_1) \, e_{12}(1) \, (1 \;+\; a_1)^{-1} \;\cdots\; (1 \;+\; a_i)^{-1}, \quad i \;\ge\; 1,$$

є нескінченно–вимірним.

Ми довели, що послідовність (6.37) не є інтегровною. За теоремою 6.7 занурення (6.38) не є сюр'єкцією, тобто підалгебра $B = \varphi(A)$ алгебри A ізоморфна алгебрі A і є власною підалгеброю.

Таким чином, приклад 6.2 *дає інше доведення теореми* 10 *з роботи* [84] *О.Г. Куроша.*

6.5 Автоморфізми локально матричних алгебр як узагальнені простори Бера

Розглянемо родину множину M_i, $i \in \mathbb{N}$, та декартовий добуток

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} M_i.$$

Нехай $0 < \zeta < 1$. Для двох різних елементів $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ з множини M визначимо функцію

$$d_B\,(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \ = \ \zeta^k, \quad \text{де} \quad k \ = \ \min\{\ i \,|\, x_i \neq y_i\ \}.$$

Неархімедовий метричний простір (M, d_B) називається *узагальненим простором Бера* (див. [28, 118]).

Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична $\mathbb{F}$–алгебра. Теорема 6.6 ототожнює напівгрупу унітальних ін'єктивних ендоморфізмів $P(A)$ з декартовим добутком

$$\prod_{i \geq 1} \mathcal{X}_i,$$

тобто кожний ін'єктивний ендоморфізм єдиним чином зображується у вигляді добутку $\varphi = \varphi_1 \cdots$, де $\varphi_i \in \mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_i$ — система представників класів суміжності hH_{i+1}, $h \in H_i$, а

$$H_i \ \cong \ \mathrm{Inn}\,\Big(\ \bigotimes_{k \geq i} A_k\ \Big).$$

Отже, на $P(A)$ можна визначити структуру узагальненого простору Бера.

Твердження 6.1. *Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Топологія, яка визначається узагальненою метрикою Бера на напівгрупі $P(A)$, збігається з топологією Тихонова.*

Доведення. Як і раніше, ми припускаємо, що

$$A \ = \ \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \ \cong \ M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Нехай

$$\varphi \in P(A), \quad \varphi \ = \ x_1\, x_2\, \cdots, \quad x_i \in \mathcal{X}_i.$$

Розглянемо підмножини

$$P'_k(\varphi) \ = \ \left\{ \psi \in P(A) \,\middle|\, \psi\big|_{A_1\otimes\cdots\otimes A_k} \ = \ \varphi\big|_{A_1\otimes\cdots\otimes A_k} \right\},$$

$$P''_k(\varphi) \ = \ x_1 \ \cdots \ x_k \, \mathcal{X}_{k+1} \, \mathcal{X}_{k+2} \ \cdots \ .$$

Підмножини $P'_k(\varphi)$, $P''_k(\varphi)$ визначають відповідно топологію Тихонова і топологію узагальненого простору Бера на множині $P(A)$.

Маємо

$$\psi\big|_{A_1\otimes\cdots\otimes A_k} \ = \ x_1 \ \cdots \ x_k\big|_{A_1\otimes\cdots\otimes A_k}.$$

Отже,

$$P'_k(\varphi) \ = \ P''_k(\varphi)$$

і твердження доведено. □

Нехай φ — автоморфізм алгебри A. Позначимо символом $\widehat{\varphi}$ спряження за допомогою елемента φ у напівгрупі $P(A)$.

Твердження 6.2. *$\widehat{\varphi}$ є ізометрією узагальненого простору Бера $P(A)$ тоді й лише тоді, коли φ залишає всі підалгебри*

$$\bigotimes_{i\geq j} A_i, \quad j \geq 1,$$

інваріантними.

Доведення. Для довільного $k \geq 1$ розглянемо замикання

$$\overline{H}_k \ = \ H_k \, H_{k+1} \ \cdots$$

підгрупи H_k (означення див. на стор. 217). Згідно з теоремою 6.6

$$P(A) \ = \ \overline{H}_1 \ > \ \overline{H}_2 \ > \ \cdots , \qquad \bigcap_{i\geq 1} \overline{H}_i \ = \ \{1\}. \tag{6.39}$$

Для довільних різних автоморфізмів $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}(A)$ знайдеться таке число k, що

$$\psi_1^{-1}\, \psi_2 \ \in \ \overline{H}_k \setminus \overline{H}_{k+1}.$$

Відстань Бера між автоморфізмами ψ_1, ψ_2 дорівнює ζ^k. Звідси випливає, що спряження $\widehat{\varphi}$ зберігає метрику Бера тоді й лише тоді, коли

$$\varphi^{-1}\, \overline{H}_k \, \varphi \ = \ \overline{H}_k \quad \text{для довільного} \quad k \geq 1.$$

Група H_k породжена спряженнями за допомогою оборотних елементів алгебри

$$\bigotimes_{i \geq k} A_i. \tag{6.40}$$

Нехай

$$a \in \bigotimes_{i \geq k} A_i,$$

— оборотний елемент. Тоді

$$\varphi^{-1} \, \widehat{a} \, \varphi = \widehat{\varphi(a)} \in \widehat{H}_k.$$

Тому

$$\varphi(a) \in \bigotimes_{i \geq k} A_i.$$

Оскільки підалгебра (6.40) породжується своїми оборотними елементами як векторний простір, то

$$\varphi\Big(\bigotimes_{i \geq k} A_i \Big) = \bigotimes_{i \geq k} A_i.$$

Тим самим ми показали, що коли $\widehat{\varphi}$ — ізометрія простору Бера $\mathrm{Aut}(A)$, то φ лежить у стабілізаторі ланцюга

$$A = \bigotimes_{i \geq 1} A_i > \bigotimes_{i \geq 2} A_i > \cdots . \tag{6.41}$$

Повторюючи ці міркування в зворотньому порядку, ми отримаємо, що для довільного автоморфізму φ із стабілізатора ланцюга (6.41) відображення $\widehat{\varphi}$ є ізометрією простору $P(A)$.

Оскільки $\mathrm{Aut}(A)$ — щільна підмножина в напівгрупі $P(A)$, то $\widehat{\varphi}$ є ізометрією простору $P(A)$. Лема доведена. □

Через $\mathrm{Isom}\,(P(A))$ позначимо групу ізометрій простору Бера $P(A)$. Окремо нагадаємо, що $PGL_{n_i}(\mathbb{F})$ означає проективну лінійну групу, тобто

$$PGL_{n_i}(\mathbb{F}) = GL_{n_i}(\mathbb{F}) \diagup \mathbb{F}^*.$$

З твердження 6.2 випливатиме такий наслідок.

Наслідок 6.1. *Виберемо оборотні елементи*

$$a_i \in A_i^* \cong GL_{n_i}(\mathbb{F}), \quad i \geq 1.$$

Автоморфізм $\varphi = \widehat{a}_1\ \widehat{a}_2\ \cdots$ *є ізометрією узагальненого простору Бера* $P(A)$, *тобто*

$$\prod_{i\geq 1} PGL_{n_i}(\mathbb{F}) < \text{Isom}\big(P(A)\big).$$

6.6 Розмірності алгебр Лі диференціювань і порядки груп автоморфізмів

Потужність множини X позначатимемо через $|X|$, а множину всіх відображень із X в Y — через $\text{Map}(X,Y)$. Нехай α та β — потужності множин X та Y відповідно. Покладемо

$$\alpha^{\beta} = |X^Y|.$$

Використовуватимемо усталене позначення $\aleph_0$ для зліченної потужності.

Теорема 6.8. *Нехай*

$$A = \bigotimes_{i\in I} A_i,$$

де I *— нескінченна множина,* A_i *— матричні алгебри над полем* $\mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} A_i > 1$. *Тоді*

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \text{Der}\,(A) = \dim_{\mathbb{F}}\ \text{Outder}\,(A) = |\,\mathbb{F}\,|^{|I|}. \tag{6.42}$$

При доведенні нам знадобиться така нетривіальная лема з лінійної алгебри, яка належить П. Ердешу і І. Капланському (див. [75], розділ IX.5, теорема 2, стор. 247)[1] Наше доведення, яке наводиться нижче, відрізняється від доведення в [75].

Лема 6.6. *Нехай* V *векторний простір над полем* $\mathbb{F}$ *нескінченної розмірності* d *і нехай* V^* *— дуальний простір, тобто простір функціоналів* $V \to \mathbb{F}$. *Тоді*

$$\dim_{\mathbb{F}}\ V^* = |\,\mathbb{F}\,|^{d}.$$

Доведення. Дуальний простір V^* може бути ототожнений з декартовим степенем $\mathbb{F}^{\,d}$. Таким чином,

$$\dim_{\mathbb{F}}\ V^* \leq |\,V^*\,| = |\,\mathbb{F}\,|^{d}.$$

[1] Автор вдячна В.В. Сергейчуку за це посилання.

Тому залишається лише довести, що

$$\dim_{\mathbb{F}} V^* \geq |\mathbb{F}|^d.$$

Припустимо спочатку, що поле $\mathbb{F}$ скінченне. Нехай B — базис простору V^*. Оскільки множина B нескінченна, то множина скінченних підмножин множини B має ту ж потужність, що й множина B. Таким чином, і множина лінійних комбінацій базисних елементів має ту ж потужність, що й множина B, тобто

$$\dim_{\mathbb{F}} V = |V^*| = |\mathbb{F}|^d.$$

Припустимо тепер, що поле $\mathbb{F}$ нескінченне. Нехай

$$\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$$

і нехай I — множина потужності d. Ми вже відмічали результат Ч. Ченга і Г. Кайслера (див. [47], лема 2.3, або див. теорему 2.4), що існує ультрафільтр $\mathfrak{F}$ у множині I, такий що

$$\left| \mathbb{F}^{*I} \diagup \mathcal{F} \right| = |\mathbb{F}|^d.$$

Це означає, що існує родина відображень

$$f_j : I \to \mathbb{F}^*, \quad j \in J,$$

які індексуються множиною J потужності $|\mathbb{F}|^d$ така, що для довільних двох різних індексів $j_1,\ j_2 \in J$ множина

$$\left\{ i \in I \mid f_{j_1}(i) = f_{j_2}(i) \right\}$$

не належить ультрафільтру $\mathcal{F}$.

Множину I можна зобразити у вигляді об'єднання

$$I = I_1 \dot{\bigcup} I_2 \dot{\bigcup} \cdots$$

зліченної родини множин, які попарно не перетинаються, причому кожна множина I_k матиме потужність d. Припустимо, що

$$I_k = \left\{ v_{k_i},\ i \in I \right\}, \quad k \geq 1.$$

Для довільного відображення

$$f_j \,:\, I \,\to\, F^*, \quad j \,\in\, J,$$

розглянемо відображення

$$\widetilde{f_j} \,:\, I \,\to\, F^*, \quad \widetilde{f_j}(v_{k_i}) \,=\, f_j(i)^k.$$

Доведемо, що родина відображень

$$\left\{ \widetilde{f_j} \right\}_{j\in J}$$

лінійно незалежна над полем $\mathbb{F}$. Справді, нехай

$$\alpha_1 \widetilde{f_{j_1}} \,+\, \cdots \,+\, \alpha_n \widetilde{f_{j_n}} \,=\, 0, \quad \alpha_1, \,\ldots,\, \alpha_n \,\in\, F^*,$$

де $j_1, \ldots, j_n$ — різні індекси з J. Розглянемо множини

$$I_{p,q} \,=\, \left\{\, i \,\in\, I \,\middle|\, f_{j_p}(i) \,=\, f_{j_q}(i) \,\right\},$$

де (p, q) пробігає всі пари

$$(p, q) \,\in\, [1, n] \times [1, n].$$

Жодна з множин $I_{p,q}$ не лежить в ультрафільтрі $\mathcal{F}$.

Покажемо, що знайдеться $i \in I$ такий, що елементи

$$f_{j_1}(i), \,\ldots,\, f_{j_n}(i)$$

будуть різними. Справді, якщо це не так, то для довільного $i \in I$ існують

$$1 \,\le\, p \,\ne\, q \,\le\, n \quad \text{такі, що} \quad f_{j_p}(i) \,=\, f_{j_q}(i),$$

$$\text{тобто} \quad i \,\in\, I_{p,q}.$$

Таким чином,

$$I \,=\, \bigcup_{(p,q)} I_{p,q}.$$

Якщо об'єднання скінченної родини підмножин лежить в ультрафільтрі, то одна з цих підмножин лежить в ультрафільтрі (див. підрозділ 2.3). Отже, хоча б одна з підмножин $I_{p,q}$ лежить в ультрафільтрі $\mathcal{F}$. Отримали суперечність.

Тим самим ми довели, що знайдеться $i \in I$ такий, що елементи

$$f_{j_1}(i),\ \ldots,\ f_{j_n}(i)$$

— різні. Для кожного $k \geq 1$ маємо:

$$\alpha_1\, \widetilde{f}_{j_1}(v_{k_i}) \ + \ \cdots \ + \ \alpha_n\, \widetilde{f}_{j_n}(v_{k_i}) \ =$$

$$\alpha_1\, f_{j_1}(i)^k \ + \ \cdots \ + \ \alpha_n\, f_{j_n}(i)^k \ = \ 0.$$

Отже, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$. Лема 6.6 доведена. □

Доведення теореми 6.8. Позначимо через $\mathrm{Lin}(A)$ алгебру всіх лінійних перетворень $A \longrightarrow A$. Очевидно, що

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Der}(A) \ \leq \ \dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Lin}(A) \ \leq \ |\,\mathrm{Lin}(A)\,|.$$

Розмірність алгебри A дорівнює $|I|$. Потужність множини $\mathrm{Lin}(A)$ не перевищує потужності множини всіх $(I \times I)$−матриць над полем $\mathbb{F}$. Потужність множини $(I \times I)$−матриць дорівнює

$$\left|\,\mathbb{F}^{\,I\times I}\right| \ = \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,|I\times I|} \ = \ |\,\mathbb{F}|^{\,|I|},$$

позаяк $|I|^2 = |I|$ (це виконується для всіх нескінченних потужностей, див. [100]). Отже, ми довели, що

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{Der}(A) \ \leq \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,|I|}.$$

Для довільного $i \in I$ виберемо елемент

$$0 \ \neq \ a_i \ \in \ A_i^0.$$

Позначатимемо через $\mathcal{P}$ систему всіх 1−елементних підмножин множини I. Легко бачити, що система $\mathcal{P}$ є розрідженою. Для довільного відображення $f : I \longrightarrow \mathbb{F}$ розглянемо диференціювання

$$d_f \ = \ \sum_{i\in I}\ f(i)\ \mathrm{ad}(a_i) \ \in \ D_{\mathcal{P}}.$$

За теоремою 6.4 (2) відображення $f \longrightarrow d_f$ є зануренням векторного простору $\mathrm{Map}(I, \mathbb{F})$ у векторний простір $\mathrm{Der}(A)$. Згідно з лемою 6.6

$$\dim_F\ \mathrm{Map}(I, \mathbb{F}) \ = \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,|I|}.$$

Отже,

$$|\mathbb{F}|^{|I|} \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Der}(A)$$

і, тим самим,

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Der}(A) = |\mathbb{F}|^{|I|}.$$

Розмірність алгебри $\mathrm{Inder}(A)$ дорівнює $|I|$,

$$|I| < |\mathbb{F}|^{|I|}.$$

Звідси випливає, що

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Outder}\,(A) = |\mathbb{F}|^{|I|}$$

і рівності (6.42) мають місце. Теорема 6.8 доведена. □

Теорема 6.9. *Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді*

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Der}(A) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Outder}(A) = |\mathbb{F}|^{\aleph_0}. \tag{6.43}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що алгебра A унітальна. Тоді за теоремою Кьоте [81] алгебра A ізоморфна зліченному тензорному добутку матричних алгебр

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Далі в цьому випадку досить зіслатися на теорему 6.8. Тому рівності (6.43) мають місце.

Припустимо тепер, що алгебра A не є унітальною. Як і раніше,

$$\dim_F \mathrm{Der}(A) \leq \dim_F \mathrm{Lin}(A) \leq |\mathrm{Lin}(A)| = |F|^{\aleph_0}.$$

Нехай $0 \neq e \in A$ — ненульовий ідемпотент такий, що кут eAe є нескінченно–вимірним. Згідно з лемою 6.5 кожне диференціювання кута eAe продовжується до диференціювання алгебри A. Отже,

$$|F|^{\aleph_0} = \dim_F \mathrm{Der}(eAe) \leq \dim_F \mathrm{Der}(A).$$

Ми довели, що в цьому випадку

$$\dim_F \mathrm{Der}(A) = |F|^{\aleph_0}.$$

Насамкінець, залишилося розглянути випадок, коли

$$\dim_F\ eAe\ <\ \infty\quad \text{для всіх ідемпотентів}\quad e\ \in\ A.$$

Згідно з лемою 4.17 у цьому випадку

$$A\ \cong\ M_\infty(\mathbb{F}).$$

Для довільного відображення $f:\mathbb{N}\to\mathbb{F}$ розглянемо нескінченну діагональну матрицю

$$d_f\ =\ \operatorname{diag}\big(0,\ f(1),\ f(2),\ \ldots\ \big).$$

Матриця d_f не обов'язково є фінітарною, але

$$\big[\ d_f\ ,\ M_\infty(\mathbb{F})\ \big]\ \subseteq\ M_\infty(\mathbb{F}).$$

Таким чином,

$$\operatorname{ad}(d_f)\ :\ x\ \mapsto\ [\ d_f\ ,\ x\ ]$$

є диференціюванням алгебри $M_\infty(\mathbb{F})$. Відображення

$$f\ \to\ \operatorname{ad}(d_f)$$

є зануренням векторних просторів

$$\mathbb{F}^{\mathbb{N}}\ \to\ \operatorname{Der}\big(M_\infty(\mathbb{F})\big).$$

Згідно з лемою 6.6

$$|\,F\,|^{\aleph_0}\ =\ \dim_F\ \mathbb{F}^{\mathbb{N}}\ \le\ \dim_F\ \operatorname{Der}\big(M_\infty(\mathbb{F})\big).$$

Ми довели, що

$$\dim_F\ \operatorname{Der}\big(M_\infty(\mathbb{F})\big)\ =\ |\,F\,|^{\aleph_0}.$$

Оскільки алгебра $\operatorname{Inder}(A)$ зліченно-вимірна і

$$\aleph_0\ <\ |\,F\,|^{\aleph_0},$$

то

$$\dim_F\ \operatorname{Outder}\big(M_\infty(\mathbb{F})\big)\ =\ |\,F\,|^{\aleph_0}.$$

Рівності (6.43) мають місце. Теорема 6.9 доведена. $\square$

Зауваження 6.1. Зауважимо, що для багатьох незліченних потужностей поля $|\mathbb{F}|$ справедлива рівність

$$|\mathbb{F}|^{\aleph_0} = |\mathbb{F}|.$$

Наприклад, це справедливо для $|\mathbb{F}| = \lambda^\mu$, де λ, μ — потужності і $\mu \geq \aleph_0$. Якщо $\mathbb{F}$ — поле рядів Лорана змінної z над деяким полем F_0 або його алгебричним розширенням, то

$$|\mathbb{F}| = |F_0|^{\aleph_0} \quad \text{і тому} \quad |\mathbb{F}|^{\aleph_0} = |\mathbb{F}|.$$

Зауваження 6.2. Зауважимо, що коли A — локально матрична алгебра над полем нульової характеристики, то $L = [A, A]$ — локально скінченно–вимірна локально проста алгебра Лі. Більше того, справедливі занурення

$$Der(A) \to Der(L), \quad Inder(A) \to Inder(L),$$

$$Outder(A) \to Outder(L),$$

звідки випливає

$$\dim_{\mathbb{F}} Outder(L) \geq \dim_{\mathbb{F}} Outder(A).$$

Тому теорема *6.9* суперечить теоремі 3.2 з *[104]*.

Теорема 6.10. *Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді*

$$|\,\mathrm{Aut}(A)\,| = |\,\mathrm{OutAut}(A)\,| = |\,\mathbb{F}\,|^{\aleph_0}. \tag{6.44}$$

Доведення. Спочатку ми припускаємо, що алгебра A є унітальною. Отже,

$$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 2, \quad i \geq 1.$$

Нехай, як і раніше,

$$PGL_{n_i}(\mathbb{F}) = GL_{n_i}(\mathbb{F}) \,/\, \mathbb{F}^*$$

означає проективну лінійну групу. Тоді розглянемо множину $\mathbf{F}$ усіх відображень

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} PGL_{n_i}(\mathbb{F})$$

таких, що $f(i) \in PGL_{n_i}(\mathbb{F})$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що $|\mathbf{F}| = |\mathbb{F}|^{\aleph_0}$. Для оборотного елемента $a \in A$ нехай символ $\widehat{a}$ означає автоморфізм спряження за допомогою елемента a. У прикладі 6.1 ми показали, що послідовність внутрішніх автоморфізмів

$$\widehat{f(i)}^{-1}, \quad i \geq 1,$$

є інтегровною. Тому, згідно з теоремою 6.7, нескінченний добуток

$$\varphi_f \;=\; \widehat{f(1)}\,\widehat{f(2)}\;\cdots, \quad f \;\in\; \mathbf{F},$$

є автоморфізмом алгебри A.

Покажемо тепер, що відображення $f \longrightarrow \varphi_f$ ін'єктивне. Нехай $f, g \in \mathbf{F}$ та $\varphi_f = \varphi_g$. Застосовуючи автоморфізми φ_f, φ_g до підалгебри A_1, бачимо, що

$$\widehat{f(1)}\big|_{A_1} = \widehat{g(1)}\big|_{A_1}.$$

Тим самим маємо $f(1) = g(1)$. Отже,

$$\widehat{f(2)}\,\widehat{f(3)}\;\cdots \;=\; \widehat{g(2)}\,\widehat{g(3)}\;\cdots.$$

Застосовуючи обидві частини останньої рівності до підалгебри A_2, отримаємо $f(2) = g(2)$. І так далі. Таким чином, $|\mathrm{Aut}(A)| \geq |\mathbb{F}|^{\aleph_0}$.

З іншого боку,

$$|\mathrm{Aut}(A)| \;\leq\; |\mathrm{Lin}(A)| \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Ми довели, що для унітальної алгебри A має місце наступна рівність

$$|\mathrm{Aut}(A)| \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Тепер нехай алгебра A не є унітальною алгеброю. Припустимо, що A містить ідемпотент e такий, що

$$\dim_{\mathbb{F}} eAe \;=\; \aleph_0.$$

Алгебра eAe є унітальною як кут алгебри A. Тому з попередньої частини доведення та леми 4.13 випливає, що

$$|\mathbb{F}|^{\aleph_0} = |\mathrm{Aut}(eAe)| \leq |\mathrm{Aut}(A)| \leq |\mathrm{Lin}(A)| = |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Звідки випливає, що

$$|\mathrm{Aut}(A)| \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Необхідно окремо розглянути випадок, коли $\dim_{\mathbb{F}} eAe < \infty$ для всіх ідемпотентів $e \in A$. Згідно з лемою 4.17 $A \cong M_\infty(\mathbb{F})$. Для довільного відображення $f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$ розглянемо оборотну нескінченну матрицю

$$a_f = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} f(i) e_{2i-1,\,2i},$$

де Id є нескінченною одиничною $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матрицею і $e_{i,j}$ — це матричні одиниці. Матриці a_f не є фінітарними, проте

$$a_f^{-1} M_\infty(\mathbb{F}) a_f = M_\infty(\mathbb{F}).$$

Нехай $\widehat{a_f}$ позначає автоморфізм спряження за допомогою елемента a_f. Відображення

$$f \mapsto \widehat{a_f} \in \mathrm{Aut}(M_\infty(\mathbb{F}))$$

є ін'єктивним, оскільки

$$a_f^{-1} e_{1,2i-1} a_f = e_{1,2i-1} + f(i) e_{1,2i} \quad \text{для} \quad i \geq 1.$$

Отже, маємо

$$|\mathbb{F}|^{\aleph_0} = |\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{F})| \leq |\mathrm{Aut}(M_\infty(\mathbb{F}))| \leq |\mathrm{Lin}_{\mathbb{F}}(A)| = |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Рівності (6.44) мають місце і теорема 6.10 доведена. □

6.7 Автоморфізми і ізометрії просторів Хемінга

У цьому підрозділі ми обговоримо порядки групи автоморфізмів і групи ізометрій тензорного добутку стандартних просторів Хемінга, а також порядки групи автоморфізмів і групи ізометрій довільного зліченного (не обов'язково унітального) простору Хемінга.

Нехай I — нескінченна множина. Нехай $\{n_i \geq 2, i \in I\}$ — родина натуральних чисел, індексованих множиною I.

Теорема 6.11. *Порядки групи автоморфізмів та групи ізометрій тензорного добутку*

$$H = \bigotimes_{i\in I} H_{n_i}$$

родини стандартних просторів Хемінга $\{H_{n_i}, i \in I\}$ *збігаються і дорівнюють* $2^{|I|}$, *тобто*

$$\left|\mathrm{Aut}\left(\bigotimes_{i\in I} H_{n_i}\right)\right| = \left|\mathrm{Isom}\left(\bigotimes_{i\in I} H_{n_i}\right)\right| = 2^{|I|}. \tag{6.45}$$

Доведення. Через те, що множина I нескінченна, потужність тензорного добутку H дорівнює $|I|$. Таким чином, порядок групи автомрфізмів і порядок групи ізометрій простору H не більші за

$$\left|\mathrm{Map}\,(H, H)\right| = \left|I\right|^{|I|} \leq \left(2^{|I|}\right)^{|I|} = 2^{|I|\cdot|I|} = 2^{|I|}$$

(див. [125]).

Залишилося довести, що

$$\left|\mathrm{Aut}\,(H)\right| \geq 2^{|I|}.$$

Для цього ми скористаємося тим, що

$$\mathrm{Aut}\,(H) \subset \mathrm{Isom}\,(H).$$

Для кожного індексу $i \in I$ виберемо нетотожну підстановку $1 \neq \pi_i \in \mathrm{Sym}(n_i)$. Підстановка π_i індукує автоморфізм стандартного простору Хемінга

$$\tilde{\pi}_i : H_{n_i} \to H_{n_i},$$

де

$$\tilde{\pi}_i\left((a_1, \ldots, a_{n_i})\right) = (a_{\pi_i(1)}, \ldots, a_{\pi_i(n_i)}), \quad a_1, \ldots, a_{n_i} \in \{0, 1\}.$$

Для кожної підмножини $J \subseteq I$ визначимо автоморфізм φ_J простору H у такий спосіб:

якщо $a \in H_{n_i}$ та $i \notin J$, то $\varphi_J(a) = a$;

якщо $a \in H_{n_i}$ та $i \in J$, то $\varphi_J(a) = \tilde{\pi}_i(a)$.

Легко бачити, що визначене таким чином відображення

$$\bigcup_{i\in I} H_{n_i} \to \bigcup_{i\in I} H_{n_i}$$

єдиним чином продовжується до автоморфізму $\varphi_J : H \to H$. Якщо J_1, J_2 — різні підмножини множини I, то

$$\varphi_{J_1} \neq \varphi_{J_2}.$$

Звідси випливає рівність (6.45). Теорема доведена. □

Теорема 6.12. *Для довільного зліченного простору Хемінга H маємо:*

$$\big|\mathrm{Aut}\ (H)\big| = \big|\mathrm{Isom}\ (H)\big| = 2^{\aleph_0}.$$

Доведення. Припустимо, що простір H — унітальний. Тоді згідно з теоремою 5.1 простір H ізоморфний зліченному тензорному добуткові стандартних просторів Хемінга. У цьому випадку твердження теореми випливатиме з теореми 6.11.

Припустимо, що простір H — неунітальний. А також припустимо, що знайдеться елемент $h \in H$ такий, що множина hH — нескінченна. Згідно з лемою 5.13 довільний автоморфізм простору hH продовжується до автоморфізму простору H. Простір hH скалярно еквівалентний унітальному просторові Хемінга H_h. Отже,

$$\mathrm{Aut}\ (hH) = \mathrm{Aut}\ (\,H_h\,).$$

Звідси випливає, що

$$\big|\mathrm{Aut}\ (H)\big| \geq \big|\mathrm{Aut}\ (H_h)\big| = 2^{\aleph_0}.$$

Припустимо, нарешті, що для довільного елемента $h \in H$ множина hH є скінченною. У цьому випадку $\mathrm{Spec}\ (H) \subseteq \mathbb{N}$, і оскільки множина H зліченна, то простір H скалярно еквівалентний просторові $H(\infty)$.

Залишилося довести, що

$$\big|\mathrm{Aut}\ (H(\infty))\big| \geq 2^{\aleph_0}.$$

Нагадаємо, що $H(\infty)$ — алгебра з мірою скінченних підмножин зліченної множини X. Для скінченної підмножини $h \in H(\infty)$ покладемо $r(h) = |h|$. Кожна бієкція $\pi : X \to X$ визначає такий автоморфізм $\tilde{\pi}$ простору Хемінга $H(\infty)$:

$$\text{для підмножини} \quad h = \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{покладемо} \quad \tilde{\pi}(h) = \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)\}.$$

Таким чином,

$$\big|\mathrm{Aut}\ (H(\infty))\big| \geq \big|\mathrm{Sym}\ (X)\big| = 2^{\aleph_0}.$$

Теорема доведена. □

Висновки до розділу 6

У цьому розділі вивчалися автоморфізми і диференціювання локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є:

- Показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в алгебрі Лі всіх диференціювань.
- Доведено, що група внутрішніх автоморфізмів унітальної локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в напівгрупі всіх унітальних ін'єктивних ендоморфізмів.
- Для довільного нескінченного тензорного добутку матричних алгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, де $i \in I$, описані його диференціювання, а саме: довільне диференціювання такого тензорного добутку є нескінченною збіжною сумою внутрішніх диференціювань, яка відповідає розрідженій підмножині множини індексів I.
- Для кожної розрідженої підмножини множини I знайдено топологічний базис у векторному просторі нескінченних збіжних сум внутрішніх диференціювань, який буде відповідати цій розрідженій підмножині.
- Показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань зліченно–вимірної локально матричної алгебри не локально скінченно–вимірна, що є аналогом теореми Штраде.
- Показано, що кожний унітальний ін'єктивний ендоморфізм унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри єдиним чином зображується у вигляді збіжного добутку внутрішніх автоморфізмів з деякої системи представників.
- Показано, що нескінченний збіжний добуток автоморфізмів є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність обернених автоморфізмів інтегровна.
- Доведено, що узагальнена метрика Бера на напівгрупі унітальних ін'єктивних ендоморфізмів, визначає топологію Тихонова.
- Для алгебри A, яка є тензорним добутком родини матричних алгебр над полем $\mathbb{F}$, індексованим нескінченною множиною I, доведено, що розмірності алгебри Лі $\mathrm{Der}(A)$ диференціювань алгебри A і алгебри Лі

Outder(A) зовнішніх диференціювань алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{|I|}$, де $|\mathbb{F}|$ та $|I|$ — потужності множин $\mathbb{F}$ та I відповідно.

- Для зліченно–вимірної локально матричної алгебри A показано, що:
  (i) розмірності алгебри Лі Der(A) диференціювань алгебри A і алгебри Лі Outder(A) зовнішніх диференціювань алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$;
  (ii) порядки групи автоморфізмів Aut(A) алгебри A і групи зовнішніх автоморфізмів OutAut(A) алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$.
- Показано, що порядок групи ізометрій зліченного локально стандартного простору Хемінга дорівнює $2^{\aleph_0}$.

Розділ 7

Нескінченні періодичні матриці

У цьому розділі вивчаються нескінченні періодичні матриці. Результати цього розділу опубліковано в [22, 38, 114].

Нагадаємо, що символом $\mathbb{N}$ ми позначаємо множину всіх натуральних чисел. Розглянемо алгебру $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ усіх нескінченних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матриць, які мають лише скінченну кількість ненульових елементів у кожному стовпчику. Якщо V — зліченно–вимірний векторний простір, то фіксуючи базис у просторі V, ми тим самим фіксуватимемо ізоморфізм алгебри всіх лінійних перетворень простору V та алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ (див. [130]).

Розглянемо підалгебру $M_{rcf}(\mathbb{F})$ алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$, яка складається з матриць, що мають скінченне число ненульових елементів у кожному стовпчику і в кожному рядку.

Розглянемо також алгебру $M_b(\mathbb{F})$, яка складається із обмеженних матриць. Нагадаємо, що матриця

$$(a_{ij})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \quad a_{ij} \in \mathbb{F},$$

називається *обмеженною* (див. [38]), якщо існує число $k \in \mathbb{N}$ таке, що $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > k$. Очевидно, що

$$M_b(\mathbb{F}) \subset M_{rcf}(\mathbb{F}) \subset M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}).$$

Розглянемо також відповідні групи оборотних елементів цих алгебр, а саме:

$$GL_b(\mathbb{F}) \subset GL_{rcf}(\mathbb{F}) \subset GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}).$$

Назвемо нескінченну $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матрицю *періодичною* (див. [38]), якщо вона має блочно–діагональний вигляд $\mathrm{diag}(a, a, \ldots)$, де a є $(n\times n)$–матрицею. У цьому випадку ми називатимемо число n *періодом матриці*, а саму матрицю n*−періодичною.*

Позначимо через

$$M_n^p(\mathbb{F}) \quad \text{алгебру усіх } n\text{−періодичних матриць.}$$

Легко бачити, що

$$M_n^p(\mathbb{F}) \ \cong \ M_n(\mathbb{F}).$$

Якщо натуральне число n ділить натуральне число m, то маємо включення

$$M_n^p(\mathbb{F}) \ \subseteq \ M_m(\mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що

$$M^p(\mathbb{F}) \ := \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n^p(\mathbb{F}) \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M_b(\mathbb{F})$. Справді,

$$M_m^p(\mathbb{F}) \ + \ M_n^p(\mathbb{F}) \ \subseteq \ M_k^p(\mathbb{F}), \quad M_m^p(\mathbb{F}) \ \cdot \ M_n^p(\mathbb{F}) \ \subseteq \ M_k^p(\mathbb{F}),$$

де k є спільним кратним чисел m та n. Алгебра $M^p(\mathbb{F})$ — алгебра всіх періодичних матриць.

Позначимо символом $GL_n^p(\mathbb{F})$ групу оборотних матриць з $M_n^p(\mathbb{F})$. Очевидно, що

$$GL_n^p(\mathbb{F}) \ \cong \ GL_n(\mathbb{F}).$$

Позначимо також символом $GL^p(\mathbb{F})$ групу оборотних матриць з $M^p(\mathbb{F})$. Матимемо

$$GL^p(\mathbb{F}) \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} GL_n^p(\mathbb{F}).$$

Нехай, як і раніше, $M_s^p(\mathbb{F})$ — алгебра усіх періодичних матриць, періоди яких ділять число Стейніца s.

Лема 7.1. *Нехай s — деяке число Стейніца. Тоді*

$$M_s^p(\mathbb{F}) \ = \ \bigcup_{n|s} M_n^p(\mathbb{F}) \quad i \quad GL_s^p(\mathbb{F}) \ = \ \bigcup_{n|s} GL_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M^p(\mathbb{F})$ і підгрупою групи $GL^p(\mathbb{F})$ відповідно.

Доведення. Як і вище, зазначимо, що

$$M_n^p(\mathbb{F}) \cdot M_m^p(\mathbb{F}) \subseteq M_k^p(\mathbb{F}), \quad GL_n^p(\mathbb{F}) \cdot GL_m^p(\mathbb{F}) \subseteq GL_k^p(\mathbb{F}),$$

де k — найменше спільне кратне чисел m та n. Якщо m та n ділять число Стейніца s, то їх найменше спільне кратне також ділить s. Звідси випливає твердження леми. □

Оскільки алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є об'єднанням алгебр

$$M_n^p(\mathbb{F}), \quad n \in \Omega\,(s),$$

де $\Omega\,(s)$ — множина натуральних чисел, які ділять s, а також

$$M_n^p(\mathbb{F}) \cong M_n(\mathbb{F}),$$

то алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є локально матричною алгеброю. Легко бачити, що

$$\mathbf{st}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right) = s.$$

Теорема 7.1. *Нехай s_1, s_2 — числа Стейніца. Підгрупи*

$$GL_{s_1}^p(\mathbb{F}) \quad \textit{та} \quad GL_{s_2}^p(\mathbb{F})$$

спряжені в $GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ тоді й лише тоді, коли $s_1 = s_2$.

Доведення. Якщо знайдеться оборотний елемент $g \in GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ такий, що

$$GL_{s_2}^p(\mathbb{F}) = g^{-1}\, GL_{s_1}^p(\mathbb{F})\, g,$$

то тоді

$$M_{s_2}^p(\mathbb{F}) = g^{-1}\, M_{s_1}^p(\mathbb{F})\, g,$$

оскільки алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ породжена підмножиною $GL_s^p(\mathbb{F})$ як векторним простором. Але спряжені алгебри

$$M_{s_1}^p(\mathbb{F}) \quad \text{та} \quad M_{s_2}^p(\mathbb{F})$$

— ізоморфні. Тоді згідно теореми Глімма 3.8 $s_1 = s_2$. Теорема 7.1 доведена. □

Позначимо через $SL_s^p(\mathbb{F})$ — *спеціальну лінійну групу*, тобто комутант групи $GL_s^p(\mathbb{F})$. Нехай $n_1, n_2, \ldots$ — послідовність натуральних чисел, які ділять s і такі, що $n_i | n_{i+1}$, $i \geq 1$. І нехай число s — найменше спільне кратне чисел $\{n_i, i \geq 1\}$. Тоді $GL_s^p(\mathbb{F})$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп:

$$GL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset GL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \cdots .$$

Група $SL_s^p(\mathbb{F})$ є об'єднанням комутантів груп $GL_{n_i}^p(\mathbb{F})$, бо

$$\left[\, GL_{n_i}^p(\mathbb{F})\,,\; GL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \,\right] \;=\; SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \;\cong$$

$$\cong\; SL_{n_i}(\mathbb{F}) \;=\; \left\{\, a \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \det(a) = 1 \,\right\},$$

тобто

$$SL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset SL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \cdots, \qquad \bigcup_{i \geq 1} SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \;=\; SL_s^p(\mathbb{F}).$$

Розглянемо підгрупу D_n^p діагональних n−періодичних матриць $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ таких, що $\varepsilon_i \in \mathbb{F}^*$, $i \geq 1$. Покладемо

$$D_s^p \;=\; \bigcup_{n \,\in\, \Omega\ (s)} D_n^p.$$

Зрозуміло, що D_s^p — абелева підгрупа групи $GL_s^p(\mathbb{F})$. Визначимо підгрупу $\overline{D}_s^p$ групи D_s^p таким чином. Елемент $g = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \in D_s^p$ належить $\overline{D}_s^p$, якщо знайдеться число $n \in \Omega\ (s)$ таке, що g є n−періодичною матрицею і $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1$. Неважко побачити, що

$$\overline{D}_s^p \;=\; D_s^p \bigcap SL_s^p(\mathbb{F}).$$

Лема 7.2. *Фактор−групи*

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup SL_s^p(\mathbb{F}) \quad \text{та} \quad D_s^p \diagup \overline{D}_s^p \quad \text{— ізоморфні.} \tag{7.1}$$

Доведення. Для довільного натурального числа $n \in \Omega\ (s)$ ми маємо:

$$GL_n^p(\mathbb{F}) \;=\; SL_n^p(\mathbb{F}) \;\cdot\; D_n^p.$$

Звідси випливає, що

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; SL_s^p(\mathbb{F}) \;\cdot\; D_s^p.$$

Тим самим бачимо, що

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup SL_s^p(\mathbb{F}) \;\cong\; D_s^p \diagup SL_s^p(\mathbb{F}) \cap D_s^p \;=\; D_s^p \diagup \overline{D}_s^p.$$

Отже, (7.1) має місце і лема доведена. $\square$

Нехай C — центр групи $GL_n^p(\mathbb{F})$. Неважко бачити, що центр C складатиметься зі скалярних матриць

$$\varepsilon \cdot \mathrm{Id} \ = \ \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots), \qquad \varepsilon \in \mathbb{F}^*,$$

де Id — нескінченна одинична $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})-$матриця. Позначимо символом C_n перетин

$$C_n \ = \ C \bigcap SL_n^p(\mathbb{F}).$$

Тоді група C_n складається із скалярних матриць вигляду $\varepsilon \cdot \mathrm{Id}$, де $\varepsilon^n = 1$. Отже,

$$C_s \ = \ C \bigcap SL_s^p(\mathbb{F})$$

складається із скалярних матриць $\varepsilon \cdot \mathrm{Id}$, де ε є коренем $n-$го степеня з 1, а $n \in \Omega\ (s)$.

Теорема 7.2. *Нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді спеціальна проективна лінійна група*

$$PSL_s^p(\mathbb{F}) \ = SL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C_s$$

є простою. Якщо для кожного натурального числа $n \in \Omega\ (s)$ у полі $\mathbb{F}$ існують корені $n-$го степеня з усіх його ненульових елементів, то

$$PGL_s^p(\mathbb{F}) \ = GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C_s \ \cong \ PSL_s^p(\mathbb{F}).$$

Доведення. Нехай $n_1 < n_2 < \cdots$ — послідовність натуральних чисел таких, що $n_i | n_{i+1}$, і s — найменше спільне кратне чисел n_i, $i \geq 1$. Тоді група $SL_s^p(\mathbb{F})$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп

$$SL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \ \subset SL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \ \subset \ \cdots \ .$$

Звідси випливає, що група $PSL_s^p(\mathbb{F})$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп

$$SL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \cdot C \diagup C \ \subseteq \ SL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \cdot C \diagup C \ \subseteq \ \cdots \ .$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $n_1 > 2$. Але група

$$SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \cdot C \diagup C \ \cong \ SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \diagup SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) \cap C \ \cong \ PSL_{n_i}^p(\mathbb{F})$$

— проста для любого натурального числа $n_i > 2$. (Обмеження $n_i > 2$ нам потрібне, бо групи $PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ та $PSL_2(\mathbb{Z}_3)$ не є простими). Значить, група $PSL_s^p(\mathbb{F})$ також проста, крім випадків $PSL_s^p(\mathbb{Z}_2)$, $PSL_s^p(\mathbb{Z}_3)$, якщо s ділиться на 2.

Припустимо тепер, що в полі $\mathbb{F}$ існують корені n–го степеня для кожного $n \in \Omega\ (s)$. Розглянемо діагональну матрицю $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, де $\varepsilon_i \in \mathbb{F}^*$. Тоді знайдеться елемент $\varepsilon \in \mathbb{F}$ такий, що $\varepsilon^n = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$. Значить,

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon) \cdot \mathrm{diag}(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon_n \cdot \varepsilon^{-1}) \in \mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon) \cdot SL_n(\mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що

$$D_n^p \subseteq C \cdot \overline{D}_n^p \quad \text{та} \quad D_s^p \subseteq C \cdot \overline{D}_s^p.$$

Тепер,

$$GL_s^p(\mathbb{F}) = SL_s^p(\mathbb{F}) \cdot D_s^p \subseteq SL_s^p(\mathbb{F}) \cdot C \cdot \overline{D}_s^p = SL_s^p(\mathbb{F}) \cdot C.$$

І остаточно отримаємо, що

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C \cong SL_s^p(\mathbb{F}) \diagup SL_s^p(\mathbb{F}) \cap C = SL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C_s.$$

Теорема доведена. □

Ми вже відмічали раніше, що група $GL_s^p(\mathbb{F})$ є групою оборотних елементів унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри $A = M_s^p(\mathbb{F})$, де $\mathbf{st}\ (A) = s$. Звідси випливає, що

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C \cong \mathrm{Inn}(A), \quad SL_s^p(\mathbb{F}) \diagup C_s \cong \big[\,\mathrm{Inn}(A)\,, \mathrm{Inn}(A)\,\big].$$

Розглянемо векторний простір нескінченних рядків $V = \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. Алгебра $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ діє на просторі V правими множеннями. Це дозволяє розглянути на $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ топологію Тихонова.

Нагадаємо, що топологічна група називається *топологічно простою*, якщо вона не містить власних замкнених нормальних підгруп.

Як і в підрозділі 6.1 має місце така теорема.

Теорема 7.3. *Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Тоді:*

1) *група* $\big[\,\mathrm{Inn}(A)\,, \mathrm{Inn}(A)\,\big]$ *є простою, а група* $[\,\mathrm{Aut}(A)\,, \mathrm{Aut}(A)\,]$ *є топологічно простою;*
2) *якщо для всіх $n \in \Omega\ (\mathbf{st}\ (A))$ у полі $\mathbb{F}$ існують корені n–го степеня з усіх його ненульових елементів, то група* $\mathrm{Inn}(A)$ *— проста, а група* $\mathrm{Aut}(A)$ *— топологічно проста.*

Елемент $a \in M_n(\mathbb{F})$ є *границею послідовності* $\{a_i \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}), i \geq 1\}$, якщо:

(1) для кожного елемента $v \in V$ послідовність $va_1, va_2, \ldots$ стабілізується, тобто знайдеться число $n = n(v)$ таке, що $va_n = va_{n+1} = \cdots$;

(2) для $n = n(v)$ та довільного елемента $v \in V$ виконується $va = va_n$.

Природно виникає наступне питання:

що можна сказати про замикання групи $SL_s^p(\mathbb{F})$?

Легко бачити, що кожне лінійне перетворення із замикання групи $GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ ін'єктивне. Тому $\overline{GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})}$ є напівгрупа з правим скороченням:

для довільних елементів $a, b, c \in \overline{GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})}$ якщо $ac = bc$, то $a = b$.

У теоремі 7.4 буде показано, що для довільного нескінченного числа Стейніца замикання групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ містить необоротні елементи. Далі міркування аналогічні міркуванням з підрозділу 6.4.

Означення 7.1. Нехай $g_1, g_2, \ldots$ — послідовність елементів з групи $GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$. Назвемо цю послідовність інтегровною, якщо для довільного елемента $v \in V$ підпростір, породжений множиною $vg_1 \cdots g_i$, $i \geq 1$, скінченно–вимірний.

Якщо послідовність $g_1, g_2, \ldots \in GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ збігається до Id, то послідовність $p_i = g_i \cdots g_1$, $i \geq 1$, збігається. Справді, якщо послідовність $g_1, g_2, \ldots$ збігається до Id, то для довільного елемента v знайдеться натуральне число $n = n(v) \geq 1$ таке, що

$$v = vg_n = vg_{n+1} = \cdots .$$

Тоді

$$vp_n = vp_{n+1} = \cdots .$$

Лема 7.3. *Припустимо, що послідовність $g_1, g_2, \ldots \in GL_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ збігається до* Id. *Тоді послідовність $p_1, p_2, \ldots$ збігається до оборотної матриці тоді й лише тоді, коли послідовність $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots$ інтегровна.*

Доведення. Припустимо, що лінійне перетворення

$$p = \lim_{i \to \infty} p_i$$

на просторі V сюр'єктивне. Позначимо символом V_n лінійну оболонку векторів

$$v_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots), \quad 1 \le i \le n.$$

Для кожного $n \ge 1$ знайдеться число $m \ge 1$ таке, що

$$V_m\, p \supseteq V_n.$$

Оскільки простір V_m скінченно–вимірний, то існує $k \ge 1$ таке, що для кожного елемента $v \in V_m$ маємо:

$$vp = vp_k = vp_{k+1} = \cdots .$$

Таким чином,

$$V_m\, g_i \ldots g_1 \supseteq V_n \quad \text{при} \quad i \ge k,$$

що еквівалентне зануренню

$$V_m \supseteq V_n\, g_1^{-1} \cdots g_i^{-1} \quad \text{для кожного} \quad i \ge k.$$

Ми довели, що послідовність $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots,$ інтегровна.

Припустимо тепер, що послідовність $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots$ інтегровна, і проведемо міркування у зворотному порядку. Для кожного натурального числа $n \ge 1$ знайдеться число $m \ge 1$ таке, що

$$V_m \supseteq V_n\, g_1^{-1} \cdots g_i^{-1} \quad \text{для кожного} \quad i \ge 1.$$

Це занурення еквівалентне зануренню

$$V_m\, p_i \supseteq V_n.$$

Тому перетворення p сюр'єктивне. Лема доведена. □

Теорема 7.4. *Для кожного нескінченного числа Стейніца s замикання групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ у групі $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ містить необоротні елементи.*

Доведення. Виберемо послідовність натуральних чисел

$$1 = n_0 < n_1 < \cdots \quad \text{таку, що} \quad n_i | n_{i+1}, \quad i \ge 1,$$

і таку, що s — найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \ldots$. Для матриці $a \in M_n(\mathbb{F})$ позначимо через $\widetilde{a}$ блочно–діагональну матрицю

$$\mathrm{diag}(a, a, \ldots) \ \in \ M_n^p(\mathbb{F}).$$

Символом Id позначатимемо одиничну $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матрицю. Як зазвичай, нехай $e_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$ — матричні одиниці.

Розглянемо матричні одиниці

$$e_{n_{i-1}, n_i} \ \in \ M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad i \geq 1,$$

і покладемо

$$g_i \ = \ \mathrm{Id} \ + \ \widetilde{e}_{n_{i-1}, n_i} \ \in \ SL^p_{n_i}(\mathbb{F}) \ \subset \ SL^p_s(\mathbb{F}), \quad i \geq 1.$$

Послідовність $\{g_i, i \geq 1\}$ очевидним чином збігається. Перевіримо, що послідовність

$$g_i^{-1} \ = \ \mathrm{Id} \ - \ \widetilde{e}_{n_{i-1}, n_i}, \quad i \geq 1,$$

не інтегровна. Справді,

$$v_1 \, g_1^{-1} \cdots g_i^{-1} \ = \ v_1 \ (\mathrm{Id} - \widetilde{e}_{1, n_1}) \ (\mathrm{Id} - \widetilde{e}_{n_1, n_2}) \cdots \ = \ v_1 - v_{n_1} + v_{n_2} - \cdots \pm v_{n_i}.$$

Звідси випливає, що підпростір, породжений елементами

$$v \, g_1^{-1} \cdots g_i^{-1}, \quad i \geq 1,$$

нескінченно–вимірний. Згідно з лемою 7.3 послідовність

$$p_i \ = \ g_i \cdots g_1 \ \in \ SL^p_s(\mathbb{F}), \quad i \geq 1,$$

збігається до несюр'єктивного лінійного перетворення. Теорема доведена. □

Наслідок 7.1. *Група $SL^p_s(\mathbb{F})$ не замкнена в $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ у топології Тихонова.*

Тепер наша мета довести аналог теореми Куроша ([84], теорема 10) для груп $SL^p_s(\mathbb{F})$.

Теорема 7.5. *Нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді група $SL^p_s(\mathbb{F})$ містить власну підгрупу H, яка ізоморфна групі $SL^p_s(\mathbb{F})$.*

Доведення. Раніше ми вже зазначали, що група $GL_s^p(\mathbb{F})$ є групою оборотних елементів унітальної локально матричної алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$. Згідно з теоремою Куроша ([84], теорема 10) існує власна підалгебра

$$1 \in A \ \subsetneqq \ M_s^p(\mathbb{F}),$$

яка ізоморфна алгебрі $M_s^p(\mathbb{F})$.

Група A^* оборотних елементів алгебри A ізоморфна групі $GL_s^p(\mathbb{F})$, а група $H = [\,A^*, A^*\,]$ ізоморфна групі $SL_s^p(\mathbb{F})$. При цьому

$$A^* \ \subseteq \ GL_s^p(\mathbb{F}), \quad H \ = \ [A^*, A^*] \ \subseteq \ SL_s^p(\mathbb{F}).$$

Якщо $H = SL_s^p(\mathbb{F})$, то $SL_s^p(\mathbb{F}) \subseteq A$. Звідси випливає, що $A = M_s^p(\mathbb{F})$, оскільки $SL_s^p(\mathbb{F})$ породжує алгебру $M_s^p(\mathbb{F})$ як векторний простір. Теорема доведена. □

Нехай A, B — кільця. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *антиізоморфізмом*, якщо:

(i) φ є ізоморфізмом адитивних груп кілець A та B,

(ii) для довільних елементів $a,\ b \in A$ виконується $\varphi(a, b) = \varphi(a)\varphi(b)$.

У цьому випадку кажуть, що кільця A та B *антиізоморфні.*

Нехай A — унітальна локально матрична алгебра. Спробуємо з'ясувати, якою мірою група A^* та її комутант $[A^*, A^*]$ визначають алгебру A.

Для цього ми доведемо таку теорему.

Теорема 7.6. *Нехай A та B — унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то кільця A та B ізоморфні або антиізоморфні. Більш того, для довільного ізоморфізму*

$$\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$$

або знайдеться ізоморфізм кілець $\theta_1 : A \to B$ такий, що φ є звуженням θ_1 на $[A^*, A^*]$, або знайдеться антиізоморфізм кілець $\theta_2 : A \to B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо

$$\varphi(g) \ = \ \theta_2\,(g^{-1}).$$

Якщо алгебри A та B зліченно–вимірні, то теорему 7.6 можна уточнити. У цьому випадку, не обмежуючи загальності, можна припустити, що $A =$

$M_s^p(\mathbb{F})$, де s — число Стейніца алгебри A. Алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ замкнена відносно транспонування

$$t : M_s^p(\mathbb{F}) \;\to\; M_s^p(\mathbb{F}),$$

яке є антиавтоморфізмом.

Теорема 7.7. *Припустимо, що A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то алгебри A та B ізоморфні. Більш того, довільний ізоморфізм*

$$\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$$

або продовжується до ізоморфізму кілець $A \longrightarrow B$, або знайдеться ізоморфізм кілець $\theta : A \longrightarrow B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо

$$\varphi(g) \;=\; \theta\Big(\; (g^{-1})^t \;\Big).$$

Доведення теорем 7.6 та 7.7 див. на стор. 256.

Лема 7.4. *Нехай A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри. Якщо A та B ізоморфні як кільця, то вони ізоморфні і як $\mathbb{F}$–алгебри.*

Доведення. Оскільки алгебра B зліченно–вимірна, то не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $B = M_s^p(\mathbb{F})$, де $s = \mathbf{st}\,(B)$. Довільний автоморфізм τ поля $\mathbb{F}$ піднімається до автоморфізму $\widetilde{\varphi}_\tau$ алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$:

$$\widetilde{\psi}_\tau : (a_{ij})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \;\mapsto\; \Big(\; \tau\,(a_{ij}) \Big)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}.$$

Підалгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ інваріантна відносно $\widetilde{\psi}_\tau$. Нехай ψ_τ — звуження автоморфізму $\widetilde{\psi}_\tau$ на $M_s^p(\mathbb{F})$. Очевидно, що $\tau \mapsto \psi_\tau$ є зануренням групи $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ у групу автоморфізмів кільця B.

Нехай $\theta : A \longrightarrow B$ — ізоморфізм кілець A та B. Тому θ переводить центр $\mathbb{F} \cdot 1_A$ алгебри A у центр $\mathbb{F} \cdot 1_B$ алгебри B. Тоді знайдеться автоморфізм τ поля $\mathbb{F}$ такий, що

$$\theta(\alpha \cdot 1_B) \;=\; \tau(\alpha) \cdot 1_B.$$

Композиція $\psi_{\tau^{-1}} \circ \theta$ є ізоморфізмом $\mathbb{F}$–алгебр A та B. Лема доведена. □

Наслідок 7.2. *Групи $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ та $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли числа Стейніца s_1 та s_2 однакові.*

При вивченні ізоморфізмів $A^* \to B^*$ виникає ще один тип гомоморфізмів — *центральні гомотетії.*

Означення 7.2. Під центральними гомотетіями ми маємо на увазі гомоморфізми

$$A^* \diagup [A^*, A^*] \;\to\; \mathbb{F}^*.$$

Теорема 7.8. *Для довільного ізоморфізму $\varphi : A^* \to B^*$ знайдеться центральна гомотетія*

$$\chi : A^* \diagup [A^*, A^*] \;\to\; \mathbb{F}^*$$

і або ізоморфізм кілець $\theta_1 : A \to B$ такий, що

$$\varphi(g) \;=\; \chi(g)\, \theta_1(g) \quad \text{для кожного елемента} \quad g \in A^*,$$

або антиізоморфізм кілець $\theta_2 : A \to B$ такий, що

$$\varphi(g) \;=\; \chi(g)\, \theta_2(g^{-1}) \quad \text{для кожного елемента} \quad g \in A^*.$$

Якщо алгебра A зліченно–вимірна і $A = M_s^p(\mathbb{F})$, де s — число Стейніца, то згідно з лемою 7.2

$$A^* \diagup [A^*, A^*] \;\cong\; D_s^p \diagup \overline{D}_s^p.$$

Теорема 7.9. *Припустимо, що A та B — унітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри. Тоді для довільного ізоморфізму $\varphi : A^* \to B^*$ знайдеться центральна гомотетія*

$$\chi :\; D_s^p \diagup \overline{D}_s^p \;\to\; \mathbb{F}^*,$$

де $s = \mathbf{st}\,(A)$, та ізоморфізм кілець $\theta : A \to B$ такі, що або

$$\varphi(g) \;=\; \chi(g)\, \theta(g) \quad \text{для кожного елемента} \quad g \in A^*,$$

або

$$\varphi(g) \;=\; \chi(g)\, \theta\big((g^{-1})^t\big) \quad \text{для кожного елемента} \quad g \in A^*.$$

Доведення теорем 7.8 та 7.9 див. на стор. 257.

Пояснимо, звідки беруться центральні гомотетії. Припустимо, що для довільного дільника n числа Стейніца s знайдеться гомоморфізм $\mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*$, $a \mapsto a^{1/n}$, такий що

(i) $\left(a^{1/n}\right)^n = a$ для довільного $a \in P^*$,

(ii) якщо $m|n$, де $m, n \in \Omega\ (s)$, $n = m \cdot k$, то

$$a^{1/n} \; = \; \left(a^{1/m}\right)^{1/k} \quad \text{для довільного} \quad a \in \mathbb{F}^*.$$

Наприклад, якщо $\mathbb{F}^* = \mathbb{R}$ — поле дійсних чисел і $2 \nmid s$, то відображення $a \mapsto a^{1/n}$, n — непарне, однозначно визначене і задовольняє умови (i), (ii). У цьому випадку має сенс говорити про відносний визначник $\det_r(a)$ елемента $a \in A$. Справді, знайдеться матрична підалгебра $M_n(\mathbb{F}) \subset A$ така, що $1,\ a \in M_n(\mathbb{F})$. Позначимо через $\det_{M_n(\mathbb{F})}(a)$ визначник матриці a в $M_n(\mathbb{F})$. Тоді

$$\det_r(a) \; = \; \left(\det_{M_n(\mathbb{F})}(a)\right)^{1/n}$$

не залежить від вибору підалгебри $M_n(\mathbb{F})$. Якщо $M_m(\mathbb{F})$ інша матрична підалгебра і $M_n(\mathbb{F}) \subset M_m(\mathbb{F})$, то $M_n(\mathbb{F})$ занурюється в $M_m(\mathbb{F})$ діагонально, тобто $n|m$, $m = n \cdot k$. У цьому випадку

$$\det_{M_m(\mathbb{F})}(a) \; = \; \left(\det_{M_n(\mathbb{F})}(a)\right)^k.$$

Тому

$$\left(\det_{M_m(\mathbb{F})}(a)\right)^{1/m} \; = \; \left(\det_{M_n(\mathbb{F})}(a)\right)^{1/n}.$$

Відображення $A^* \longrightarrow \mathbb{F}^*$, $a \mapsto \det_r(a)$, є гомоморфізмом, причому $[A^*, A^*] \longrightarrow 1$. Таким чином,

$$A^* \;/\; [A^*, A^*] \;\to\; \mathbb{F}^*$$

є центральною гомотетією.

Не обмежуючи загальності будемо вважати алгебри A та B нескінченно–вимірними. Ізоморфізми груп $SL_n(\mathbb{F})$ і $GL_n(\mathbb{F})$ добре відомі (див. [113]). Тоді існують матричні підалгебри $1 \in M_n(\mathbb{F}) \subset A$, $1 \in M_m(\mathbb{F}) \subset B$, $m,\ n \geq 4$. Згідно з теоремою Веддербарна (див. підрозділ 3.2) маємо: $A \cong M_n(A')$, $B \cong M_m(B')$, де A' і B' — централізатори підалгебр $M_n(\mathbb{F})$ та $M_m(\mathbb{F})$ в алгебрах A і B відповідно.

Нагадаємо (див., наприклад, [63] або [113]), що для довільної асоціативної $\mathbb{F}$–алгебри R, яка містить одиницю 1, і натурального числа $k \geq 2$ елементарна лінійна група $E_k(R)$ визначається як група, породжена трансвекціями (або елементарними матрицями) вигляду

$$t_{ij}(a) \; = \; I_k \; + \; e_{ij}(a),$$

де I_k — одинична $(k\times k)$–матриця, $1 \le i \ne j \le k$, $a \in R$, а $e_{ij}(a)$ є $(k\times k)$–матрицею, яка має елемент a на перетині i-го рядка та j-го стовпчика і нулі на усіх інших місцях.

Якщо R — поле, то $E_k(R) = SL_k(R)$.

Лема 7.5. *Комутант* $[A^*, A^*]$ *збігається з лінійною групою* $E_n(A')$.

Доведення. Розглянемо довільну трансвекцію $t_{ij}(a)$, $1 \le i \ne j \le n$, $a \in A'$. Тоді існує число $1 \le r \le n$, відмінне від i та від j. Матимемо: $t_{ij}(a) \ = \ \big[\, t_{ir}(1),\ t_{rj}(a)\,\big]$, звідки випливає, що $E(A') \subseteq [A^*, A^*]$.

Тепер припустимо, що $g \in [A^*, A^*]$. Знайдеться підалгебра

$$M_q(\mathbb{F}) \ \subset \ A \quad \text{така, що} \quad M_n(\mathbb{F}) \ \subset \ M_q(\mathbb{F}), \quad g \in M_q(\mathbb{F}).$$

Нехай $k = q/n$, $k \in \mathbb{N}$. Елемент g належить $SL_q(\mathbb{F}) = E_q(\mathbb{F})$. Розглянемо трансвекцію $t_{ij}(\alpha)$ алгебри $M_q(\mathbb{F})$, $1 \le i \ne j \le q$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Алгебра $M_n(\mathbb{F})$ занурюється в алгебру $M_q(\mathbb{F})$ діагонально. Образом матричної одиниці $e_{ii} \in M_n(\mathbb{F})$ є блочно–діагональна матриця

$$\overline{e}_i \ = \ \operatorname{diag}\big(\, e_{ii}(1),\, e_{ii}(1),\, \ldots,\, e_{ii}(1)\,\big).$$

Алгебру $M_q(\mathbb{F})$ можна ототожнити з алгеброю матриць

$$M_n\big(\, M_k(\mathbb{F})\,\big), \quad \text{де} \quad M_k(\mathbb{F}) \ = \ A' \bigcap M_q(\mathbb{F})$$

є централізатором підалгебри $M_n(\mathbb{F})$ в $M_q(\mathbb{F})$.

Знайдемо цілі числа $l,\ r \in \mathbb{Z}$, такі що

$$(l-1)\,n \ < \ i \ \le \ l\,n, \quad (r-1)\,n \ < \ j \ \le \ r\,n.$$

Нехай $\overline{i} = i - (l-1)\,n$, $\overline{j} = j - (r-1)\,n$. Тоді

$$e_{ij}(\alpha) \ = \ e_{\overline{i}} \ \cdot \ e_{ij}(\alpha) \ \cdot \ e_{\overline{j}}.$$

Якщо $i - j$ не ділиться на n, то $\overline{i} \ne \overline{j}$ і, отже, елемент $t_{ij}(\alpha)$ є трансвекцією алгебри $M_n(M_k(\mathbb{F}))$.

Якщо $i - j$ ділиться на n, то знайдеться число $1 \le l \le q$, таке що $i - l$ не ділиться на n. У цьому випадку

$$t_{ij}(\alpha) \ = \ \big[\, t_{il}(1),\ t_{lj}(\alpha)\,\big].$$

В обох випадках маємо: $t_{ij}(\alpha) \in E_n(A')$. Позаяк група $SL_q(\mathbb{F}) = E_q(\mathbb{F})$ породжена трансвекціями, то

$$SL_q(\mathbb{F}) \subseteq E_n(A') \quad \text{і} \quad g \in E_n(A').$$

Лема доведена. □

І.З. Голубчик і А.В. Михальов [61] та Ю.І. Зельманов [112] описали ізоморфізми елементарних лінійних груп над кільцями.

Теорема 7.10 ([61, 112]). *Нехай натуральні числа m та n такі, що $m, n \geq 4$, і нехай R, S — кільця. Нехай також $\varphi : E_n(R) \longrightarrow E_m(S)$ — ізоморфізм елементарних лінійних груп. Тоді знайдуться центральні ідемпотенти e, f у матричних кільцях $M_n(R)$ та $M_m(S)$ відповідно,*

$$\textit{ізоморфізм} \quad \theta_1 : \ eM_n(R) \ \rightarrow \ fM_m(S)$$

$$\textit{і антиізоморфізм} \quad \theta_2 : \ (1-e)M_n(R) \ \rightarrow \ (1-f)M_m(S)$$

такі, що

$$\varphi(g) \ = \ \theta_1(eg) \ + \ \theta_2\big(\,(1-e)g^{-1}\,\big) \quad \textit{для всіх елементів} \quad g \in E_n(R).$$

Разом з елементарними лінійними групами $E_n(R)$ розглянемо також групу $GE_n(R)$, яка породжена $E_n(R)$ й усіма оборотними діагональними $(n \times n)$–матрицями з R.

Теорема 7.11 ([61, 112]). *Розглянемо натуральні числа m та n такі, що $m, n \geq 4$, і нехай R, S кільця. Нехай також $\varphi : GE_n(R) \rightarrow GE_m(S)$ — ізоморфізм. Тоді знайдуться центральні ідемпотенти e, f у матричних кільцях $M_n(R)$ та $M_m(S)$ відповідно,*

$$\textit{ізоморфізм} \quad \theta_1 : \ eM_n(R) \ \rightarrow \ fM_m(S)$$

$$\textit{і антиізоморфізм} \quad \theta_2 : \ (1-e)M_n(R) \ \rightarrow \ (1-f)M_m(S)$$

та гомоморфізм

$$\chi : \ GE_n(R) \ \rightarrow \ Z\big(GE_m(S)\big)$$

у центр групи $GE_m(S)$ такі, що

$$\varphi(g) \ = \ \chi(g)\,\big(\,\theta_1(eg) \ + \ \theta_2\big(\,(1-e)g^{-1}\,\big)\,\big) \quad \textit{для всіх елементів} \quad g \in GE_n(R).$$

Доведення теореми 7.6. Припустимо, що A і B — унітальні локально матричні алгебри. Нехай $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ — ізоморфізм. Як і раніше, ми припускаємо, що алгебри A, B — нескінченно–вимірні (випадок матричних алгебр добре відомий [113]). Виберемо натуральні числа $n \in \Omega\left(\mathbf{st}(A)\right)$, $n \geq 4$, та $m \in \Omega\left(\mathbf{st}(B)\right)$, $m \geq 4$. Тоді згідно з теоремою Веддербарна алгебри A, B можна ототожнити з матричними алгебрами $M_n(A')$ і $M_m(B')$, де A', B' — централізатори підалгебр $M_n(A)$ і $M_m(B)$ в алгебрах A і B відповідно. Згідно з лемою 7.5

$$[A^*, A^*] = E_n(A'), \quad [B^*, B^*] = E_m(B'), \quad \varphi : E_n(A') \to E_m(B')$$

— ізоморфізм.

Оскільки алгебри A, B — прості, то єдиними їх центральними ідемпотентами є 0 та 1.

Згідно з теоремою 7.10 Голубчика–Михальова–Зельманова або знайдеться ізоморфізм $\theta_1 : A \to B$ такий, що $\varphi(g) = \theta_1(g)$ для кожного $g \in [A^*, A^*]$, або знайдеться антиізоморфізм $\theta_2 : A \to B$ такий, що $\varphi(g) = \theta_2(g^{-1})$ для кожного $g \in [A^*, A^*]$. Теорема 7.6 доведена. □

Доведення теореми 7.7. Нехай A і B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри. Нехай $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ — ізоморфізм. Ми вже відмічали раніше, що алгебру A можна ототожнити з алгеброю $M_s^p(\mathbb{F})$, де $s = \mathbf{st}(A)$, і що алгебра $A = M_s^p(\mathbb{F})$ інваріантна відносно антиавтоморфізму транспонування t.

Якщо $\theta : A \to B$ — антиізоморфізм, то відображення $\theta' : A \to B$, $\theta'(a) = \theta(a^t)$ є ізоморфізмом. Тоді $\theta(g^{-1}) = \theta'\big((g^{-1})^t\big)$. Теорема 7.7 доведена. □

Наслідок 7.3. *Групи $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ і $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й лише тоді, коли числа Стейніца s_1 і s_2 однакові.*

Доведення. Ми маємо

$$SL_{s_i}^p(\mathbb{F}) = \left[\left(M_{s_i}^p(\mathbb{F})\right)^*, \left(M_{s_i}^p(\mathbb{F})\right)^*\right], \quad i = 1,\ 2.$$

Згідно з теоремою 7.7 і лемою 7.4 ізоморфізм груп $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ і $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ тягне за собою ізоморфізм алгебр $M_{s_1}^p(\mathbb{F})$ і $M_{s_2}^p(\mathbb{F})$. Згідно з теоремою Глімма 3.8 звідси випливає, що $s_1 = s_2$. Наслідок доведено. □

Розглянемо нескінченно–вимірну унітальну локально матричну алгебру A. Нехай $1 \in M_n(\mathbb{F}) \subset A$, $n \geq 4$. Як і раніше, ми ототожнимо алгебру A з алгеброю матриць $M_n(A')$, де A' — централізатор підалгебри $M_n(\mathbb{F})$ в A.

Для доведення теореми 7.8 нам знадобиться така лема.

Лема 7.6. $A^* = GE_n(A')$.

Доведення. Нехай $g \in A^*$. Існує матрична підалгебра $M_q(\mathbb{F}) \subset A$ така, що

$$M_n(\mathbb{F}) \ \subset \ M_q(\mathbb{F}) \quad \text{і} \quad g \in M_q(\mathbb{F}).$$

Тоді $g \in \left(M_q(\mathbb{F}) \right)^* = GL_q(\mathbb{F})$. Відомо (див. [63, 113]), що група $GL_q(\mathbb{F})$ породжується трансвекціями і діагональними матрицями

$$d_{11}(\alpha) \ = \ \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha, 1, 1, \ldots, 1}_{q}), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{F}.$$

Як при доведенні леми 7.5 розглянемо матричні одиниці $e_{ii}(1)$, $1 \leq i \leq n$, алгебри $M_n(\mathbb{F})$. Вони занурюються в алгебру $M_q(\mathbb{F})$ як ідемпотенти

$$\overline{e}_i \ = \ \mathrm{diag}\ (\underbrace{e_{ii}(1), e_{ii}(1), \ldots, e_{ii}(1)}_{q/n}).$$

Маємо:

$$d_{11}(\alpha) \ = \ \overline{e}_1 \, d_{11}(\alpha) \, \overline{e}_1,$$

тобто $d_{11}(\alpha)$ — оборотна діагональна матриця з $M_n\big(A' \bigcap M_q(\mathbb{F}) \big)$. Отже, $d_{11}(\alpha) \in GE_n(A')$. Ми показали, що

$$GL_q(\mathbb{F}) \ \subset \ GE_n(A') \quad \text{і} \quad g \in GE_n(A').$$

Лема доведена.

Тепер теорема 7.8 одразу ж випливатиме з леми 7.6, теореми 7.11 Голубчика–Михальова–Зельманова та з простоти локально матричних алгебр A та B. □

Теорема 7.9 випливає з теореми 7.8, леми 7.2 і того факту, що зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра $A \cong M_s^p(\mathbb{F})$, $s = \mathbf{st}(A)$, інваріантна відносно транспонування t.

Наступна теорема дає опис автоморфізмів групи $SL_s^p(\mathbb{F})$, де s — нескінченне число Стейніца. Позначимо символом H циклічну групу порядку 2, яка породжується автоморфізмом $g \mapsto (g^{-1})^t$, $g \in SL_s^p(\mathbb{F})$.

Нагадаємо, що мова про алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$ йшла у підрозділі 6.4.

Теорема 7.12. *Нехай* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\,(M_s^p(\mathbb{F}))$ *— група автоморфізмів алгебри* $M_s^p(\mathbb{F})$. *Тоді*

$$\mathrm{Aut}\, SL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; H \cdot \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right) \cdot \mathrm{Aut}(\mathbb{F}).$$

Доведення. Позначимо через $\mathrm{Aut}_{ring}\,(M_s^p(\mathbb{F}))$ групу автоморфізмів кільця $M_s^p(\mathbb{F})$. Позначимо також символом ψ автоморфізм $g \mapsto (g^{-1})^t$ групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ і нехай $H = \{Id, \psi\}$. Тоді

$$\mathrm{Aut}\left(SL_s^p(\mathbb{F})\right) \;=\; H \cdot \mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right).$$

Справді, нехай

$$\varphi \;\in\; \mathrm{Aut}\left(SL_s^p(\mathbb{F})\right).$$

За теоремою 7.7 або φ піднімається до автоморфізму кільця $M_s^p(\mathbb{F})$ і в цьому випадку

$$\varphi \;\in\; \mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right),$$

або знайдеться автоморфізм

$$\theta \in \mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right)$$

такий, що $\varphi(g) = \theta\big((g^{-1})^t\big)$ для кожного елемента $g \in SL_s^p(\mathbb{F})$, і в цьому випадку

$$\varphi \;=\; \psi\,\theta \;\in\; H \;\cdot\; \mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right).$$

Покажемо, що

$$\mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right) \;=\; \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right) \cdot \mathrm{Aut}\,(\mathbb{F}).$$

При доведенні леми 7.4 ми зазначили, що довільний автоморфізм τ поля $\mathbb{F}$ продовжується до автоморфізму $\widetilde{\varphi}_\tau$ кільця $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$, а отже, продовжується до автоморфізму $\widetilde{\varphi}_\tau$ кільця $M_s^p(\mathbb{F})$. При цьому відображення $\tau \mapsto \widetilde{\varphi}_\tau$ є зануренням групи $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{F})$ в групу $\mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right)$. Якщо φ — автоморфізм кільця $M_s^p(\mathbb{F})$, то його звуження на центр $\mathbb{F}\cdot\mathrm{Id}$ є автоморфізмом поля $\mathbb{F}$. Розглянемо автоморфізм

$$\widetilde{\varphi\big|_{\mathbb{F}\cdot\mathrm{Id}}} \;\in\; \widetilde{\mathrm{Aut}\,(\mathbb{F})} \;\subset\; \mathrm{Aut}_{ring}\left(M_s^p(\mathbb{F})\right).$$

Очевидно, що

$$\left(\varphi \cdot \widetilde{\varphi} \Big|_{\mathbb{F}\cdot \mathrm{Id}} \right)^{-1}$$

тотожно діє на $\mathbb{F} \cdot \mathrm{Id}$ і тому є автоморфізмом алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$. Тим самим ми показали, що

$$\varphi \;=\; \left(\left(\varphi \cdot \widetilde{\varphi} \Big|_{\mathbb{F}\cdot \mathrm{Id}} \right)^{-1} \left(\widetilde{\varphi} \Big|_{\mathbb{F}\cdot \mathrm{Id}} \right)^{-1} \;\in\; \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} \left(M_s^p(\mathbb{F}) \right) \cdot \widetilde{\mathrm{Aut}\,(\mathbb{F})}.$$

Ототожнюючи $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{F})$ і $\widetilde{\mathrm{Aut}\,(\mathbb{F})}$, ми отримаємо твердження теореми. □

Означення 7.3. Припустимо, що n, m — натуральні числа, $n|m$, $m = n \cdot k$. Занурення φ групи $SL_n(\mathbb{F})$ в групу $SL_m(\mathbb{F})$ назвемо діагональним, якщо знайдеться елемент $g \in GL_m(\mathbb{F})$ такий, що

$$\varphi(a) = g^{-1} \cdot diag\,(a, a, \ldots, a) \cdot g.$$

Аналогічно визначається діагональне занурення групи $GL_n(\mathbb{F})$ у групу $GL_m(\mathbb{F})$ і алгебри $M_n(\mathbb{F})$ в алгебру $M_m(\mathbb{F})$.

Означення 7.4. Нехай I — частково впорядкована множина, в якій для довільних двох елементів $i,\ j \in I$ знайдеться елемент $k \in I$ такий, що $i \leq k,\ j \leq k$. По аналогії з *[22]* називатимемо групу G локально $SL-$групою, якщо існує система підгруп $H_i \subseteq G$, $i \in I$, яка задовольняє такі умови:

1) якщо $i \leq j$, то $H_i \subseteq H_j$;
2) $\bigcup_{i\in I} H_i \;=\; G$;
3) для кожного $i \in I$ існує ізоморфізм

$$u_i : H_i \longrightarrow SL_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \in \mathbb{N};$$

4) якщо $i \leq j$, то

$$\varphi_{ij} \;=\; u_i^{-1}\, \pi_{ij}\, u_j \,:\; SL_{n_i}(\mathbb{F}) \;\longrightarrow\; SL_{n_j}(\mathbb{F})$$

є діагональним зануренням.

Аналогічно визначається *локально $GL-$група.*

Далі имволом $\mathrm{id}_{ij} : H_i \longrightarrow H_j$ позначатимемо гомоморфізм занурення.

Лема 7.7. *Локально $SL-$група (відповідно $GL-$група) G є прямою границею груп $SL_{n_i}(\mathbb{F})$ (відповідно $GL_{n_i}(\mathbb{F})$) із зануреннями*

$$\varphi_{ij} \;=\; u_i^{-1}\, \pi_{ij}\, u_j, \quad i,\ j \in I, \quad i \leq j.$$

Доведення. Очевидно, що $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{ii}$. Далі, для індексів i, j, $k \in I$, таких що $i \le j \le k$, маємо:

$$\varphi_{ij}\,\varphi_{jk} \;=\; \left(u_i^{-1}\,\pi_{ij}\,u_j\right)\left(u_j^{-1}\,\pi_{jk}\,u_k\right) \;=\; u_i^{-1}\,\pi_{ij}\,\pi_{jk}\,u_k \;=\; u_i^{-1}\,\pi_{ik}\,u_k \;=\; \varphi_{ik}.$$

Таким чином, система гомоморфізмів φ_{ij} задовольняє умови для існування прямої границі груп. Легко бачити, що ця границя ізоморфна групі G. Лема доведена. □

Приклад 7.1. Нехай A — унітальна локально матрична алгебра. Тоді її група оборотних елементів A^* є локально GL–групою, а група $[A^*, A^*]$ є локально SL–групою.

Справді, нехай I — множина всіх підалгебр $B \subset A$, які містять 1 і ізоморфні матричній алгебрі, $u_B : M_{n(B)}(\mathbb{F}) \to B$ — відповідний ізоморфізм, $n(B) \in \mathbb{N}$. Множина I частково впорядкована відносно занурення. Легко бачити, що для двох підалгебр B, $B' \in I$, $B \subseteq B'$, занурення

$$u_B\,\pi_{B,B'}\,u_{B'}^{-1} \;:\; M_{n(B)}(\mathbb{F}) \;\to\; M_{n(B')}(\mathbb{F})$$

діагональні. Звуження діагонального занурення алгебр на групи оборотних елементів дає нам діагональне занурення

$$GL_{n(B)}(\mathbb{F}) \;\to\; GL_{n(B')}(\mathbb{F})$$

і діагональне занурення

$$SL_{n(B)}(\mathbb{F}) \;\to\; SL_{n(B')}(\mathbb{F}).$$

Теорема 7.13. *Для довільної локально SL–групи (відповідно GL–групи) G знайдеться єдина (з точністю до ізоморфізму) локально матрична алгебра A така, що $G \cong [A^*, A^*]$ (відповідно така, що $G \cong A^*$).*

Доведення. Припустимо, що G — локально SL–група, $\{H_i\}_{i\in I}$ — відповідна локальна система підгруп, $u_i : H_i \to SL_{n_i}(\mathbb{F})$ — ізоморфізми і якщо $i \le j$, то занурення $u_i^{-1}\,\pi_{ij}\,u_j$ діагональні.

Кожне діагональне занурення $SL_n(\mathbb{F}) \to SL_m(\mathbb{F})$ єдиним чином продовжується до діагонального занурення матричних алгебр $M_n(\mathbb{F}) \to M_m(\mathbb{F})$. Нехай

$$\varphi_{ij} :\; M_{n_i}(\mathbb{F}) \;\to\; M_{n_j}(\mathbb{F})$$

— діагональне продовження гомоморфізму $u_i^{-1}\,\pi_{ij}\,u_j$ груп. Як було показано при доведенні леми 7.7, $\varphi_{ij}\,\varphi_{jk}$ і φ_{ik} збігаються на $SL_{n_i}(\mathbb{F})$. Отже,

$$\varphi_{ij}\,\varphi_{jk} \;=\; \varphi_{ik}.$$

Система алгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$ і гомоморфізмів φ_{ij} задовольняє умови для існування прямої границі (див. підрозділ 2.1).

Пряма границя системи матричних алгебр (за умови, що гомоморфізми φ_{ij} відображають одиницю в одиницю) є унітальною локально матричною алгеброю. Позначимо пряму границю системи

$$\Big(\, M_{n_i}(\mathbb{F}),\; \varphi_{ij}\,;\;\; i,\; j \in I,\; i \leq j \,\Big)$$

через A. У цьому випадку $[A^*, A^*]$ (відповідно A^*) є прямою границею груп $SL_{n_i}(\mathbb{F})$ (відповідно $GL_{n_i}(\mathbb{F})$) і гомоморфізмів $u_i^{-1}\,\pi_{ij}\,u_j$. Згідно з лемою 7.7 маємо $[A^*, A^*] \cong G$ (відповідно $A^* \cong G$).

Для доведення єдиності алгебри A достатньо зіслатися на теорему 7.7. Тим самим теорема 7.13 доведена. $\square$

Означення 7.5. Нехай G — локально SL−група (відповідно GL−група) і нехай

$$\Big\{\, H_i,\;\; u_i \,:\; H_i \;\rightarrow\; SL_{n_i}(\mathbb{F}),\; i \in I \,\Big\}$$

— відповідна локальна система підгруп. Тоді найменше спільне кратне чисел n_i, $i \in I$, називається числом Стейніца $\mathbf{st}(G)$ групи G.

Легко бачити, що для довільної унітальної локально матричної алгебри A ми маємо

$$\mathbf{st}\;(A) \;=\; \mathbf{st}\;(A^*) \;=\; \mathbf{st}\;\big(\,[A^*,\, A^*]\,\big).$$

Із теореми 7.13 і теореми Глімма 3.8 одразу отримуємо таку теорему.

Теорема 7.14. *Якщо G — зліченна локально SL−група (відповідно локально GL−група), то $G \cong SL_s^p(\mathbb{F})$ (відповідно $G \cong GL_s^p(\mathbb{F})$), де $s = \mathbf{st}(G)$.*

З результатів підрозділу 2.3 і теореми 7.13 випливає наслідок.

Наслідок 7.4. *Існують незліченні неізоморфні локально SL−групи G_1, G_2 такі, що*

$$|G_1| \;=\; |G_2| \quad i \quad \mathbf{st}\;(G_1) \;=\; \mathbf{st}\;(G_2).$$

Висновки до розділу 7

У цьому розділі вивчалися нескінченні періодичні матриці. Основними результатами розділу є:

- Показано, що для довільного числа Стейніца s множина $M_s^p(\mathbb{F})$ нескінченних періодичних блочно–діагональних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$ з періодом, який ділить число Стейніца s, є локально матричною унітальною зліченно–вимірною алгеброю з числом Стейніца s. Група $GL_s^p(\mathbb{F})$ оборотних елементів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$ і її комутант $SL_s^p(\mathbb{F}) = [GL_s^p(\mathbb{F}), GL_s^p(\mathbb{F})]$ є локально $GL-$ і локально $SL-$групами відповідно.
- Доведено, що для довільного числа Стейніца s центр C_s групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ складається зі скалярних матриць, які містять корені $n-$го степеня з одиниці на діагоналі, де n є довільним натуральним числом, яке ділить число Стейніца s.
- Показано, що якщо s — нескінченне число Стейніца, то спеціальна проективна лінійна група $PSL_s^p(\mathbb{F})$, яка є фактор–групою групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ за її центром C_s, є простою. Також доведено, що якщо для довільного натурального дільника n числа Стейніца s у полі $\mathbb{F}$ існують корені $n-$го степеня, то група $PGL_s^p(\mathbb{F})$, яка є фактор–групою групи $GL_s^p(\mathbb{F})$ за центром C_s, ізоморфна групі $PSL_s^p(\mathbb{F})$.
- Доведено, що для унітальних локально матричних алгебр A і B та їх груп оборотних елементів A^* і B^* відповідно з того, що комутанти $[A^*, A^*]$ і $[B^*, B^*]$ ізоморфні, випливає, що кільця A і B або ізоморфні, або антиізоморфні. Більш того, показано, що довільний ізоморфізм φ комутантів $[A^*, A^*]$ і $[B^*, B^*]$ або продовжується до ізоморфізму кілець A і B, або знайдеться антиізоморфізм θ цих кілець такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ дія ізоморфізму φ на цей елемент g збігається з дією антиізоморфізму θ на елемент, обернений до g.
- Доведено, що коли унітальна локально матрична алгебра зліченно–вимірна, то вона ізоморфна для деякого числа Стейніца s алгебрі $M_s^p(\mathbb{F})$ нескінченних періодичних блочно–діагональних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$ з періодом, який ділить число s. У цьому випадку алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є алгеброю з інволюцією транспонування $t : M_s^p(\mathbb{F}) \to M_s^p(\mathbb{F})$.

- Доведено, що коли A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри і комутанти $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ груп оборотних елементів ізоморфні, то алгебри A та B також ізоморфні. Більш того, для кожного ізоморфізму φ комутантів $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ знайдеться ізоморфізм θ кілець A та B, який або продовжує ізоморфізм φ, або для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ дія ізоморфізму φ на цей елемент g збігається з дією антиізоморфізму θ на елемент $(g^{-1})^t$.
- Показано, що групи $SL^p_{s_1}(\mathbb{F})$ та $SL^p_{s_2}(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли числа Стейніца s_1 та s_2 рівні.
- Доведено, що група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\big(SL^p_s(\mathbb{F})\big)$ алгебри $SL^p_s(\mathbb{F})$ ізоморфна добуткові циклічної групи порядку 2, породженої автоморфізмом групи $SL^p_s(\mathbb{F})$, який кожен елемент g цієї групи переводить в $(g^{-1})^t$, групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M^p_s(\mathbb{F})\big)$ алгебри $M^p_s(\mathbb{F})$ та групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ поля $\mathbb{F}$.

Розділ 8

Диференціювання алгебр нескінченних матриць

У цьому розділі ми вивчаємо диференціювання найбільш популярних алгебр нескінченних матриць. Перша з них — зліченно–вимірна алгебра $M_\infty(\mathbb{F})$, яку ми обговорювали при доведенні теореми 4.2 і в лемі 4.17. Інша — алгебра лінійних перетворень скінченного рангу зліченно–вимірного векторного простору. Отримані результати застосовуються для опису диференціювань:

(1) алгебри $M_{rcf}(\mathbb{F})$ усіх $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць, які мають скінченну кількість ненульових елементів у кожному стовпчику і в кожному рядку,

(2) алгебри матриць Якобі.

Ми вивчаємо також диференціювання відповідних алгебр Лі. Результати цього розділу опубліковано в [24].

8.1 Асоціативні алгебри нескінченних матриць

Нагадаємо, що через $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ ми позначаємо алгебру усіх $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченне число ненульових елементів у кожному стовпчику. Також нагадаємо, що $M_{rcf}(\mathbb{F})$ — підалгебра алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$, а $M_\infty(\mathbb{F})$ — ідеал алгебри $M_{rcf}(\mathbb{F})$. Для елемента $a \in M_{rcf}(\mathbb{F})$ позначимо символом $\mathrm{ad}\,(a)$

оператор комутування

$$\mathrm{ad}\,(a)\ :\ M_{rcf}(\mathbb{F}) \to M_{rcf}(\mathbb{F}),$$

а через

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(\mathbb{F})}\ (a)$$

— його звуження на ідеал $M_\infty(\mathbb{F})$.

Теорема 8.1. *Кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд*

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \textit{де} \quad a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

Нагадаємо, що для довільних множин X, Y множину відображень $X \to Y$ можна ототожнити з декартовим добутком $|X|$ копій множин Y (тут $|X|$, як і раніше, означає потужність множини X). На множині Y задамо дискретну тополоґнію. Тоді на множині

$$\mathrm{Map}\ (X, Y) \quad \text{усіх відображень} \quad X \to Y$$

можна визначити топологію Тихонова.

Лема 8.1. *Нехай*

$$x^{(k)}\ =\ \left(\, x_{ij}^{(k)}\, \right)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \quad k \geq 1,$$

— послідовність елементів з $\mathbb{F}$–алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$. Припустимо, що послідовність операторів

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(\mathbb{F})}\left(x^{(k)}\right)\ \in\ \mathrm{Map}\left(\, M_\infty(\mathbb{F}),\ M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})\, \right)$$

збігається в топології Тихонова при $k \to \infty$. Тоді для кожного натурального числа n знайдеться натуральне число N_n таке, що:

$$x_{ij}^{(N_n)}\ =\ x_{ij}^{(N_n+1)}\ =\ \cdots,$$

$$\textit{якщо} \quad 1 \leq i \leq n, \quad j > n, \quad \textit{або якщо} \quad i > n, \quad 1 \leq j \leq n,$$

а також

$$x_{jj}^{(N_n)}\ -\ x_{ii}^{(N_n)}\ =\ x_{jj}^{(N_n+1)}\ -\ x_{ii}^{(N_n+1)}\ = \cdots,$$

якщо $1 \leq i,\ j \leq n$.

Доведення. Збіжність у топології Тихонова означає, що для кожного натурального числа n знайдеться натуральне число N_n таке, що для кожної матриці

$$[a] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in M_n(\mathbb{F})$$

матимемо:

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(\mathbb{F})}\left(x^{(N_n)}\right)[a] = \mathrm{ad}_{M_\infty(\mathbb{F})}\left(x^{(N_n+1)}\right)[a] = \cdots .$$

Розіб'ємо матрицю $x^{(k)}$ на блоки:

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)}(1,1) & x^{(k)}(1,2) \\ x^{(k)}(2,1) & x^{(k)}(2,2) \end{pmatrix},$$

де

$$x^{(k)}(1,1) \in M_n(\mathbb{F}), \quad x^{(k)}(1,2) \in M_{n,\infty}(\mathbb{F}),$$
$$x^{(k)}(2,1) \in M_{\infty,n}(\mathbb{F}), \quad x^{(k)}(2,2) \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}).$$

Тоді матриця

$$\left[\, x^{(k)},\ [a]\,\right] = \begin{pmatrix} \left[\, x^{(k)}(1,1),\ a\,\right] & -a\, x^{(k)}(1,2) \\ x^{(k)}(2,1)\, a & 0 \end{pmatrix}$$

не залежить від вибору k при $k \geq N_n$.

Зокрема, вибравши одиничну $(n \times n)$−матрицю в ролі матриці a, ми отримаємо

$$x^{(N_n)}(1,2) = x^{(N_n+1)}(1,2) = \cdots$$

та

$$x^{(N_n)}(2,1) = x^{(N_n+1)}(2,1) = \cdots .$$

Матриці

$$x^{(N_n)}(1,1), \quad x^{(N_n+1)}(1,1), \quad \ldots$$

відрізняються одна від одної скалярними матрицями. Лема 8.1 доведена. □

Доведемо тепер саму теорему 8.1.

Доведення теореми 8.1. Нехай d — диференціювання алгебри $M_\infty(\mathbb{F})$. Згідно з теоремою 6.1 знайдуться елементи

$$x^{(k)} \in M_\infty(\mathbb{F})$$

такі, що

$$d \;=\; \lim_{k\to\infty}\; \mathrm{ad}_{M_\infty(\mathbb{F})}\,(x^{(k)})$$

у топології Тихонова. Згідно з лемою 8.1 для довільних $i \neq j,\ i,\ j \in \mathbb{N}$,

послідовність $x_{ij}^{(k)}$ стабілізується при $k \to \infty$ на деякому елементі $y_{ij} \in \mathbb{F}$.

Для довільного $i \geq 2$

послідовність $x_{ii}^{(k)} \;-\; x_{11}^{(k)}$ також стабілізується на деякому елементі y_{ii}.

Покладемо

$$y_{11} \;=\; 0, \quad y \;=\; \left(\, y_{ij} \,\right)_{i,j\geq 1}.$$

Як і раніше, розіб'ємо матрицю y на блоки:

$$y \;=\; \begin{pmatrix} y(1,1) & y(1,2) \\ y(2,1) & y(2,2) \end{pmatrix},$$

де

$$y(1,1) \;\in\; M_n(\mathbb{F}), \quad y(1,2) \;\in\; M_{n,\infty}(\mathbb{F}),$$

$$y(2,1) \;\in\; M_{\infty,n}(\mathbb{F}), \quad y(2,2) \;\in\; M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F}).$$

Згідно з лемою 8.1 при $k \geq N_n$ матимемо:

$$x^{(k)}(1,2) \;=\; y(1,2), \quad x^{(k)}(2,1) \;=\; y(2,1),$$

$$x^{(k)}(1,1) \;-\; y(1,1) \quad \text{— скалярна} \quad (n \times n)\text{−матриця.}$$

Звідси випливає, що для кожної $(n \times n)$−матриці a і матриці

$$[a] \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матимемо:

$$d\,\left(\,[a]\,\right) \;=\; \lim_{k\to\infty}\,\left[\,x^{(k)},\; [a]\,\right] \;=\; \left[\,y,\; [a]\,\right].$$

Покажемо, що матриця y належить алгебрі нескінченних матриць $M_{rcf}(\mathbb{F})$.

Розглянемо стовпчик з номером j матриці y. Нехай $n \geq j$. Тоді

$$y(2,1) \;=\; x^{(N_n)}(2,1).$$

Оскільки

$$x^{(N_n)}(2,1) \ \in \ M_\infty \, (\mathbb{F}),$$

то множина

$$\left\{\, i \ > \ N_n \mid y_{ij} \ \neq \ 0 \,\right\}$$

скінченна. Аналогічно доводиться, що кожний рядок матриці y містить скінченну кількість ненульових елементів. Отже, $y \in M_{rcf}(\mathbb{F})$. Теорема 8.1 доведена. □

Теорема 8.2. *Кожне диференціювання алгебри $M_{rcf}(\mathbb{F})$ є внутрішнім.*

Доведення. Нехай d — диференціювання алгебри $M_{rcf}(\mathbb{F})$. Ідеал $M_\infty(\mathbb{F})$ збігається зі своїм квадратом, тому

$$d\,\big(\,M_\infty(\mathbb{F})\,\big) \ = \ d\,\big(\,M_\infty(\mathbb{F}) \ \cdot \ M_\infty(\mathbb{F})\,\big) \ \subseteq$$

$$d\,\big(\,M_\infty(\mathbb{F})\,\big) \ \cdot \ M_\infty(\mathbb{F}) \ + \ M_\infty(\mathbb{F})\, d\,\big(\,M_\infty(\mathbb{F})\,\big) \ \subseteq \ M_\infty(\mathbb{F}).$$

Ми довели, що ідеал $M_\infty(\mathbb{F})$ інваріантний відносно d. Позаяк звуження диференціювання d на $M_\infty(\mathbb{F})$ є диференціюванням алгебри $M_\infty(\mathbb{F})$, то знайдеться елемент $y \in M_{rcf}(\mathbb{F})$ такий, що

$$d(a) \ = \ [y, a] \quad \text{для кожного елемента} \quad y \ \in \ M_{rcf}(\mathbb{F}).$$

Розглянемо диференціювання

$$d' \ = \ d \ - \ \mathrm{ad}(y) \quad \text{алгебри} \quad M_{rcf}(\mathbb{F}), \quad d'\,\big(\,M_\infty(\mathbb{F})\,\big) \ = \ \{0\}.$$

Для довільних елементів

$$u \ \in M_{rcf}(\mathbb{F}), \quad a \ \in \ M_\infty(\mathbb{F})$$

маємо: $ua \in M_\infty(\mathbb{F})$. Отже, $d'(u\ a) = d'(u)\ a = 0$. □

Ми довели, що

$$d'\,\big(\,M_{rcf}(\mathbb{F})\,\big) \ \cdot \ M_\infty(\mathbb{F}) \ = \ \{0\}.$$

Аналогічно,

$$M_\infty(\mathbb{F}) \ \cdot \ d'\big(\,M_{rcf}(\mathbb{F})\,\big) \ = \ \{0\}.$$

Таким чином, якщо

$$z \ = \ (z_{ij}) \ \in \ d'\big(\,M_{rcf}(\mathbb{F})\,\big),$$

то

$$e_{ii}\, z\, e_{jj} \;=\; e_{ij}(z_{ij}) \;=\; 0, \quad z_{ij} \;=\; 0.$$

Отже, $d = \mathrm{ad}(y)$. Теорема 8.2 доведена.

Розглянемо тепер алгебру $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})-$матриць Якобі. Нагадаємо, що матриця

$$(\, a_{ij}\,)_{i,j\,\in\,\mathbb{Z}}$$

називається *матрицею Якобі*, якщо знайдеться натуральне число n таке, що

$$a_{ij} \;=\; 0 \quad \text{при} \quad |i-j| \;>\; n.$$

Іншими словами, матриця Якобі — це нескінченні $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})-$стрічкові матриці з ненульовими елементами в скінченній кількості стрічок, що розміщуються вздовж головної діагоналі. Матриці Якобі утворюють підалгебру алгебри $M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F})$, яку ми будемо позначати символом $MJ(\mathbb{F})$.

До сих під ми розглядали $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})-$матриці. Однак, легко побачити, що алгебри нескінченних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})-$матриць $M_\infty(\mathbb{F})$, $M_{rcf}(\mathbb{F})$, $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ ізоморфні аналогічним алгебрам нескінченних $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})-$матриць $M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$, $M_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$, $M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F})$, оскільки при розгляді цих алгебр значення має лише потужність множини індексів. Очевидно, що

$$M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}) \;\subset\; MJ(\mathbb{F}) \;\subset\; M_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F}) \;\subset\; M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}).$$

Теорема 8.3. *Кожне диференціювання алгебри $MJ(\mathbb{F})$ є внутрішнім.*

Доведення. Легко бачити, що $M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ — ідеал в алгебрі $MJ(\mathbb{F})$. Отже, як і при доведенні теореми 8.2, кожне диференціювання d алгебри $MJ(\mathbb{F})$ переводить $M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ у себе. Згідно з теоремою 8.1 існує матриця $y \in M_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ така, що

$$d(a) \;=\; [\, y,\; a\,] \quad \text{для кожного елемента} \quad a \;\in\; M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}).$$

Міркуючи так, як при доведенні теореми 8.2, ми бачимо, що

$$d(a) \;=\; [\, y,\; a\,] \quad \text{для кожного елемента} \quad a \;\in\; MJ(\mathbb{F}).$$

Тому залишилося показати, що $y \in MJ(\mathbb{F})$.

Покажемо спочатку, що $y \in M_{rcf}(\mathbb{F})$. Нехай $i \in \mathbb{Z}$. Матриця $[y, e_{ii}]$ має нулі всюди, крім $i-$го рядка та $i-$го стовпчика. Оскільки

$$[\, y,\; e_{ii}\,] \;\in\; MJ(\mathbb{F}), \quad \text{то} \quad [\, y,\; e_{ii}\,] \;\in\; M_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що i−тий рядок матриці y містить скінченну кількість ненульових елементів.

Нехай $k \in \mathbb{Z}$. Будемо говорити, що матриця $(a_{ij})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ має ненульову k−ту діагональ, якщо знайдуться $i, j \in \mathbb{Z}$ такі, що $j - i = k$ та $a_{ij} \neq 0$. Матриці з $MJ(\mathbb{F})$ мають скінченну кількість ненульових діагоналей.

Розглянемо множини

$$\mathbb{Z}_+ \ = \ \{\, i \in \mathbb{Z} \,\big|\, i \geq 0 \,\}, \quad \mathbb{Z}_- \ = \ \{\, i \in \mathbb{Z} \,\big|\, i < 0 \,\}.$$

Ці множини не перетинаються, тому $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \sqcup \mathbb{Z}$ задає розбиття

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ = \ \Big(\mathbb{Z}_-\times\mathbb{Z}_-\Big) \ \sqcup \ \Big(\mathbb{Z}_-\times\mathbb{Z}_+\Big) \ \sqcup \ \Big(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_-\Big) \ \sqcup \ \Big(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\Big).$$

Нехай кожен із символів σ і τ належать множині $\{+,-\}$. Для матриці $y = (y_{ij})$ розглянемо матриці, елементи якої

$$y_{ij}(\sigma,\tau) \ = \ \begin{cases} y_{ij}, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{Z}_\tau, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Маємо:

$$y \ = \ y(-,-) \ + \ y(-,+) \ + \ y(+,-) \ + \ y(+,+)\ .$$

Розглянемо матрицю

$$E_+ \ = \ \sum_{i\geq 0} e_{i,i} \ \in \ MJ(\mathbb{F}).$$

Тоді також матимемо:

$$[y,\ E_+] \ = \ y(-,+) \ - \ y(+,-) \ \in \ MJ(\mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що матриці $y(-,+)$, $y(+,-)$ мають скінченну кількість ненульових елементів. Якщо матриця y не належить алгебрі $MJ(\mathbb{F})$, то одна з матриць $y(-,-)$, $y(+,+)$ має нескінченно багато ненульових діагоналей.

Не зменшуючи загальності, будемо припускати, що такою матрицею є матриця $y(+,+)$. Справді, автоморфізм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $i \mapsto -i$, задає автоморфізм алгебри $M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F})$, який переводить підалгебру $MJ(\mathbb{F})$ у себе. При цьому квадранти $\mathbb{Z}_-\times\mathbb{Z}_-$ та $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ змінюються місцями.

Більш того, ми можемо вважати, що матриця $y(+,+)$ має нескінченно багато ненульових додатних діагоналей. Справді, розглянемо транспозицію

$$t \ : \ M_{rcf}(\mathbb{F}) \ \to \ M_{rcf}(\mathbb{F}).$$

Це перетворення переводить підалгебру $MJ(\mathbb{F})$ в себе. Тому

$$[\, y^t,\ MJ(\mathbb{F})\,] \ \subseteq\ MJ(\mathbb{F}).$$

Крім того,

$$y(\sigma,\sigma)^t \ = \ y^t(\sigma,\sigma), \quad \sigma \ = \ \pm.$$

Якщо матриця $y(+,+)$ має скінченну множину ненульових діагоналей з додатними номерами і нескінченну множину ненульових діагоналей з від'ємними номерами, то матриця $y^t(+,+)$ навпаки має нескінченну множину ненульових діагоналей з додатними номерами і скінченну множину ненульових діагоналей з від'ємними номерами.

Побудуємо зростаючу послідовність додатних чисел

$$i_1 \ < \ j_1 \ < \ i_1 \ < \ j_2 \ < \ \cdots$$

таку, що

$$j_1 - i_1 \ < \ j_2 - i_2 \ < \ \cdots \quad \text{та} \quad y_{i_s,j_s} \ \neq \ 0 \quad \text{для кожного} \quad s \geq 1.$$

Нехай $y_{kl} \neq 0$, $k, l \geq 1$. Покладемо $i_1 = k$, $j_1 = l$. Припустимо, що числа

$$i_1 \ < \ j_1 \ < \ \cdots \ < \ i_n \ < \ j_n$$

вибрані. Оскільки рядки з номерами i, $1 \leq i \leq i_n$, містять скінченну кількість ненульових елементів, то матриця $y(+,+)'$, яку визначимо у такий спосіб:

$$y_{ij}(+,+)' \ = \ \begin{cases} y_{ij}, & \text{при } i > j,\ j \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

також має нескінченну множину ненульових додатних діагоналей. Зокрема, знайдеться пара (i, j), $i > i_{n+1}$, яка знаходиться на діагоналі з номером $k > j_n - i_n$, і така, що $y_{ij} \neq 0$. Покладемо

$$i_{n+1} \ = \ i, \quad j_{n+1} \ = \ i_{n+1} + k.$$

Послідовність $i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots$ побудована.

Розглянемо тепер діагональну матрицю

$$Q \ = \ \sum_{s \geq 1} e_{j_s,j_s}.$$

Легко бачити, що

$$[\, y,\ Q\,]_{i_s,j_s} \;=\; y_{i_s,j_s} \;\neq\; 0, \quad s \geq 1.$$

Тому

$$[\, y,\ Q\,] \;\notin MJ(\mathbb{F}).$$

Отримали суперечність. Таким чином, теорема 8.3 доведена. □

Обговоримо тепер асоціативну алгебру лінійних перетворень скінченного рангу зліченно–вимірного векторного простору V :

$$\mathrm{End}_{fin}\,(V) \;=\; \Big\{\, \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V) \;\Big|\; \dim_{\mathbb{F}}\ \varphi(V) \;<\; \infty \Big\}.$$

Лема 8.2. 1) *Алгебра лінійних перетворень скінченного рангу* $\mathrm{End}_{fin}(V)$ *є ідеалом в алгебрі всіх лінійних перетворень* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

2) *Алгебра лінійних перетворень скінченного рангу* $\mathrm{End}_{fin}(V)$ *є локально матричною алгеброю.*

3) *Розмірність алгебри лінійних перетворень скінченного рангу дорівнює:*

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{End}_{fin}\,(V) \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Доведення. 1) Якщо $\varphi \in \mathrm{End}_{fin}(V)$, $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, то

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \varphi\,\psi(V), \quad \dim_{\mathbb{F}}\ \psi\,\varphi(V) \;\leq\; \dim_{\mathbb{F}}\ \varphi\,(V) \;<\; \infty.$$

Таким чином, алгебра $\mathrm{End}_{fin}\,(V)$ є ідеалом алгебри $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V)$.

2) Припустимо, що

$$\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \;\in\; \mathrm{End}_{fin}\,(V).$$

Існує скінченно–вимірний підпростір $V_0 \subset V$ такий, що

$$\varphi_1(V) \;+\; \cdots \;+\; \varphi_n(V) \;\subset\; V_0.$$

Нехай V_1 — підпростір простору V такий, що

$$V \;=\; V_0 \;\oplus\; V_1 \text{ — пряма сума підпросторів.}$$

Перетин

$$V_2 \;=\; V_1 \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \bigcap \cdots \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_n$$

має скінченну корозмірність у V_1. Виберемо скінченно–вимірний підпростір $V_0{}' \subset V_2$ так, щоб підпростір

$$V_1 \;=\; V_0{}' \;\oplus\; V_2 \quad \text{був прямою сумою.}$$

Позначимо $W = V_0 + V_0{}'$. Тоді $V = W \oplus V_2$ — пряма сума,

$$\varphi_i(V_2) \;=\; \{0\}, \quad \varphi_i(W) \;\subseteq\; V_0 \;\subseteq\; W, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Лінійні перетворення $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ належать підалгебрі

$$\Big\{\, \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V) \;\Big|\; \varphi(W) \;\subseteq\; W, \quad \varphi(V_2) \;=\; \{0\} \,\Big\} \;\cong\; \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(W).$$

Звідси випливає, що $\mathrm{End}_{fin}(V)$ — локально матрична алгебра.

3) Маємо, що

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{End}_{fin}\,(V) \;\leq\; \dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V) \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}.$$

Виберемо ненульовий елемент $0 \neq v_0 \in V$. Для кожного функціонала $\chi : V \longrightarrow \mathbb{F}$ лінійне відображення

$$\widetilde{\chi}(v) \;=\; \chi(v)\, v_0, \quad v \in V, \quad \text{належить} \quad \mathrm{End}_{fin}\,(V).$$

Таким чином,

$$\dim_{\mathbb{F}}\ \mathrm{End}_{fin}\,(V) \;\geq\; \dim_{\mathbb{F}}\ V^* \;=\; |\mathbb{F}|^{\aleph_0}$$

згідно з теоремою Ердеша–Капланського (див. [75], теорема 2, стр. 247), а також згідно з лемою 6.6. Таким чином, лема 8.2 доведена. □

Для елемента $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ позначимо символом

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{End}_{fin}(V)}\ (a)$$

— звуження оператора $\mathrm{ad}(a)$ на $\mathrm{End}_{fin}(V)$.

Теорема 8.4. *Кожне диференціювання алгебри* $\mathrm{End}_{fin}(V)$ *має вигляд*

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{End}_{fin}(V)}\ (a), \quad \text{де} \quad a \;\in\; \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,(V).$$

Доведення. Виберемо в просторі V зліченний базис $v_1, v_2, \ldots$. У цьому випадку алгебрі $\mathrm{End}_{fin}(V)$ буде відповідати підалгебра $M_{r-fin}(\mathbb{F}) \subset M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць скінченного рангу, причому

$$M_\infty(\mathbb{F}) \subset M_{r-fin}(\mathbb{F}).$$

Нехай d — диференціювання алгебри $M_{r-fin}(\mathbb{F})$. Згідно з теоремою 6.1 п. 1) знайдеться послідовність елементів

$$x^{(k)} \in M_{r-fin}(\mathbb{F})$$

така, що для довільного елемента $a \in M_\infty(\mathbb{F})$ послідовність $[x^{(k)}, a]$ стабілізується при $k \to \infty$ на елементі $d(a)$.

Крім того, з леми 8.1 випливає, що для кожного натурального числа n знайдеться натуральне число N_n таке, що

$$x_{ij}^{(N_n)} = x_{ij}^{(N_n+1)} = \cdots \quad \text{при} \quad 1 \le i \le n, \quad j > n, \quad \text{або} \quad i > j, \quad 1 \le j \le n, \tag{8.1}$$

$$x_{jj}^{(N_n)} - x_{ii}^{(N_n)} = x_{jj}^{(N_n+1)} - x_{ii}^{(N_n+1)} = \cdots \quad \text{при} \quad 1 \le i,\ j \le n. \tag{8.2}$$

Покладемо

$$y_{ij} = \lim_{n\to\infty} x_{ij}^{(n)}, \quad i \ne j; \quad y_{11} = 0;$$

$$y_{ii} = \lim_{n\to\infty} \left(x_{ii}^{(n)} - x_{11}^{(n)} \right), \quad i \ge 2.$$

Тоді

$$d(a) = [y, a] \quad \text{для кожного елемента} \quad a \in M_\infty(\mathbb{F}).$$

Покажемо, що y має скінченну кількість ненульових елементів у кожному стовпчику. Зафіксуємо $j \in \mathbb{N}$. Згідно з умовою (8.1)

$$y_{ij} = x_{ij}^{(N_j)} \quad \text{при} \quad i > j.$$

Оскільки матриця $x^{(N_j)}$ має скінченну кількість ненульових елементів у j–му стовпчику, то і кількість ненульових елементів у j–му стовпчику матриці y також скінченна.

Розглянемо диференціювання

$$d' = d - \mathrm{ad}(y) \quad \text{алгебри} \quad M_{r-fin}(\mathbb{F}),$$

$$d'\left(M_\infty(\mathbb{F})\right) = \{0\}.$$

Для кожного елемента $a \in M_{r-fin}(\mathbb{F})$ та довільних матричних одиниць e_{ii}, e_{jj}, де $i, j \in \mathbb{N}$, матриця $e_{ii}ae_{jj}$ належить матричній алгебрі $M_\infty(\mathbb{F})$. Таким чином,

$$d'\left(e_{ii}\, a\, e_{jj}\right) = e_{ii}\, d'(a)\, e_{jj} = 0,$$

звідки випливатиме, що $d'(a) = 0$. Ми довели, що $d = \mathrm{ad}(y)$. Таким чином, теорема 8.4 доведена. □

Досі ми вивчали алгебри нескінченних матриць зі зліченною кількістю рядків та стовпчиків. Зараз ми узагальнемо отриманні результати на алгебри нескінченних матриць довільного розміру.

Нехай I — нескінченна множина індексів. Позначимо символом $M_I(\mathbb{F})$ алгебру $(I \times I)$−матриць над полем $\mathbb{F}$, яка має скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику.

Назвемо матрицю $(a_{ij})_{I\times I}$ *фінітарною*, якщо $a_{ij} \neq 0$ лише для скінченної множини пар $(i, j) \in I \times I$. Позначимо символом $M_\infty(I, \mathbb{F})$ — алгебру всіх фінітарних $(I \times I)$−матриць. Легко бачити, що $M_\infty(I, \mathbb{F})$ — неунітальна локально матрична алгебра,

$$\dim_{\mathbb{F}} M_\infty(I, \mathbb{F}) = |I|.$$

Як і раніше, позначимо символом $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ алгебру $(I \times I)$−матриць над полем $\mathbb{F}$, яка має скінченну множину ненульових елементів у кожному рядку і кожному стовпчику. Очевидно, що $M_\infty(I, \mathbb{F})$ — ідеал алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$.

Аналогічно, для елемента $a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ через $\mathrm{ad}(a)$ позначимо оператор

$$M_{rcf}(I, \mathbb{F}) \to M_{rcf}(I, \mathbb{F}), \quad x \mapsto [a, x],$$

а через

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(a)$$

— звуження цього оператора на $M_\infty(I, \mathbb{F})$.

Теорема 8.5. 1) *Кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд*

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

2) *Кожне диференціювання алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ є внутрішнім.*

Якщо $J \subset I$, то алгебра $M_\infty(J, \mathbb{F})$ природним чином занурюється в алгебру $M_\infty(I, \mathbb{F})$: матриця $(a_{ij})_{J\times J}$ відображається в $(I \times I)$–матрицю, яка збігається з $(a_{ij})_{J\times J}$ на $J \times J$ і яка дорівнює нулю на $(I \times I)\diagdown(J \times J)$.

Аналогічно алгебра $M_{rcf}(J, \mathbb{F})$ занурюється в алгебру $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$.

Нехай d — диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$.

Лема 8.3. *Для кожної зліченної підмножини $J \subseteq I$ знайдеться зліченна підмножина $\tilde{J}$, $J \subseteq \tilde{J} \subseteq I$, така що*

$$d\ \Big(\ M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F})\ \Big)\ \subseteq\ M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}).$$

Доведення. Визначимо зростаючий ланцюжок зліченних підмножин

$$J\ =\ J_1\ \subseteq\ J_2\ \subseteq\ \cdots\ \subseteq\ I$$

за індукцією. Для цього припустимо, що множина J_n знайдена. Оскільки алгебра $M_\infty(J_n, \mathbb{F})$ — зліченно–вимірна, то існує зліченна підмножина $J_n \subseteq J_{n+1}$ така, що

$$d\ \Big(\ M_\infty(J_n, \mathbb{F})\ \Big)\ \subseteq\ M_\infty(J_{n+1}, \mathbb{F}).$$

Покладемо

$$\tilde{J}\ =\ \bigcup_{n\geq 1} J_n.$$

Легко бачити, що множина $\tilde{J}$ зліченна і

$$d\ \Big(\ M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F})\ \Big)\ \subseteq\ M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}).$$

Лема доведена. □

Зафіксуємо елемент $i_0 \in I$.

Лема 8.4. *Нехай $i_0 \in J \subseteq I$, де J — зліченна підмножина множини I. Припустимо, що*

$$y',\ y''\ \in\ M_{rcf}(\mathbb{F}),\qquad y'_{i_0,i_0}\ =\ y''_{i_0,i_0}\ =\ 0,$$

$$\mathrm{ad}_{M_\infty(J,\mathbb{F})}\ (y')\ =\ \mathrm{ad}_{M_\infty(J,\mathbb{F})}\ (y'').$$

Тоді $y' = y''$.

Доведення. З того, що

$$\left[\, y' - y'',\ M_\infty(J,\mathbb{F}) \,\right] \ = \ \{0\},$$

випливає, що $y' - y''$ — скалярна матриця з $M_J(\mathbb{F})$. І оскільки

$$y'_{i_0,i_0} \ = \ y''_{i_0,i_0} \ = \ 0,$$

то $y' = y''$. Лема доведена. □

Доведення теореми 8.5. Визначимо матрицю $y \in M_I(\mathbb{F})$ таким чином. Для довільних індексів $i, j \in I$ знайдеться зліченна підмножина $J \subseteq I$ така, що i_0, i, $j \in J$, та

$$d\left(M_\infty(J,\mathbb{F}) \right) \ \subseteq \ M_\infty(J,\mathbb{F}).$$

Згідно з теоремою 8.2 існує матриця

$$y_J \ \in \ M_{rcf}(J,\mathbb{F})$$

така, що $d(a) = [y_J, a]$ для кожного елемента $a \in M_\infty(J,\mathbb{F})$. Додавши, за потреби, скалярну матрицю, будемо вважати, що

$$\left(y_J \right)_{i_0,i_0} \ = \ 0.$$

Покладемо

$$y_{ij} \ = \ \left(y_J \right)_{i_0,i_0}.$$

Покажемо, що матриця y_{ij} не залежить від вибору підмножини J. Нехай J_1 — інша зліченна підмножина множини I, яка має ті ж властивості, що і J. Тоді підалгебра

$$M_\infty(J \bigcap J_1,\mathbb{F}) \ = \ M_\infty(J,\mathbb{F}) \ \bigcap \ M_\infty(J_1,\mathbb{F})$$

інваріантна відносно диференціювання d і

$$d\Big|_{M_\infty(J\bigcap J_1,\mathbb{F})} \ = \ \mathrm{ad}_{M_\infty(J\bigcap J_1,\mathbb{F})}\,(y_J) \ = \ \mathrm{ad}_{M_\infty(J\bigcap J_1,\mathbb{F})}\,(y_{J_1}).$$

Згідно з лемою 8.4 отримаємо

$$\left(y_J \right)_{ij} \ = \ \left(y_{J_1} \right)_{ij}.$$

За лемою 8.3 для довільної зліченної підмножини J такої, що $i_0 \in J$, знайдеться зліченна підмножина $\tilde{J}$, $J \subseteq \tilde{J} \subseteq I$, така, що

$$d\left(M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}) \right) \subseteq M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}).$$

Звідси випливає, що для кожного елемента $a \in M_\infty(J, \mathbb{F})$ маємо: $d(a) = [y, a]$. Оскільки

$$M_\infty(J, \mathbb{F}) = \bigcup_{i_0 \in J \subseteq I} M_\infty(J, \mathbb{F}),$$

де J пробігає зліченні підмножини множини I, то

$$d = \mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(y).$$

Залишилося показати, що $y \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Припустимо, що $i \in I$ і множина $J = \{j \mid y_{ij} \neq 0\}$ є нескінченною. Згідно з лемою 8.3 знайдеться зліченна підмножина $\tilde{J}$, $J \subseteq \tilde{J} \subseteq I$, така, що $i \in \tilde{J}$ і

$$d\left(M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}) \right) \subseteq M_\infty(\tilde{J}, \mathbb{F}).$$

Тоді на $\tilde{J} \times \tilde{J}$ матриця y збігається з матрицею $y_{\tilde{J}}$. З теореми 8.2 випливає, що матриця $y_{\tilde{J}}$ належить $M_{rcf}(\tilde{J}, \mathbb{F})$. Це суперечить припущенню про нескінченність множини J. Частина 1) теореми 8.5 доведена.

Частина 2) випливає з частини 1) таким же чином, як і теорема 8.2 випливає з теореми 8.1. Тим самим теорема 8.5 доведена. □

8.2 Алгебри Лі нескінченних матриць

Нагадаємо (див. підрозділ 8.1), що коли A — асоціативна $\mathbb{F}$–алгебра, то векторний простір A з новою операцією

$$[a, b] = ab - ba$$

є алгеброю Лі, яка позначається символом $A^{(-)}$ і інколи називається *приєднаною алгеброю Лі.*

Лінійне відображення $* : A \longrightarrow A$ називається *інволюцією*, якщо

$$(a^*)^* = a, \qquad (a\,b)^* = b^*\,a^*$$

для довільних елементів $a, b \in A$. Простір кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів

$$K = K(A, *) = \{ \, a \in A \mid a^* = -a \, \}$$

є підалгеброю Лі алгебри $A^{(-)}$ і називається *підалгеброю з інволюцією.*

Найбільш вивченими серед алгебр Лі нескінченних матриць є алгебри

$$\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}) = M_\infty(I, \mathbb{F})^{(-)}, \quad \mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F}) = [\, \mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}),\ \mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}) \,],$$

а також алгебри

$$\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F}), \quad \text{та} \quad \mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F}),$$

які виникають як алгебри кососиметричних елементів алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ відносно інволюції транспонування і симплектичної інволюції відповідно.

Робота [58] присвячена застосуванню теорії зображень алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ у математичній фізиці. Структура і зображення алгебр $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ вивчаються в роботах [52, 58, 95].

У роботі [90] К.-Х. Нееб довів, що якщо поле $\mathbb{F}$ має нульову характеристику, то диференціювання алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$ є приєднаними диференціюваннями, які індукуються елементами алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Нижче ми доведемо це твердження для довільного поля характеристики, відмінної від 2.

В. Голубовський і С. Журек [72] довели, що для довільного асоціативного кільця R кожне $R-$лінійне диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}(\mathbb{N}, R) = M_{\mathbb{N}}(R)^{(-)}$ є внутрішнім.

Алгебра Лі матриць Якобі

$$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) = MJ(\mathbb{F})^{(-)}$$

знайшла застосування в теорії солітонів (див. [51, 137]).

Разом з цими алгебрами Лі ми розлянемо алгебри Лі

$$\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F}) = M_I(\mathbb{F})^{(-)} \quad \text{та} \quad \mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F}) = M_{rcf}(I, \mathbb{F})^{(-)}.$$

Нагадаємо, що алгебра Лі L називається *досконалою*, якщо вона збігається зі своїм квадратом $L = [L, L]$.

Наша найближча мета — доведення наступної теореми, яка відображає специфіку нескінченних матриць.

Теорема 8.6. *Для кожної нескінченної множини I алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є досконалими.*

Нехай R — асоціативне кільце з 1. Для елемента $a \in R$ та індексів $i,\ j \in \mathbb{N}$ будемо позначати символом $e_{ij}(a)$ матрицю розміру $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, яка має елемент a на перетині i−го рядка і j−го стовпчика і нулі на усіх інших місцях.

Розглянемо матрицю

$$E \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\; e_{i,i+1}(1).$$

Для довільної $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$−матриці

$$a \;=\; (\, a_{ij}\,)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \quad a_{ij} \in R,$$

над кільцем R розглянемо матрицю

$$\tilde{a} \;=\; (\, \tilde{a}_{ij}\,)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

де

$$\tilde{a}_{ij} \;=\; \begin{cases} \sum_{k=0}^{\min(i-2,j-1)} \; a_{i-1-k,\, j-k}, & \text{при} \quad i \geq 2, \quad j \geq 1; \\ \qquad 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{8.3}$$

Лема 8.5. *Має місце рівність:*

$$[\, E,\ \tilde{a}\,] \;=\; a.$$

Доведення. Ми маємо,

$$E\,\tilde{a} \;=\; \Big(\, \sum_{i=1}^{\infty}\; e_{i,i+1}(1)\,\Big)\Big(\, \sum_{j,k\in\mathbb{N}}\; e_{j,k}(\tilde{a}_{jk})\,\Big) \;=\; \sum_{i,k\in\mathbb{N}}\; e_{i,k}(\tilde{a}_{i+1,k});$$

$$\tilde{a}\,E \;=\; \Big(\, \sum_{j,k\in\mathbb{N}}\; e_{j,k}(\tilde{a}_{j,k})\,\Big)\Big(\, \sum_{i=1}^{\infty}\; e_{i,i+1}(1)\,\Big) \;=$$

$$\sum_{j,i\in\mathbb{N}}\; e_{j,i+1}(\tilde{a}_{j,i}) \;=\; \sum_{i\geq 1,k\geq 2}\; e_{i,k}(\tilde{a}_{i,k-1}).$$

Тоді

$$[\, E,\ \tilde{a}\,] \;=\; \sum_{i,k\in\mathbb{N}}\; e_{i,k}(\tilde{a}_{i+1,k} \;-\; \tilde{a}_{i,k-1}\,),$$

де $\tilde a_{i,0} = 0$. Нам потрібно перевірити, що

$$\tilde a_{i+1,j} - \tilde a_{i,j-1} = a_{i,j} \quad \text{для всіх} \quad i,\ j \in \mathbb{N}. \tag{8.4}$$

Довизначивши

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \le 0 \quad \text{або} \quad j \le 0,$$

ми отримаємо

$$\tilde a_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-1-k,j-k}.$$

Тепер рівність (8.3) перевіряється безпосередньо. Лема доведена. □

Нам знадобиться варіант леми 8.5 для $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$−матриць. Розглянемо матрицю

$$E' = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e_{i,i+1}(1).$$

Для довільної $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$−матриці

$$a = (\, a_{ij}\,)_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \quad \text{над кільцем} \quad R$$

розглянемо матрицю

$$\tilde a = (\, \tilde a_{ij}\,)_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

де

$$\tilde a_{ij} = \begin{cases} a_{i-1,\,j} + \cdots + a_{1,\,2-i+j}, & \text{при} \quad i \ge 2; \\ 0, & \text{при} \quad i = 1; \\ -a_{i,\,j+1} - a_{i+1,\,j+2} - \cdots - a_{0,\,j-i+1}, & \text{при} \quad i \le 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Лема 8.6. *Має місце рівність:*

$$[\, E',\ \tilde a\,] = a.$$

Доведення. Безпосередніми обрахунками перевіряємо, що

$$[\, E',\ \tilde a\,] = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} e_{ij}\left(\tilde a_{i+1,\,j} - \tilde a_{i,\,j+1}\right),$$

а також те, що

$$\tilde a_{i+1,\,j} - \tilde a_{i,\,j+1} = a_{ij}.$$

Тим самим лема доведена. □

Доведення теореми 8.6. Оскільки множина I нескінченна, то I та $\mathbb{N}\times I$ мають однакову потужність. Тому будемо вважати, що $I=\mathbb{N}\times J$ для деякої множини J.

Довільну $(I\times I)-$матрицю Q на полем $\mathbb{F}$ можна розбити на блоки

$$a = \left(a_{ij} \right)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

де кожний блок a_{ij} є $(J\times J)-$матрицею.

Якщо матриця a належить $M_I(\mathbb{F})$, то кожний блок a_{ij} належить $M_J(\mathbb{F})$. Обернене, взагалі кажучи, неправильне.

Припустимо, що $a\in M_J(\mathbb{F})$. Покажемо, що матриця $\tilde{a}$ (див. лему 8.5) також належить $M_I(\mathbb{F})$.

Виберемо стовпчик з номером $(j,\alpha)\in\mathbb{N}\times J$, $j\in\mathbb{N}$, $\alpha\in J$. Ми повинні показати, що $\alpha-$й стовпчик $(I\times J)-$матриці

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j} \\ \tilde{a}_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

містить скінченну кількість ненульових елементів. Оскільки $a\in M_I(\mathbb{F})$, то для кожного натурального числа l знайдеться натуральне число $N(l,\alpha)$ таке, що $(J\times J)-$матриця a_{kl} має ненульовий $\alpha-$й стовпчик при $k>N(l,\alpha)$.

Нехай

$$i > j + \max\left(N(1,\alpha),\ \ldots,\ N(j,\alpha) \right) = s.$$

Тоді $i-2\geq j-1$. Згідно з рівністю (8.3) маємо:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{i-1,j} + \cdots + a_{i-j,1}.$$

Усі доданки в правій частині мають ненульовий $\alpha-$й стовпчик, тому матриця $\tilde{a}_{ij}$ має ненульовий $\alpha-$й стовпчик. Матриця

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{sj} \end{pmatrix}$$

містить скінченну кількість ненульових елементів у $\alpha-$му стовпчику тому, що така властивість притаманна $(J\times J)-$матрицям $\tilde{a}_{1j},\ldots,\tilde{a}_{sj}$. Отже, ми довели, що $\tilde{a}\in M_I(\mathbb{F})$. Згідно з лемою 8.5 матимемо:

$$a = \left[E,\ \tilde{a} \right] \in \left[M_I(\mathbb{F}),\ M_I(\mathbb{F}) \right].$$

Таким чином, алгебра Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$ досконала.

Припустимо тепер, що $a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Покажемо, що $\tilde{a} \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Ми вже показали, що кожний стовпчик $(I \times I)-$матриці $\tilde{a}$ має скінченну кількість ненульових елементів.

Виберемо рядок з номером

$$(i, \alpha) \in \mathbb{N} \times J, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in J.$$

Оскільки матриця a належить $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, то, як і раніше, для кожного $l \geq 1$ знайдеться натуральне число $N'(l, \alpha)$ таке, що $(J \times J)-$матриця a_{lj} має ненульовий $\alpha-$й рядок при $j > N'(l, \alpha)$. Нам потрібно показати, що $(J \times I)-$матриця

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \cdots \end{pmatrix}$$

має скінченну кількість ненульових елементів у $\alpha-$му рядку. Нехай

$$j > i + \max \big(N'(1, \alpha), \ldots, N'(i, \alpha) \big) = s'.$$

Тоді $j - 1 \geq i - 2$. Згідно з рівністю (8.3) отримаємо, що

$$\tilde{a}_{ij} = a_{i-1,j} + \cdots + a_{1,2+j-i}$$

має ненульовий $\alpha-$й рядок, оскільки це виконується для кожного доданку у правій частині останньої рівності. Матриця $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{is'} \end{pmatrix}$ має скінченну кількість ненульових елементів у $\alpha-$му рядку. Тим самим ми довели, що $\tilde{a} \in M_{rcf}(I, \mathbb{F})$. Звідси випливає, що

$$a = \big[E, \tilde{a} \big] \in \big[M_{rcf}(I, \mathbb{F}), M_{rcf}(I, \mathbb{F}) \big],$$

тобто алгебра Лі $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ досконала.

Розглянемо, нарешті, довільний елемент $a \in M_J(\mathbb{F})$ і покажемо, що елемент $\tilde{a}$ (див. лему 8.6) лежить у $M_J(\mathbb{F})$.

Оскільки $a \in M_J(\mathbb{F})$, то знайдеться натуральне число k таке, що

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > k.$$

Згідно формули (8.5) вираз для $\tilde{a}_{ij}$ включає тільки елементи a_{pq}, для яких $p - q = i - j - 1$. Отже,

$$\tilde{a}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > k$$

і матриця $\tilde{a}$ лежить $M_J(\mathbb{F})$. Ми показали, що

$$a \ = \ \big[\ E', \ \tilde{a} \ \big] \ \in \ \big[\ M_J(\mathbb{F}), \ M_J(\mathbb{F}) \ \big],$$

тобто алгебра Лі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ досконала. Теорема доведена. □

Розглянемо дві інволюції в алгебрі $M_\infty(I, \mathbb{F})$, де I — нескінченна множина. Перша з таких інволюцій – *інволюція транспонування*

$$t \ : \ \big(\ a_{ij} \ \big)_{I \times I} \ \mapsto \ \big(\ a_{ji} \ \big)_{I \times I}.$$

Симплектичною (або *кватерніонною*) *інволюцією* в алгебрі (2×2)–матриць $M_2(\mathbb{F})$ (див., наприклад, [101, 135]) називається інволюція

$$sp \ : \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \xi \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \xi & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Будь–яку $(I \times I)$–матрицю можна розбити на 2×2 блоки, тобто

$$M_\infty(I, \mathbb{F}) \ \cong \ M_\infty\big(\ I, M_2(\mathbb{F}) \ \big).$$

Інволюція

$$sp \ : \ \big(\ a_{ij} \ \big)_{I \times I} \ \mapsto \ \Big(sp \ \big(\ a_{ji} \ \big) \ \Big)_{I \times I}, \quad a_{ij} \ \in \ M_2(\mathbb{F}),$$

називається *симплектичною інволюцією.*

Алгебрами Лі кососиметричних матриць відносно цих інволюцій є такі спеціальні алгебри Лі:

$$\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F}) \ = \ K \ \big(\ M_\infty(I, \mathbb{F}), \ t \ \big) \quad \text{та} \quad \mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F}) \ = \ K \ \big(\ M_\infty(I, \mathbb{F}), \ sp \ \big).$$

Для довільної нескінченної множини I і поля $\mathbb{F}$ характеристики, відмінної від 2, алгебри Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$ є простими, а тому досконалими. Це випливає з того, що для довільної скінченної підмножини $I_0 \subset I$ алгебри Лі $K(M(I_0, \mathbb{F}), t)$ та $K(M(I_0, M_2(\mathbb{F})), sp)$ є простими (див. [101]).

Для опису диференціювань алгебр Лі нескінченних матриць нам знадобиться теорема про зв'язок диференціювань приєднаної алгебри Лі $A^{(-)}$ та її підалгебри з інволюцією $K(A, *)$ з диференціюваннями асоціативної алгебри A. Теорема про такий зв'язок була була сформульована І. Херстейном [71] у вигляді гіпотези і доведена в серії робіт [9, 10, 11, 12, 13] К. Бейдара, М. Брешара, М. Чеботаря та Дж. Мартиндейла. Ми сформулюємо лише той частковий випадок результату названих вище авторів, який безпосередньо має відношення до нашої задачі.

Теорема 8.7 (К. Бейдар, М. Брешар, М. Чеботарь, Дж. Мартиндейл).

1) ([11], наслідок 1.4 (b)). *Нехай A — проста асоціативна алгебра над полем $\mathbb{F}$ з центром Z. Нехай d — диференціювання алгебри Лі*

$$[\,A,\ A\,]\ /\ [\,A,\ A\,]\ \cap\ Z\ .$$

Тоді знайдеться диференціювання $\tilde{d} : A \longrightarrow A$ асоціативної алгебри A таке, що

$$d(a)\ -\ \tilde{d}(a)\ \in\ Z \quad \text{для кожного елемента} \quad a\ \in\ [A, A].$$

2) ([11], наслідок 1.9 (b)). *Нехай A — проста асоціативна алгебра над полем $\mathbb{F}$ з інволюцією $* : A \longrightarrow A$ і центром Z. Нехай d — диференціювання алгебри Лі*

$$[\,K,\ K\,]\ /\ [\,K,\ K\,]\ \cap\ Z\ , \quad \text{де} \quad K\ =\ K(A, *)\ .$$

Тоді знайдеться диференціювання $\tilde{d} : A \longrightarrow A$ асоціативної алгебри A таке, що

$$d(a)\ -\ \tilde{d}(a)\ \in\ Z \quad \text{для кожного елемента} \quad a\ \in\ [K, K].$$

Тепер ми готові описати диференціювання алгебр Лі нескінченних матриць.

Теорема 8.8. *Нехай $\mathbb{F}$ — поле характеристики, відмінної від 2. І нехай I — нескінченна множина.*

1) *Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$ має вигляд*

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

2) *Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$ (відповідно $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$) має вигляд $\mathrm{ad}(a)$, де a — матриця з $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є кососиметричною відносно транспонування (відповідно відносно симплектичної інволюції).*
3) *Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ є внутрішніми.*
4) *Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.*

Доведення. 1) Алгебра $A = M_\infty(I, \mathbb{F})$ є простою і має нульовий центр. Нехай d — диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F}) = [A, A]$. Згідно з теоремою 8.7 п.1) знайдеться диференціювання $\tilde{d}$ асоціативної алгебри A, яке збігається з диференціюванням d на алгебрі $[A, A]$. За теоремою 8.1 диференціювання $\tilde{d}$ має вигляд:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a), \quad \text{де} \quad a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

Частина 1) теореми доведена.

2) Нехай $*$ — інволюція транспонування (відповідно симплектична інволюція) на алгебрі $A = M_\infty(I, \mathbb{F})$. Тоді алгебра Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$ (відповідно $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$) буде алгеброю кососиметричних елементів $K = K(A, *)$. За теоремою 8.7 п.2) знайдеться диференціювання $\tilde{d}$ асоціативної алгебри A, яке збігається з диференціюванням d на алгебрі $[K, K]$. Раніше ми вже відмічали, що алгебра K є простою, а тому досконалою, тобто $[K, K] = K$. Згідно з теоремою 8.1 диференціювання $\tilde{d}$ є звуженням диференціювання

$$\mathrm{ad}(a), \quad \text{де} \quad a \in M_{rcf}(I, \mathbb{F}).$$

Але елемент a можна зобразити у вигляді:

$$a = a_h + a_k, \quad \text{де} \quad a_h^* = a_h, \quad a_k^* = -a_k.$$

Тому ми маємо, що $[a, K] \subseteq K$.

Нехай H — підпростір усіх симетричних елементів алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, тобто тих матриць, які інволюція $*$ переводить у себе. Для довільного елемента $b \in K$ виконується

$$[\, a,\ b\,] = [\, a_h,\ b\,] + [\, a_k,\ b\,].$$

Але

$$[\, a_h,\ b\,] \in [\, H,\ K\,] \subseteq H, \quad [\, a_k,\ b\,] \in [\, K,\ K\,] \subseteq K.$$

Отже,

$$[\, a_h,\ b\,] = 0, \quad [\, a,\ b\,] = [\, a_k,\ b\,],$$

тобто

$$\mathrm{ad}_K(a) = \mathrm{ad}(a_k), \quad \text{де} \quad a_k \in K\left(M_{rcf}(I, \mathbb{F}),\ *\right).$$

Частина 2) теореми доведена.

3) Підалгебра $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ є ідеалом алгебри Лі $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$. Нехай d — диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$. Тоді для довільних елементів $a,\ b \in \mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ матимемо:

$$d\,\big(\,[a,\ b]\,\big) \;=\; \big[\,d(a),\ b\,\big] \;+\; \big[\,a,\ d(b)\,\big] \;\in$$
$$\big[\,\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}),\ \mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})\,\big] \;\subseteq\; \mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F}).$$

Отже, диференціювання d переводить ідеал $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ у себе.

Згідно з частиною 1) цієї теореми знайдеться елемент $a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ такий, що

$$d\Big|_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})} \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}\,(a).$$

Розглянемо диференціювання

$$d' \;=\; d \;-\; \mathrm{ad}(a) \quad \text{алгебри} \quad \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}),$$
$$d'\,\Big(\,\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})\,\Big) \;=\; \{0\}.$$

Для довільних елементів $x \in \mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$, $y \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ маємо:

$$0 \;=\; d'\,\big(\,[x,y]\,\big) \;=\; \big[\,x,\ d'(y)\,\big].$$

Тому $d'\big(\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})\big)$ належить централізаторові ідеалу $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$. Легко бачити, що централізатором ідеалу $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ в алгебрі $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ буде множина скалярних матриць вигляду $\alpha \cdot \mathrm{Id}$, де $\alpha \in \mathbb{F}$, Id — одинична $(I \times I)$–матриця, тобто

$$d'\,\Big(\,\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})\,\Big) \;\subseteq\; \mathbb{F}\;\cdot\;\mathrm{Id}.$$

Але для довільних елементів $a,\ b \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ ми маємо:

$$d'\,\big(\,[a,b]\,\big) \;=\; \big[\,d'(a),\ b\,\big] \;+\; \big[\,a,\ d'(b)\,\big] \;=\; 0.$$

Таким чином,

$$d'\,\Big(\,\big[\,\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}),\ \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})\,\big]\,\Big) \;=\; \{0\}.$$

За теоремою 8.6

$$\big[\,\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}),\ \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})\,\big] \;=\; \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F}).$$

Отже, $d' = 0$. Частина 3) теореми доведена.

Доведемо частину 4). Нехай

$$d \;:\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) \;\to\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$$

— диференціювання алгебри, приєднаної до алгебри нескінченних матриць Якобі. Як і раніше, бачимо, що $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ — ідеал алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ і

$$\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}) \;=\; \Big[\; \mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}),\; \mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F}) \;\Big].$$

Отже, диференціювання d переводить ідеал $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ у себе. Згідно з частиною 1) цієї теореми знайдеться матриця $a \in M_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ така, що

$$d\Big|_{\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})} \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})}\,(a).$$

Поки ми не можемо стверджувати, що оператор $d' \;=\; d \;-\; \mathrm{ad}(a)$ переводить алгебру $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ у себе. Ми лише маємо, що

$$d' \;:\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) \;\to\; \mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$$

є диференціюванням у $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$–бімодулі $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$. Крім того,

$$d'\,\big(\,\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})\,\big) \;=\; \{0\}.$$

Як і при доведенні частини 3) цієї теореми, для довільних елементів $x \in \mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$, $y \in \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ виконується:

$$0 \;=\; d'\,\big(\,[x,y]\,\big) \;=\; \big[\;x,\; d'(y)\;\big],$$

тобто $d'\,\big(\,\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})\,\big)$ належить централізаторові ідеалу $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{F})$ в алгебрі $\mathfrak{gl}_{rcf}(\mathbb{Z},\mathbb{F})$. Таким чином,

$$d'\,\Big(\,\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})\,\Big) \;\subseteq\; \mathbb{F}\,\cdot\,\mathrm{Id}.$$

Знову, як і при доведенні частини 3) цієї теореми, із рівності

$$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) \;=\; \big[\;\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}),\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})\;\big]$$

отимаємо $d' = 0$. Тобто алгебра $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ — інваріантна відносно $\mathrm{ad}(a)$ і

$$d \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})}(a).$$

Залишилося довести, що із включення

$$\big[\;a,\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})\;\big] \;\subseteq\; \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$$

випливає $a \in \mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$. Але це було показано при доведенні теореми 8.3. Частина 4) теореми доведена. $\square$

Висновки до розділу 8

Нехай I — нескінченна множина, $\mathbb{F}$ — поле. Через $M_I(\mathbb{F})$ ми позначаємо алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику; через $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ — алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному рядку і кожному стовпчику; через $M_J(\mathbb{F})$ — алгебру матриць Якобі, тобто $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну кількість ненульових діагоналей; а через $M_\infty(I, \mathbb{F})$ — алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну кількість ненульових елементів.

Основними результатами розділу є:

- Описані диференціювання алгебр $M_\infty(I, \mathbb{F})$, $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $M_J(\mathbb{F})$. Показано, що кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ є приєднаним диференціюванням, що індукується елементом з алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, а всі диференціювання алгебр $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $M_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.
- Описані диференціювання спеціальних лінійних алгебр Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$, які є алгебрами Лі кососиметричних елементів алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ відносно інволюції транспонування та симплектичної інволюції відповідно, а також спеціальної лінійної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F}) = [\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}), \mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F})]$, де $\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F})$ є приєднаною алгеброю Лі до алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$. Показано, що кожне диференціювання цих алгебр є приєднаним диференціюванням, що індукується елементом з алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є приєднаною алгеброю Лі до алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$.

  Цей результат узагальнює теорему Нееба на випадок довільного поля характеристики, відмінної від 2.
- Доведено, що всі диференціювання алгебр $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$, які є приєднаними алгебрами Лі до алгебр $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $MJ(\mathbb{F})$ відповідно, є внутрішніми.
- Доведено, що алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$, які є приєднаними алгебрами Лі до алгебр $M_I(\mathbb{F})$, $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $MJ(\mathbb{F})$ відповідно, є досконалими.

Висновки

Основною тематикою роботи є дослідження класу локально матричних алгебр та їх асимптотичних конструкцій. Такі алгебри є найбільш близькими до класу скінеченно–вимірних матричних алгебр. Одержані в дисертації результати умовно відносяться до наступних таких класів задач структурної теорії локально матричних алгебр.

Перший клас задач пов'язаний з нескінченними тензорними добутками матричних алгебр над полем довільної характеристики. Такий напрям спричинений тим, що будь–яка унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра єдиним чином розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр.

Друге відгалуження має за основу виявлення інваріантів, які би визначали локально матричні алгебри. Такими інваріантами виявилися число Стейніца та Моріта еквівалентність у випадку унітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр та так звані спектральні Стейніцові інваріанти для випадку неунітальних локально матричних алгебр.

Ще одним напрямом дисертаційних досліджень є вивчення алгебр Лі диференціювань (у тому числі зовнішніх та внутрішніх) та груп автоморфізмів (як зовнішніх, так внутрішніх) унітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр.

Продовжуючи розвивати застосування Стейніцового інваріанту, іншим напрямком дослідження у дисертації став розвиток саме структурної теорії булевих кілець з мірою, які є лінійними векторними просторами і які є природним аксіоматичним контекстом для нескінченних узагальнень стандартних просторів Хемінга. Тому їх називаємо просторами Хемінга.

Ще один напрямок досліджень є розвиток теорії алгебр Лі та теорії зображень, оскільки з локально матричними алгебрами пов'язані два важливі класи простих нескінченно–вимірних локально скінченно–вимірних алгебр, а саме, клас фінітарних алгебр та клас діагональних локально простих алгебр Лі.

І останнім умовним напрямом є дослідження ізоморфізмів груп нескінченних періодичних матриць.

Перший та другий розділи дисертаційної роботи містили огляд літератури за тематикою досліджень. У них також вводилися необхідні поняття і наводилися відомі результати, які використовувалися в подальших розділах.

У розділі 3 вивчалися числа Стейніца і розклади в тензорний добуток локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є такі:

- Показано, що алгебра Кліфорда невиродженої квадратичної форми на нескінченно–вимірному векторному просторі над полем характеристики, відмінної від 2, є локально матричною алгеброю.
- Досліджена будова скінченно–вимірних узагальнених алгебр Кліфорда $Clg(l, m)$ над полем характеристики, яка є взаємно простою з числом l.
- Показано, що для нескінченної впорядкованної множини I і поля $\mathbb{F}$, характеристика якого є взаємно простою з числом l, узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, I)$ є локально матричною алгеброю.
- Визначений інваріант довільної унітальної локально матричної алгебри, а саме — число Стейніца, яке в зліченно–вимірному випадку збігається з числом Стейніца, визначеним Гліммом.
- Побудовані приклади неізоморфних унітальних локально матричних алгебр розмірностей більших за $\aleph_0$, але таких, що мають однакові числа Стейніца. Таким чином, показано, що теорема Глімма не узагальнюється на незліченно–вимірний випадок.
- Показано, що унітальні локально матричні алгебри (довільної розмірності) мають однакові числа Стейніца тоді й лише тоді, коли їх універсальні елементарні теорії збігаються.
- Доведено існування незліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються в тензорний добуток примарних компонент. Таким чином, отримана негативна відповідь на питання Курочкіна: "чи розкладається довільна унітальна локально матрична алгебра в тензорний добуток примарних алгебр?"

- Побудована нова велика серія прикладів унітальних локально матричних алгебр, які не розкладаються у тензорний добуток матричних алгебр. Зокрема, показано, що для довільного нескінченного числа Стейніца s, відмінного від $p^{\infty} \cdot n$, де p — характеристика основного поля, а n — деяке натуральне число, знайдеться незлічення–вимірна унітальна локально матрична алгебра, яка має число Стейніца s і яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.
- Показано, що Моріта еквівалентні унітальні локально матричні алгебри мають раціонально зв'язні числа Стейніца. Причому, якщо алгебри злічення–вимірні, то умова раціональної зв'язності їх чисел Стейніца є необхідною і достатньою умовою для того, щоб вони були Моріта еквівалентними.
- Побудовані приклади не Моріта еквівалентних незлічення–вимірних унітальних локально матричних алгебр, які мають однакові числа Стейніца.
- Показано, що клас Моріта еквівалентності унітальної злічення–вимірної локально матричної алгебри є зліченною лінійно впорядкованною множиною.

У розділі 4 вивчалися спектри локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є такі:

- Для довільної локально матричної алгебри визначено її спектр, який є повною множиною чисел Стейніца.
- Класифіковані всі повні множини чисел Стейніца.
- Для довільної повної множини чисел Стейніца побудована злічення–вимірна локально матрична алгебра, яка має цю множину як спектр.
- Показано, що злічення–вимірні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються. Таким чином, отримане нове доведення теореми Діксм'є–Баранова про класифікацію неунітальних злічення–вимірних локально матричних алгебр.
- Показано, що для двох злічення–вимірних локально матричних алгебр A та B алгебра A занурюється в алгебру B як апроксимативний кут тоді й лише тоді, коли спектр алгебри A є підмножиною спектру алгебри B.

Природним аксіоматичним контекстом для нескінченних узагальнень стандартних просторів Хемінга є клас булевих кілець з мірою та структурою ліннійного векторного простору, які ще називаються просторами Хемінга. Такий клас просторів вивчався в розділі 5. Основними результатами цього розділу є:

- Визначено тензорний добуток у класі просторів Хемінга.
- Доведено, що кожен унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга є тензорним добутком стандартних просторів Хемінга, що є аналогом теореми Кьоте.
- Визначено інваріант довільного унітального локально стандартного простору Хемінга, а саме — число Стейніца, і показано, що унітальні зліченні локально стандартні простори Хемінга ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца збігаються, що є аналогом теореми Глімма.
- Показано, що для довільної узагальненої підалгебри Картана H унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри її підалгебра ідемпотентів $E(H)$ з функцією відносного рангу в ролі міри є унітальним локально стандартним простором Хемінга.
- Доведено, що кожен унітальний зліченний локально стандартний простір Хемінга може бути реалізований як алгебра ідемпотентів $E(H)$ для деякої підалгебри Картана H унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.
- Доведено, що довільні дві підалгебри Картана унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри спряжені за допомогою автоморфізму.
- Показано, що в будь–якій унітальній зліченно–вимірній локально матричній алгебрі знайдеться узагальнена підалгебра Картана, яка не спряжена з жодною підалгеброю Картана. Зокрема, не довільні дві узагальнені підалгебри Картана є спряженими.
- Доведено, що якщо підалгебри Картана унітальних зліченно–вимірних локально матричних алгебр A та B ізоморфні як простори Хемінга, то ці алгебри A та B також ізоморфні.
- Для кожного локально стандартного (не обов'язково унітального) простору Хемінга визначено його спектр і доведено, що він є повною множиною чисел Стейніца.
- Для кожної повної множини чисел Стейніца побудовано зліченний локально стандартний простір Хемінга, спектром якого є ця множина.
- Показано, що зліченні простори Хемінга ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх спектри збігаються. Таким чином, неунітальні зліченні локально

стандартні простори Хемінга параметризуються парами, які складаються з числа Стейніца і невід'ємного дійсного числа, що є аналогом теореми Діксм'є.

У розділі 6 вивчалися автоморфізми і диференціювання локально матричних алгебр. Основними результатами розділу є:

- Показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в алгебрі Лі всіх диференціювань.
- Доведено, що група внутрішніх автоморфізмів унітальної локально матричної алгебри є щільною у топології Тихонова в напівгрупі всіх унітальних ін'єктивних ендоморфізмів.
- Для довільного нескінченного тензорного добутку матричних алгебр $M_{n_i}(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, де $i \in I$, описані його диференціювання, а саме: довільне диференціювання такого тензорного добутку є нескінченною збіжною сумою внутрішніх диференціювань, яка відповідає розрідженій підмножині множини індексів I.
- Для кожної розрідженої підмножини множини індексів I знайдено топологічний базис у векторному просторі нескінченних збіжних сум внутрішніх диференціювань, який буде відповідати цій розрідженій підмножині.
- Показано, що алгебра Лі внутрішніх диференціювань зліченно–вимірної локально матричної алгебри не локально скінченно–вимірна, що є аналогом теореми Штраде.
- Показано, що кожний унітальний ін'єктивний ендоморфізм унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри єдиним чином зображується у вигляді збіжного добутку внутрішніх автоморфізмів з деякої системи представників.
- Показано, що нескінченний збіжний добуток автоморфізмів є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність обернених автоморфізмів інтегровна.
- Доведено, що узагальнена метрика Бера на напівгрупі унітальних ін'єктивних ендоморфізмів, визначає топологію Тихонова.
- Для алгебри A, яка є тензорним добутком родини матричних алгебр над полем $\mathbb{F}$, індексованим нескінченною множиною індексів I, доведено, що розмірності алгебри Лі $\mathrm{Der}(A)$ диференціювань алгебри A і алгебри Лі

Outder(A) зовнішніх диференціювань алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{|I|}$, де $|\mathbb{F}|$ та $|I|$ — потужності множин $\mathbb{F}$ та I відповідно.

- Для зліченно–вимірної локально матричної алгебри A показано, що:
  (i) розмірності алгебри Лі Der(A) диференціювань алгебри A і алгебри Лі Outder(A) зовнішніх диференціювань алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$;
  (ii) порядки групи автоморфізмів Aut(A) алгебри A і групи зовнішніх автоморфізмів OutAut(A) алгебри A дорівнюють $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$.
- Показано, що порядок групи ізометрій зліченного локально стандартного простору Хемінга дорівнює $2^{\aleph_0}$.

У розділі 7 вивчалися нескінченні періодичні матриці. Основними результатами розділу є:

- Показано, що для довільного числа Стейніца s множина $M_s^p(\mathbb{F})$ нескінченних періодичних блочно–діагональних $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$ з періодом, який ділить число Стейніца s, є локально матричною унітальною зліченно–вимірною алгеброю з числом Стейніца s. Група $GL_s^p(\mathbb{F})$ оборотних елементів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$ і її комутант $SL_s^p(\mathbb{F}) = [GL_s^p(\mathbb{F}), GL_s^p(\mathbb{F})]$ є локально $GL-$ і локально $SL-$групами відповідно.
- Доведено, що для довільного числа Стейніца s центр C_s групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ складається зі скалярних матриць, які містять які містять корені n–го степеня з одиниці на діагоналі, де n є довільним натуральним числом, яке ділить число Стейніца s.
- Показано, що якщо s — нескінченне число Стейніца, то спеціальна проективна лінійна група $PSL_s^p(\mathbb{F})$, яка є фактор–групою групи $SL_s^p(\mathbb{F})$ за її центром C_s, є простою. Також доведено, що якщо для довільного натурального дільника n числа Стейніца s у полі $\mathbb{F}$ існують корені n–го степеня, то група $PGL_s^p(\mathbb{F})$, яка є фактор–групою групи $GL_s^p(\mathbb{F})$ за центром C_s, ізоморфна групі $PSL_s^p(\mathbb{F})$.
- Доведено, що для унітальних локально матричних алгебр A та B та їх груп оборотних елементів A^* і B^* відповідно з того, що комутанти $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, випливає, що кільця A і B або ізоморфні, або антиізоморфні. Більш того, показано, що довільний ізоморфізм φ комутантів $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ або продовжується до ізоморфізму кілець A і B, або знайдеться антиізоморфізм θ цих кілець такий, що для довільного

елемента $g \in [A^*, A^*]$ дія ізоморфізму φ на цей елемент g збігається з дією антиізоморфізму θ на елемент, обернений до g.

- Доведено, що коли унітальна локально матрична алгебра зліченно–вимірна, то вона ізоморфна для деякого числа Стейніца s алгебрі $M_s^p(\mathbb{F})$ нескінченних періодичних блочно–діагональних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$ з періодом, який ділить число s. У цьому випадку алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є алгеброю з інволюцією транспонування $t : M_s^p(\mathbb{F}) \to M_s^p(\mathbb{F})$.
- Доведено, що коли A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри і комутанти $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ груп оборотних елементів ізоморфні, то алгебри A та B також ізоморфні. Більш того, для кожного ізоморфізму φ комутантів $[A^*, A^*]$ і $[B^*, B^*]$ знайдеться ізоморфізм θ кілець A та B, який або продовжує ізоморфізм φ, або для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ дія ізоморфізму φ на цей елемент g збігається з дією антиізоморфізму θ на елемент $(g^{-1})^t$.
- Показано, що групи $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ і $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли числа Стейніца s_1 та s_2 однакові.
- Доведено, що група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\big(SL_s^p(\mathbb{F})\big)$ алгебри $SL_s^p(\mathbb{F})$ ізоморфна добуткові циклічної групи порядку 2, породженої автоморфізмом групи $SL_s^p(\mathbb{F})$, який кожен елемент g цієї групи переводить в $(g^{-1})^t$, групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$ алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$ та групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ поля $\mathbb{F}$.

Нехай I — нескінченна множина, $\mathbb{F}$ — поле. Через $M_I(\mathbb{F})$ ми позначали алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику; через $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ — алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному рядку і кожному стовпчику; через $M_J(\mathbb{F})$ — алгебру $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну кількість ненульових діагоналей (матриць Якобі); через $M_\infty(I, \mathbb{F})$ — алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, які мають скінченну кількість ненульових елементів.

Основними результатами розділу 8 є такі:

- Описані диференціювання алгебр $M_\infty(I, \mathbb{F})$, $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $M_J(\mathbb{F})$. Показано, що кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ є приєднаним диференціюванням, що індукується елементом з алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, а всі диференціювання алгебр $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $M_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

- Описані диференціювання спеціальних лінійних алгебр Лі $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$, які є алгебрами Лі кососиметричних елементів алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$ відносно інволюції транспонування та симплектичної інволюції відповідно, а також спеціальної лінійної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F}) = [\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F}), \mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F})]$, де $\mathfrak{gl}_\infty(I, \mathbb{F})$ є приєднаною алгеброю Лі до алгебри $M_\infty(I, \mathbb{F})$. Показано, що кожне диференціювання цих алгебр є приєднаним диференціюванням, що індукується елементом з алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є приєднаною алгеброю Лі до алгебри $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$.

  Цей результат узагальнює теорему Нееба на випадок довільного поля характеристики, відмінної від 2.
- Доведено, що всі диференціювання алгебр $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$, які є приєднаними алгебрами Лі до алгебр $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $MJ(\mathbb{F})$ відповідно, є внутрішніми.
- Доведено, що алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$, які є приєднаними алгебрами Лі до алгебр $M_I(\mathbb{F})$, $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та $MJ(\mathbb{F})$ відповідно, є досконалими.

Список використаних джерел

1. Alahmadi Adel, Alsulamia Hamed, Zelmanov Efim, On the Morita equivalence class of a finitely presented algebra, *arXiv*:1806.00629.
2. Ayupov S. and Kudaybergenov K., Infinite dimensional central simple regular algebras with outer derivations, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41** (no. 3) (2020), 326—332.
3. Bahturin Yu.A., Baranov A.A., Zalessky A.E., Simple Lie subalgebras of locally finite associetive algebras, *Journal of Algebra*, **281** (2004), Issue.1, P.225–246.
4. Baranov A.A., Finitary simple Lie algebras, *Journal of Algebra*, **219** (1999), Issue.1, P.299–329.
5. Baranov A.A., Simple diagonal locally finite Lie algebras, *Proc. London Math. Soc.*, **77** (1998), P.362–386.
6. Baranov A.A., Classification of the direct limits of involution simple associative algebras and the corresponding dimension groups, *Journal of Algebra*, **381** (2013), P.73–95.
7. Baranov A.A., Strade H., Finitary Lie algebras, *Journal of Algebra*, **254** (2002), Issue.1, P.173–211.
8. Baranov A.A., Zhilinskii A.G., Diagonal direct limits of simple Lie algebras, *Commun. in Algebra*, **27** (1999), no. 6, P.2749–2766.
9. Beidar K.I., Brešar M., Chebotar M.A., Martindale 3rd W.S., On Herstein's Lie map conjectures I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353** (2001), P.4235–4260.
10. Beidar K.I., Brešar M., Chebotar M.A., Martindale 3rd W.S., On Herstein's Lie map conjectures II, *J. Algebra*, **238** (2001), P.239–264.
11. Beidar K.I., Brešar M., Chebotar M.A., Martindale 3rd W.S., On Herstein's Lie map conjectures III, *J. Algebra*, **249** (2002), P.59–94.

12. Beidar K.I., Chebotar M.A., On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras, *Israel J. Math.*, **123** (2001), P.131–148.

13. Beidar K.I., Chebotar M.A., On surjective Lie homomorphisms onto Lie ideals of prime rings, *Comm. Algebra*, **29** (2001), P.4775–4793.

14. Belyaev V.V., Locally finite Chevalley groups, *Studies in Group Theory, Urals. Scientific Center of the Academy of Sciences of the SSSR, Sverdlovsk*, (1984), P.39–50.

15. Belyaev V.V., Semisimple periodic groups of finitary transformations, *Algebra and Logic*, **32** (1993), P.17–33.

16. Belyaev V.V., Structure of periodic finitary transformation groups, *Algebra and Logic*, **33** (1994), P.195–204.

17. Berest Yuri, Wilson George, Automorphisms and ideals of the Weyl algebra, *Math. Ann.*, **318** (2000), no. 1, P.127–147.

18. Bergman George M., The Diamond Lemma for Ring Theory, *Adv. Math.*, **29** (1978), P.178–218.

19. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras, *arXiv:*2007.15716v1 [math.RA] 30 Jul 2020.

20. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras and groups, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, (2020), No.9, P.19–23.

21. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.90.

22. Bezushchak Oksana, On diagonal locally SL–groups, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2019), P.8–11.

23. Bezushchak O., On Green's relations of inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers, *Abstracts of the International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006* (2006, July 30-August 5, Kyiv, Ukraine), P.16–17.

24. Bezushchak O., On the Lie structure of locally matrix algebras, *Carpathian Math. Publ.*, **12** (2020), no.2, P.311–316.

25. Bezushchak O., On some inverse semigroup of partially defined transformations of integers, *Abstracts of the 5th International Algebraic Conference in Ukraine*, (2005, July 20–27, Odessa, Ukraine), P.35.
26. Bezushchak O., Parabolic subgroups of homogenous trees automorphism groups, *Abstracts of the 4th International Algebraic Conference in Ukraine*, (2003, August 4-9, Lviv, Ukraine), P.42–44.
27. Bezushchak O., Spectra of locally matrix algebras, *arXiv:*2011.08264v1 [math.RA] 16 Nov 2020.
28. Bezushchak O., The lattice of closed normal subgroups of the isometry group of generalized Baire's metric space, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **8** (2002), P.33–36.
29. Bezushchak O.O., Oliynyk B.V., Diagonal limits of linear groups, *Abstracts of the 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko*, (2017, Juiy 3-7, , Kyiv, Ukraine), P.21.
30. Bezushchak O. and Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *J. Algebra Appl.*, доступна онлайн з 3 серпня 2020, www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0219498821501474(2020).
31. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv*, (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.19.
32. Bezushchak Oksana, Oliynyk Bogdana, Ordinality of isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Математика. Механіка*, **1** (2020), P.18–20.
33. Bezushchak O. and Oliynyk B., Unital locally matrix algebras and Steinitz numbers, *J. Algebra Appl.*, **19** (2020), no.9., Doi:10.1142/SO219498820501807.
34. Bezushchak O. and Oliynyk B., Primary decompositions of unital locally matrix algebras, *Bull. Math. Sci.* **10** (2020), no.1, Doi:10.1142/S166436072050006X.
35. Bezushchak O. and Oliynyk B., Morita equivalent unital locally matrix algebras, *Algebra Discrete Math.* **29** (2020), no.2. P.173–179.
36. Bezushchak O. Oliynyk B., Sushchanskyy V., Relational structures and Steinitz's lattice, *Abstracts of the International mathematical conference "Groups and Actions:*

Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy", (2016, December 19-22, Kyiv, Ukraine), P.12.

37. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures, *Algebra Discrete Math.*, **21** (2016), no.2, P.184—201.

38. Bezushchak O.O., Sushchans'kyi, V.I., Groups of periodically defined linear transformations of an infinite-dimensional vector space, *Укр. мат. журн.*, **67** (2016), no.10, P.1457–1468.

39. Bezushchak O.E., Zaitsev M.V., Exponents of Identities of Group Rings, *Матем. заметки*, **89** (2011), no.5, P. 643–651.

40. Bezushchak O., Zaicev M., Special Lie superalgebras with maximality condition for subalgebras, *Rend. Circ. Matem. di Palermo*, **60** (2011), no.3, P.395–401.

41. Blanchard F., Formenti E., Kurka P., Cellular Automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl Topological Spaces, *Complex Systems*, **11** (1997), N.2, P.107–123.

42. Bokut L.A., Chen Yuqun, Gröbner–Shirshov bases and their calculation, *Bull. Math. Sci.*, **4** (2014), no.3, P.325—395. DOI 10.1007/s13373-014-0054-6

43. Borovik A.V., Periodic linear groups of odd characteristic, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **266** (1982), P.1289–1291.

44. Bratteli O., Inductive limits of finite dimentional C^*–algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **171** (1972), P.195–234.

45. Buchberger B., Winkler F., Grobner bases and applications, *Cambridge: Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Ser.,* ***251***, (1998). 552p.

46. Cameron P.J., Tarzi S., Limits of cubes, *Topology and its Applications*, **155** (2008), Is.14, P.1454–1461.

47. Chang C.C. and Keisler H. Jerome, Applications of ultraproducts of pairs of cardinals to the theory of models, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), no.3, P.835–845.

48. Chang C.C., Keisler H. Jerome, Continuous Model Theory, *Princeton University Press*, (1966), 165p.

49. Chen Xiaojun, Eshmatov Alimjon, Eshmatov Farkhod, Futorny Vyacheslav, Automorphisms and Ideals of Noncommutative Deformations of $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, *arXiv*:1606.05424.

50. Cornwell J.F., Group theory in physics, *Cambridge Univ. Press.*, (1997).

51. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa N., Transformation groups for soliton equations. III. Operator approach to the Kadomtsev-Petrashvili equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **50** (1981), no.11, P.3806–3812.

52. Dimitrov I., Penkov I., Locally semisimple and maximal subalgebras of the finitary Lie algebras $\mathfrak{gl}(\infty)$, $\mathfrak{sl}(\infty)$, $\mathfrak{so}(\infty)$, $\mathfrak{sp}(\infty)$, *J. Algebra*, **322** (2009), P.2069–2081.

53. Dixmier J., On some C^*-algebras considered by Glimm, *J. Funct. Anal.*, **1** (1967), P.182–203.

54. Drensky Vesselin, Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra, *Springer-Verlag Singapore, Singapore*, (2000). xii+271 pp. ISBN: 981-4021-48-2.

55. Drozd Yu.A., Kirichenko V.V., Finite Dimensional Algebras, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York*, (1994).

56. Elliott G., On classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras, *J. Algebra*, **38** (1976), P.29–41.

57. Engelking R., General Topology, *Heldermann Verlag, Berlin. Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics*, **6** (1989).

58. Frenkel I., Penkov I., Serganova V., A categorification of the boson-fermion correspondence via representation theory of $\mathfrak{sl}(\infty)$, *Comm. Math. Phys.*, **3** (2016), P.911–931.

59. Glimm J.G., On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), no.2, P.318–340.

60. Golubchik I.Z., Linear Groups over Associative Rings, *Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics, Ufa* (*in Russian*), (1997).

61. Golubchik I.Z. and Mikhalev A.V., Isomorphisms of the general linear group over an associative ring, *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, **3** (1983), P.61–72.

62. Gubareni Nadiya M., Kirichenko Vladimir V., Ring and Modules, *Wydawnictno Politechniki Czestochowskiej, Czestochowa* (2001).

63. Hahn A.J., O'Meara O.T., The classical groups and K–theory, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York*, (1989).

64. Hall J.I., Infinite alternating groups an finitary linear transformation groups, *J. Algebra*, **119** (1988), P.337–359.

65. Hall J.I., Locally finite simple groups of finitary linear transformations. In: Finite and locally finite groups (Borovik A.V., Bryant R.M., Hatley B. and Seitz G.M., eds.), *Kluwer Academic Publisher*, (1995), P.147–188.

66. Hall J.I., Periodic simple groups of finitary linear transformations, *Annals of Math.*, **163** (2006), P.445–498.

67. Hartley B. and Shute G., Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, *Quart. J. Math.*, **35** (1984), Issue1, P.49–71.

68. Hennig J., Simple locally finite dimensional Lie algebras in positive characteristic, *J. Algebra*, **413** (2014), P.270–288.

69. Herstein I.N., Noncommutative Rings, *Carus Mathematical Monographs*, **15**, *Mathematical Association of America*, (1968).

70. Herstein I.N., On the Lie and Jordan rings of a simple associetive ring, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), no.2, P.279–285.

71. Herstein I.N., Lie and Jordan structures in simple associetive rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), P.517–531.

72. Holubowski W., Žurek S., Ideals and derivations of the Lie algebra of column–finite infinite matrices, *arXiv:*1806.01099v1 [math.RA] 4 Jun 2018.

73. Horn A., and Tarski A., Measure in Boolean subalgebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), P.467–497.

74. Humphreys James E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, *Springer–Verlag, New York Heidelberg Berlin*, (1972), 169p.

75. Jacobson N., Lectures in abstract algebra. Graduate Texts in Mathematics, Vol.**2**. Linear algebra, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York*, (1975).

76. Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, *American Mathematical Soc.*, (1968).

77. Jacobson Nathan, Structure of rings, *Colloquium Publications*, **37** (1956).

78. Jech T., Algebraic characterizations of measure algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), P.1285–1294.

79. Kegel O., Wehrfritr B., Locally finite groups, *Amsterdam: Noth–Holland*, (1973).

80. Kelley J.L., Measures on Boolean algebras, *Pasific J. Math.*, **9** (1959), no.4, P.1165–1177.

81. Köthe G., Schiefkörper unendlichen Ranges uber dem Zentrum, *Math. Ann.*, **105** (1931), P.15–39.

82. Kroshko N., Sushchansky V., Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings, *Arch. Math.*, **71** (1998), P.173–182.

83. Kurochkin V.M., On the theory of locally simple and locally normal algebras, *Mat. Sb., Nov. Ser.*, **22(64)** (1948), no.3, P.443–454.

84. Kurosh A., Direct decompositions of simple rings, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, **11**(**53**) (1942), no.3, P.245–264.

85. Lam T.Y., Lectures on modules and rings, *Graduate Texts in Mathematics*, **189**, *New York, NY: Springer-Verlag* (1999).

86. Leinen F. and Puglisi O., Diagonal limits of finite alternating groups: confined subgroups, ideals, and positive definite functions, *Illinois Journal of Mathematics*, **47** (2003), no.1/2, P.345-–360.

87. Leinen F., Puglisi O., Cofined subgroups in periodic simple linear groups, *Israel J. Math.*, **128** (2002), P.285–324.

88. Mal'cev A.I., Algebraic Systems, *Springer–Verlag, New York–Heidelberg*, (1973).

89. Morita Kiiti, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A.*, **6** (1958), no.150, P.83–142.

90. Neeb K.-H., Derivations of locally simple Lie algebras, *J. Lie Theory*, **15** (2005), P.589–594.

91. Oliynyk B., The diagonal limits of Hamming spaces, *Algebra and Discrete Math.*, **15** (2013), N.2, P.229–236.

92. Olijnyk B.V., The universality of countable Hamming space with respect to isomorphical embedding, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **2** (1996), P.53–62.

93. Oliynyk B.V., Sushchanskii V.I., The isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Сиб. матем. журн.*, **54** (2013), N.1, P.124–136.

94. Penkov I., Chirvasitu A., Ordered tensor categories and representations of the Mackey Lie algebra of infinite matrices, *Algebras and Representation Theory*, **22** (2019), P.249-279.

95. Penkov I., Serganova V., Categories of integrable $\mathfrak{sl}(\infty)$-, $\mathfrak{o}(\infty)$-, $\mathfrak{sp}(\infty)$-modules, in Representation Theory and Mathematical Physics, *Contemporary Math., Amer. Math. Soc.*, **557** (2011), P.335–357.

96. Pierce R.S., Associative Algebras, Graduate Texts in Mathematics, **88**, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York*, (1982).

97. Phillips R.E., The structure of groups of finitary transformations, *J. Algebra*, **119** (1988), P.400–448.

98. Phillips R.E., Finitary linear groups: a survey. In: Finite and locally finite groups, *Kluwer Academic Publisher*, (1995), P.111–146.

99. Ramakrishnan A., L–matrix theory : or, The grammar of Dirac matrices, *Tata McGraw-Hill Pub. Co.*, (1972).

100. Rubin Jean E., Set Theory for the Mathematician, *New York: Holden-Day*, (1967).

101. Seligman G.B., Modular Lie Algebras, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg*, (1967).

102. Sakai Shoichiro, Derivations of uniformly hyperfinite $\mathbb{C}^*$–algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A*, **3** (1967), P.167–175.

103. Steinitz E., Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **137** (1910), P.167–309.

104. Strade H., Locally finite dimensional Lie algebras and their derivation algebras, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **69** (1999), P.373—391.

105. Talagrand M., Maharam's Problem, *Ann. of Math.*, **168** (2008), P.981–1009.

106. Vershik A.M., Theory of decreasing sequences of measurable partitions, (Russian) *Algebra i Analiz*, **6** (1994), N.4, P.1–68; *translation in St. Petersburg Math. J. V.*, **6** (1995), N.4, P.705–761.

107. Vershik A. M., Kerov S. V., Locally semisimple algebras. Combinatorial theory and the K_0-functor, *J. Soviet Math.*, (1987), P.1701–1733.

108. Van der Waerden B.L., Algebra I, II, *Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York*, (1965).

109. Willard S., General Topology, *Mineola, New York: Dover Publications*, (2004).

110. Zalesskii A.E., Direct limits of finite dimensional algebras and finite groups, *Trends in Ring Theory: Proceedings of a conference in Miskolc, Hungury* (1996, July 15–20, Miskolc, Hungury), *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, (1998).

111. Zalesskii A.E., Group rings of inductive limits of alternating groups, *Leningrad Mathematical Journal*, **2** (1991), no.6, P.1287–1303.

112. Zelmanov E.I., Isomorphisms of linear groups over associative rings, *Sib. Mat. Zh.*, **26** (1985), No.4, P.49–67.

113. Басс Х., Алгебраическая К–теория, пер. с англ., *М.: Мир*, (1973).

114. Безущак О.О., Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **2** (2014), С.9–13.

115. Безущак О.О., Про ідеали інверсного моноїда частково визначених ко-скінченних автоморфізмів лінійки, *Тези Дванадцятої Міжнародної наукової конференції імені Академіка М.Кравчука*, (2008, 15–17 травня, Київ, Україна), С.497.

116. Безущак О.О., Про стабілізатор шляху в однорідному дереві валентності *n*, *Тези III Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні*, (2001, 2–8 липня, Суми, Україна), С.125–126.

117. Безущак О.О., Про функцію довжини та порядок Брюа для груп ізометрій скінченних берівських метрик, *Тези II Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні, присвяченій пам'яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990)*, (1999, 9–16 травня, Київ–Вінниця, Україна), С.54–55.

118. Безущак О.О., Розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій простору узагальненого берівського типу, *Мат. студ.*, **17** (2002), №1, С.29–40.

119. Безущак О.О., Спряженість в групі автоморфізмів некореневого дерева, *Тези Міжнародної алгебраїчної конференції, присв'яченій 100–річчю роботи Граве в Київському університеті*, (2002, 17–22 червня, Київ, Україна), С.69–70.

120. Безущак О.О., Беляев А.А., Зайцев М.В., Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **3** (2012), С.7–9.

121. Боревич З.И., Вавилов Н.А., Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом, *Тр. МИАН СССР*, **165** (1984), С.24-–42.

122. Борель А., Линейные алгебраические группы, *М.: Мир*, (1972), 269с.

123. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, Главы 1, 2, 3, *М.: Мир*, (1976), 495с.

124. Бурбаки Н., Элементы математики. Общая топология. Основные структуры, *М.: Наука*, (1968), 275с.

125. Бурбаки Н., Теория множеств, *М.: Мир*, (1965), 456с.

126. Вавилов Н.А., Степанов А.В., Линейные группы над общими кольцами. Общие места, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **394** (2011), С.33-–139.

127. Вершик А.М., Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений, *Алгебра и анализ*, **6** (1994), № 4, С.1–68.

128. Вершик А. М., Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения, *Докл. АН СССР*, **193** (1970), № 4. С.748–751.

129. Винберг Э.Б., Курс алгебры, 2-е изд., *М.: Из–во МЦНМО*, (2013) 592с.

130. Джекобсон Н., Алгебры Ли, *М.: Мир*, (1964), 355с.

131. Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп, *М.: Мир*, (1974).

132. Энгелькинг Р., Общая топология, *М.: Мир*, (1986), 752с.

133. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч., Теория моделей. *М.: Мир*, (1977), 614с.

134. Кострикин А.И., Введение в алгебру, т.2 Линейная алгебра. *М.: Физико-математическая литература*, (2000).

135. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П., Общая алгебра. Т.**1**, *М.: Наука*, (1990), 592с.

136. Пирс Р., Ассоциативные алгебры, *М.: Мир*, (1986), 547с.

137. Фейгин Б.Л., Цыган Б.Л., Когомологии алгебр Ли обобщенно-якобиевых матриц, *Функц. анализ и его прил.*, **17** (1983), вып.2, С.86–87.

Додаток

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Безущак О.О., Розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій простору узагальненого берівського типу, *Мат. студ.*, **17** (2002), №1, С.29–40.
2. Bezushchak O., The lattice of closed normal subgroups of the isometry group of generalized Baire's metric space, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **8** (2002), P.33–36.
3. Bezushchak O.E., Zaitsev M.V., Exponents of Identities of Group Rings, *Матем. заметки*, **89** (2011), no.5, P.643–651.
4. Bezushchak O., Zaicev M., Special Lie superalgebras with maximality condition for subalgebras, *Rend. Circ. Matem. di Palermo*, **60** (2011), no.3, P.395–401.
5. Безущак О.О., Беляев А.А., Зайцев М.В., Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **3** (2012), С.7–9.
6. Безущак О.О., Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **2** (2014), С.9–13.
7. Bezushchak O.O., Sushchans'kyi V.I., Groups of Periodically Defined Linear Transformations of an Infinite-Dimensional Vector Space, *Укр. мат. журн.*, **67** (2016), Issue 10, P.1457–1468.
8. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures, *Algebra Discrete Math.*, **21** (2016), no.2, P.184—201.
9. Bezushchak O., On diagonal locally SL−groups, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2019), P.8–11.

10. Bezushchak O., Oliynyk B., Unital locally matrix algebras and Steinitz numbers, *J. Algebra Appl.*, **19** (2020), no.9. Doi:10.1142/SO219498820501807.
11. Bezushchak O., Oliynyk B., Primary decompositions of unital locally matrix algebras, *Bull. Math. Sci.*, **10** (2020), no.1. Doi:10.1142/S166436072050006X.
12. Bezushchak O., Oliynyk B., Morita equivalent unital locally matrix algebras, *Algebra Discrete Math.*, **29** (2020), no.2, P.173–179.
13. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras and groups, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **9** (2020), P.19–23.
14. Bezushchak O., On the Lie structure of locally matrix algebras, *Carpathian Math. Publ.*, **12** (2020), no.2, P.311–316.
15. Bezushchak Oksana, Oliynyk Bogdana, Ordinality of isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Математика. Механіка*, **1** (2020), P.18–20.
16. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *J. Algebra Appl.*, доступна онлайн з 3 серпня 2020, www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0219498821501474(2020).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Безущак О.О., Про функцію довжини та порядок Брюа для груп ізометрій скінченних берівських метрик, *Тези II Міжнародної алгебраїчної конференції пам'яті Л.А.Калужніна* (1999, 9–16 травня, Київ–Вінниця, Україна), с.54–55.
2. Безущак О.О., Про стабілізатор шляху в однорідному дереві валентності *n*, *Тези III Міжнародної алгебраїчної конференції* (2001, 2–8 липня, Суми, Україна), с.125–126.
3. Безущак О.О., Спряженість в групі автоморфізмів некореневого дерева, *Тези Міжнародної алгебраїчної конференції присв'яченій 100–річчю роботи Граве в Київському університеті* (2002, 17–22 червня, Київ, Україна), с.69–70.
4. Bezushchak O., Parabolic subgroups of homogenous trees automorphism groups, *Abstracts of the 4th International Algebraic Conference in Ukraine* (2003, August 4–9, Lviv, Ukraine), pp.42–44.
5. Bezushchak O., On some inverse semigroup of partially defined transformations of integers, *Abstracts of the 5th International Algebraic Conference in Ukraine* (2005, July 20–27, Odessa, Ukraine), p.35.

6. Bezushchak O., On Green's relations of inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers, *Abstracts of the International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006* (2006, July 30 – August 5, Kyiv, Ukraine), pp.16–17.
7. Безущак О.О., Про ідеали інверсного моноїда частково визначених ко-скінченних автоморфізмів лінійки, *Тези Дванадцятої Міжнародної наукової конференції імені Академіка М.Кравчука* (2008, 15–17 травня, Київ, Україна), p.497.
8. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchanskyy V., Relational structures and Steinitz's lattice, *Abstracts of the International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy"* (2016, December 19–22, Kyiv, Ukraine), p.12.
9. Bezushchak O.O., Oliynyk B.V., Diagonal limits of linear groups, *Abstracts of the 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko*, (2017, Juiy 3–7, Kyiv, Ukraine), p.21.
10. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), p.90.
11. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), p.19.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції:

1. II Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена пам'яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990), м.Київ – м.Вінниця, Україна, 9–16 травня 1999р.
2. III Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м.Суми, Україна, 2–8 липня 2001р.
3. Міжнародна алгебраїчна конференція присв'ячена 100–річчю роботи Граве в Київському університеті, м.Київ, Україна, 17–22 червня 2002р.
4. 4th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Львів, Україна, 4–9 серпня 2003р.
5. 5th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Одеса, Україна, 20–27 липня 2005р.
6. International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006, м.Київ, Україна, 30 липня – 5 серпня 2006р.
7. Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені Академіка М.Кравчука, м.Київ, Україна, 15–17 травня 2008р.
8. International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy", м.Київ, Україна, 19–22 грудня 2016р.
9. 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko, м.Київ, Україна, 3–7 липня 2017р.
10. International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Book of Abstracts, м.Київ, Україна, 14–17 липня 2020р.

Наукові семінари:

1. Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2009–2010, м.Київ, Україна, 2010р.
2. Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2013–2014, м.Москва, Росія, 2014р.

3. Семінар з алгебри Університету Каліфорнії, м.Сан-Дієго, США, 2019р.
4. Алгебраїчний семінар Інституту математики Національної Академії Наук України, м.Київ, Україна, 2020р.
5. Алгебраїчний семінар Київського університету, м.Київ, Україна, 2020 р.
6. Алгебраїчний семінар кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м.Київ, Україна, 2020 р.