НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Безущак Оксана Омелянівна Безущак

УДК 512.54, 512.55, 512.56

СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ ТА АСИМПТОТИЧНІ КОНСТРУКЦІЇ ЛОКАЛЬНО МАТРИЧНИХ АЛГЕБР

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий консультант: доктор фізико–математичних наук, професор
Петравчук Анатолій Петрович;
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор
КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, професор кафедри геометрії і алгебри;

доктор фізико–математичних наук, професор
СЕРГЕЙЧУК Володимир Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології;

доктор фізико–математичних наук,
старший науковий співробітник
ЩЕДРИК Володимир Пантелеймонович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться 26 січня 2021 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 17 грудня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Ю.Ю. Сорока

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено структурній теорії класу локально матричних алгебр. Інтерес до локально матричних алгебр і локально напівпростих алгебр виник у зв'язку з тим, що ці нескінченно–вимірні алгебри найбільш близькі до скінченно–вимірних матричних алгебр[1].

У 1931 році Г. Кьоте[2] довів, що будь–яка унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра єдиним чином розкладається в нескінченний тензорний добуток матричних алгебр над полем. Більш того, Г. Кьоте розповсюдив цей результат на більш широкий клас локально нормальних (тобто локально простих скінченно–вимірних центральних) алгебр.

О.Г. Курош[3] у 1942 році побудував приклад, який показав, що теорема Кьоте не узагальнюється на випадок незліченно–вимірних локально матричних алгебр. Робота О.Г. Куроша була продовжена його учнем В.М. Курочкіним[4], який вивчав єдиність розкладів локально матричних алгебр у тензорний добуток скінченно–вимірних і примарних компонент. Основним питанням, яке залишалося відкритим, було: *чи розкладається довільна локально матрична алгебра в тензорний добуток примарних алгебр*?

У дисертаційній роботі побудовано приклад незліченно–вимірної локально матричної алгебри, яка не розкладається в тензорний добуток примарних алгебр. Таким чином, отримано негативну відповідь на сформульоване В.М. Курочкіним питання.

Наступний сплеск інтересу до локально матричних алгебр виник у зв'язку з їх застосуваннями в теорії C^*–алгебр. Дж. Глімм[5] показав, що будь–яка апроксимативно скінченно–вимірна C^*–алгебра містить щільну унітальну зліченно–вимірну локально матричну алгебру. Для довільної унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри Дж. Глімм визначив інваріант — число Стейніца, і показав, що цей інваріант визначає алгебру з точністю до ізоморфізму.

---

[1] Vershik A. M., Kerov S. V., Locally semisimple algebras. Combinatorial theory and the K_0-functor, *J. Soviet Math.*, (1987), P.1701–1733.

[2] Köthe G., Schiefkörper unendlichen Ranges uber dem Zentrum, *Math. Ann.*, **105** (1931), P.15–39.

[3] Kurosh A., Direct decompositions of simple rings, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, **11**(**53**) (1942), no.3, P.245–264.

[4] Kurochkin V.M., On the theory of locally simple and locally normal algebras, *Mat. Sb., Nov. Ser.*, **22(64)** (1948), no.3, P.443–454.

[5] Glimm J.G., On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), no.2, P.318–340.

Продовжуючи роботу Дж. Глімма, Ж. Діксм'є[6] класифікував неунітальні зліченно–вимірні локально матричні алгебри над полем нульової характеристики. Ж. Діксм'є показав, що кожній такій алгебрі можна поставити у відповідність пару (s, α), де s — число Стейніца, а α — невід'ємне дійсне число, і що така пара визначає алгебру з точністю до ізоморфізму.

О.О. Баранов[7] поширив теорему Ж. Діксм'є на випадок довільного поля. Більш того, він описав зліченно–вимірні локально інволютивно прості алгебри, тобто алгебри з інволюцією, які мають локальну систему скінченно–вимірних інволютивно простих підалгебр.

Конструкції Дж. Глімма, Ж. Діксм'є, О.О. Баранова суттєво використовують зліченно–вимірність алгебри. У дисертаційній роботі ми визначаємо число Стейніца унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності. Цей інваріант у незліченно–вимірному випадку не визначає алгебру з точністю до ізоморфізму, але (як доведено в роботі) визначає її універсальну елементарну теорію. Крім цього, ми також визначили інваріант не обов'язково унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності — множину чисел Стейніца, яку ми називаємо спектром алгебри, описали усі можливі спектри і показали, як теорема Діксм'є–Баранова випливає з цього опису.

Диференціювання зліченно–вимірних локально простих (тобто таких, для яких існує локальна система простих скінченно–вимірних підалгебр) алгебр Лі над полем нульової характеристики вивчалися в роботі Х. Штраде[8]. Ш.А. Аюпов і К.К. Кудайбергенов[9] побудували ненульове зовнішнє диференціювання унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри з числом Стейніца 2^{∞}. У дисертаційній роботі описуються диференціювання і автоморфізми унітальних локально матричних алгебр, доведено, що для локально матричної алгебри A ідеал внутрішніх диференціювань і нормальна підгрупа внутрішніх автоморфізмів щільні в топології Тихонова в алгебрі Лі усіх диференціювань та групі всіх автоморфізмів алгебри A відповідно. Крім цього, описані диференціювання і автоморфізми унітальної зліченно–вимірної локально матричної алгебри. Зокрема, знайде-

[6] Dixmier J., On some C^*-algebras considered by Glimm, *J. Funct. Anal.*, **1** (1967), P.182–203.

[7] Baranov A.A., Classification of the direct limits of involution simple associative algebras and the corresponding dimension groups, *J. Algebra*, **381** (2013), P.73–95.

[8] Strade H., Locally finite dimensional Lie algebras and their derivation algebras, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **69** (1999), P.373—391.

[9] Ayupov S. and Kudaybergenov K., Infinite dimensional central simple regular algebras with outer derivations, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41** (no. 3) (2020), 326—332.

на розмірність алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядок групи зовнішніх автоморфізмів.

З локально матричними алгебрами пов'язані два важливі класи простих нескінченно–вимірних локально скінченно–вимірних алгебр. Перший клас — фінітарні алгебри, тобто алгебри Лі, які складаються з перетворень скінченного рангу деякого векторного простору. О.О. Баранов[10] і О.О. Баранов та Х. Штраде[11] довели, що будь–яка проста зліченно–вимірна фінітарна алгебра Лі ізоморфна одній з алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$, тобто мають вигляд $[A, A]$ або $[K(A,*), K(A,*)]$, де $A = M_\infty(\mathbb{F})$ — алгебра фінітарних $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, $*$ або інволюція транспонування, або симплектична інволюція, а $K(A,*)$ — алгебра Лі усіх кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів.

Інший клас — діагонально локально прості алгебри Лі, тобто алгебри, які мають локальну систему простих скінченно–вимірних підалгебр, що вкладаються одна в одну діагонально. Ю.О. Бахтурін, О.О. Баранов, О.Ю. Залеський[12] довели, що над алгебрично замкненим полем характеристики нуль такі алгебри вичерпуються алгебрами $[A, A]$, де A — локально матрична алгебра, і алгебрами $[K(A,*), K(A,*)]$, де $(A,*)$ — локально інволютивно проста алгебра. Дж. Хеннінг[13] розповсюдила цей результат на алгебри над полем характеристики більшої за 5. У дисертаційній роботі ми вивчаємо алгебри Лі нескінченних матриць $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$, а також алгебру $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка є приєднаною до алгебри $(I \times I)$–матриць зі скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпчику і кожному рядку, та алгебру Лі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ матриць Якобі.

Зображенням таких алгебр присвячена велика кількість робіт[14,15].

---

[10] Baranov A.A., Finitary simple Lie algebras, *J. Algebra*, **219** (1999), Issue.1, P.299–329.

[11] Baranov A.A., Strade H., Finitary Lie algebras, *J. Algebra*, **254** (2002), Issue.1, P.173–211.

[12] Bahturin Yu.A., Baranov A.A., Zalessky A.E., Simple Lie subalgebras of locally finite associetive algebras, *J. Algebra*, **281** (2004), Issue.1, P.225–246.

[13] Hennig J., Simple locally finite dimensional Lie algebras in positive characteristic, *J. Algebra*, **413** (2014), P.270–288.

[14] Dimitrov I., Penkov I., Locally semisimple and maximal subalgebras of the finitary Lie algebras $\mathfrak{gl}(\infty)$, $\mathfrak{sl}(\infty)$, $\mathfrak{so}(\infty)$, $\mathfrak{sp}(\infty)$, *J. Algebra*, **322** (2009), P.2069–2081.

[15] Penkov I., Serganova V., Categories of integrable $\mathfrak{sl}(\infty)$-, $\mathfrak{o}(\infty)$-, $\mathfrak{sp}(\infty)$-modules, in Representation Theory and Mathematical Physics, *Contemporary Math., Amer. Math. Soc.*, **557** (2011), P.335–357.

У роботах [16,17,18] розглядалися застосування теорії зображень алгебр нескінченних матриць у математичній фізиці і в теорії солітонов. К.–Х. Нееб[19] описав диференціювання алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{F})$ над полем нульової характеристики. Використовуючи доведену у дисертаційній роботі щільність ідеала внутрішніх диференціювань у топології Тихонова, ми узагальнили теорему Нееба на випадок поля довільної характеристики відмінної від 2, а також показали, що всі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ та алгебри матриць Якобі $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

У дисертаційній роботі вивчаються також введені В.І. Сущанським[20,21] групи нескінченних матриць, які відповідають числам Стейніца, обговорюються їх центри та простота. Описуються ізоморфізми і автомрфізми груп періодичних нескінченних матриць.

Класом алгебричних структур, які тісно повязані з локально матричними алгебрами і вивчаються в дисертаційній роботі, є локально стандартні простори Хемінга (булеві кільця з мірою). Стандартним способом обчислення відстані між двома двійковими векторами однакової довжини є метрика Хемінга на просторі $\mathbb{Z}_2^n$. Ми називаємо цей простір стандартним простором Хемінга.

У роботах Н.В. Крошко і В.І. Сущанського[22], П. Камерона і С. Тарзі[23], Б.В. Олійник[24], Б.В. Олійник і В.І. Сущанського[25] розглянуті

[16] Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa N., Transformation groups for soliton equations. III. Operator approach to the Kadomtsev-Petrashvili equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **50** (1981), no.11, P.3806–3812.

[17] Frenkel I., Penkov I., Serganova V., A categorification of the boson-fermion correspondence via representation theory of $\mathfrak{sl}(\infty)$, *Comm. Math. Phys.*, **3** (2016), P.911–931.

[18] Фейгин Б.Л., Цыган Б.Л., Когомологии алгебр Ли обобщенно-якобиевых матриц, *Функц. анализ и его прил.*, **17** (1983), вып.2, С.86–87.

[19] Neeb K.-H., Derivations of locally simple Lie algebras, *J. Lie Theory*, **15** (2005), P.589–594.

[20] Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures, *Algebra Discrete Math.*, **21** 2016, no.2, P.184—201.

[21] Bezushchak O.O., Sushchans'kyi, V.I., Groups of periodically defined linear transformations of an infinite-dimensional vector space, *Ukr. Math. J.*, **67** (2016), no.10, P.1457–1468.

[22] Kroshko N., Sushchansky V., Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings, *Arch. Math.*, **71** (1998), P.173–182.

[23] Cameron P.J., Tarzi S., Limits of cubes, *Topology and its Applications*, **155** (2008), Is.14, P.1454–1461.

[24] Oliynyk B., The diagonal limits of Hamming spaces, *Algebra Discrete Math.*, **15** (2013), N.2, P.229–236.

[25] Oliynyk B.V., Sushchanskii V.I., The isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Siberian Mathematical Journal*, **54** (2013), N.1, P.124–136.

приклади прямих границь стандартних просторів Хемінга. Природним аксіоматичним контекстом для вивчення цих прикладів є теорія булевих алгебр з мірою (див. роботу А. Хорна і А. Тарського[26], у роботі[25] вони названі просторами Хемінга).

Для локально стандартних просторів Хемінга у дисертаційній роботі визначаються числа Стейніца і побудована теорія, паралельна теорії локально матричних алгебр. Крім цього, доведено аналог теореми Діксм'є для неунітальних просторів Хемінга.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних науково–дослідницьких тем № 16БФ038-01 «Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури» (номер державної реєстрації 0116U004752) та № 19БФ038-02 «Розробка нових аналітико-геометричних, асимптотичних та якісних методів дослідження інваріантних множин диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0119U100334) кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета та задачі дослідження. Основною тематикою роботи є дослідження класу локально матричних алгебр та їх асимптотичних конструкцій. Такі алгебри є найбільш близькими до класу скінеченно–вимірних матричних алгебр. Вони знайшли своє широке застосування в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, математичній фізиці, лінійній алгебрі, теорії алгебр з мірою.

Метою дисертаційної роботи є побудова структурної теорії локально матричних алгебр, опис їх автоморфізмів і диференціювань, а також пов'язаних з ними груп і алгебр Лі нескінченних матриць та булевих кілець з мірою (просторів Хемінга).

Об'єктом дослідження є локально матричні алгебри довільної розмірності та їх асимптотичні конструкції, нескінченні тензорні добутки матричних алгебр, простори Хемінга, групи і алгебри Лі нескінченних матриць.

Предметом дослідження є стейніцові і спектральні інваріанти локально матричних алгебр та локально стандартних просторів

[26] Horn A., and Tarski A., Measure in Boolean subalgebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), P.467–497.

Хемінга, універсальна еквівалентність та Моріта еквівалентність унітальних незліченно–вимірних локально матричних алгебр, диференціювання та автоморфізми локально матричних алгебр, розмірності їх алгебр диференціювань і порядки груп автоморфізмів, а також диференціювання алгебр нескінченних матриць.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються асимптотичні конструкції абстрактної алгебри і теорії моделей, а також структурна теорія скінченно–вимірних та нескінченно–вимірних асоціативних алгебр, лінійна алгебра, теорія алгебр з мірою, теорія груп і алгебр Лі.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна результатів полягає у вивченні структурної теорії локально матричних алгебр, їх автоморфізмів і диференціювань, а також зв'язків з групами і алгебрами Лі нескінченних матриць та булевими кільцями з мірою (просторами Хемінга). У дисертаційній роботі автором отримано такі нові результати.

– Розв'язана проблема Курочкіна про примарну розкладність локально матричних алгебр.

– Побудовані нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр.

– Знайдені необхідні і достатні умови Моріта еквівалентності зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр у термінах їх чисел Стейніца.

– Побудовані спектральні Стейніцові інваріанти неунітальних локально матричних алгебр.

– Показано, що зліченний локально стандартний простір Хемінга визначається інваріантом Стейніца і розкладається в нескінченний тензорний добуток стандартних просторів Хемінга (аналог теорем Глімма і Кьоте).

– Знайдена параметризація неунітальних локально стандартних просторів Хемінга числами Стейніца і дійсними числами (аналог теореми Діксм'є).

– Описані диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр.

– Знайдені розмірності алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядки груп зовнішніх автоморфізмів довільної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.

– Описані ізоморфізми груп нескінченних періодичних матриць.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у абстрактну алгебру і теорію моделей, а також структурну теорію скінченно–вимірних та нескінченно–вимірних асоціативних алгебр, лінійну алгебру і теорію алгебр з мірою. Результати роботи можуть бути використані в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, теорії зображень, теорії булевих кілець, а також при підготовці спеціалізованих курсів і монографій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення напрямку досліджень належало професору В.І. Сущанському. У спільних статтях з професором В.І. Сущанським співавтору належить постановка задачі та загальне керівництво роботою, основні результати отримані дисертантом особисто.

У наукових статтях у співавторстві з професором В.І. Сущанським [16] та професорами Б.В. Олійник та В.І. Сущанським [15] постановка задач належить В.І. Сущанському, в основну частину дисертації включені результати, що отримані здобувачем особисто.

У спільних роботах з професором Б.В. Олійник [23,24,25,26,27] вклад обох авторів у наукові дослідження і підготовку статтей до друку рівноцінний.

У наукових статтях у співавторстві з професором М.В. Зайцевим [10,11] та професором М.В. Зайцевим і доцентом О.О. Беляєвим [12] постановка задачі належить професору М.В. Зайцеву, вклад усіх авторів у наукові дослідження і підготовку цих статтей до друку рівноцінний.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінарів провідних українських та міжнародних наукових установ, а саме:

Конференції:

- II Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена пам'яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990), м.Київ – м.Вінниця, Україна, 9–16 травня 1999р.

- III Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м.Суми, Україна, 2–8 липня 2001р.
- Міжнародна алгебраїчна конференція присв'ячена 100–річчю роботи Граве в Київському університеті, м.Київ, Україна, 17–22 червня 2002р.
- 4th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Львів, Україна, 4–9 серпня 2003р.
- 5th International Algebraic Conference in Ukraine, м.Одеса, Україна, 20–27 липня 2005р.
- International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006, м.Київ, Україна, 30 липня – 5 серпня 2006р.
- Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені Академіка М.Кравчука, м.Київ, Україна, 15–17 травня 2008р.
- International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy", м.Київ, Україна, 19–22 грудня 2016р.
- 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko, м.Київ, Україна, 3–7 липня 2017р.
- International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Book of Abstracts, м.Київ, Україна, 14–17 липня 2020р.

Наукові семінари:

- Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2009–2010, м.Київ, Україна, 2010р.
- Семінар учасників російсько–українського гранту державного фонду фундаментальних досліджень МОН України No.Ф28/433-09, 2013–2014, м.Москва, Росія, 2014р.
- Семінар з алгебри Університету Каліфорнії, м.Сан-Дієго, США, 2019р.

- Алгебраїчний семінар Інституту математики Національної Академії Наук України, м.Київ, Україна, 2020р.
- Алгебраїчний семінар Київського університету, м.Київ, Україна, 2020 р.
- Алгебраїчний семінар кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м.Київ, Україна, 2020 р.

Публікації. Основні результати роботи викладено в 16 наукових статтях [3,4,10,11,12,13,15,16,18,20,21,23,24,25,26,27], які опубліковано у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України та іноземних періодичних фахових виданнях, причому одна з цих статтей [25] є науковою публікацією у виданні, віднесеному до першого квартиля (Q1) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, ще дві статті [26,27] є науковими публікаціями у виданнях, віднесених до другого квартиля (Q2), і ще дві статті [10,23] є науковими публікаціями у виданнях, віднесених до третього квартиля (Q3). Згідно з наказом Міністерства освіти і науки України №1220 від 23 вересня 2019 року "Про опублікування результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук" наукова публікація у виданні, віднесеному до першого та другого квартилів (Q1, Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, прирівнюється до трьох публікацій, наукова публікація у виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, прирівнюється до двох публікацій.

Матеріали дисертації також додатково відображено у 11 матеріалах конференцій [1,2,5,6,7,8,9,14,17,19,22].

9 публікацій [10,11,15,16,21,23,25,26,27] надруковано у наукових періодичних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та/або Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, анотації, восьми розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел із 137 найменувань та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 312 сторінок, основний текст займає 274 сторінки.

Автор вдячна своєму Вчителю професору $\boxed{\text{Сущанському Віталію Івановичу}}$ за введення у тематику дисертаційного дослідження та нескінченну віру в результат.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту професору Петравчуку Анатолію Петровичу за увагу до роботи та підтримку, професору Зельманову Юхиму Ісааковичу, професору Олександру С. Кекрису, професору Олійник Богдані Віталіївні, професору Сергейчуку Володимиру Васильовичу, доценту Ганюшкіну Олександру Григоровичу за корисні поради та роз'яснення окремих питань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Локально матричні алгебри природно виникають в алгебрі як нескінченно–вимірні об'єкти, які найбільш близькі до скінченно–вимірних матричних алгебр; у функціональному аналізі в теорії апроксимативно скінченно–вимірних C^*–алгебр; у теорії зображень локально скінченно–вимірних алгебр Лі; математичній фізиці. Теорія локально матричних алгебр ідейно близька до теорії локально скінченних груп і теорії моделей. Про більш широкий клас — так званих локально напівпростих алгебр та їх взаємозв'язків мова йде, наприклад, в огляді А.М. Вершика і С.В. Керова 1987 р.

У вступі дисертації обгрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів. Наведено також список семінарів та конференцій, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію.

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дослідження.

У другому розділі вводяться необхідні поняття, конструкції прямої границі алгебричних систем, тензорного добутку, ультрадобутку та наводяться відомі результати, які використовуються в дисертації.

Третій розділ присвячений числам Стейніца і розкладам у тензорний добуток локально матричних алгебр.

Нехай $\mathbb{F}$ — поле. Наслідуючи А.Г. Куроша, будемо називати $\mathbb{F}$–алгебру A *локально матричною*, якщо довільна скінченна множина елементів алгебри A міститься в підалгебрі, яка ізоморфна алгебрі $M_n(\mathbb{F})$ $(n \times n)$–матриць над полем $\mathbb{F}$ для деякого натурального n.

Алгебра A називається *унітальною*, якщо вона містить одиницю 1_A.

У 1931 році Г. Кьоте довів, що довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра A ізоморфна зліченному тензорному добутку матричних алгебр: $A \cong \otimes_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \geq 2$.

А.Г. Курош у 1942 р. побудував приклад незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Унітальна локально матрична алгебра A називається *примарною*, якщо існує просте число p таке, що довільна матрична підалгебра $1_A \in B \subset A$, де $B \cong M_n(\mathbb{F})$, має степінь $n = p^k$ для деякого $k \geq 1$.

Із результатів Г. Кьоте випливає, що довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра розкладається в тензорний добуток примарних алгебр. Існування та єдиність примарних розкладів вивчалися В.М. Курочкіним у 1948 р. Зокрема, В.М. Курочкін сформулював запитання:

чи правильно, що довільна унітальна локально матрична алгебра має примарний розклад?

Варто зазначити, що приклад Куроша незліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри є примарною алгеброю, тому контрприкладом бути не може.

Дж. Глімм (1960 р.) вивчав локально матричні алгебри у зв'язку з їх C^*–оболонками — апроксимативно скінченно–вимірними C^*–алгебрами, і вперше зв'язав їх з числами Стейніца.

Будемо позначати символом $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел, символом P — множину всіх простих чисел. *Числом Стейніца* називається формальний добуток

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p} \ , \quad \text{де} \ \ r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \ \text{ для всіх } \ p \in \mathbb{P}.$$

Числа Стейніца

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p} \quad \text{і} \quad \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$$

перемножаються за правилом

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p + k_p} \ ,$$

де передбачається, що $t+\infty = \infty+t = \infty+\infty = \infty$ для всіх невід'ємних чисел t.

Позначимо символом $\mathbb{SN}$ множину всіх чисел Стейніца. Зауважимо, що множина усіх натуральних чисел $\mathbb{N}$ природно ототожнюється з підмножиною $\mathbb{SN}$. Числа з множини $\mathbb{SN}\diagdown\mathbb{N}$ будемо називати *нескінченними числами Стейніца.*

Число Стейніца називається *локально скінченним*, якщо $r_p \neq \infty$ для всіх $p \in \mathbb{P}$.

Нехай A — локально матрична $\mathbb{F}$–алгебра з одиницею 1_A. Розглянемо множину $D(A)$ усіх натуральних чисел n, для кожного з яких існує підалгебра A' алгебри A така, що $1_A \in A'$ і A' ізоморфна матричній алгебрі $M_n(\mathbb{F})$.

Означення 3.5. Числом Стейніца алгебри A називається найменше спільне кратне $\mathbf{st}(A)$ чисел із множини $D(A)$.

Зауважимо, що Дж. Глімм число Стейніца $\mathbf{st}(A)$ визначав за зростаючими ланцюгами матричних підалгебр, тобто наперед передбачалося, що алгебра A зліченно–вимірна. А також ним було доведено, що зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца однакові.

О.О. Баранов і А.Г. Жилінський класифікацію Глімма за числами Стейніца розповсюдили на локально інволютивно прості алгебри і на діагональні прямі границі простих скінченно–вимірних алгебр Лі.

Таким чином, першочергово виникає питання розгляду нових прикладів локально матричних алгебр. Цьому присвячений **підрозділ 3.1**, у якому вивчаються нові класи локально матричних алгебр, а саме, алгебри Кліфорда і узагальнені алгебри Кліфорда.

Нехай V векторний простір над полем $\mathbb{F}$, характеристика якого відмінна від 2. Відображення $f : V \to \mathbb{F}$ називається *квадратичною формою*, якщо виконані такі умови:

1. $f(\alpha v) = \alpha^2 f(v)$ для довільних скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ та вектора $v \in V$;

2. відображення $f(u, v) = f(u+v)-f(u)-f(v)$ є білінійною формою.

Квадратична форма $f : V \to \mathbb{F}$ називається *невиродженою*, якщо відповідна білінійна форма $f(u, v)$ є невиродженою.

Розглянемо асоціативну $\mathbb{F}$–алгебру, яка породжена векторним простором V та одиницею 1 і яка задана такими визначальними співвідношеннями: $v^2 = f(v)\cdot 1$, де вектор v пробігає усі елементи векторного простору V. Така алгебра називається *алгеброю Кліфорда*; позначатимемо її символом $Cl(V, f)$.

Теорема 3.4. Нехай V — нескінченно–вимірний векторний простір над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$, характеристика $\operatorname{char}\mathbb{F}$ якого не дорівнює 2, з невиродженою квадратичною формою $f : V \to \mathbb{F}$. Тоді алгебра Кліфорда $Cl(V, f)$ є локально матричною алгеброю.

Виберемо натуральне число $l > 1$, яке взаємно просте з характеристикою поля $\mathbb{F}$, якщо ця характеристика є додатним числом. Якщо характеристика поля дорівнює 0, то в ролі l вибираємо довільне натуральне число, яке більше за 1. Зафіксуємо ξ — первісний корінь степеня l з 1 у полі $\mathbb{F}$.

Для довільної впорядкованої множини індексів I розглянемо алгебру, яка задана такими твірними елементами і визначальними співвідношеннями

$$\begin{aligned} Clg(l, I) \ = \ \Big\langle x_i,\ i \in I \mid x_i^l \ &= \ 1; \\ x_i^{-1} x_j x_i \ &= \ \xi x_j \quad \text{при} \quad i < j; \\ x_i^{-1} x_j x_i \ &= \ \xi^{-1} x_j \quad \text{при} \quad i > j; \qquad i, j \in I \ \Big\rangle. \end{aligned}$$

Алгебра $Clg(l, I)$ називається *узагальненою алгеброю Кліфорда.*

Узагальнені алгебри Кліфорда в більш загальному вигляді та в іншому контексті розглядалися фізиками.

Теорема 3.6. Для довільної впорядкованої нескінченної множини I узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, I)$ є локально матричною алгеброю.

У підрозділі 3.2 показано, що

$$\mathbf{st}(Cl(V, f)) \ = \ 2^{\infty}, \quad \mathbf{st}(Clg(l, I)) \ = \ l^{\infty}.$$

Алгебри Кліфорда і узагальнені алгебри Кліфорда дозволяють побудувати нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр. Цьому присвячується **підрозділ 3.3**.

Розглянемо векторний простір

$$\mathbf{V} \ = \ \Big\{ \ (a_1,\ a_2,\ \dots\ ) \mid a_i \in \mathbb{C},\ \ \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \ < \ \infty \ \Big\}$$

над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Також розглянемо невироджену квадратичну форму

$$\mathbf{f}\ \big(\ (a_1,\ a_2,\ \dots\ )\ \big) \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \ a_i^2 \ \in \ \mathbb{C}.$$

Теорема 3.10. Алгебра Кліфорда $Cl(\mathbf{V}, \mathbf{f})$ розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Очевидно, що
$$\dim_{\mathbb{C}} Cl(\mathbf{V}, \mathbf{f}) \;=\; 2^{\aleph_0}.$$

Приклад Куроша і приклад теореми 3.10 локально матричних алгебр, нерозкладних у тензорний добуток матричних алгебр, мають число Стейніца 2^{∞}. Наступна теорема дає серію прикладів з іншими числами Стейніца.

Теорема 3.11. Нехай l — непарне натуральне число, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел зі стандартним порядком. Тоді узагальнена алгебра Кліфорда $Clg(l, \mathbb{R})$ не ізоморфна тензорному добутку матричних алгебр.

Очевидно, що розмірність алгебри $Clg(l, \mathbb{R})$ дорівнює

$$\dim_{\mathbb{F}} Clg(l, \mathbb{R}) \;=\; 2^{\aleph_0},$$

і, як ми вже відмічали раніше, $\mathbf{st}(Clg(l, \mathbb{R})) = l^{\infty}$.

Теореми 3.10 і 3.11 дають приклади нерозкладних унітальних локально матричних алгебр з числом Стейніца p^{∞} для довільного простого числа $p \neq \mathrm{char}\ \mathbb{F}$.

Особливий інтерес викликає випадок нескінченного локально скінченного числа Стейніца.

Теорема 3.12. Для довільного нескінченного локально скінченного числа Стейніца s знайдеться незліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра з числом Стейніца s. Ця алгебра не має примарного розкладу, тобто не ізоморфна тензорному добутку примарних локально матричних алгебр.

Теорема 3.12 дає негативну відповідь на питання Курочкіна.

Теорема 3.14. Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не можна зобразити у вигляді $(\mathrm{char}\ \mathbb{F})^{\infty} \cdot n$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує унітальна локально матрична алгебра A з числом Стейніца $\mathbf{st}(A) = s$, яка не розкладається в тензорний добуток матричних алгебр.

Іншими словами, наслідком з теорем 3.10, 3.11, 3.12 є те, що теорема Глімма не переноситься на незліченно–вимірні локально матричні алгебри.

Теорема 3.15. Нехай s — нескінченне число Стейніца, яке не зображується у вигляді $(\mathrm{char}\ \mathbb{F})^{\infty} \cdot n$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді існують неізоморфні унітальні локально матричні алгебри A та B такі, що $\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B > \aleph_0$ і $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B) = s$.

Таким чином, число Стейніца не визначає незліченно–вимірну унітальну локально матричну алгебру A з точністю до ізоморфізму. *Яку ж тоді інформацію про алгебру несе інваріант* $\mathbf{st}(A)$? Про це мова йде у **підрозділі 3.4**.

Нагадаємо, що замкнута формула $\Phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ мови 1-го порядку називається *універсальною*, якщо вона має вигляд $\Phi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \forall x_1, \ldots, \forall x_n \psi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, де $\psi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — формула, яка не містить кванторів. Очевидно, що з виконуваності універсальної формули на алгебричній системі випливає її виконуваність на довільній її підсистемі.

Позначимо через $UTh(A)$ множину всіх універсальних формул, які виконуються на системі A. Алгебричні системи тієї самої сигнатури A та B називаються *універсально еквівалентними*, якщо $UTh(A) = UTh(B)$.

Теорема 3.16. Унітальні локально матричні алгебри A та B універсально еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B)$.

Зауважимо, що теорема 3.16 справджується лише за умови, що сигнатура містить одиницю 1. Без цієї умови і вимоги унітальності довільні нескінченно–вимірні локально матричні алгебри будуть універсально еквівалентними.

У заключному **підрозділі 3.5** розділу 3 ми вивчаємо Моріта еквівалентність унітальних локально матричних алгебр та її зв'язок з числами Стейніца.

Нагадаємо, що унітальні алгебри A та B — *Моріта еквівалентні*, якщо категорії їх лівих модулів еквівалентні.

Нехай $e \in A$ — ідемпотент. Ідемпотент e називається *повним*, якщо $AeA = A$.

К. Моріта довів, що алгебри A та B Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли знайдуться натуральне число $n \geq 1$ і повний ідемпотент e матричної алгебри $M_n(A)$ такі, що $B \cong eM_n(A)e$.

Називатимемо властивість P *Моріта інваріантною*, якщо дві Моріта еквівалентні алгебри A і B мають або не мають властивість P одночасно.

Виявляється, що властивості, які нами вивчаються, є Моріта інваріантними.

Лема 3.13.

1) Локальна матричність є Моріта інваріантною властивістю.

2) Властивість унітальної алгебри A розкладатися в тензорний добуток матричних алгебр є Моріта інваріантною властивістю.

Означення 3.11. Будемо говорити, що числа Стейніца s_1 та s_2 є раціонально зв'язними, якщо знайдеться раціональне число $q \in \mathbb{Q}$, таке, що $s_2 = q \cdot s_1$.

Теорема 3.17.

1) Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B Моріта еквівалентні, то їх числа Стейніца раціонально зв'язні.

2) Якщо унітальні локально матричні алгебри A та B зліченно–вимірні, то вони Моріта еквівалентні тоді й лише тоді, коли їх числа Стейніца раціонально зв'язні.

3) Для довільного нескінченного не локально скінченного числа Стейніца s, яке не зображується у вигляді $(\mathrm{char}\ \mathbb{F})^{\infty} \cdot s'$, де число Стейніца s' є локально скінченним, існують не Моріта еквівалентні локально матричні алгебри A і B такі, що $\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B$, $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B) = s$.

4) Для зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до ізоморфізму. Для унітальних локально матричних алгебр довільної розмірності їх класи Моріта еквівалентності є зліченними з точністю до універсальної еквівалентності.

Розділ 4 присвячений вивченню інваріантів Стеніца не обов'язково унітальних локально матричних алгебр.

Дж. Глімм співставив кожній зліченно–вимірній унітальній локально матричній алгебрі інваріант — число Стейніца. Ж. Діксм'є показав, що зліченно–вимірна неунітальна локально матрична алгебра над полем нульової характеристики параметризується парами (s, α), де s — число Стейніца, а α — дійсне число з відрізку $[0, 1]$. О.О. Баранов узагальнив цю теорему на випадок довільного поля.

У підрозділі 4.1 визначається інваріант Стейніца — спектр — не обов'язково унітальної локально матричної алгебри довільної розмірності.

Припустимо, що A — не обов'язково унітальна локально матрична алгебра. Для довільного ідемпотента $0 \neq e \in A$ підалгебра eAe є унітальною локально матричною алгеброю. Отже, є сенс говорити про число Стейніца $\mathbf{st}(eAe)$.

Означення 4.1. Назвемо множину чисел Стейніца $\mathrm{Spec}\ (A) = \{\mathbf{st}(eAe) \mid e \in A,\ e^2 = e\}$, де e пробігає всі ідемпотенти алгебри A, спектром алгебри A.

Для числа Стейніца s позначимо через $\Omega\ (s)$ множину усіх натуральних чисел, які ділять s.

Нехай s_1, s_2 — числа Стейніца. Будемо говорити, що число Стейніца s_1 *скінченно ділить* число Стейніца s_2, якщо знайдеться натуральне число $b \in \Omega\ (s_2)$ таке, що $s_1 = s_2 \diagup b$ (позначатимемо: $s_1 \bigm|_{fin} s_2$). Зрозуміло, що в цьому випадку числа Стейніца s_1 і s_2 раціонально зв'язані.

Означення 4.3. Назвемо множину чисел Стейніца $S \subset \mathbb{SN}$ повною, якщо виконуються умови:

1) довільні два числа Стейніца із S раціонально зв'язні,
2) якщо $s_2 \in S$ і $s_1 \bigm|_{fin} s_2$, то $s_1 \in S$,
3) якщо $s,\ ns \in S$, де $s \in \mathbb{SN}$, $n \in \mathbb{N}$, то $is \in S$ для довільного i, $1 \le i \le n$.

Лема 4.1.

1) Нехай $s_1,\ s_2 \in \mathrm{Spec}\ (A)$. Тоді знайдуться натуральні числа $a \in \mathbb{N}$, $b \in \Omega\ (s_1)$ такі, що $s_2 = s_1 \cdot a \diagup b$.
2) Нехай число Стейніца s_1 скінченно ділить число Стейніца s_2 та $s_2 \in \mathrm{Spec}\ (A)$. Тоді $s_1 \in \mathrm{Spec}\ (A)$.
3) Нехай числа Стейніца s, ns такі, що $s, ns \in \mathrm{Spec}\ (A)$, де $s \in \mathbb{SN}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $is \in \mathrm{Spec}\ (A)$ для довільного i, $1 \le i \le n$.

Таким чином, для довільної локально матричної алгебри A її спектр $\mathrm{Spec}\ (A)$ є повною множиною чисел Стейніца.

Нашою задачею є класифікація всіх повних підмножин множини всіх чисел Стейніца $\mathbb{SN}$.

Нехай S — повна множина чисел Стейніца. Для числа Стейніца $s \in S$ і натурального числа $b \in \Omega\ (s)$ покладемо $r_s(b) = \max\ \{\ i \ge 1 \mid i \cdot s \diagup b \in S\ \}$.

Приклад 1. Повними множинами натуральних чисел є або $\mathbb{N}$, або $\{1, 2, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 2. Нехай s — число Стейніца. Тоді множина

$$S\ (\infty, s)\ :=\ \left\{\ \frac{a}{b}\ \cdot\ s\ \middle|\ a\ \in\ \mathbb{N},\ b\ \in\ \Omega\ (s)\ \right\}$$

є повною. Крім того, для довільного числа Стейніца $s' \in S\ (\infty, s)$ матимемо $S\ (\infty, s) = S\ (\infty, s')$.

Приклад 3. Нехай r — дійсне число, $1 \le r < \infty$, і нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді множина чисел Стейніца

$$S\ (r,s)\ =\ \left\{\ \frac{a}{b}\ s\ \middle|\ a,\ b\ \in\ \mathbb{N},\ b\ \in\ \Omega\ (s),\ a\ \le\ rb\ \right\}$$

є повною.

Приклад 4. Нехай s — нескінченне число Стейніца і нехай $r = u/v$ — раціональне число, де $u, v \in \mathbb{N}$, причому $v \in \Omega\ (s)$. Тоді

$$S^{+}\ (r,s)\ =\ \left\{\ \frac{a}{b}\ s\ \middle|\ a,\ b\ \in\ \mathbb{N},\ b\ \in\ \Omega\ (s),\ a\ <\ rb\ \right\}$$

— повна множина.

Теорема 4.1. Довільна повна множина чисел Стейніца належить до одного з таких типів:

1) $S\ (r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r \in [1,\infty)$;

2) $S^{+}\ (r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r = u/v$, u, v — взаємно прості натуральні числа, $v \in \Omega\ (s)$;

3) $\mathbb{N}$ або $\{1, 2, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$;

4) $S\ (\infty, s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$.

Кожна з множини $S\ (r,s)$, $S^{+}\ (r,s)$, $\mathbb{N}$, $\{1, 2, \ldots, n\}$, $S\ (\infty, s)$ є повною.

Зауважимо, що по суті число r є оберненим до значення інваріанта щільності Діксм'є–Баранова.

У підрозділі 4.2 показано, як із класифікації спектрів можна вивести теорему Діксм'є–Баранова.

Теорема 4.2.

1) Для довільної повної множини чисел Стейніца S знайдеться зліченно–вимірна локально матрична алгебра A така, що $\mathrm{Spec}\ (A) = S$.

2) Якщо A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри, то $\mathrm{Spec}\ (A) = \mathrm{Spec}\ (B)$, тоді й лише тоді, коли $A \cong B$.

Зауважимо, що частина 2) теореми 4.2 є іншим трактуванням теореми Діксм'є–Баранова.

Неважко показати, що локально матрична алгебра A унітальна тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Spec}\ (A)$ є або $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, або множиною $S\ (r,s)$, де $s \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$, $r = u/v$ для u, v — взаємно простих натуральних чисел, $v \in \Omega\ (s)$.

У підрозділі 4.3 обговорюємо занурення локально матричних алгебр.

Лема 4.18. Нехай S_1 і S_2 — повні множини чисел Стейніца. Тоді або $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, або одна із множин S_1, S_2 містить іншу множину.

Нехай A — локально матрична алгебра. Підалгебра $B \subseteq A$ називається *апроксимативним кутом*, якщо алгебра B є об'єднанням зростаючого ланцюга пірсівських компонент, тобто існує послідовність ідемпотентів e_1, e_2, … така, що

$$e_1\ A\ e_1\ \subseteq\ e_2\ A\ e_2\ \subseteq \cdots,\quad B\ =\ \bigcup_{i=1}^{\infty}\ e_i\ A\ e_i.$$

Якщо B — апроксимативний кут алгебри A, то алгебра B сама є локально матричною і тому $\mathrm{Spec}\ (B) \subseteq \mathrm{Spec}\ (A)$.

Лема 4.19. Нехай A, B — зліченно–вимірні локально матричні алгебри, $\mathrm{Spec}\ (B) \subseteq \mathrm{Spec}\ (A)$. Тоді алгебра B занурюється в алгебру A як апроксимативний кут.

Коли повна множина S_1 міститься в повній множині S_2? Якщо $S_2 \subseteq \mathbb{N}$, то S_1 і S_2 є або сегментами множини натуральних чисел, або усією множиною $\mathbb{N}$, тому відповідь очевидна. У випадку, коли $S_2 \subseteq \mathbb{SN} \diagdown \mathbb{N}$, $s \in S_1 \subseteq S_2$, матимемо $S_1 = S\ (r_1, s)$ або $S_1 = S^+\ (r_1, s)$ і $S_2 = S\ (r_2, s)$ або $S_2 = S^+\ (r_2, s)$. Легко бачити, що $r_1 \leq r_2$. Зокрема, якщо $r_1 < r_2$, то $S_1 \subset S_2$. Якщо $r_1 = r_2 = r$, то або $S_1 = S_2$, або $S_1 = S^+\ (r, s)$, $S_2 = S\ (r, s)$.

У розділі 5 ми вивчаємо порівняно маловивчений клас алгебричних систем — *простори Хемінга.*

Нагадаємо, що в теорії кодування метрики Хемінга — це стандартний інструмент обчислення відстані між двома двійковими векторами однакової довжини.

Нехай $n \geq 1$. *Стандартним простором Хемінга* H_n називається множина усіх векторів довжини n вигляду: $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$, де $x_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$, а відстань d_{H_n} між цими векторами є число позицій, на яких ці вектори мають різні координати.

У серії робіт Р. Камерона, С. Тарзі, В.І. Сущанського, Б.В. Олійник розглядалися нескінченні аналоги просторів Хемінга, які виникають як прямі границі скінченних просторів H_n. У розділі 5 ми вивчаємо такі нескінченно–вимірні простори з абстрактної точки зору у контексті кілець з мірою (у роботі Б.В. Олійник вони визначалися як простори Хемінга). Оскільки наші приклади близькі до стандартних просторів Хемінга, ми будемо в основному слідувати термінології робіт В.І. Сущанського та Б.В. Олійник.

Нагадаємо, що *булевим кільцем* називається комутативне кільце, усі елементи якого задовольняють тотожність $x^2 = x$.

Нехай H — булеве кільце з 1. Функція $r : H \to [\,0, 1\,]$ називається мірою (або *функцією рангу*), якщо

(1) $r(a) = 0$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 0$;

(2) $r(a) = 1$ у тому і тільки тому випадку, коли $a = 1$;

(3) якщо $a, b \in H$ і $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

У підрозділі 5.1 дається абстрактне означення простору Хемінга і наводяться приклади просторів Хемінга.

Означення 5.3. Унітальним простором Хемінга (H, r) будемо називати булеве кільце H з 1 і функцією рангу $r : H \to [0, 1]$.

Якщо (H, r) — простір Хемінга, то функція $d_H(a, b) = r(a - b)$, $a, b \in H$, задає метрику на H.

Приклад 5.1. Булеве кільце $H_n = \{0\,,\,1\}^n$ з покомпонентними додаванням (за модулем 2) і множенням, а також функцією рангу $r_{H_n}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ для довільних $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, задовольняє умовам (1), (2), (3) означення функції рангу. Називатимемо простір Хемінга (H_n, r_{H_n}) стандартним.

Позначимо через $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ множину усіх нескінченних $(0, 1)$–послідовностей $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, де $a_i = 0$ або 1. Легко бачити, що $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ — булеве кільце з операціями покомпонентного додавання (за модулем 2) та множення.

Послідовність $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ називається *періодичною*, якщо існує натуральне число k таке, що $a_{i+k} = a_i$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. У цьому випадку число k називається *періодом послідовності* $\mathbf{a}$.

Нехай s — число Стейніца. Періодична послідовність $\mathbf{a}$ називається s–періодичною, якщо у неї є період, який ділить s.

Приклад 5.2. Позначимо через $\mathcal{H}(s)$ множину усіх s–періодичних послідовностей. Очевидно, що $\mathcal{H}(s)$ — підкільце булевого кільця $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Функція рангу $r_{\mathcal{H}(s)}(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 + \ldots + a_k)/k$, де k — період (насправді довільний з періодів) послідовності $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, перетворює $(\mathcal{H}(s), r_{\mathcal{H}(s)})$ у простір Хемінга.

Приклад 5.3. Для послідовності $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ визначимо функцію псевдорангу $\tilde{r}(\mathbf{a}) = \limsup_{n\to\infty} \left((a_1 + \ldots + a_n)/n\right)$. Ця функція задовольняє умову (3) означення функції рангу, але не задовольняє умови (1) та (2). Підмножина $I = \{\mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \tilde{r}(\mathbf{a}) = 0\}$ є ідеалом булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. На довільному класі суміжності $\mathbf{a}+I$, $\mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, функція $\tilde{r}$ постійна.

Розглянемо булеве кільце $B = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \diagup I$ і функцію рангу $r_B(\mathbf{a}+I) = \tilde{r}(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Простір Хемінга (B, r_B) називається простором Безиковича або ще простором Безиковича–Хемінга.

У класі унітальних просторів Хемінга природним чином визначається тензорний добуток.

Твердження 5.1. Нехай (H_1, r_1), (H_2, r_2) — унітальні простори Хемінга. Тоді існує єдина функція рангу r на тензорному добутку булевих кілець $H = H_1 \otimes_{\mathbb{Z}} H_2$ така, що $r(a \otimes b) = r_1(a)\ r_2(b)$ для довільних елементів $a \in H_1$, $b \in H_2$.

Легко бачити, що тоді $H_n \otimes H_m \cong H_{nm}$.

Означення 5.6. Назвемо унітальний простір Хемінга (H, r) локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина елементів $a_1, \ldots, a_n \in H$ міститься в підпросторі $H' \subset H$, такому що $H' \cong H_m$ для деякого $m \geq 1$.

Неважко помітити, що в локально стандартному просторі Хемінга функція рангу завжди набуває раціональних значень.

Приклад 5.5. Для довільного числа Стейніца s простір Хемінга s–періодичних послідовностей $\mathcal{H}(s)$ є локально стандартним.

Приклад 5.6. Простір Безиковича (B, r_B) не є локально стандартним простором, позаяк неважко знайти елемент $x \in B$ такий, що число $r_B(x)$ буде ірраціональним.

Позначимо через $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_p$ множину всіх періодичних послідовностей з $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Тоді для булевого ідеалу $I = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \tilde{r}(a) = 0\}$ булевого кільця $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ отримаємо $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_p \cap I = \{0\}$. Тому $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_p$ можна розглядати як підпростір Хемінга простору Безиковича. Матимемо

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}_p = \bigcup_{s \in \mathbb{SN}} \mathcal{H}(s).$$

Отже, простір Хемінга $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_p$ є локально стандартним.

Означення 5.7. Нехай H — локально стандартний унітальний простір Хемінга. Розглянемо множину натуральних чисел $D(H) = \{n \geq 2 \mid H' \subset H, H' \cong H_n\}$. Найменше спільне кратне чисел з $D(H)$ називається числом Стейніца простору Хемінга H і позначається $\mathbf{st}(H)$.

У підрозділі 5.2 мова йде про тензорні добутки просторів Хемінга.

Лема 5.3. Для локально стандартних унітальних просторів Хемінга H_1 та H_2 їх тензорний добуток $H_1 \otimes H_2$ також є локально стандартним простором Хемінга і $\mathbf{st}(H_1 \otimes H_2) = \mathbf{st}(H_1) \cdot \mathbf{st}(H_2)$.

Наступна теорема є аналогом теореми Кьоте.

Теорема 5.1. Нехай H — зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга. Тоді

$$H \;\cong\; \bigotimes_{i=1}^{\infty} H_{p_i}, \quad \text{де усі} \quad p_i \quad \text{— прості числа.}$$

Неважко помітити, що в цьому випадку

$$\mathbf{st}\ (H) \;=\; \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{s_i},$$

де s_i — число копій простору H_{p_i} у розкладі простору H.

З теореми 5.1 зразу ж випливатиме аналог теореми Глімма: *Нехай H_1 та H_2 – зліченні локально стандартні унітальні простори Хемінга. Числа Стейніца $\mathbf{st}(H_1)$ та $\mathbf{st}(H_2)$ збігаються тоді й лише тоді, коли простори H_1 і H_2 ізоморфні.*

Простори Хемінга і локально матричні алгебри тісно пов'язані. Як саме — про це мова йде в **підрозділі 5.3**.

Нехай A — унітальна локально матрична алгебра з одиницею 1, $a \in A$. Виберемо підалгебру $B \subset A$ таку, що $1, a \in B$, $B \cong M_n(\mathbb{F})$ для деякого $n \geq 1$. Нехай також $r_B(a)$ — ранг образу елемента a в алгебрі $M_n(\mathbb{F})$ при ізоморфізмі $B \cong M_n(\mathbb{F})$. В.М. Курочкін довів, що число $r(a) = r_B(a) \big/ n$ не залежить від вибору підалгебри B. Називатимемо $r(a)$ *відносним рангом* (або рангом Курочкіна) елемента a.

Нехай C — комутативна підалгебра алгебри A, яка містить одиницю 1. Позначимо через $E(C)$ множину всіх ідемпотентів алгебри C, включаючи 0 та 1. Для ідемпотентів e, $f \in E(C)$ розглянемо операції ef та $e + f - 2ef$ як булеві множення і додавання відповідно. Булеве кільце $E(C)$ разом з функцією відносного рангу $r :\ E(C) \to [0, 1]$ є унітальним простором Хемінга.

Нагадаємо, що підалгебра H матричної алгебри $M_n(\mathbb{F})$ називається підалгеброю Картана, якщо $H \cong \underbrace{\mathbb{F} \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}}_{n}$. Довільна підалгебра Картана спряжена з діагональною підалгеброю алгебри $M_n(\mathbb{F})$.

Нехай A — зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра. І нехай $1 \in A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — зростаючий ланцюжок матричних підалгебр (скінченно–вимірних) такий, що $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. У кожній підалгебрі A_i виберемо підалгебру Картана H_i таким чином, що $1 \in H_1 \subset H_2 \subset \ldots$. Називатимемо алгебру $H = \cup_{i=1}^{\infty} H_i$ *узагальненою підалгеброю Картана* алгебри A. Як і раніше, функція $r: A \to [0,1]$ є функцією відносного рангу. Тоді $(E(H), r)$ є унітальним локально стандартним простором Хемінга.

Означення 5.8. Підалгебра H унітальної локально матричної алгебри A називається підалгеброю Картана, якщо існує розклад $A = \otimes_{i=1}^{\infty} A_i$ у тензорний добуток матричних алгебр і існує розклад $H = \otimes_{i=1}^{\infty} H_i$ у тензорний добуток підалгебр Картана $H_i \subset A_i$, $i \geq 1$.

Теорема 5.2. Довільні дві підалгебри Картана алгебри A спряжені за допомогою автоморфізму алгебри A.

Довільна підалгебра Картана є узагальненою підалгеброю Картана. Чи справджується зворотне твердження? Іншими словами, чи завжди є спряженими узагальнені підалгебри Картана? Негативну відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 5.3. Кожна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра містить узагальнену підалгебру Картана, яка не є підалгеброю Картана.

Зв'язок між унітальними локально стандартними просторами Хемінга і піалгебрами Картана унітальних локально матричних алгебр описується такою теоремою.

Теорема 5.4.

(1) Довільний зліченний локально стандартний унітальний простір Хемінга S ізоморфний простору $E(H)$, де H — підалгебра Картана деякої зліченно–вимірної унітальної локально матричної алгебри A, причому $\mathbf{st}(S) = \mathbf{st}(A)$.

(2) Нехай A_1, A_2 — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри і нехай H_1, H_2 — підалгебри Картана алгебр A_1, A_2 відповідно. Якщо простори Хемінга $E(H_1)$ та $E(H_2)$ ізоморфні, то алгебри A_1 та A_2 ізоморфні.

Узагальнення означення просторів Хемінга на неунітальний випадок зроблено у **підрозділі 5.4**.

Означення 5.10. Нехай H — булеве кільце (не обов'язково містить одиницю) з функцією $r: H \to [0, \infty)$. Назвемо (H, r) простором

Хемінга, якщо

(1) $r(a) = 0$ тоді й лише тоді, коли $a = 0$;

(2) якщо $ab = 0$, то $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

Тоді функція r називається функцією рангу.

Як і у випадку унітальних просторів Хемінга функція $d_H(a, b) = r(a - b)$ перетворює (H, r) у метричний простір.

Приклад 5.9. Нехай X — нескінченна множина. Розглянемо неунітальне булеве кільце H, яке складається із скінченних підмножин множини X, включаючи порожню множину. Функція рангу $r(a) = |a|$, $a \in H$, задає на H структуру простору Хемінга. Якщо множина X — зліченна, то ми позначимо описаний вище простір Хемінга символом $H(\infty)$.

Якщо (H, r) — простір Хемінга, а h є ненульовим елементом простору H, то тоді hH — унітальне булеве кільце, одиницею якого є елемент h. Функція

$$r_h : hH \to [0, 1], \quad r_h(a) = \frac{r(a)}{r(h)}, \quad a \in H,$$

перетворюватиме тоді $H_h = (hH, r_h)$ в унітальний простір Хемінга.

Нехай $H = (H, r)$ — простір Хемінга і нехай α — деяке додатне дійсне число. Тоді булеве кільце H з новою функцією рангу $\alpha\, r$ також є простором Хемінга. Будемо називати простори Хемінга (H, r) та $(H, \alpha\, r)$ *скалярно еквівалентними.*

Означення 5.12. Простір Хемінга $H = (H, r)$ називається локально стандартним, якщо довільна скінченна підмножина множини H міститься в підпросторі $(H', r) \subset (H, r)$, який скалярно еквівалентний стандартному простору Хемінга H_n для деякого $n \geq 1$.

Наприклад, простір Хемінга $H(\infty)$ є локально стандартним простором.

Нехай (H_1, r_1) та (H_2, r_2) — простори Хемінга. Як і в унітальному випадку на тензорному добутку $H = H_1 \otimes_{\mathbb{Z}} H_2$ можна визначити єдиним чином функцію рангу r таку, що $r(a \otimes b) = r_1(a) \cdot r_2(b)$ для довільних елементів $a \in H_1$ та $b \in H_2$.

Якщо (H_1, r_1) і (H_2, r_2) — локально стандартні простори Хемінга, то їх тензорний добуток $H_1 \otimes_{\mathbb{Z}} H_2$ також є локально стандартним протором Хемінга.

Ми вже відмічали раніше, що існує взаємо однозначна відповідність між зліченно–вимірними локально матричними алгебрами та повними множинами чисел Стейніца. Наступні результати показують, що така ж властивість притаманна і зліченним просторам Хемінга.

Для простору Хемінга H покладемо

$$\text{Spec }(H) = \left\{ \mathbf{st}\ (H_n)\,,\ 0 \neq h \in H \right\}\ \subseteq \mathbb{SN}$$

і називатимемо цю множину *спектром простору Хемінга* H.

Лема 5.11. Для кожного зліченного локально стандартного простору Хемінга H спектр $\text{Spec }(H)$ є повною множиною чисел Стейніца.

Лема 5.12. Для кожної повної множини S чисел Стейніца знайдеться зліченний локально стандартний простір Хемінга H такий, що $\text{Spec }(H) = S$.

Наприклад, нехай $S = S(\infty, s)$, де s — число Стейніца, а $H(s)$ — зліченний унітальний простір Хемінга, який відповідає числу s. Тоді $S = \text{Spec }(H(\infty) \otimes H(s))$.

Теорема 5.5. Якщо зліченні локально стандартні простори Хемінга (H_1, r_1) та (H_2, r_2) мають однакові спектри, то вони скалярно еквівалентні.

Таким чином, зліченні неунітальні простори Хемінга параметризуються (з точністю до скалярної еквівалентності) парами (s, α), де s — число Стейніца, а α — дійсне число, $0 \leq \alpha \leq 1$, тобто має місце аналог теореми Діксім'є.

У розділі 6 ми вивчаємо диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних локально матричних алгебр.

Ш.А. Аюпов та К.К. Кудайбергенов у статті 2020 р. побудували зовнішнє диференціювання в зліченно–вимірній унітальній локально матричній алгебрі з числом Стейніца 2^∞ та використали його як приклад зовнішнього диференціювання в регулярній в сенсі фон Неймана простій алгебрі. У 1999 р. Х. Штраде вивчав диференціювання локально скінченно–вимірних локально простих алгебр Лі над полем характеристики 0.

Нагадаємо, що лінійне відображення $d : A \to A$ називається *диференціюванням*, якщо $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для довільних елементів x, $y \in A$.

Для фіксованого елемента $a \in A$ оператор $\text{ad}(a) : A \to A$, $x \mapsto [a, x]$, називається *внутрішнім диференціюванням* (або *приєднаним диференціюванням*, індукованим елементом a) алгебри A.

Нехай $\text{Der}(A)$ — алгебра Лі усіх диференціювань алгебри A. Позначимо через $\text{Inder}(A)$ ідеал алгебри $\text{Der}(A)$, який складається з внутрішніх диференціювань. Фактор–алгебра $\mathrm{Outder}(A) = \mathrm{Der}(A)\diagup\mathrm{Inder}(A)$ називається алгеброю *зовнішніх диференціювань* алгебри A.

Позначимо через $\mathrm{Aut}(A)$ та $\mathrm{Inn}(A)$ *групу автоморфізмів* та *групу внутрішніх автоморфізмів* алгебри A відповідно. Фактор–група $\mathrm{OutAut}(A) = \mathrm{Aut}(A)\diagup\mathrm{Inn}(A)$ називається *групою зовнішніх автоморфізмів* алгебри A.

Разом з групами автоморфізмів алгебри A будемо розглядати напівгрупу $P(A)$, яка складається з усіх ін'єктивних ендоморфізмів $A \to A$. Зокрема, $\mathrm{Aut}(A) \subseteq P(A)$.

У підрозділі 6.1 ми розглядаємо топологію Тихонова на множині $\mathrm{Map}(A, A)$ усіх відображень $A \to A$ і доводимо таку теорему.

Теорема 6.1. Нехай A — локально матрична алгебра.

1) Ідеал $\mathrm{Inder}(A)$ щільний в алгебрі $\mathrm{Der}(A)$ в топології Тихонова.

2) Припустимо, що алгебра A містить 1. Тоді замиканням групи $\mathrm{Inn}(A)$ в $\mathrm{Map}(A, A)$ в топології Тихонова є напівгрупа $P(A)$ унітальних ін'єктивних ендоморфізмів. Зокрема, підгрупа $\mathrm{Inn}(A)$ щільна в групі $\mathrm{Aut}(A)$.

Метою **підрозділу 6.2** є опис диференціювань нескінченних тензорних добутків скінченно–вимірних матричних алгебр. Нагадаємо, що згідно з теоремою Кьоте довільна зліченно–вимірна унітальна локально матрична алгебра ізоморфна зліченному тензорному добутку матричних алгебр і тому є алгеброю такого типу.

Означення 6.2. Нехай $\mathcal{P}$ — деяка система непорожніх скінченних підмножин нескінченної множини I. Назвемо систему $\mathcal{P}$ *розрідженою*, якщо

(1) для довільного $S \in \mathcal{P}$ усі непорожні підмножини множини S також належать $\mathcal{P}$,

(2) довільний елемент $i \in I$ міститься в не більш, ніж у скінченній кількості підмножин з $\mathcal{P}$.

Нехай $A = \bigotimes_{i \in I} A_i$, де усі алгебри A_i — скінченно–вимірні матричні алгебри над $\mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} A_i > 1$.

Для підмножини $S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ множини I підалгебра $A_S = A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_r}$ є тензорним співмножником алгебри A.

Нехай, як і вище, $\mathcal{P}$ — система непорожніх скінченних підмножин множини I. Для кожної підмножини $S \in \mathcal{P}$ виберемо лінійний оператор $f_S : A \to A$. Сума $\sum_{S \in \mathcal{P}} f_S$ збігається в топології Тихонова до деякого оператора f, якщо для довільного елемента $a \in A$ множина

$\{ S \in \mathcal{P} \mid f_S(a) \neq 0 \}$ скінченна. У цьому випадку f є лінійним оператором. Більше того, якщо кожен доданок f_S є диференціюванням алгебри A, то f також є диференціюванням алгебри A.

Нехай $\mathcal{P}$ — розріджена система. Для довільної підмножини $S \in \mathcal{P}$ виберемо елемент $a_S \in A_S$. Сума $\sum_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}(a_S)$ збігається в топології Тихонова до диференціювання алгебри A. Насправді, довільний елемент $a \in A$ лежить в одній з підагебр $A_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_{i_r}$. Завдяки розрідженості системи $\mathcal{P}$ для усіх підмножин $S \in \mathcal{P}$, окрім скінченного числа, ми маємо $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap S = \emptyset$. Тому $\mathrm{ad}(a_S)a = 0$.

Позначимо через $D_{\mathcal{P}}$ векторний простір усіх сум $\sum_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}(a_S)$, де a_S пробігає A_S. Тоді $D_{\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{Der}(A)$. В усіх алгебрах $A_i, i \in I$, виберемо підпростори A_i^0 такі, що $A_i = \mathbb{F} \cdot 1_{A_i} \oplus A_i^0$ розкладається в пряму суму підпросторів, де 1_{A_i} — одиниця алгебри A_i. Виберемо базис E_i підпростору A_i^0.

Для підмножини $S = \{i_i, \ldots, i_r\} \subset I$ розглянемо

$$E_S \ := \ E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \ = \ \{ a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \mid a_k \in E_{i_k}, 1 \leq k \leq r \}$$

та $\mathrm{ad}(E_S) = \{ \mathrm{ad}(e) \mid e \in E_S \}$.

Наступна теорема описує диференціювання алгебри $A = \otimes_{i\in I} A_i$.

Теорема 6.4.

(1) Припустимо, що множина I зліченна. Тоді $\mathrm{Der}(A) = \cup_{\mathcal{P}} D_{\mathcal{P}}$, де $\mathcal{P}$ пробігає усі розріджені системи скінченних підмножин множини I.

(2) Для довільної нескінченної (не обов'язково зліченної) множини I та будь–якої розрідженої системи $\mathcal{P}$ скінченних підмножин I множина $\cup_{S\in\mathcal{P}} \mathrm{ad}(E_S)$ є топологічним базисом простору $D_{\mathcal{P}}$.

Х. Штраде у 1999 р. довів, що алгебри зовнішніх диференціювань зліченно–вимірних локально простих скінченно–вимірних алгебр Лі над полем характеристики 0 не є локально скінченно–вимірними. **У підрозділі 6.3** ми доводимо аналог результату Штраде для зліченно–вимірної локально матричної алгебри над полем довільної характеристики.

Теорема 6.5. Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Тоді алгебра Лі $\mathrm{Outder}(A)$ не локально скінченно–вимірна.

У підрозділі 6.4 вивчаються автоморфізми і унітальні ін'єктивні ендоморфізми зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр.

Зауважимо, що згідно з теоремою, доведеною О.Г. Курошем у 1942 р., напівгрупа $P(A)$ унітальних ін'єктивних ендоморфізмів строго більша, ніж $\mathrm{Aut}(A)$.

Нехай H_n — підгрупа групи $\mathrm{Inn}(A)$, яка складається зі спряжень оборотними елементами з $\otimes_{i\geq n}A_i$. Легко бачити, що $\mathrm{Inn}(A) = \mathrm{H}_1 > \mathrm{H}_2 > \cdots$ та $\mathrm{H}_n \cong \mathrm{Inn}(\otimes_{i\geq n}A_i)$. Для довільного $n \geq 1$ оберемо систему представників лівих класів суміжності $h\mathrm{H}_{n+1}$, $h \in \mathrm{H}_n$, та позначимо її через $\mathcal{X}_n$. Припускаємо, що кожна система $\mathcal{X}_n$ містить тотожний автоморфізм Id.

Для довільної послідовності автоморфізмів $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$, нескінченний добуток $\varphi = \varphi_1\varphi_2\ldots$ збігається в топології Тихонова до ін'єктивного ендоморфізму. Очевидно, що $\varphi \in P(A)$.

Теорема 6.6. Довільний унітальний ін'єктивний ендоморфізм $\varphi \in P(A)$ єдиним чином зображується у вигляді добутку $\varphi = \varphi_1\varphi_2\cdots$, де $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$.

Коли добуток $\varphi_1\varphi_2\cdots$, де $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$, $n \geq 1$ є автоморфізмом?

Означення 6.3. Назвемо послідовність автоморфізмів $\varphi_n \in \mathrm{H}_n$, $n \geq 1$, інтегровною, якщо для кожного елемента $a \in A$ підпостір, породжений усіма елементами $\varphi_n \ldots \varphi_1(a)$, $n \geq 1$, є скінченно–вимірним.

Теорема 6.7. Ін'єктивний ендоморфізм $\varphi = \varphi_1\varphi_2\ldots$, де $\varphi_n \in \mathrm{H}_n$, $n \geq 1$, є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\,\varphi_i^{-1}\,\}_{i\geq 1}$ інтегровна.

У підрозділі 6.5 ми розглядаємо напівгрупу $P(A)$ як узагальнений простір Бера.

Твердження 6.1. Нехай A — унітальна зліченно–вимірна локально матрична алгебра. Топологія, яка визначається узагальненою метрикою Бера на напівгрупі $P(A)$, збігається з топологією Тихонова.

Далі ми наводимо приклади автоморфізмів напівгрупи $P(A)$, які є ізометріями узагальненого простору Бера. Зокрема, ми показуємо, що проективна лінійна група

$$\prod_{i\geq 1} PGL_{n_i}(\mathbb{F}) \;\cong\; \prod_{i\geq 1} A_i^*$$

занурюється в групу $\mathrm{Aut}(P(A)) \cap \mathrm{Isom}(P(A))$, де $\mathrm{Isom}(P(A))$ — група ізометрій простору Бера $P(A)$.

У підрозділі 6.6 ми визначаємо розмірності алгебр Лі $\mathrm{Der}(A)$ та $\mathrm{Outder}(A)$ і порядки груп $\mathrm{Aut}(A)$ та $\mathrm{OutAut}(A)$, де A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра.

Як зазвичай, будемо позначати потужність множини X через $|X|$. Для двох множин X та Y позначимо через $\mathrm{Map}(Y, X)$ множину всіх відображень з Y в X. Якщо α, β — потужності множин X, Y відповідно, то покладемо $\alpha^{\beta} = |\mathrm{Map}(Y, X)|$. Традиційно, $\aleph_0$ — зліченна потужність.

Теорема 6.8. Нехай $A = \otimes_{i \in I} A_i$, де I — нескінченна множина, A_i — матричні алгебри над полем $\mathbb{F}$, $\dim_{\mathbb{F}} A_i > 1$. Тоді

$$\dim_{\mathbb{F}} \ \mathrm{Der}\ (A) \ = \ \dim_{\mathbb{F}} \ \mathrm{Outder}\ (A) \ = \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,|I|}.$$

Теорема 6.9. Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді

$$\dim_{\mathbb{F}} \ \mathrm{Der}(A) \ = \ \dim_{\mathbb{F}} \ \mathrm{Outder}(A) \ = \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,\aleph_0}.$$

Зауважимо, що для багатьох незлічених потужностей α справедлива рівність $\alpha^{\aleph_0} = \alpha$. Наприклад, це справедливо для $\alpha = \lambda^{\mu}$, де λ, μ — потужності і $\mu \geq \aleph_0$. Якщо $\mathbb{F}$ — поле рядів Лорана змінної z над деяким полем F_0 або його алгебричним розширенням, то $|\mathbb{F}| = |F_0|^{\aleph_0}$ і тому $|\mathbb{F}|^{\aleph_0} = |\mathbb{F}|$.

Теорема 6.10. Нехай A — зліченно–вимірна локально матрична алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тоді

$$|\,\mathrm{Aut}(A)\,| \ = \ |\,\mathrm{OutAut}(A)\,| \ = \ |\,\mathbb{F}\,|^{\,\aleph_0}.$$

У підрозділі 6.7 ми обговорюємо порядки груп автоморфізмів і груп ізометрій тензорних добутків стандартних просторів Хемінга, а також порядки груп автоморфізмів і груп ізометрій довільного зліченного (не обов'язково унітального) простору Хемінга. Зокрема, показуємо, що порядок групи ізометрій зліченного локально стандартного простору Хемінга дорівнює $2^{\aleph_0}$.

Розділ 7 присвячується групам нескінченних періодичних матриць. Розглянемо алгебру $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ усіх $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$–матриць над полем $\mathbb{F}$, котрі мають скінченне число ненульових елементів у кожному стовпчику.

Назвемо нескінченну $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$–матрицю *періодичною*, якщо вона має блочно–діагональний вигляд $\mathrm{diag}(a, a, \ldots)$, де a — це $(n \times n)$–матриця. У цьому випадку ми називатимемо число n *періодом матриці*, а саму матрицю *n–періодичною.* Позначимо через $M_n^p(\mathbb{F})$ алгебру усіх n–періодичних матриць. Легко бачити, що $M_n^p(\mathbb{F}) \cong M_n(\mathbb{F})$. Множина усіх періодичних матриць

$$M^p(\mathbb{F}) \ = \ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ M_n^p(\mathbb{F}) \ = \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ M_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$.

Позначимо через $GL_n^p(\mathbb{F})$ та $GL^p(\mathbb{F})$ групи оборотних матриць з алгебр $M_n^p(\mathbb{F})$ та $M^p(\mathbb{F})$ відповідно. Матимемо, що

$$GL_n^p(\mathbb{F}) \;\cong\; GL_n(\mathbb{F}), \quad GL^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} GL_n^p(\mathbb{F}).$$

Нехай s — число Стейніца. Тоді

$$M_s^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n|s} M_n^p(\mathbb{F})$$

є підалгеброю алгебри $M^p(F)$, а група

$$GL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; \bigcup_{n|s} GL_n^p(\mathbb{F})$$

є групою оборотних елементів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$.

Алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ є зліченно–вимірною унітальною локально матричною алгеброю, причому її число Стейніца дорівнює s. Розглянемо комутант групи $GL_s^p(\mathbb{F})$, а саме:

$$SL_s^p(\mathbb{F}) \;=\; [\; GL_s^p(\mathbb{F}) \;,\; GL_s^p(\mathbb{F}) \;] \;=\; \bigcup_{n|s} SL_n^p(\mathbb{F}) \;,$$

де $SL_n^p(\mathbb{F}) = [\; GL_n^p(\mathbb{F}), GL_n^p(\mathbb{F}) \;] \cong SL_n(\mathbb{F})$.

Центр C групи $GL_s^p(\mathbb{F})$ складається зі скалярних матриць $\varepsilon \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots)$, $\varepsilon \in \mathbb{F}^*$, а перетин $C \cap SL_n^p(\mathbb{F})$ — з матриць $\varepsilon \cdot \mathrm{Id}$, де $\varepsilon^n = 1$. Тому $C_s = C \cap SL_s^p(\mathbb{F})$ складаєтья зі скалярних матриць $\varepsilon \cdot \mathrm{Id}$, де ε є коренем n–го степеня з 1, а $n \in \Omega\ (s)$.

Теорема 7.2. Нехай s — нескінченне число Стейніца. Тоді спеціальна проективна лінійна група $PSL_s^p(\mathbb{F}) = SL_s^p(\mathbb{F}) \big/ C_s$ є простою. Якщо для кожного натурального числа $n \in \Omega\ (s)$ у полі $\mathbb{F}$ існують корені n–го степеня з усіх його ненульових елементів, то

$$PGL_s^p(\mathbb{F}) \;= GL_s^p(\mathbb{F}) \big/ C_s \;\cong\; PSL_s^p(\mathbb{F}).$$

Тепер нашою задачею є знайти умови ізоморфності груп $SL_s^p(\mathbb{F})$ та описати їх автоморфізми. Почнемо з більш загального випадку.

Теорема 7.6. Нехай A та B — унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то кільця A та B або ізоморфні, або антиізоморфні. Більш того, для довільного ізоморфізму $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ або знайдеться ізоморфізм кілець

$\theta_1 : A \to B$ такий, що φ є звуженням θ_1 на $[A^*, A^*]$, або знайдеться антиізоморфізм кілець $\theta_2 : A \to B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо $\varphi(g) = \theta_2(g^{-1})$.

Якщо алгебри A та B зліченно—вимірні, то теорему 7.6 можна уточнити. У цьому випадку, не обмежуючи загальності, можна припустити, що $A = M_s^p(\mathbb{F})$, де s — число Стейніца алгебри A. Алгебра $M_s^p(\mathbb{F})$ замкнена відносно транспонування $t : M_s^p(\mathbb{F}) \to M_s^p(\mathbb{F})$, яке є антиавтоморфізмом.

Теорема 7.7. Припустимо, що A та B — зліченно–вимірні унітальні локально матричні алгебри. Якщо групи $[A^*, A^*]$ та $[B^*, B^*]$ ізоморфні, то алгебри A та B ізоморфні. Більш того, довільний ізоморфізм $\varphi : [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ або продовжується до ізоморфізму кілець $A \to B$, або знайдеться ізоморфізм кілець $\theta : A \to B$ такий, що для довільного елемента $g \in [A^*, A^*]$ ми маємо $\varphi(g) = \theta\left((g^{-1})^t\right)$.

Наслідок 7.2. Групи $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ та $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли числа Стейніца s_1 та s_2 однакові.

Теореми 7.7 та 7.6 базуються на описі ізоморфізмів елементарних матричних груп над довільними кільцями, який отриманий у роботах І.З. Голубчика, О.В. Михальова та роботі Ю.І. Зельманова.

Позначимо через H циклічну групу порядку 2, породжену автоморфізмом $g \to (g^{-1})^t$, $g \in SL_s^p(\mathbb{F})$.

Теорема 7.12. Нехай $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\ (M_s^p(\mathbb{F}))$ — група автоморфізмів алгебри $M_s^p(\mathbb{F})$. Тоді

$$\mathrm{Aut}\ \left(SL_s^p(\mathbb{F})\right)\ =\ H \cdot \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\ (M_s^p(\mathbb{F})) \cdot \mathrm{Aut}\ (\mathbb{F}).$$

В останньому розділі 8 ми вивчаємо диференціювання асоціативних алгебр і алгебр Лі нескінченних матриць. **Підрозділ 8.1** починається з розгляду таких неунітальних локально матричних алгебр:

(1) Нехай I — нескінченна множина. Позначимо символом $M_\infty(I, \mathbb{F})$ асоціативну алгебру $(I \times I)$–матриць над полем $\mathbb{F}$, що містять лише скінченну множину ненульових елементів.

(2) Нехай V — зліченно–вимірний векторний простір. В алгебрі $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ усіх лінійних перетворень розглянемо ідеал $\mathrm{End}_{fin}(V)$, який складається з перетворень скінченного рангу.

Разом з цими алгебрами ми також розглядатимемо алгебру $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, яка складається з $(I \times I)$–матриць, що мають скінченну множину ненульових елементів у кожному рядочку і в кожному стовпчику, і алгебру матриць Якобі $MJ(\mathbb{F})$, яка складається з $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$–матриць $(a_{ij})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, $a_{ij}\in\mathbb{F}$, для яких існує натуральне число k таке, що $a_{ij}=0$ при $|i-j|>k$. Ці алгебри містяться в алгебрі $M_I(\mathbb{F})$ $(I\times I)$–матриць, які мають скінченну множину ненульових елементів у кожному стовпчику. Якщо V — векторний простір і $\dim_{\mathbb{F}} V=|I|$, то $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)\cong M_I(\mathbb{F})$. Окремо відмітимо, що підалгебра $M_\infty(I,\mathbb{F})$ є ідеалом алгебри $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

Якщо A — алгебра, $a\in A$, J — ідеал алгебри A, то через $\mathrm{ad}_J(a)$ позначатимемо оператор $\mathrm{ad}_J(a): x\mapsto[a,x]$, $x\in J$.

Використовуючи теорему 6.1 про апроксимацію в топології Тихонова, доводимо такі теореми:

Теорема 8.3. Кожне диференціювання алгебри $MJ(\mathbb{F})$ є внутрішнім.

Теорема 8.4. Кожне диференціювання алгебри $\mathrm{End}_{fin}(V)$ має вигляд $\mathrm{ad}_{\mathrm{End}_{fin}(V)}(a)$, де $a\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\ (V)$.

Теорема 8.5.

1) Кожне диференціювання алгебри $M_\infty(I,\mathbb{F})$ має вигляд $\mathrm{ad}_{M_\infty(I,\mathbb{F})}(a)$, де $a\in M_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

2) Кожне диференціювання алгебри $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$ є внутрішнім.

У підрозділі 8.2 ми вивчаємо алгебри Лі, які пов'язані з асоціативними алгебрами $M_\infty(I,\mathbb{F})$, $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$, $MJ(\mathbb{F})$, $M_I(\mathbb{F})$.

Довільній асоціативній алгебрі A відповідає приєднана алгебра Лі $A^{(-)}$ з тим же векторним простором і новою операцією: $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in A$.

Лінійне перетворення $*: A\to A$ називається *інволюцією*, якщо $(a^*)^*=a$, $(ab)^*=b^*a^*$ для довільних елементів a, $b\in A$. Підпростір кососиметричних відносно інволюції $*$ елементів $\{\,a\in A\,|\,a^*=-a\,\}$ є підалгеброю алгебри Лі $A^{(-)}$.

В алгебрі $M_\infty(I,\mathbb{F})$ діють інволюція транспонування і симплектична інволюція. Відповідні алгебри кососиметричних елементів позначаються $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$ і $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$. Зауважимо, що обидві ці інволюції єдиним чином продовжуються до інволюцій алгебри $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

Алгебри Лі

$$\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})\ =\ M_\infty(I,\mathbb{F})^{(-)},\quad \mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})\ =\ [\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F}),\mathfrak{gl}_\infty(I,\mathbb{F})],$$

$$\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F}),\quad \mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F}),\quad \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})\ =\ M_{rcf}(I,\mathbb{F})^{(-)},$$

$$\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F}) \;=\; MJ(\mathbb{F})^{(-)}, \quad \mathfrak{gl}_I(\mathbb{F}) \;=\; M_I(\mathbb{F})^{(-)}$$

інтенсивно вивчалися. Ми не маємо на меті зробити повний огляд робіт за цією тематикою. Відмітимо лише серію робіт І. Пенкова і В. Серганової з теорії зображень алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$, використання зображень алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{N},\mathbb{F})$ у математичній фізиці у роботах І. Френкеля, І. Пенкова і В. Серганової, застосування алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ у теорії солітонів у роботах Б. Фейгана, Б. Циган та ін.

К.-Х. Нееб довів, що якщо поле $\mathbb{F}$ має нульову характеристику, то кожне диференціювання алгебри $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ має вигляд $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a)$, де $a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

Наступна теорема розповсюджує цей опис на випадок довільного поля характеристики, відмінної від 2, а також дає опис диференціювань алгебр Лі $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$.

Теорема 8.8. Нехай $\mathbb{F}$ — поле характеристики, відмінної від 2. І нехай I — нескінченна множина.

1) Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})$ має вигляд $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_\infty(I,\mathbb{F})}(a)$, де $a \in \mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$.

2) Кожне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{so}_\infty(I,\mathbb{F})$ (відповідно $\mathfrak{sp}_\infty(I,\mathbb{F})$) має вигляд $\mathrm{ad}(a)$, де a — матриця з $M_{rcf}(I,\mathbb{F})$, яка є кососиметричною відносно транспонування (відповідно відносно симплектичної інволюції).

3) Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$ є внутрішніми.

4) Усі диференціювання алгебри $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є внутрішніми.

Зауважимо, що В. Голубовський і С. Журек довели, що довільне диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$ є внутрішнім.

При доведенні теореми 8.8 використовуються теореми 8.3 та 8.5 про диференціювання відповідних асоціативних алгебр і доведення гіпотез Херстейна К. Бейдаром, М. Брешаром, М. Чеботарем і Дж. Мартиндейлом.

При доведенні теореми 8.8 використовується також результат, який представляє собою незалежний інтерес. Нагадаємо, що алгебра Лі L називається *досконалою*, якщо $L = [L, L]$.

Теорема 8.6. Для кожної нескінченної множини I алгебри Лі $\mathfrak{gl}_I(\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I,\mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_J(\mathbb{F})$ є досконалими.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена асимптотичним конструкціям та структурній теорії локально матричних алгебр та їх застосуванням до груп і алгебр нескінченних матриць та просторів Хемінга.

Інтерес до локально матричних алгебр виник у зв'язку з їх застосуваннями в теорії $\mathbb{C}^*$–алгебр, теорії зображень та математичній фізиці. Як зазначають А. Вершик та С. Керов, локально матричні алгебри — це нескінченно–вимірні алгебри, які найближчі до класичних алгебр матриць.

Результати дисертаційної роботи можна розділити на три частини. У першій частині: (i) вводяться нові приклади локально матричних алгебр довільних розмірностей, (ii) вводяться нові інваріанти Стейніца локально матричних алгебр, (iii) вивчаються розклади локально матричних алгебр довільної розмірності у тензорні добутки матричних алгебр та примарних локально матричних алгебр.

У другій частині розробляється структурна теорія локально стандартних просторів Хемінга, яка є паралельною структурній теорії локально матричних алгебр.

У третій частині вивчаються: (i) автоморфізми та диференціювання локально матричних алгебр, (ii) групи нескінченних періодичних матриць, (iii) диференціювання асоціативних та лієвських алгебр нескінченних матриць.

Основними новими науковими результатами дисертації є такі:

– Розв'язана проблема Курочкіна про примарну розкладність локально матричних алгебр.

– Побудовані нові приклади нерозкладних локально матричних алгебр.

– Знайдені необхідні і достатні умови Моріта еквівалентності зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр у термінах їх чисел Стейніца.

– Побудовані спектральні Стейніцові інваріанти неунітальних локально матричних алгебр.

– Показано, що зліченний локально стандартний простір Хемінга визначається інваріантом Стейніца і розкладається в нескінченний тензорний добуток стандартних просторів Хемінга (аналог теорем Глімма і Кьоте).

– Знайдена параметризація неунітальних локально стандартних просторів Хемінга числами Стейніца і дійсними числами (аналог теореми Діксм'є).

– Описані диференціювання і автоморфізми зліченно–вимірних унітальних локально матричних алгебр.

– Знайдені розмірності алгебри Лі зовнішніх диференціювань і порядки груп зовнішніх автоморфізмів довільної зліченно–вимірної локально матричної алгебри.

– Описані ізоморфізми груп нескінченних періодичних матриць.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Безущак О.О., Про функцію довжини та порядок Брюа для груп ізометрій скінченних берівських метрик, *Тези II Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні, присвяченій пам'яті професора Л.А.Калужніна (1914–1990)*, (1999, 9–16 травня, Київ–Вінниця, Україна), С.54–55.

2. Безущак О.О., Про стабілізатор шляху в однорідному дереві валентності n, *Тези III Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні*, (2001, 2–8 липня, Суми, Україна), С.125–126.

3. Bezushchak O., The lattice of closed normal subgroups of the isometry group of generalized Baire's metric space, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, **8** (2002), P.33–36.

4. Безущак О.О., Розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій простору узагальненого берівського типу, *Мат. студ.*, **17** (2002), №1, С.29–40.

5. Безущак О.О., Спряженість в групі автоморфізмів некореневого дерева, *Тези Міжнародної алгебраїчної конференції, присв'яченій 100–річчю роботи Граве в Київському університеті*, (2002, 17–22 червня, Київ, Україна), С.69–70.

6. Bezushchak O., Parabolic subgroups of homogenous trees automorphism groups, *Abstracts of the 4th International Algebraic Conference in Ukraine*, (2003, August 4-9, Lviv, Ukraine), P.42–44.

7. Bezushchak O., On some inverse semigroup of partially defined transformations of integers, *Abstracts of the 5th International Algebraic Conference in Ukraine*, (2005, July 20–27, Odessa, Ukraine), P.35.

8. Bezushchak O., On Green's relations of inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers, *Abstracts of the International Algebraic Conference in Ukraine, ICOR-2006* (2006, July 30-August 5, Kyiv, Ukraine), P.16–17.

9. Безущак О.О., Про ідеали інверсного моноїда частково визначених ко-скінченних автоморфізмів лінійки, *Тези Дванадцятої Міжнародної наукової конференції імені Академіка М.Кравчука*, (2008, 15–17 травня, Київ, Україна), С.497.

10. Bezushchak O.E., Zaitsev M.V., Exponents of Identities of Group Rings, *Матем. заметки*, **89** (2011), no.5, P. 643–651.

11. Bezushchak O., Zaicev M., Special Lie superalgebras with maximality condition for subalgebras, *Rend. Circ. Matem. di Palermo*, **60** (2011), no.3, P.395–401.

12. Безущак О.О., Беляев А.А., Зайцев М.В., Экспоненты тождеств алгебр с присоединенной единицей, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **3**(2012), С.7–9.

13. Безущак О.О., Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **2** (2014), С.9–13.

14. Bezushchak O. Oliynyk B., Sushchanskyy V., Relational structures and Steinitz's lattice, *Abstracts of the International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy"*, (2016, December 19-22, Kyiv, Ukraine), P.12.

15. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures, *Algebra Discrete Math.*, **21** (2016), no.2, P.184—201.

16. Bezushchak O.O., Sushchans'kyi, V.I., Groups of periodically defined linear transformations of an infinite-dimensional vector space, *Укр. мат. журн.*, **67** (2016), no.10, P.1457–1468.

17. Bezushchak O.O., Oliynyk B.V., Diagonal limits of linear groups, *Abstracts of the 11th International Algebraic Conference in Ukraine*

dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko, (2017, Juiy 3-7, , Kyiv, Ukraine), P.21.

18. Bezushchak Oksana, On diagonal locally SL–groups, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2019), P.8–11.

19. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.90.

20. Bezushchak O., Derivations and automorphisms of locally matrix algebras and groups, *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, (2020), No.9, P.19–23.

21. Bezushchak O., On the Lie structure of locally matrix algebras, *Carpathian Math. Publ.*, **12** (2020), no.2, P.311–316.

22. Bezushchak O., Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *Book of Abstracts of the International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv*, (2020, July 14–17, Kyiv, Ukraine), P.19.

23. Bezushchak O. and Oliynyk B., Morita equivalent unital locally matrix algebras, *Algebra Discrete Math.* **29** (2020), no.2. P.173–179.

24. Bezushchak Oksana, Oliynyk Bogdana, Ordinality of isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences, *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Математика. Механіка*, **1** (2020), P.18–20.

25. Bezushchak O. and Oliynyk B., Primary decompositions of unital locally matrix algebras, *Bull. Math. Sci.* **10** (2020), no.1, Doi:10.1142/S166436072050006X.

26. Bezushchak O. and Oliynyk B., Unital locally matrix algebras and Steinitz numbers, *J. Algebra Appl.*, **19** (2020), no.9., Doi:10.1142/SO219498820501807.

27. Bezushchak O. and Oliynyk B., Hamming spaces and locally matrix algebras, *J. Algebra Appl.*, доступна онлайн з 3 серпня 2020, www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0219498821501474(2020).

АНОТАЦІЯ

Безущак О.О. Структурна теорія та асимптотичні конструкції локально матричних алгебр.— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел.– Київський національний університет імені Тараса Шевченка.– Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Розв'язана проблема Курочкіна про примарну розкладність і побудовані приклади нерозкладних локально матричних алгебр. Описані спектральні Стейніцові інваріанти локально матричних алгебр та просторів Хемінга та знайдена параметризація локально стандартних просторів Хемінга числами Стейніца і дійсними числами. Описані диференціювання і автоморфізми унітальних та знайдені розмірності алгебр Лі зовнішніх диференціювань і порядки груп зовнішніх автоморфізмів довільних зліченно–вимірних локально матричних алгебр. Описані ізоморфізми груп нескінченних періодичних матриць.

Ключові слова: локально матричні алгебри, число Стейніца, диференціювання, нескінченний тензорний добуток, кільце з мірою, простір Хемінга, нескінченні матриці, періодичні матриці.

АННОТАЦИЯ

Безущак О.Е. Структурная теория и асимптотические конструкции локально матричных алгебр.— Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел.– Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко.– Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2021.

Решена проблема Курочкина о примарной разложимости и построены примеры неразложимых локально матричных алгебр. Описаны спектральные Стейницовые инварианты локально матричных алгебр и пространств Хемминга и найдена параметризация локально стандартных пространств Хемминга числами Стейница и действительными числами. Описаны дифференцирования и автоморфизмы унитальных и найдены размерности алгебр Ли внешних дифференцирований и порядки групп внешних автоморфизмов произвольных счетно–мерных локально матричных алгебр. Описаны изоморфизмы групп бесконечных периодических матриц.

Ключевые слова: локально матричные алгебры, число Стейница, дифференцирование, бесконечное тензорное произведение, кольцо с мерой, пространство Хемминга, бесконечные матрицы, периодические матрицы.

ABSTRACT

Bezushchak O.O. Structural theory and asymptotic constructions of locally matrix algebras.— Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.06 — Algebra and Number Theory.– Taras Shevchenko National University of Kyiv.– Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to asymptotic constructions and structure theory of locally matrix algebras and their applications to groups and algebras of infinite matrices and Hamming spaces.

We introduced new examples of locally matrix algebras of arbitrary dimensions and defined their Steinitz invariants. It is shown that this invariant does not determine a locally matrix algebra of an uncountable dimension up to an isomorphism, however it determines an algebra up to a universal elementary equivalence. We have also characterized Morita equivalence of countable–dimensional unital locally matrix algebras in terms of their Steinitz invariants. The thesis includes analysis of decompositions into tensor products of matrix algebras and primary locally matrix algebras. In particular, we constructed examples of uncountable–dimensional unital locally matrix algebras that do not decompose into a tensor product of primary algebras, which gives a negative answer to the question of Kurochkin.

We introduced a new Steinitz invariant of a not necessarily unital locally matrix algebra: its spectrum that determines a countable–dimensional locally matrix algebra up to an isomorphism. We give a complete classification of saturated sets of Steinitz numbers that appear as spectrums of locally matrix algebras. It is proved that an countable unital locally standard Hamming space decomposes as a tensor product of standard Hamming spaces. These spaces are related to Cartan subalgebras of locally matrix algebras and are determined by their Steinitz invariants. For a not necessarily unital locally standard Hamming space we defined its spectrum which is a saturated set of Steinitz numbers and proved an analog of Dixmier's theorem.

The thesis includes study of automorphisms and derivations of locally matrix algebras, groups of infinite periodic matrices and derivations of associative and Lie algebras of infinite matrices. It is proved that the ideal of inner derivations of a locally matrix algebra is dense in the Lie algebra of all derivations in Tykhonoff topology and the subgroup of inner automorphisms of a unital locally matrix algebra is dense in the group of all autmorphisms and the semigroup of injective endomorphisms in Tykhonoff topology. We describe derivations and injective endomorphisms of infinite tensor products of matrix algebras as converging infinite sums of inner derivations or converging infinite products of inner automorphisms of a special type. It is proved that for a countable–dimensional locally matrix algebra the dimension of the Lie algebra of outer derivations and the order of the group of outer automorphisms are equal to $|\mathbb{F}|^{\aleph_0}$. It is proved also that the Lie algebra of outer derivations is not locally finite dimensional (an analog of the theorem of Strade). We used density of the algebra of inner derivations of a locally matrix algebra to show that derivations of the associative algebra of infinite matrices $M_\infty(I, \mathbb{F})$ and special linear algebras $\mathfrak{sl}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_\infty(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{sp}_\infty(I, \mathbb{F})$ are adjoint operators of elements from $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$ and $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ respectively, and derivations of the algebras $M_{rcf}(I, \mathbb{F})$, $\mathfrak{gl}_{rcf}(I, \mathbb{F})$ and the algebra of Jacobi matrices and its adjoint algebra are inner.

Keywords: locally matrix algebras, Steinitz number, derivation, infinite tensor product, measure ring, Hamming space, infinite matrices, periodic matrices.