Лекція 7: Ранг Шмідта для узагальнених станів Вернера.

1. Стани Вернера.

Станом Вернера з $\mathbb{S}(H \otimes H)$, $\dim H = d$, називають наступний стан

$$W_F = F \frac{2}{d(d+1)} P_{sym} + (1-F) \frac{2}{d(d-1)} P_{asym},$$

де P_{sym} це проектор на симетричний підпростір, P_{asym} – на антисиметричний, а F це параметр, $0 \leq F \leq 1$.

Нагадаємо, що симетричний підпростір можна задати як

$$H_{sym} = \mathrm{span}\{|\phi\rangle|\phi\rangle,\ \forall|\phi\rangle \in H\},$$

а антисиметричний як

$$H_{asym} = \mathrm{span}\{|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle,\ \forall|\phi\rangle, |\psi\rangle \in H\}.$$

У якості базису H_{sym} можна взяти $\{|i\rangle|i\rangle\} \cup \{|i\rangle|j\rangle + |j\rangle|i\rangle\}$, загалом $\frac{d(d+1)}{2}$ векторів. При цьому базис H_{asym} можна скласти з $d(d-1)/2$ векторів $\{|i\rangle|j\rangle - |j\rangle|i\rangle\}$. Ці два підпростори розбивають $H = H_{sym} \oplus H_{asym}$.

Твердження 1 *Якщо стан ρ комутує з $U \otimes U$, або, що те саме,*

$$\rho = (U \otimes U)\rho(U \otimes U)^\dagger$$

для будь-якого унітарного U, то $\rho = W_F$ для деякого $0 \leq F \leq 1$.

Доведення. (скорочено)

За відомим результатом з теорії груп ρ є лінійною комбінацією одиничного оператору I та оператору перестановки $SWAP|\phi\rangle|\psi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle$. Оскільки $SWAP = P_{sym} - P_{asym}$, а $P_{sym} + P_{asym} = I$, то ρ зручно записати як лінійну комбінацію P_{sym} та P_{asym}. З умови на слід та додатність ρ випливають умови на коефіцієнти.

Узагальнені стани Вернера ρ_F.

Узагальненим станом Вернера (також його називають ізотропічним) будемо називати наступний стан у $\mathbb{S}(H \otimes H)$:

$$\rho_F = F|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1-F)\frac{(I - |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|)}{d^2-1},$$

де $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}|i\rangle|i\rangle$ (тож $|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| = \frac{1}{d}\sum_{ij}E_{ij}\otimes E_{ij}$), а F це параметр, $0 \le F \le 1$.

Твердження 2 *Якщо стан ρ комутує з $U \otimes \overline{U}$, або, що те саме,*

$$\rho = (U \otimes \overline{U})\rho(U \otimes \overline{U})^\dagger$$

для будь-якого унітарного U, то $\rho = \rho_F$ для деякого $0 \le F \le 1$.

Доведення. Нагадаємо, що між $H \otimes H$ та $L(H)$ є ізометрія, яку можна задати як

$$\Gamma : |i\rangle|j\rangle \to |i\rangle\langle j|.$$

Для цієї ізометрії виконується

$$\Gamma(|u\rangle|\overline{v}\rangle) = |u\rangle\langle v|$$

для будь-яких векторів $|u\rangle$ та $|v\rangle$.

Звідси, дія $(U\otimes\overline{U})(.)$ на $H \otimes H$ буде відповідати дії спряженням $U_\Gamma(.) = U(.)U^\dagger$ на $L(H)$, оскільки

$$\Gamma(U|i\rangle\overline{U}|j\rangle) = \Gamma(U|i\rangle\overline{U|j\rangle}) = U|i\rangle\langle j|U^\dagger.$$

Стан ρ також можна розглядати як дію на $H \otimes H$, йому буде відповідати якась дія $\rho_\Gamma = \Gamma \circ \rho \circ \Gamma^{-1}$ на $L(H)$.

Оскільки ρ та $U \otimes \overline{U}$ комутують, то дії ρ_Γ та $U(.)U^\dagger$ також комутують, тобто

$$\forall U \forall X \in L(H) : \quad \rho_\Gamma(UXU^\dagger) = U\rho_\Gamma(X)U^\dagger.$$

Далі, існує відомий результат з теорії алгебр Лі, що всі відображення з $L(L(H))$, які комутують з $U(.)U^\dagger$ для всіх U, це двовимірний підпростір, який породжений I та $X \to I \cdot \mathrm{Tr}(X)$. Тому ρ_Γ це лінійна комбінація цих двох відображень.

Оскільки I та $|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$ комутують з $U\otimes\overline{U}$, то можемо зробити висновок, що ρ це лінійна комбінація I та $|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$.

Твердження 3

$$\forall F \in \mathbb{R}: \quad (I \otimes T)(\rho_F) = W_{(Fd+1)/2},$$

де T це операція транспонування.

Доведення. (скорочено)

Оскільки $\overline{A} = (A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$ та $(AB)^T = B^T A^T$, то не важко перевірити, що

$$\forall U, A: \quad (U \otimes \overline{U}) \cdot (I \otimes T)(A) \cdot (U \otimes \overline{U})^\dagger = (I \otimes T)((U \otimes U) A (U \otimes U)^\dagger).$$

Звідси, якщо $(I \otimes T)(A)$ є узагальненим станом Вернера (не обов'язково додатнім), то A є звичайним станом Вернера, і навпаки. Далі треба використати, що $(I \otimes T)(I) = I$ та

$$(I \otimes T)(\rho_1) = (I \otimes T)(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|) = \frac{1}{d}(P_{sym} - P_{asym}) = W_{(d+1)/2}.$$

Наслідок 1 *Якщо $0 \le F < 1/2$, то стан Вернера W_F є сплутаним, бо*

$$(I \otimes T)(W_F) = \rho_{(2F-1)/d} \not\geq 0.$$

Насправді ця умова точна, тобто при всіх $1/2 \le F \le 1$ стан W_F буде сепарабельним.

Наслідок 2 *Якщо $1/d < F \le 1$, то стан ρ_F є сплутаним, бо*

$$(I \otimes T)(\rho_F) = W_{(Fd+1)/2} \not\geq 0.$$

Ця умова також є точною.

3. Ранг Шмідта для ρ_F.

Теорема 1 *Ранг Шмідта для $\rho_F \in \mathbb{S}(H \otimes H)$ дорівнює k тоді й тільки тоді, коли*

$$\frac{k-1}{d} < F \leq \frac{k}{d},$$

(при $F = 0$ ранг також дорівнює 1).

Лема 1 *Для будь-якого $\rho \in \widetilde{\mathbb{S}}_k \subset \mathbb{S}(H \otimes H)$, тобто ρ має ранг Шмідта $\leq k$, маємо що*

$$f(\rho) = \max_{\psi} \langle \psi | \rho | \psi \rangle \leq \frac{k}{d},$$

де максимум береться по максимально сплутаним станам $|\psi\rangle$.

Доведення.

Нехай $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$, де $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |u_i\rangle|v_i\rangle$, $\sum \lambda_i^2 = 1$.

І нехай $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} |x_i\rangle|y_i\rangle$. Тоді

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle x_i | u_j \rangle \langle y_i | v_j \rangle$$

Існує унітарний оператор U який переводить базис $|y_i\rangle$ у $|\overline{x}_i\rangle$, тобто $U|y_i\rangle = |\overline{x}_i\rangle$, звідси

$$\langle x_i | u_j \rangle = \langle \overline{u}_j | \overline{x}_i \rangle = \langle \overline{u}_j | U | y_i \rangle.$$

Тому попередній вираз можна записати як

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle \overline{u}_j | U | y_i \rangle \langle y_i | v_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle \overline{u}_j | U | v_j \rangle.$$

Але ж $|\langle \overline{u}_j | U | v_j \rangle| \leq 1$, звідси $|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Тому

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \leq \frac{1}{d} \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \Big)^2.$$

З нерівності Коші-Буняковського $\big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \big)^2 \leq k \big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 \big) = k$,
тож $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \leq k/d$. Коли ρ це опукла комбінація чистих станів, очевидно, нерівність також виконується.

Лема 2 *Якщо $F \geq 1/d^2$, то*

$$f(\rho_F) = F.$$

Доведення. З умови випливає, що $F \geq \frac{1-F}{d^2-1}$, а звідси найбільше власне значення ρ_F дорівнює F, при цьому $\langle\Psi^+|\rho_F|\Psi^+\rangle = F$.

Поєднуючи ці дві леми маємо, що якщо $F > \frac{k}{d}$, то ρ_F має ранг Шмідта не менше за $k+1$. Альтернативно це можна отримати з наступного твердження

Твердження 4 *ВІдображення $\Lambda_p : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ виду*

$$\Lambda_p(X) = p\,\mathrm{Tr}(X) \cdot I - X$$

при $k \leq p < k+1$ є k-позитивним, але не є $k+1$-позитивним (при $k < d$).

Можна порахувати, що

$$(I \otimes \Lambda_p)(\rho_F) = \frac{p}{d} I - \rho_F.$$

Звідси при $k \geq 1$ якщо $F > k/d$, то при будь-якому $p < Fd$ виконується $(I \otimes \Lambda_p)(\rho_F) \not\geq 0$. Зокрема, Λ_k буде свідком сплутаності для ρ_F рангу $k+1$.

Залишається довести, що при $(k-1)/d < F \leq k/d$ ранг Шмідта ρ_F не більше за k.

Операція кручення

Для будь-якого стану $\sigma \in \mathbb{S}(H \otimes H)$ можна визначити операцію кручення (twirl):

$$P_{U\overline{U}}(\sigma) = \int_{\mathbb{U}(H)} (U \otimes \overline{U})\sigma(U \otimes \overline{U})^{\dagger} dU,$$

де dU – це нормалізована ліва інваріантна міра Хаара на групі усіх унітарних операторів $\mathbb{U}(H)$.

Твердження 5 $\forall \sigma \in \mathbb{S}(H \otimes H)$:

$$P_{U\overline{U}}(\sigma) = \rho_F,$$

$$F = \mathrm{Tr}(\sigma \cdot |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|) = \langle\Psi^+|\sigma|\Psi^+\rangle.$$

Доведення. Очевидно, що $P_{U\overline{U}}(\sigma)$ є узагальненим станом Вернера оскільки це по суті середнє по всім крученням. Залишається визначити параметр. Можна записати

$$\mathrm{Tr}(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \cdot P_{U\overline{U}}(\sigma)) =$$

$$= \int_{\mathbb{U}(H)} \mathrm{Tr}\left(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \cdot (U \otimes \overline{U})\sigma(U \otimes \overline{U})^{\dagger}\right) dU =$$

$$= \int_{\mathbb{U}(H)} \mathrm{Tr}\left(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|\sigma\right) dU = \mathrm{Tr}\left(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|\sigma\right).$$

Але ж $\mathrm{Tr}(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|\rho_F) = \langle\Psi^+|\rho_F|\Psi^+\rangle = F$, тож для $P_{U\overline{U}}(\sigma)$ відповідний $F = \mathrm{Tr}(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|\sigma)$.

Лема 3 *Ранг Шмідта $P_{U\overline{U}}(\sigma)$ не перевищує ранга Шмідта σ.*

Лема 4 *При $F \leq 1/d$ стан ρ_F є сепарабельним*

Доведення. Візьмемо $|\phi\rangle = |1\rangle \otimes (a|1\rangle + b|2\rangle)$, $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$, тобто σ сепарабельний.

Маємо, що

$$\langle\Psi^+|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i \langle i|\langle i| \cdot |1\rangle \otimes (a|1\rangle + b|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{d}} \cdot a,$$

звідси $\langle\Psi^+|\sigma|\Psi^+\rangle = |a|^2/d$. Тож якщо $|a|^2/d = F$ ми отримуємо, що

$$\rho_F = P_{U\overline{U}}(\sigma).$$

Але ж $P_{U\overline{U}}(\sigma)$ сепарабельний, звідси і ρ_F сепарабельний.

Лема 5 *При $(k-1)/d < F \leq k/d$, $k \geq 2$, стан ρ_F має ранг Шмідта не більше за k.*

Доведення. Знов таки, по аналогії до попередньої леми можна підібрати σ рангу Шмідта k таке, що $\langle \Psi^+ | \sigma | \Psi^+ \rangle = F$. Але можна і трошки по іншому.

Можна використати те, що за таких умов на F стан ρ_F є опуклою комбінацією стану $\rho_{k/d}$ та максимально змішаного стану I/d^2. А $\rho_{k/d}$ можна отримати крученням стану $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$, де $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} |i\rangle|i\rangle$.

Дійсно,

$$\langle \Psi^+ | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i \langle i|\langle i| \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} |j\rangle|j\rangle = \sqrt{\frac{k}{d}},$$

тож $\langle \Psi^+ | \sigma | \Psi^+ \rangle = k/d$, а отже $P_{U\overline{U}}(\sigma) = \rho_{k/d}$. Звідси ранг Шмідта $\rho_{k/d}$ не більше за k, а отже $\mathrm{s.rank}(\rho_F) \leq k$, оскільки ранг Шмідта I/d^2 це 1.