НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

АТЛАСЮК ОЛЕНА МИКОЛАЇВНА

УДК 517.927

ОДНОВИМІРНІ ФРЕДГОЛЬМОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

111 – Математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________ О. М. Атласюк

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Михайлець Володимир Андрійович

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Атласюк О. М. Одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена дослідженню характеристик розв'язності і неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних класів одновимірних неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку у просторах Соболєва на скінченному інтервалі.

Питання про обґрунтування граничного переходу щодо задач Коші та загальних крайових задач досліджено багатьма математиками. У роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962 – 1965) встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені та доповнені А. Ю. Левіним (1967 – 1973), З. Опялем (1967), В. Т. Рейдом (1967) і Нгуен Тхе Хоаном (1993).

Клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку введено і досліджено І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (1996). Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$. Встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. У роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової отримано узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

В. А. Михайлецем і його учнями (2008 – 2018) було введено і досліджено максимально широкі класи найбільш загальних крайових задач для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь щодо різних функціональних просторів, зокрема щодо просторів Соболєва (Рева Н. В., Кодлюк Т. І., Гнип Є. В.), просторів неперервно диференційовних функцій (Чеханова Г. О., Солдатов В. О.), просторів Гельдера (Солдатов В. О., Маслюк Г. О.), просторів Слободецького (Гнип Є. В., Маслюк Г. О.). Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Для найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку достатні умови неперервної залежності за параметром їх розв'язків у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем (2010). Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем (2017). Ці результати було застосовано до дослідження багатоточкових крайових задач, матриць Гріна та використано у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, а й випадок несепарабельних просторів Соболєва при $p = \infty$.

Отже, з огляду на сказане, актуальним є дослідження найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільних порядків щодо просторів Соболєва W_p^n, де $1 \leq p \leq \infty$, зокрема питання про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач. Варто зазначити, що найбільш загальні задачі можуть містити в крайових умовах похідні цілого та дробового порядку і тому мають істотні особливості, які відсутні у класичних задачах (Коші, дво- та багатоточкових, інтегральних та мішаних задачах). Зважаючи на це, систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та одного додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі обговорено об'єкт і предмет, наведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження. Об'єктом дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва, а предметом — характер залежності за параметром розв'язків цих задач у відповідних нормованих просторах.

У другому розділі досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^n)^m$ і $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$. Доведено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах. Встановлено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^n)^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва. Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^n)^m$ у випадку $p = \infty$ та у випадку $1 \leq p < \infty$.

У третьому розділі досліджено найбільш загальні крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $mr - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^{n+r})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі. Встановлено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у відповідних просторах. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва. Встановлено достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць крайових задач $M\left(L(k), B(k)\right)$ до матриці $M\left(L, B\right)$ при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$; критерій сильної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p < \infty$; критерій рівномірної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p < \infty$; достатні умови напівнеперервності зверху ядра і коядра оператора крайової задачі при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

Додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- для найбільш загальних крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ встановлено їх нетеровість і знайдено індекс;
- у термінах спеціально введеної числової характеристичної матриці знайдено вимірності ядра і коядра розглянутих крайових задач;
- доведено граничну теорему для характеристичних матриць послідовності крайових задач;
- вперше досліджено неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ для всіх значень $1 \leq p \leq \infty$. Знайдено критерій неперервності розв'язків за параметром;
- доведено, що похибка і нев'язка розв'язків крайових задач мають однаковий порядок малості;
- отримано граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ з $1 \leq p < \infty$ і $p = \infty$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних фредгольмових крайових задач, зокрема багатоточкових, задач із похідними дробового порядку. Особливістю роботи є те, що в ній вперше досліджено характер розв'язності крайових задач із перевизначеними або недовизначеними крайовими умовами; досліджено найбільш складний, але важливий для застосувань випадок несепарабельних нерефлексивних просторів Соболєва.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Соболєва, фредгольмів оператор, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача, характеристична матриця.

ABSTRACT

Atlasiuk O. M. One-dimensional Fredholm boundary-value problems with parameter. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of the characteristics of solvability and continuity in a parameter of solutions of the most general classes of one-dimensional inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations of arbitrary order in Sobolev spaces on a finite interval.

The question of the substantiation of the boundary transition with respect to Cauchy problems and general boundary-value problems has been studied by many mathematicians. I. I. Gikhman (1952), M. A. Krasnosel'skii and S. G. Krein (1955), J. Kurzweil and Z. Vorel (1957), A. M. Samoilenko (1962 – 1965) established the fundamental results on the continuous dependence with respect to the parameter of solutions of Cauchy problems for nonlinear systems. For linear systems, these results were specified and supplemented by A. Yu. Levin (1967 – 1973), W. T. Reid (1967) and Nguyen Tho Hoan (1993), Z. Opial (1967).

The class of linear general boundary-value problems for systems of first-order differential equations was introduced and investigated by I. T. Kiguradze (1975 – 2003) and M. Ashordia (1996). Solutions to these problems are absolutely continuous functions on the compact interval $[a, b]$. They also established the conditi-

ons of continuity in a parameter of these solutions in the space $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. The generalization of these results for complex-valued functions and linear systems of higher-order differential equations was obtained in the works of V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk, and H. A. Chekhanova.

V. A. Mikhailets and his disciples (2008 –2015) introduced and studied the most common classes of boundary-value problems for linear systems of ordinary differential equations that are generic with respect to the various functional spaces, in particular to Sobolev spaces (N. V. Reva, T. I. Kodliuk, Ye. V. Gnyp), to the spaces of continuously differentiable functions (H. A. Chekhanova, V. O. Soldatov), to Hölder spaces (V. O. Soldatov, H. O. Masliuk), to Slobodetskii spaces (Ye. V. Gnyp, H. O. Masliuk). They proved that such problems are Fredholm, obtained conditions that are sufficient for their well-posedness and continuity in the parameter of their solutions in these spaces.

For the most general boundary-value problems for systems of differential equations of the first order, sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of their solutions in Sobolev space W_p^n, with $1 \leq p < \infty$ were found by T. I. Kodliuk and V. A. Mikhailets (2010). Constructive criterion of continuity in the parameter of solutions of the most general boundary-value problems for systems of differential equations of an arbitrary order in Sobolev space W_p^n, with $1 \leq p < \infty$ was found by Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets, and O. O. Murach (2017). These results have been applied to the investigation of multipoint boundary-value problems, Green's matrices, and also to the spectral theory of differential operators with singular coefficients. However, in some problems of the theory of differential equations arise not only Sobolev spaces W_p^n, with $1 \leq p < \infty$, but also the case of nonseparable Sobolev spaces for $p = \infty$.

Thus, in view of the above, it is important to study the most general boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of arbitrary order with respect to Sobolev spaces W_p^n, with $1 \leq p \leq \infty$, in particular, the question of the necessary and sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of solutions to these problems. It should be noted that the most general problems may contain derivatives of integer and fractional order in boundary conditions. Therefore they have significant specificities that are absent in classical problems (Cauchy, two- and multipoint, integral and mixed problems). Hence, the systematic study of their properties is of scientific interest.

The thesis consists of the annotation in Ukrainian and in English, list of symbols, introduction, three sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, outlines the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

In the first section, we discuss the object, subject, and review the literature on the theme of the dissertation research. The object of research is one-dimensional Fredholm boundary-value problems, generic with respect to Sobolev spaces. The subject of research covers the character of the continuity in the parameter of solutions to these problems in the corresponding normed spaces.

In the second section, we investigate the most general boundary-value problems and the most general multipoint boundary-value problems for system of m ordinary differential equations of the first order whose solutions run through Sobolev space $(W_p^n)^m$, with $1 \leq p \leq \infty$. We show that these problems correspond to the the Fredholm operator with the index $m-l$ on a pair of normalized spaces $(W_p^n)^m$, and $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$. The criterion of well-posedness of these boundary-value problems in these spaces is proved. We prove that the dimensions of the kernel and cokernel of the operator of boundary-value problem are equal to the dimensions of the kernel and cokernel of the characteristic matrix of the boundary-value problem, respectively. For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, the constructive criterion of continuity in the parameter of solutions at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^n)^m$. We show that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness for $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Sobolev spaces is established. Sufficient conditions of continuity in the parameter of solutions to multipoint boundary-value problem at $\varepsilon = 0$ in normalized space $(W_p^n)^m$ in the case of $p = \infty$, and in case $1 \leq p < \infty$ are established.

In the third section, we investigate the most general boundary-value problems for system of m ordinary differential equations of an arbitrary order whose solutions run through Sobolev space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p \leq \infty$. We show that these problems correspond to the Fredholm operator with the index $mr - l$ on a pair of normalized spaces $(W_p^{n+r})^m$, and $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$. We prove that the dimensions of the kernel and cokernel of the operator of boundary-value problem are equal to the dimensions of the kernel and cokernel of the characteristic matrix of the boundary-value problem, respectively. The criterion of well-posedness of the investigated boundary-value problems in these spaces is proved. For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, the constructive criterion of continuity in the parameter of solutions at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^{n+r})^m$ is established. We show that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness for $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Sobolev spaces. Sufficient conditions are established for the convergence of sequence of characteristic matrices of boundary-value problems $M\,(L(k), B(k))$ to the matrix $M\,(L, B)$ for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with

$1 \leq p \leq \infty$. The criterion of strong convergence of the sequence of operators $(L(k), B(k))$ to the operator (L, B) for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p < \infty$ is proved. We have substantiated the criterion of uniform convergence of the sequence of operators $(L(k), B(k))$ to the operator (L, B) for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p < \infty$. Sufficient conditions are found for upper semi-continuous of the kernel and cokernel of the operator to boundary-value problems for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p \leq \infty$.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the dissertation results.

The main results that determine the scientific novelty of the thesis:

- for the most general boundary-value problems in the Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ their Fredholm property is established and the index is found;
- in terms of a specially introduced numerical characteristic matrix, the dimensions of the kernel and cokernel of the considered boundary-value problems are found;
- the limit theorem for characteristic matrices of a sequence of the boundary-value problems is proved;
- for the first time the continuity in the parameter of solutions of boundary-value problems in Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ is investigated for all values $1 \leq p \leq \infty$. The criterion of continuity of solutions in a parameter is found;
- it is proved that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness;
- the limit theorems for solutions to multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ with $1 \leq p < \infty$ and $p = \infty$ are obtained.

Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the further development of the theory of one-dimensional Fredholm boundary-value problems, in particular multipoint problems, and problems with derivatives of fractional order. The peculiarity of thesis is that it first investigates the character of the solvability of boundary-value problems with overdetermined or underdetermined boundary conditions. The most complex but important for applications case of nonseparable nonreflexive Sobolev spaces is also investigated.

Keywords: system of differential equations, boundary-value problem, Sobolev space, Fredholm operator, continuity in a parameter, multipoint boundary-value problem, characteristic matrix.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 10. — С. 1324 – 1333.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 10. — P. 1526 – 1537. DOI: 10.1007/s11253-019-01588-w, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection)

2. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 11. — С. 1457 – 1465.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 11. — P. 1677 – 1687. DOI: 10.1007/s11253-019-01599-7, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection)

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Нелінійні коливання — 2019. — **22**, № 1. — С. 18 – 26.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M.* Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — **247**, № 2. — P. 238 – 247. DOI: 10.1007/s10958-020-04799-w, SCOPUS Q3)

4. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доповіді національної академії наук України — 2019, № 11. — С. 3 – 7. DOI: 10.15407/dopovidi2019.11.003

5. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. — 2020, № 6. — P. 3 – 6. DOI: 10.15407/dopovidi2020.06.003

Тези наукових доповідей

1. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // XIII-та Літня Школа "Аналіз, Топологія і Застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018, м. Вижниця, Чернівецька обл., Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Львівський національний університет імені І. Франка, 2018. — С. 56.

2. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies" dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, 17 – 19 September, 2018, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts. — Chernivtsi: Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. — P. 13.

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2019. — С. 49.

4. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019, с. Світязь, Шацький р-н, Волинська обл. Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2019. — С. 70 – 71.

5. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // International conference "Problems of Theoretical and Mathematical Physics" dedicated to the 110th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909 – 1992), 24 – 26 September, 2019, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 91.

6. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On linear boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2019", 7 – 9 December, 2019, Tbilisi, Georgia: Abstracts. — Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019. — P. 19 – 22.

7. *Атласюк О. М.* Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, м. Київ, Україна: Тези допо-

відей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 5 – 6.

8. *Атласюк О., Михайлець В.* Про неперервність за параметром розв'язків неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2020", 26 – 28 травня, 2020, м. Львів, Україна: Тези доповідей. — Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. — С. 1 – 2.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Основні позначення, які використано в роботі:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — відповідно множини усіх натуральних, цілих, дійсних і комплексних чисел; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\{k, \ldots, l\} := \{i \in \mathbb{Z} : k \leq i \leq l\}$, де $k, l \in \mathbb{Z}$ та $k \leq l$.

3. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний лінійний простір усіх комплексних числових векторів-стовпців $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, ..., y_m)$, наділений нормою
$$\|y\| := |y| = \max_i |y_i|.$$

4. $\mathbb{C}^{m\times\mu}$ — лінійний простір усіх комплексних числових матриць порядку $m \times \mu$, наділений нормою
$$\|A\| := |A| = \max_{i,k} |a_{ik}|$$
матриці $A = (a_{i,k})_{\substack{i=1,...,m \\ k=1,...,\mu}}$.

5. $\det A$ — визначник матриці A.

6. A^{-1} — матриця, обернена до A.

7. I_m і O_m — відповідно одинична і нульова $m \times m$-матриці.

8. $C := C\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ — простір всіх комплекснозначних функцій $y(t)$, визначених і неперервних на відрізку $[a, b]$, наділений нормою
$$\|y\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b} \big|y(t)\big|.$$

9. $C^m := C^m\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ — простір всіх комплекснозначних $m \in \mathbb{N}_0$ разів неперервно диференційованих на $[a, b]$ функцій, наділений нормою
$$\|y\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{a\leq t\leq b} \big|y^{(k)}(t)\big|.$$

Тут і надалі $[a, b]$ є (скінченний) відрізок на дійсній осі. Простір C^m є банаховою алгеброю.

10. $(C)^m := C\big([a, b]; \mathbb{C}^m\big)$ і $(C)^{m\times m} := C\big([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^m$ і матриць-функцій $A(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з неперервними на відрізку $[a, b]$ елементами.

11. $L_\infty := L_\infty\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, визначених і суттєво обмежених на відрізку $[a, b]$, наділений нормою
$$\|y\|_{+\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{a\le t\le b} |y(t)|.$$

12. $(L_\infty)^m := L_\infty\big([a, b]; \mathbb{C}^m\big)$ і $(L_\infty)^{m\times m} := L_\infty\big([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^m$ і матриць-функцій $A(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ із суттєво обмеженими на відрізку $[a, b]$ елементами.

13. $L_p := L_p\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$, де $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, які при піднесенні до степеня p є інтегровними за Лебегом, наділений нормою
$$\|y\|_p := \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

14. $(L_p)^m := L_p([a, b]; \mathbb{C}^m)$ і $(L_p)^{m\times m} := L_p([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^m$ і матриць-функцій $A(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору L_p.

15. $W_p^n := W_p^n\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$, де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p \le \infty$, — простір С. Л. Соболєва, що складається з усіх комплекснозначних функцій y таких, що
$$W_p^n\big([a, b]; \mathbb{C}\big) := \{y \in C^{n-1}[a, b] \colon y^{(n-1)} \in AC[a, b], y^{(n)} \in L_p[a, b]\},$$

де $AC[a,b]$ — множина всіх абсолютно неперервних комплекснозначних функцій на відрізку $[a,b]$. Простір W_p^n наділений нормою

$$\|y\|_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \|y^{(k)}\|_p + \|y^{(n)}\|_p,$$

де $\|\cdot\|_p$ — норма у просторі $L_p\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ і є банаховою алгеброю.

З метою уніфікації позначень покладаємо $W_p^0 := L_p$.

16. $(W_p^n)^m := W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}^m\big)$ і $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — комплексні банахові простори відповідно всіх вектор-функцій $y(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ і квадратних матриць-функцій $A(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору Соболєва W_p^n. Норми у цих просторах дорівнюють сумі норм у W_p^n всіх компонентів вектор- або матриць-функцій. Усі ці норми позначаємо через $\|\cdot\|_{n,p}$. Із контексту завжди буде зрозуміло в якому просторі (скалярних, вектор-, або матриць-функцій) розглядається норма $\|\cdot\|_{n,p}$.

    E_1 в лінійний нормований простір E_2.

17. $B_n \rightrightarrows B$ позначає рівномірну збіжність лінійних обмежених операторів.

18. $B_n \xrightarrow{s} B$ позначає сильну збіжність лінійних обмежених операторів.

У роботі вектор-функції і числові вектори подано у вигляді стовпців.

Вступ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей найбільш загальних класів крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із параметром у просторах Соболєва.

Актуальність теми. Питання про обґрунтування граничного переходу щодо задач Коші та загальних крайових задач досліджувалися багатьма математиками. Зокрема, у роботах І. І. Гіхмана [11], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [26], Я. Курцвейля і З. Ворела [27], А. М. Самойленка [46, 47, 93] встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнено та доповнено А. Ю. Лєвіним [28, 29], З. Опялем [91], В. Т. Рейдом [92] і Нгуен Тхе Хоаном [40].

Клас лінійних загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку введено та досліджено І. Т. Кігурадзе [18, 19, 20] і М. Ашордіа [60]. Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у найбільш загальному вигляді $By = q$, де $B\colon C\big([a,b],\mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^m$ є довільним лінійним неперервним оператором (m — число рівнянь системи). Встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C\big([a,b],\mathbb{R}^m\big)$. Узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь довільних порядків отримано в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової [34, 36, 82, 89].

В. А. Михайлецем і його учнями було введено і досліджено максимально широкі класи найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь щодо різних функціональних просторів, зокрема щодо просторів Соболєва [35, 68, 83], просторів неперервно диференційовних функцій [37, 38, 94], просторів Гельдера [86, 87, 90], просторів Слободецького [13, 69, 88]. Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Для найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку достатні умови неперервної залежності за параметром їх розв'язків у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем [21]. Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [79].

Ці результати було застосовано до дослідження багатоточкових крайових задач [12, 14, 22, 23, 50, 51, 56], матриць Гріна [25, 57, 82, 89] і використано у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [70, 71, 72, 73]. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, а й випадок несепарабельних просторів Соболєва при $p = \infty$.

Отже, з огляду на сказане, актуальним є дослідження найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільних порядків щодо просторів Соболєва W_p^n, де $1 \leq p \leq \infty$, питання про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач. Варто зазначити, що найбільш загальні задачі можуть містити в крайових умовах похідні цілого та дробового порядку і тому мають істотні особливості, які відсутні у класичних задачах (Коші, дво- та багатоточкових, інтегральних та мішаних задачах). Зважаючи на це, систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано в Інституті математики Національної академії наук України у відділах диференціальних рівнянь та теорії коливань і нелінійного аналізу згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідницької теми "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117 U 002119).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є аналіз розв'язності та встановлення конструктивних необхідних і достатніх умов неперервної залежності за параметром розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у просторах Соболєва.

Об'єктом дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва. Під фредгольмовим розуміється оператор зі скінченним, можливо ненульовим індексом.

Предметом дослідження є характер розв'язності і залежності від параметра розв'язків крайових задач.

Завдання дослідження:

1. Дослідити характер розв'язності найбільш загальних крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать простору Соболєва.

2. Знайти вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь.

3. Для крайових задач залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивний критерій неперервності розв'язків за параметром.

4. Дослідити найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач, розв'язки яких пробігають простір Соболєва і встановити достатні умови неперервності розв'язків за параметром.

5. Встановити достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць крайових задач.

6. Встановити критерії сильної та рівномірної збіжності послідовності операторів крайових задач.

7. Встановити достатні умови напівнеперервності зверху вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Досліджено характер розв'язності найбільш загальних крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать простору Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

2. Показано, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь відповідає фредгольмів оператор з індексом $mr - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^{n+r})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$ і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці цієї крайової задачі.

4. Для крайових задач, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ і показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва.

5. Досліджено найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$ і встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^n)^m$ у випадках $p = \infty$ і $1 \leq p < \infty$.

6. Знайдено достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць крайових задач для системи диференціальних рівнянь довільного порядку.

7. Встановлено критерії сильної та рівномірної збіжності послідовності операторів крайових задач.

8. Встановлено достатні умови напівнеперервності зверху ядра і коядра оператора крайової задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати і методи їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних фредгольмових крайових задач і їх застосувань до конкретних проблем.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на:

- семінарі "Спектральні і крайові задачі" лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз. – мат. наук, професор В. А. Михайлець), 11 лютого 2020 року;

- спільному засіданні відділів диференціальних рівнянь та теорії коливань і нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівники засідання: академік НАН України А. М. Самойленко, член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей), 15 вересня 2020 року;

- Літній школі "Алгебраїчна геометрія", 3 серпня – 2 вересня, 2018 року, м. Градець Кралове, Чеська Республіка;

- XIII Літній школі "Аналіз, топологія і застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018 року, м. Вижниця, Чернівецька обл., Україна;

- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики, 17 – 19 вересня 2018 року, м. Чернівці, Україна;

- Міжнародній конференції молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019 року, м. Київ, Україна;

- Міжнародній конференції "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвяченій 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019 року, с. Світязь, Шацький р-н, Волинська обл. Україна;

- Літній школі ”Геометрія та топологія”, 1 – 31 вересня, 2019 року, м. Градець Кралове, Чеська Республіка;
- Міжнародній конференції ”Проблеми теоретичної та математичної фізики” присвяченій 110-річчю видатного теоретика фізичних наук і математика М. М. Боголюбова (1909 – 1992), 24 – 26 вересня, 2019 року, м. Київ, Україна;
- Міжнародній конференції ”Супергеометрія, суперсиметрія та квантування”, 16 – 19 грудня, 2019 року, м. Еш-сюр-Альзетт, Велике Герцогство Люксембург;
- Міжнародній науково-практичній конференції ”Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз”, 15 – 16 квітня, 2020 року, м. Київ, Україна.
- Конференції молодих учених ”Підстригачівські читання — 2020”, 26 – 28 травня, 2020 року, м. Львів, Україна.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 13 наукових працях. П’ять із них [1, 2, 3, 4, 64] є статтям у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, три з яких [1, 2, 3] входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus або Web of Science Core Collection. Роботи [5, 6, 7, 8, 9, 61, 62, 63] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, що налічує 97 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 152 сторінки друкованого тексту.

Подяки. Щиру подяку авторка висловлює своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Володимиру Андрійовичу Михайлецю за постановку задач, цінні зауваження і поради у процесі роботи над дисертацією, а також усім співробітникам відділів диференціальних рівнянь та теорії коливань і нелінійного аналізу Інституту математики НАН України за дружні та плідні дискусії.

Розділ 1
Огляд літератури

Як зазначалося у вступі, об'єктом дисертаційного дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва, а предметом дослідження є характер розв'язності і залежності від параметра розв'язків крайових задач. Цим питанням присвячено перший розділ дисертації.

1.1. Задача Коші

Питання щодо обґрунтування граничного переходу у системах диференціальних рівнянь виникають у різних задачах сучасної математики. Їх найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Й. І. Гіхман [11], а згодом М. А. Красносельский і С. Г. Крейн [26], отримали фундаментальні результати про характер залежності за параметром розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних систем, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Важливість таких теорем пов'язана з тим, що вони обґрунтовують відомий принцип усереднення М. М. Боголюбова і М. М. Крилова (див., наприклад, [10]).

Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку задачі Коші досліджували А. Ю. Лєвін [29, 30], Я. Курцвейль і З. Ворел [27], З. Опяль [91], У. Т. Рейд [92], Нгуен Тхе Хоан [40].

Для лінійної матричної задачі Коші вигляду

$$Y'(t;k) = A(t;k)Y(t;k) + F(t;k), \quad t \in [a,b],$$

$$Y(a;k) = I_m, \quad k \in \mathbb{N}$$

найпростішою і досить грубою умовою на коефіцієнти $A(t;k) \in (C)^{m\times m}$ та праві частини $F(t;k) \in (C)^{m\times m}$ є рівномірна на $[a,b]$ збіжність матриць-функцій $A(t;k)$, $F(t;k)$ до $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно (див., наприклад, [74, 77]). Ця умова також забезпечує рівномірну збіжність на відрізку $[a,b]$ розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$.

Випадок, коли елементи матриць-функцій $A(t;k)$ і $F(t;k)$ належать банаховому простору $(L_1)^{m\times m}$, а $A(t;k)$ та $F(t;k)$ збігаються в цьому просторі до матриць $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно, є загальнішим. У такому разі рівномірна збіжність розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$ на $[a,b]$ є прямим наслідком результату, встановленого ще в 1930 році Я. Д. Тамаркіним [95].

Результати робіт М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [26] у застосуванні до лінійного випадку дають більш тонкі достатні умови для виконання співвідношення

$$\big\|Y(t;k) - Y(t;0)\big\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.1}$$

Нехай

$$A^\vee(t;k) = \int_a^t A(s;k)ds, \quad F^\vee(t;k) = \int_a^t F(s;k)ds.$$

Достатні умови полягають у виконанні наступних збіжностей при $k \to \infty$:

$$\big\|A^\vee(t;k) - A^\vee(t;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \big\|F^\vee(t;k) - F^\vee(t;0)\big\|_\infty \to 0, \tag{1.2}$$

а також в існуванні сумовної мажоранти

$$\big|A(t;k)\big| \le h(t) \in L_1, \quad t \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

А. Ю. Лєвін удосконалив доведення [29], що дозволило послабити останню нерівність до наступної:

$$\|A(t;k)\|_1 \le c < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Крім того, виявилося, що у результаті виконання (1.3), умова (1.2) є не лише достатньою, але й *необхідною* для збіжності (1.1).

В. Т. Рейд встановив, що для виконання граничного співвідношення (1.1) достатньо, щоб при $k \to \infty$ коефіцієнти $R(t;k) = [A(t;k) - A(t;0)] \in (C)^{m\times m}$ слабко збігалися в просторі L_1 до нуля [92]. Проте А. Ю. Левін у роботі [30] показав, що цей результат не можна вважати суттєво новим, оскільки з умови слабкої збіжності в просторі L_1 випливають умови (1.2) і (1.3). У цій роботі стверджується і той факт, що на вказану оцінку не впливає також та обставина, що замість умови $Y(a;k) = C$ присутні наступні умови:

$$Y(a_k;k) = C_k, \quad \text{де} \quad a_k \to a_0, \quad C_k \to C_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Якщо відкинути обмеження (1.3), то проблема суттєво ускладнюється. Хоча в деяких випадках (наприклад, для скалярного рівняння першого порядку) співвідношення (1.3), очевидно, зайве. Але в цілому це не так, адже умова (1.2) сама по собі не є ні необхідною, ані достатньою для збіжності (1.1).

У 1962 році А. М. Самойленко [46, 47] доповнив існуючі результати Й. І. Гіхмана [11], М. А. Красносельского і С. Г. Крейна [26], Я. Курцвейля і З. Вореля [27, 84, 85]. Підхід запропонований А. М. Самойленком дозволяє з'ясовувати питання про характер залежності за параметром розв'язків диференціальних рівнянь, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі. Для цього достатньо перейти від диференціального рівняння до деякого, еквівалентного йому, інтегрального і досліджувати безпосередньо останнє.

Вказані результати поширено на задачу Коші для лінійних систем диференціальних рівнянь довільних порядків і на комплекснозначні функції (див., наприклад, роботу В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [34]).

1.2. Загальні та багатоточкові крайові задачі

Класичним об'єктом досліджень теорії звичайних диференціальних рівнянь є загальні крайові задачі. У роботі І. Т. Кігурадзе [18] були отримані достатні умови рівномірної збіжності розв'язків сім'ї загальних лінійних крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з дійсними коефіцієнтами. Розглядалася наступна задача:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.4}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.5}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$ та лінійні неперервні оператори

$$U(\varepsilon)\colon C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^m.$$

Теорема 1.1. *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \quad U(0)y(t;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to \infty$ виконуються умови:

1) $\sup\limits_{\varepsilon} \big\|A(\cdot;\varepsilon)\big\|_1 < \infty$;
2) $\sup\limits_{\varepsilon} \big\|f(\cdot;\varepsilon)\big\|_1 < \infty$;
3) $\sup\limits_{\varepsilon} \big\|U(\varepsilon)\big\| < \infty$;
4) $\max\limits_{t\in[a,b]} \big|\int\limits_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s;0)ds\big| \to 0$;
5) $\max\limits_{t\in[a,b]} \big|\int\limits_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t f(s;0)ds\big| \to 0$;
6) $c_\varepsilon \to c(0)$;
7) $U(\varepsilon)y \to U(0)y, \quad \forall y \in (W_1^1)^m$.

Тоді, починаючи з деякого ε_0, задачі (1.4), (1.5) мають єдиний розв'язок і

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to \infty.$$

Всі умови в теоремі є суттєвими. Умови 3) і 7) означають, що оператори $U(\varepsilon)$ *сильно* збігаються до оператора $U(0)$. Тому в 7) множину AC^m можна замінити довільною підмножиною вектор-функцій, лінійна оболонка яких щільна в банаховому просторі $C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big)$. Зі скінченновимірності простору $\mathbb{R}^m$ випливає, що дана умова рівносильна *слабкій* збіжності операторів $U(\varepsilon)$ до оператора $U(0)$. Вона суттєво слабша, ніж умова рівномірної збіжності операторів

$$\big\|U(\varepsilon) - U(0)\big\| \to 0.$$

Для виконання умов 1), 4) і 2), 5) достатньо, щоб $A(\cdot;\varepsilon)$ *слабко* збігалась у банаховому просторі $(L_1)^{m\times m}$ до матриці-функції $A(\cdot;0)$, а $f(\cdot;\varepsilon)$ *слабко* збігалась у банаховому просторі $(L_1)^m$ до вектор-функції $f(\cdot;0)$. Тим більше для цього достатньо збіжності в нормах відповідних просторів. Зазначимо, що з цих умов *не* випливає збіжність за мірою Лебега і тим більше поточкова збіжність майже скрізь на відрізку $[a,b]$.

У роботах [36, 82] Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлецю та Н. В. Реві вдалося узагальнити теорему І. Т. Кігурадзе і покращити його результати. А саме істотно послабити умови теореми Кігурадзе не лише на ростки відображень $A(\cdot;\varepsilon)$, а й на $f(\cdot;\varepsilon)$ в точці $\varepsilon = 0$.

У роботах [19, 34, 36, 60] знайдені достатні умови неперервної залежності від параметра ε при $\varepsilon \to 0+$ розв'язків загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку за рівномірною нормою $\|\cdot\|_\infty$.

Окремим випадком загальних крайових задач є багатоточкові задачі. Їх особливістю є те, що проміжні точки, які входять у крайові умови, породжують ряд проблем таких, як порушення гладкості функції Гріна, відсутність спряженої задачі та інше.

Питанню існування, єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач присвячено багато робіт таких відомих математиків, як І. Т. Кігурадзе [20], В. Д. Пономарьов [44], А. М. Самойленко [46, 48], Дж. Сансоне [49], К. А. Хасеінов [53, 54, 55], L. K. Jackson [76], А. Ю. Левін [28, 31], Ю. В. Покорний [41, 42, 43], Є. С. Чічкін [59], P. R. Beesack [65], L. J. Grimm і P. W. Eloe [75] та інші.

Теореми про існування, єдиність і неперервність за параметром розв'язків загальних і найбільш загальних крайових задач та методика їх доведень були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач у роботах Н. В. Реви [45], Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Є. В. Гнип [12, 22, 23, 24], Г. О. Чеханової [56], В. О. Солдатова і Г. О. Маслюк [32, 33, 51].

Н. В. Рева у своїй роботі [45] розглянула параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.6}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = 0, \tag{1.7}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $t_j \in [a,b]$, $j \in J := \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

У роботі Н. В. Реви [45] встановлена

Теорема 1.2. *Нехай гранична однорідна крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0),$$

$$U(0)y(t;0) := \sum_{j=1}^{n} B_j(0)y(t_j;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) = R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\left\|f(\cdot;\varepsilon)\right\|_1 = O(1)$;

3) $\left\|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\right\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$;

4) $\forall j \in J\colon \quad B_j(\varepsilon) \longrightarrow B_j(0), \quad \varepsilon \to 0+.$

Тоді для достатньо малих значень ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (1.6), (1.7) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тут $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}^m[a,b]$, $m \in \mathbb{N}$ — клас всіх $m\times m$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ матриць-функцій $R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to (L_1)^{m\times m}$, для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;\varepsilon)$ системи

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \big\|Z(t;\varepsilon) - I_m\big\|_{(0)} = 0.$$

Випадок, коли коефіцієнти $A(\cdot)$ належать більш вузькому простору, а саме простору Соболєва $W_p^{n-1}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$, де $1 \le p < \infty$, досліджено в роботах Т. І. Кодлюк [22, 23].

У роботі [24] розглянута параметризована числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'я багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку наступного вигляду:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{1.9}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, вектори $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, $t, t_j \in [a,b]$, $j = \{1,2,...,k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

У цій роботі встановлена

Теорема 1.3. *Нехай гранична однорідна крайова задача вигляду* (1.8), (1.9) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови*

1) $\left\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\right\|_{n-1,p}\to 0;$

2) $\left\|f(\cdot;\varepsilon)-f(\cdot;0)\right\|_{n-1,p}\to 0;$

3) $c_\varepsilon\to c_0;$

4) $\left\|B_j(\varepsilon)\to B_j(0)\right\|, \quad j=\{1,2,...,k\}.$

Тоді для достатньо малих значень ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (1.8), (1.9) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\left\|y(\cdot;\varepsilon)-y(\cdot;0)\right\|_{n,p}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+\,.$$

У роботі Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [23] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, де $1\leq p<\infty$, але точки відрізка $[a,b]$, які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12] також досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку у просторах Соболєва W_p^n, де $1\leq p<\infty$, проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра. Випадок $p=\infty$ раніше не вивчався.

Отже, для подальшого розгляду актуальним залишається питання дослідження найбільш загального класу багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $W_p^{n-1}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$, де $1\leq p\leq\infty$. Ми розглянемо випадок, коли точки відрізка $[a,b]$, які фігурують у крайових умовах, не є фіксованими і залежать від числового параметра, а також кількість точок у кожній серії залежатиме від параметра.

1.3. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

У дисертаційній роботі Н. В. Реви [45] розглянуто найбільш загальні щодо простору W_1^1 крайові задачі, що містять у собі загальні крайові задачі, та досліджено неперервність за параметром розв'язків таких задач за нормою простору Соболєва W_1^1 на відрізку $[a,b]$. Розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю неоднорідних найбільш загальних щодо простору W_1^1 крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.10}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int_a^b \Phi(t;\varepsilon)y'(t;\varepsilon)dt = c(\varepsilon), \tag{1.11}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, $\Phi(\cdot;\varepsilon) \in (L_\infty)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, матриці $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$ та вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$.

У випадку, коли матриці-функції $\Phi(\cdot;\varepsilon)$ мають обмежену варіацію по t на $[a,b]$, умова (1.11) еквівалентна загальній крайовій.

Під розв'язком найбільш загальної щодо простору W_1^1 крайової задачі розуміється вектор-функція $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_1^1)^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.10) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ і крайову умову (1.11).

Теорема 1.4. *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0) + f(t;0),$$

$$\alpha_0 y(a;0) + \int_a^b \Phi(t;0)y'(t;0)dt = c_0$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови*

1) $\quad \|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_1 \to 0+;$

2) $\quad \|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_1 \to 0+;$

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $\alpha_\varepsilon \to \alpha_0$;

5) $\big\|\Phi(\cdot;\varepsilon) - \Phi(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0+$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1.10), (1.11) *має єдиний розв'язок і виконується збіжність*

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_{1,1} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Неперервну залежність за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач у нормах просторів Соболєва W_p^n, де $1 \le p < \infty$, досліджено у роботі Т. І. Кодлюк [24].

У роботі [24] розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю неоднорідних найбільш загальних щодо простору W_p^n крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.12}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.13}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ та лінійні неперервні оператори

$$U(\varepsilon)\colon W_p^n\big([a,b],\mathbb{C}^m\big) \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком найбільш загальної щодо простору W_p^n крайової задачі розуміється вектор-функція $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.12) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ і крайову умову (1.13).

Теорема 1.5. *Нехай однорідна гранична крайова задача вигляду* (1.12), (1.13) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови*

1) $\big\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\big\|_{n-1} \to 0+$;

2) $\big\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\big\|_{n-1} \to 0+$;

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $U(\varepsilon)y \to U(0)y$ *для кожного* $y \in (W_p^n)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *розв'язок задачі* (1.12), (1.13) *однозначно визначений і виконується збіжність*

$$\left\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\right\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Найбільш загальні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку щодо просторів дробової гладкості досліджено в роботах [13, 69, 90] та щодо просторів неперервно диференційовних функцій у роботі [38].

Проте відкритим залишається питання неперервності за параметром $\varepsilon \to 0+$ розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку у просторі Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

1.4. Системи диференціальних рівнянь довільного порядку

У дисертаційній роботі Є. В. Гнип [16] розглянуто найбільш загальні щодо простору W_p^{n+r}, де $1 \le p < \infty$, крайові задачі для систем диференціальних рівнянь довільних порядків. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль, отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ найбільш загальних крайових задач встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r}.

Розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач для систем m лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \ge 1$

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) = y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.14}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.15}$$

де для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є шуканою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ і задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ та лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon)\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$.

Встановлено критерій неперевної залежності за параметром розв'язків крайової задачі (1.14), (1.15) для системи диференціальних рівнянь довільного порядку.

Розглянуті такі **граничні умови** при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j \in \{1,\dots,r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного значення $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Розглянута також **умова (0).** *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Означення 1.1. Розв'язок крайової задачі (1.14), (1.15) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються наступні умови:

($*$) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для довільних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^m$ і вектора $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$.

($**$) зі збіжності правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ у $(W_p^n)^m$ і $c(\varepsilon) \to c(0)$ у $\mathbb{C}^{rm}$ випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Теорема 1.6. *Розв'язок крайової задачі* (1.14), (1.15) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (II).

Крім того, знайдено двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків крайової задачі.

Теорема 1.7. *Нехай крайова задача* (1.14), (1.15) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (II). *Тоді існують такі додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується наступна двобічна оцінка:*

$$\gamma_1\big(\big\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\big\|_{n,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}\big) \leq$$
$$\leq \big\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\big\|_{n+r,p} \leq$$
$$\leq \gamma_2\big(\big\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\big\|_{n,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^{rm}}\big).$$

Тут числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot, 0)$, $y(\cdot, \varepsilon)$, $f(\cdot, \varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$.

Щодо просторів неперервно диференційовних функцій найбільш загальні крайові задачі досліджено в роботі [52] для систем диференціальних рівнянь довільних порядків. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах [94]. Пізніше у роботі О. О. Мурача і В. О. Солдатова [39] автори показали, що встановлені раніше умови неперервної залежності за параметром є ще й необхідними. Найбільш загальні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь довільного порядку щодо просторів дробової гладкості досліджено в роботах [86, 87, 88]

Разом з тим відкритим залишається питання неперервності за параметром $\varepsilon \to 0+$ розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі обговорено об'єкт дослідження — одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва, а також предмет дослідження — характер розв'язності і залежності від параметра розв'язків крайових задач. Із наведених відомостей можна зробити такі висновки:

1. Недостатньо дослідженим є питання неперервної залежності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

2. Актуально розглянути застосування теорем про неперервність за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач до некласичних багатоточкових крайових задач.

3. Недостатньо дослідженим є також питання поширення отриманих результатів на систему диференціальних рівнянь довільного порядку у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$, якій відповідає лінійний фредгольмів оператор із ненульовим індексом.

Розділ 2

Системи рівнянь першого порядку в просторах Соболєва

У цьому розділі досліджуємо найбільш загальний клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають відповідний комплексний простір Соболєва W_p^n, де $1 \leq p \leq \infty$.

2.1. Постановка задачі

Нехай задано довільним чином (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ та параметри

$$\{m, n, l\} \subset \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Розглянемо крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{2.1}$$

$$By = c, \tag{2.2}$$

де матриця-функція $A(\cdot)$ належить простору $(W_p^{n-1})^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^{n-1})^m$, вектор c — простору $\mathbb{C}^l$ і лінійний неперервний оператор

$$B\colon\ (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^l. \tag{2.3}$$

Під розв'язком крайової задачі (2.1), (2.2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot) \in (W_p^n)^m$, яка задовольняє рівняння (2.1) (скрізь при $n \geq 1$ і майже скрізь при $n = 0$) на (a, b), та рівність (2.2), яка задає l скалярних крайових умов. Розв'язки рівняння (2.1) заповнюють простір $(W_p^n)^m$, коли його права частина $f(\cdot)$ пробігає простір $(W_p^{n-1})^m$. Це випливає з леми 2.1, поданої нижче. Тому крайова умова (2.2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов: задачі Коші, дво- і багатоточкові, інтегральні і мішані задачі, так і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні цілого та дробового порядку k, де $0 < k \leq n$.

Із відомих результатів функціонального аналізу [80] випливає, що кожний з операторів B в (2.3) при $1 \leq p < \infty$ допускає наступне однозначне аналітичне представлення:

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \int_a^b \Phi(t) y^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad y(\cdot) \in (W_p^n)^m, \tag{2.4}$$

де матриці α_k належать простору $\mathbb{C}^{l\times m}$, а матриця-функція $\Phi(\cdot)$ — простору $L_{p'}([a,b];\mathbb{C}^{l\times m})$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

У випадку $p = \infty$ формула (2.4) також задає деякий оператор $B\colon (W_\infty^n)^m \to \mathbb{C}^l$, але існують й інші оператори цього класу, що визначаються інтегралами за скінченно-адитивними мірами [67].

Лема 2.1. *Нехай матриця-функція $A \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$. Якщо диференційовна функція $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ є розв'язком рівняння* (2.1) *для деякої правої частини $f \in (W_p^{n-1})^m$, то $y \in (W_p^n)^m$. Більше того, якщо f пробігає весь простір $(W_p^{n-1})^m$, то розв'язки рівняння* (2.1) *пробігають весь простір $(W_p^n)^m$.*

Доведення. Нехай для деякого $f \in (W_p^{n-1})^m$ диференційовна вектор-функція y є розв'язком рівняння (2.1). Доведемо, що y належить $(W_p^n)^m$. Враховуючи, що A і f є принаймні неперервними на $[a,b]$, маємо

$$y' = f - Ay \in (C^{(0)})^m.$$

Звідси випливає, що y належить $(C^{(1)})^m \subset (L_p)^m$. Більше того,

$$y' \in (W_p^{n-1})^m \;\Rightarrow\; y \in (W_p^n)^m. \tag{2.5}$$

Справді, якщо y' належить $(W_p^{n-1})^m$ для деякого цілого числа n, то

$$y' = f - Ay \in (W_p^{n-1})^m,$$

і тому y належить $(W_p^n)^m$. Включення $y \in (L_p)^m$ і властивість (2.5) обумовлюють потрібне включення $y \in (W_p^n)^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f \in (W_p^{n-1})^m$ існує розв'язок y рівняння (2.1). Як щойно було показано, y належить $(W_p^n)^m$. Це, враховуючи очевидну імплікацію

$$y \in (W_p^n)^m \;\Rightarrow\; Ly \in (W_p^{n-1})^m,$$

доводить останнє твердження леми.

Лему 2.1 доведено.

2.2. Допоміжні результати

У даному підрозділі ми встановимо твердження допоміжного характеру, які будуть використані в доведенні основних теорем.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$ єдиний розв'язок лінійного однорідного матричного рівняння вигляду (2.1) з початковою умовою Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \quad t \in (a,b), \quad Y(a) = I_m, \tag{2.6}$$

де I_m — одинична $(m \times m)$ — матриця.

У випадку, коли $l = m$, покладемо

$$[BY] := \left(B \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot) \end{pmatrix}, \dots, B \begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix} \right). \tag{2.7}$$

Числова квадратна матриця $[BY]$ порядку m утворюється в результаті дії оператора B на відповідні стовпчики (з тими ж номерами) матриці $Y(\cdot)$ матричної задачі Коші (2.6).

Лема 2.2. *Нехай матриця-функція $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$ є невиродженою для кожного $t \in [a,b]$. Тоді обернена матриця-функція $Y^{-1}(\cdot)$ належить простору $(W_p^n)^{m\times m}$.*

Доведення проведемо спочатку для скалярного випадку $m = 1$ методом математичної індукції по $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $n = 1$. За умовою функція $Y(\cdot)$ належить простору W_p^1, а тому абсолютно неперервна і не дорівнює нулю на множині $[a,b]$. Звідси випливає, що майже скрізь функція $Y^{-1}(\cdot)$ диференційовна і

$$\left(Y^{-1}\right)'(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot).$$

Оскільки функція $Y(\cdot)$ відокремлена від нуля і $Y'(\cdot)$ належить простору L_p, то функція $\left(Y^{-1}\right)'(\cdot)$ належить простору L_p. Отже, $Y(\cdot)^{-1}$ належить W_p^1.

Припустимо, що висновок леми 2.2 правильний для деякого номера $n = k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що її висновок правильний і для $n = k+1$. За умовою, $Y(\cdot)$ належить простору W_p^{k+1} і $Y(t) \neq \{0\}$ для довільного $t \in [a,b]$. Тому $Y^{-1}(\cdot)$ належить простору W_p^k за індуктивним припущенням. Отже, функція

$$\left(Y^{-1}\right)'(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot)$$

належить простору W_p^k, оскільки він є банаховою алгеброю. У такий спосіб, $Y^{-1}(\cdot)$ належить простору W_p^{k+1}.

Отже, для випадку $m = 1$ лему доведено.

Доведемо лему у випадку $m \geq 2$. Як відомо,

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{\det Y(t)} Y^T(t). \tag{2.8}$$

Тут $Y^T(\cdot)$ — транспонована матриця-функція, утворена алгебраїчними доповненнями елементів матриці-функції $Y(\cdot)$. За умовою $Y(\cdot)$ належить простору $(W_p^{k+1})^{m\times m}$. Тоді $Y^T(\cdot)$ належить простору $(W_p^{k+1})^{m\times m}$, оскільки функціональний клас W_p^{k+1} утворює банахову алгебру. Тому, використовуючи доведений вище факт і рівність (2.8), отримуємо, що і $Y^{-1}(\cdot)$ належить простору $(W_p^{k+1})^{m\times m}$.

Лему 2.2 доведено.

Лема 2.3. *Для довільної матриці-функції $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектора $q \in \mathbb{C}^m$ і лінійного неперервного оператора $B\colon (W_p^n)^{m\times m} \times \mathbb{C}^m$ є правильною рівність*

$$B(Y(\cdot)q) = [BY]\, q,$$

де матриця $[BY]$ визначена рівністю (2.7).

Доведення. Нехай матриця-функція $Y(\cdot) = (y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^{m}$, а вектор-стовпчик $q = (q_j)_{j=1}^{m}$. Позначимо через

$$(\alpha_i)_{i=1}^{m} = [BY]\, q \quad \text{і} \quad (\beta_i)_{i=1}^{m} = B(Y(\cdot)q).$$

Нехай

$$B(y_k(\cdot))_{k=1}^{m} =: (c_k)_{k=1}^{m}.$$

Під час дії оператора B на матрицю-функцію $Y(\cdot)$ отримуємо матрицю

$$[BY] = (c_{ij})_{i,j=1}^{m}.$$

Тоді одержимо

$$(\alpha_i)_{i=1}^{m} = (c_{ij})_{i,j=1}^{m}(q_j)_{j=1}^{m} = \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}q_j\right)_{i=1}^{m}.$$

Отже, довільний елемент α_i набуває вигляду

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}q_j, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Але мають місце наступні рівності

$$(\beta_i)_{i=1}^{m} = B\left((y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^{m}(q_j)_{j=1}^{m}\right) = B\left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij}(\cdot)q_j\right)_{i=1}^{m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (By_{ij}(\cdot))_{i=1}^{m}\, q_j = \sum_{j=1}^{m} (c_{ij})_{i=1}^{m}\, q_j = \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}q_j\right)_{i=1}^{m}.$$

Із цього випливає, що $\alpha_i = \beta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Лему 2.3 доведено.

2.3. Теорема про гомеоморфізми

Розглянемо питання про коректність задачі (2.6) у просторі Соболєва W_p^n з нормою $\|\cdot\|_{n,p}$. Для цього введемо метричний простір невироджених матриць-функцій

$$\mathcal{Y}_p^n := \{Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}\colon\ Y(a) = I_m,\ \det Y(t) \neq 0\ \ \forall t \in [a,b]\}$$

із метрикою

$$d_{n,p}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{n,p}.$$

Теорема 2.1. *Нелінійне відображення*

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot), \tag{2.9}$$

яке кожній матриці-функції $A(\cdot) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$ *ставить у відповідність єдиний розв'язок* $Y(\cdot)$ *матричної задачі Коші* (2.6), *є гомеоморфізмом банахового простору* $(W_p^{n-1})^{m\times m}$ *на метричний простір* $\mathcal{Y}_p^n$.

Доведення теореми 2.1 розіб'ємо на три частини.

Лема 2.4. *Нелінійне відображення* (2.9) *є бієкцією простору* $(W_p^{n-1})^{m\times m}$ *на метричний простір* $\mathcal{Y}_p^n$.

Доведення проведемо індукцією за параметром $n \in \mathbb{N}$.

Спочатку доведемо лему 2.4 у випадку $n = 1$. Нехай $A(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$, а $Y(\cdot)$ — єдиний розв'язок задачі (2.6). Оскільки $Y(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$ (як неперервна функція) і $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$, то $Y(\cdot)$ належить $(W_p^1)^{m\times m}$. З єдиності розв'язку задачі Коші (2.6) випливає, що $Y(\cdot) \in \mathcal{Y}_p^1$ однозначно визначається за коефіцієнтом $A(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$. Тому відображення (2.9) є ін'єктивним.

Доведемо сюр'єктивність відображення. За формулою Ліувілля–Якобі (див., наприклад, [97])

$$\det Y(t) = \det Y(a) \exp \left(\int_a^t \operatorname{sp} A(s) \mathrm{d}s \right) = \exp \left(\int_a^t \operatorname{sp} A(s) \mathrm{d}s \right) \neq 0,$$

тому матриця $Y(t)$ є невиродженою для довільного $t \in [a, b]$. Тоді існує обернена матриця $Y^{-1}(t)$ і рівняння (2.6) можна записати у такому вигляді:

$$A(t) = -Y'(t)Y^{-1}(t). \tag{2.10}$$

Матриця $Y'(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$, а $Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^1)^{m\times m}$ за лемою 2.2. Тому добуток цих матриць-функцій $A(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$ і відображення (2.9) є сюр'єктивним, а як підсумок і бієктивним.

Припустимо, що висновок леми 2.4 правильний для деякого номера $n = k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що її висновок справджується і для $n = k+1$. Нехай $A(\cdot)$ належить $(W_p^k)^{m\times m} \subset (W_p^{k-1})^{m\times m}$, а $Y(\cdot)$ є єдиним розв'язком задачі (2.6). За індуктивним припущенням $Y(\cdot)$ належить $\mathcal{Y}_p^k$. Тому $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (W_p^k)^{m\times m}$, оскільки W_p^k — банахова алгебра. Отже, $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$. З єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що $Y(\cdot)$ належить $\mathcal{Y}_p^{k+1}$, тобто відображення (2.9) при $n = k+1$ є ін'єктивним.

Доведемо сюр'єктивність відображення. Оскільки $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$, то похідна $Y'(\cdot)$ належить $(W_p^k)^{m\times m}$, і згідно з лемою 2.2 $Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^{k+1})^{m\times m}$. Тоді добуток $-Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^k)^{m\times m}$. Оскільки справджується рівність (2.10), то матрична функція $A(\cdot)$ теж належатиме банаховому простору $(W_p^k)^{m\times m}$. Це означає, що кожній матриці-функції $Y(\cdot) \in \mathcal{Y}_p^{k+1}$ відповідає, згідно з формулою (2.10), деяка матриця-функція $A(\cdot) \in (W_p^k)^{m\times m}$.

Лему 2.4 доведено.

Лема 2.5. *Розв'язок $Y(\cdot) \in \mathcal{Y}_p^{n+1}$ задачі* (2.6) *неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$.*

Доведення. Треба показати, що зі співвідношення

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

випливає збіжність $\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{n+1,p} \to 0$. Застосуємо принцип математичної індукції за параметром $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Для цього розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю матричних задач

$$Y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) = 0, \quad t \in (a,b), \tag{2.11}$$

$$Y(a;\varepsilon) = I_m, \tag{2.12}$$

де $A(\cdot;\varepsilon)$ належить $(L_p)^{m\times m}$.

Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконується умова

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{0,p} \to 0. \tag{2.13}$$

Покажемо, що в такому випадку однозначно визначені розв'язки задач (2.11), (2.12) задовольняють граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0,$$

яке еквівалентне наступному

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} := \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{0,p} + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{0,p}.$$

Тому достатньо показати, що кожен із доданків у правій частині рівності прямує до нуля.

Із умови (2.13) маємо

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{0,1} \to 0.$$

Як встановлено Я. Д. Тамаркіним [95], із цього випливає наступна рівномірна збіжність

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{\infty} \to 0. \tag{2.14}$$

Тому $\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{0,p}\to 0$.

Оскільки простори Соболєва $(W_p^n)^{m\times m}$ утворюють банахову алгебру, то з (2.13) і (2.14) випливає, що

$$\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{0,p}\to 0.$$

Звідси, враховуючи рівність (2.11), отримуємо

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{0,p}\to 0.$$

Припустимо, що висновок леми правильний для деякого номера $n=k\in\mathbb{N}$ і розв'язок $Y(\cdot)\in\mathcal{Y}_p^k$ задачі (2.11), (2.12) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot)\in(W_p^{k-1})^{m\times m}$ при $\varepsilon=0$.

Доведемо, що її висновок правильний і для $n=k+1$. Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконано умову

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{k,p}\to 0.$$

Тоді, оскільки простори Соболєва утворюють банахову алгебру, зі зробленого припущення випливає, що

$$\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{k,p}\to 0.$$

Із рівняння (2.11) маємо

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{k,p}\to 0.$$

Звідки одержуємо потрібне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{k+1,p}\to 0.$$

Лему 2.5 доведено.

Лема 2.6. *Коефіцієнти* $A(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^n)^{m\times m}$ *при* $\varepsilon=0$ *неперервно залежать від розв'язків* $Y(\cdot;\varepsilon)\in\mathcal{Y}_p^{n+1}$ *задачі* (2.11), (2.12).

Доведення. Нехай при $\varepsilon \to 0+$ для розв'язків задач (2.11), (2.12) виконується граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{n+1,p} \to 0. \qquad (2.15)$$

Доведемо, що тоді

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0.$$

Із припущення (2.15) випливає, що

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0,$$

а, згідно з лемою 2.2, справедлива збіжність

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{-1}(\cdot;0)\|_{n+1,p} \to 0.$$

Враховуючи наведені співвідношення і рівність (2.10), одержуємо, що при $\varepsilon \to 0+$

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n,p} = \|Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)Y^{-1}(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0.$$

Отже, встановлено бінеперервність відображення

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot) \colon (W_p^{n-1})^{m\times m} \to \mathcal{Y}_p^n.$$

Лему 2.6, а разом з нею і теорему 2.1, доведено.

2.4. Розв'язність задачі у просторах Соболєва

Запишемо неоднорідну крайову задачу (2.1), (2.2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) є лінійним оператором у парі банахових просторів

$$(L, B)\colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l. \tag{2.16}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon X \to Y$, де X і Y — банахові простори, називають фредгольмів, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X)) \in \mathbb{Z}$$

є скінченним (див., наприклад, [78, лема 19.1.1]). Зауважимо, що часто в україномовній та російськомовній математичній літературі фредгольмів оператор із довільним індексом називають нетеровим, а термін "фредгольмів" застосовують до нетерових операторів з індексом нуль. Використана у дисертації термінологія є загальноприйнятою в англомовній літературі.

Теорема 2.2. *Лінійний оператор* (3.19) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - l$.

Доведення теореми 2.2. Обґрунтуємо спочатку неперервність оператора (L, B). Оскільки оператор B за умовою є лінійним і неперервним, то достатньо довести неперервність оператора L, яка еквівалентна його обмеженості. Обмеженість лінійного оператора

$$L\colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m$$

випливає з означення норм у просторах Соболєва W_p^n і того, що кожен із цих просторів утворює банахову алгебру.

Доведемо тепер фредгольмовість оператора (L, B) та знайдемо його індекс. Виберемо деякий фіксований лінійний обмежений оператор $C_{l,m}\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^l$. Оператор (L, B) допускає зображення

$$(L, B) = (L, C_{l,m}) + (0, B - C_{l,m}),$$

де оператор

$$(L, C_{l,m})\colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l,$$

а другий доданок є скінченновимірним оператором. Із другої теореми стійкості (див., наприклад, [81, розд. 3, § 1]) випливає, що оператор (L, B) є фредгольмовим, якщо оператор $(L, C_{l,m})$ є таким і

$$\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(L, C_{l,m}).$$

Тому достатньо довести фредгольмовість оператора $(L, C_{l,m})$ і знайти його індекс, вибравши належним чином оператор $C_{l,m}$. Для цього розглянемо три випадки.

1. Нехай $l = m$. Покладемо

$$C_{m,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a)).$$

Знайдемо нуль-простір та область значень цього оператора. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{l,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad C_{m,m}y = (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0.$$

Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що $y(\cdot) = 0$. Тому $\ker(L, C_{m,m}) = 0$.

Нехай $h \in (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ вибрано довільним чином. Із теореми 2.1 випливає, що існує така вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^n)^m$, що

$$Ly = h, \quad (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = c.$$

Тому $\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = \left(W_p^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $l > m$. Покладемо

$$C_{l,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a), \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-m}) \in \mathbb{C}^l.$$

Знайдемо нуль-простір оператора $(L, C_{l,m})$. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{l,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0.$$

Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо $y(\cdot) = 0$.

Запишемо множину значень оператора $(L, C_{l,m})$ у вигляді прямої суми двох підпросторів

$$\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = \operatorname{ran}(L, C_{m,m}) \oplus (\underbrace{0, \ldots, 0}_{l-m}).$$

Але, як доведено раніше, $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$. Тому $\operatorname{def}\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = l - m$.

3. Нехай $l < m$. Покладемо

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_l(a)) \in \mathbb{C}^l.$$

Доведемо, що

$$\dim\ker(L, C_{l,m}) = m - l,$$

$$\operatorname{def}\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = 0.$$

Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{l,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad (y_1(a), \ldots, y_l(a)) = 0.$$

Розглянемо наступні $m-l$ задач Коші:

$$Ly_k = 0, \quad C_{m,m}y_k = e_k, \quad \text{де} \quad k \in \{l+1, l+2, \dots, m\},$$
$$e_k := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots, 0) \in C^m.$$

Із теореми 2.1 випливає, що розв'язки цих задач лінійно незалежні та утворюють базис у підпросторі $\ker(L, C_{l,m})$.

Сюр'єктивність оператора $(L, C_{l,m})$ випливає із вже доведеної сюр'єктивності оператора $(L, C_{m,m})$.

Отже, в кожному з трьох випадків оператор (L, B) є фредгольмовим з індексом $m-l$.

Теорему 2.2 доведено.

Сформулюємо критерій оборотності оператора (L, B), тобто умову, за якої неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Теорема 2.3. *Оператор (L, B) є оборотним тоді і тільки тоді, коли $l = m$ і матриця $[BY]$ невироджена.*

Доведення теореми 2.3. Згідно з теоремою 2.2 оборотність оператора (L, B) рівносильна рівностям $l = m$ і $\ker(L, B) = \{0\}$. Тому достатньо показати, що умова $\ker(L, B) \neq \{0\}$ рівносильна виродженості квадратної матриці (2.7).

Нехай $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Тоді за лемою 2.3 існує такий нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L, B)y = (0, 0)$, що

$$y(\cdot) \in \ker(L, B) \Leftrightarrow (\exists\, q \in \mathbb{C}^m \colon y(t) = Y(t)q,\ [BY]\, q = 0),$$

де вектор $q \neq 0$. Це означає, що стовпці матриці (2.7) лінійно залежні і сама матриця є виродженою.

Навпаки, нехай матриця (2.7) вироджена. Тоді її стовпці лінійно залежні. У такому разі для деякого вектора $q \neq 0$

$$[BY]q = 0.$$

Покладемо $y(\cdot) := Y(\cdot)q$. Тоді $y(\cdot) \neq 0$, $Ly = 0$ і

$$By = B(Y(\cdot)q) = [BY]q = 0$$

на підставі леми 2.3. Тому $y(\cdot) \in \mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$.

Теорему 2.3 доведено.

Розглянемо питання про вимірності ядра і коядра оператора задачі в термінах властивостей спеціальної прямокутної числової матриці.

Означення 2.1. Прямокутна числова матриця

$$M(L, B) := [BY(\cdot)] \in \mathbb{C}^{m \times l} \tag{2.17}$$

є характеристичною для неоднорідної крайової задачі (2.1), (2.2), якщо її j-й стовпчик є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матриці-функції $Y(\cdot)$.

Тут m є числом скалярних диференціальних рівнянь системи (2.1), а l — числом скалярних крайових умов.

Теорема 2.4. *Вимірності ядра і коядра оператора* (3.19) *дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці* (2.17)*:*

$$\dim \ker(L, B) = \dim \ker \big(M(L, B)\big),$$
$$\dim \operatorname{coker}(L, B) = \dim \operatorname{coker} \big(M(L, B)\big).$$

Доведення теореми 2.4 наведено у пункті 3.3 (теорема 3.2) та узагальнено у випадку лінійної крайової задачі для системи m диференціальних рівнянь довільного порядку.

Приклад 2.1. Розглянемо крайову задачу (2.1), (2.2) при $A(t) \equiv 0$ із крайовими умовами (2.4)

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \int_a^b \Phi(t) y^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad y(\cdot) \in (W_p^n)^m.$$

Нагадаємо, що через $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m \times m}$ позначено єдиний розв'язок лінійного однорідного матричного рівняння вигляду (2.1) з початковою умовою Коші (2.6). Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$y(\cdot) = Y(\cdot) g,$$

де вектор-стовпчик $g \in \mathbb{C}^m$ є довільним.

Тоді з рівності (2.4) маємо співвідношення

$$BY = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s Y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t) Y^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad Y(\cdot) = I_m,$$

$$M(L, B) = \alpha_0.$$

Ця числова матриця не залежить від p, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, функції $\Phi(\cdot)$ і в такому випадку справджуються рівності

$$\dim \ker(M(L, B)) = \dim \ker(\alpha_0),$$

$$\dim \operatorname{coker}(M(L, B)) = \dim \operatorname{coker}(\alpha_0).$$

2.5. Неперервність за параметром розв'язків крайової задачі

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (2.1), (2.2), залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$

$$L(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{2.18}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2.19}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ є лінійним неперервним оператором

$$B(\varepsilon)\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком крайової задачі (2.18), (2.19) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, яка задовольняє рівняння (2.18) (скрізь при $n \geq 1$ та майже скрізь при $n = 0$) на (a,b) і рівність (2.19). Крайова умова (2.19) є найбільш загальною для системи (2.18), оскільки її розв'язок пробігає весь простір Соболєва $(W_p^n)^m$ (на підставі леми 2.1). Із крайовою задачею (2.18), (2.19) пов'яжемо лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.20}$$

Згідно з теоремою 2.2 це є обмежений фредгольмів оператор з індексом нуль.

Для того щоб досліджувана задача мала зміст, надалі будемо вважати, що виконується

умова (2.0). *Гранична однорідна крайова задача вигляду* (2.18), (2.19)

$$L(0)y(t;0) = 0, \quad t \in (a,b), \quad B(0)y(\cdot;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

У цьому випадку відповідна гранична неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок.

Наступна теорема містить конструктивні умови, за яких неперервний оператор (2.20) є оборотним при достатньо малих значеннях параметра ε і гарантує неперервну залежність розв'язків від параметра у просторі $(W_p^n)^m$.

Теорема 2.5. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$ *у просторі* $(W_p^{n-1})^{m\times m}$*;*

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного значення* $y \in (W_p^n)^m$*.*

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним. Якщо, крім цього,*

3) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0, \quad c(\varepsilon) \to c(0)$*,*

то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *задачі* (2.18), (2.19) *задовольняє граничну властивість*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0. \tag{2.21}$$

Доведення теореми 2.5 наведемо у вигляді доведення чотирьох лем.

Лема 2.7. *Нехай виконуються умови* (2.0) *і* 1), 2) *теореми* 2.5*. Тоді для достатньо малих значень* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Доведення. З умови 1) за теоремою про гомеоморфізми 2.1 випливає, що

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.22}$$

Тоді на підставі умови 2), отримаємо збіжність числових матриць

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot;0)]\,, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.23}$$

Згідно з умовою (2.0) і теоремою 2.3 гранична квадратна матриця є невиродженою. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det\left[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)\right] \neq 0.$$

Звідси випливає оборотність оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лему 2.7 доведено.

Розглянемо разом із вихідною неоднорідною крайовою задачею (2.18), (2.19) ще три векторні крайові задачі відносно вектор-функції $y(t;\varepsilon)$:

$$v'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2.24}$$

$$x'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) = 0, \tag{2.25}$$

$$w'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot;\varepsilon) = 0,$$

де параметр $\varepsilon \geq 0$. Як відомо, крайова задача (2.25) (задача Коші) має єдиний розв'язок.

З огляду на лему 2.7 маємо рівність

$$y(\cdot;\varepsilon) = v(\cdot;\varepsilon) + w(\cdot;\varepsilon), \tag{2.26}$$

де $\varepsilon \geq 0$. Тому для доведення теореми 2.5 достатньо показати, що за виконання її умов справджуються такі співвідношення при $\varepsilon \to 0+$:

$$\|v(\cdot;\varepsilon) - v(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \tag{2.27}$$

$$\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0. \tag{2.28}$$

Лема 2.8. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови теореми* 2.5*. Тоді має місце граничне співвідношення* (2.27)*.*

Доведення. Із першої рівності крайової задачі (2.24) випливає, що

$$v(\cdot;\varepsilon) = Y(\cdot;\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon) \tag{2.29}$$

для деякого $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Звідси, враховуючи другу рівність задачі (2.24), отримуємо

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Тому на підставі леми 2.7, теореми 2.3, формули (2.23) і умови 2) маємо

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot;0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Отже, із (2.22) і (3.56) одержуємо співвідношення (2.27).

Лему 2.8 доведено.

Лема 2.9. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови* 1) – 3) *теореми* 2.5. *Тоді розв'язок задачі* (2.25) *має властивість*

$$\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.30}$$

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ є достатньо малим. Розв'язок задачі (2.25) допускає зображення

$$x(t;\varepsilon) = Y^{-1}(t;\varepsilon)\int_a^t Y(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)\mathrm{d}s. \tag{2.31}$$

З умови 1) за теоремою про гомеоморфізми 2.1 маємо

$$\left\|Y^{\pm 1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{\pm 1}(\cdot;0)\right\|_{n,p} \to 0 \tag{2.32}$$

при $\varepsilon \to 0+$. Тоді згідно з умовою 3) і співвідношення (2.32) є справедливою збіжність

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)f(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)f(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0. \tag{2.33}$$

Це є наслідком того, що W_p^n банахова алгебра. Тепер зі співвідношень (2.31) – (2.33) отримуємо (2.30).

Лему 2.9 доведено.

Лема 2.10. *За умов теореми* 2.5 *виконується граничне співвідношення* (2.28).

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі вигляду (2.24)

$$u'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon),$$
$$B(\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon) = B(\varepsilon)x(\cdot;\varepsilon) =: \widetilde{c}(\varepsilon).$$

Із властивості 2) і леми 2.9 маємо $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому з леми 2.8, випливає збіжність

$$\|u(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.34}$$

Із рівності $w(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;\varepsilon)$ та формул (2.30), (2.34), отримуємо (2.28).

Потрібна гранична властивість (2.21) є безпосереднім наслідком рівності (2.26) і лем 2.8, 2.10.

Теорему 2.5 доведено.

2.6. Критерій неперервності розв'язків за параметром

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (2.18), (2.19) за параметром ε при $\varepsilon \to 0+$ у просторі W_p^n.

Розглянемо такі **граничні умови** при $\varepsilon \to 0+$:

(2.I) $A(\cdot;\varepsilon) \to A(\cdot;0)$ у просторі $(W_p^{n-1})^{m\times m}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ для кожного значення $y \in (W_p^n)^m$.

Означення 2.2. Розв'язок крайової задачі (2.18), (2.19) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі умови:

(∗) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, довільних правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$, який належить простору $(W_p^n)^m$;

(∗∗) зі збіжності правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ в $(W_p^{n-1})^m$ і $c(\varepsilon) \to c(0)$ у $\mathbb{C}^m$ випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad \text{в} \quad (W_p^n)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Теорема 2.6. *Розв'язок крайової задачі* (2.18), (2.19) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (2.0) *та граничні умови* (2.I), (2.II).

Доведення теореми 2.6. Достатність умов (2.0), (2.I) і (2.II) для того, щоб задача (2.18), (2.19) задовольняла означення 2.2, було доведено в теоремі 2.5.

Доведемо необхідність. Припустимо, що ця задача задовольняє означення 2.2. Тоді виконується умова (2.0). Залишилося показати, що для цієї задачі виконуються умови (2.I) і (2.II). Розділимо це доведення на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (2.18), (2.19) задовольняє граничну умову (2.I). Оператор

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)\colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$$

оборотний для будь-якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ за умови $(*)$ означення 2.2. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо наступну матричну крайову задачу:

$$Y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) = O_m, \quad t \in (a,b),$$

$$[BY(\cdot;\varepsilon)] = I_m.$$

Ця задача є сукупністю m крайових задач (2.18), (2.19) із правими частинами, які не залежать від ε. Тому за припущенням вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$, який задовольняє умову $Y(\cdot;\varepsilon) \to Y(\cdot;0)$ у просторі $(W_p^n)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Зазначимо, що $\det Y(t;\varepsilon) \neq 0$ для довільного $t \in (a,b)$, оскільки інакше стовпці матриці-функції $Y(\cdot;\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot;\varepsilon)] = I_m$. Тому

$$A(\cdot;\varepsilon) = -Y'(\cdot;\varepsilon)(Y(\cdot;\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot;0)(Y(\cdot;0))^{-1} = A(\cdot;0)$$

у просторі $(W_p^n)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується умова (2.I).

Крок 2. Покажемо, що справедлива умова (2.II). Спочатку доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора $B(\varepsilon)\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне, тобто існує така числова послідовність $\big(\varepsilon^{(k)}\big)_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad 0 < \Big\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\Big\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для кожного номера k виберемо таку вектор-функцію $x_k \in (W_p^n)^m$, що

$$\|x_k\|_{n,p} = 1 \quad \text{і} \quad \big\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)x_k\big\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\big\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\big\|.$$

Покладемо

$$y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) := \big\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\big\|^{-1} x_k,$$
$$f\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) := L\big(\varepsilon^{(k)}\big)\, y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big),$$
$$c\big(\varepsilon^{(k)}\big) := B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\, y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big).$$

Оскільки $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у просторі $(W_p^n)^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ в $(W_p^{n-1})^m$, бо за доведеним вище $A(\cdot;\varepsilon)$ задовольняє умову (2.I). Оскільки скінченновимірний простір $\mathbb{C}^m$ є локально компактним, то виконуються наступні нерівності

$$\frac{1}{2} \leq \left\|c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1.$$

Перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c\left(\varepsilon^{(k)}\right) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор у $\mathbb{C}^m$. У такий спосіб, для кожного номера k вектор-функція $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \in (W_p^n)^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L\left(\varepsilon^{(k)}\right) y\left(t;\varepsilon^{(k)}\right) = f\left(t;\varepsilon^{(k)}\right), \quad t \in (a,b),$$
$$B\left(\varepsilon^{(k)}\right) y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) = c\left(\varepsilon^{(k)}\right).$$

Нагадаємо, що $f\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у $(W_p^{n-1})^m$ і $c\left(\varepsilon^{(k)}\right) \to c(0) \neq 0$ у $\mathbb{C}^m$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ означення 2.2, функція $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right)$ збігається у просторі $(W_p^n)^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot;0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t,0) = 0,\ t \in (a,b)$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot;0) = c(0)$. Але врахуємо, що $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у тому ж просторі. Отже, $y(\cdot;0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (2.II). Із доведеного вище випливає, що існують такі числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$, що $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_p^n)^m$ у простір $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо вектор-функцію $y \in (W_p^n)^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot;\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$, враховуючи умову $(**)$, маємо

$$\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \big\|(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big\|_{(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m} =$$
$$= \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big\|_{(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m} \leq$$
$$\leq \gamma' \, \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big)\big\|_{n,p} =$$
$$= \gamma' \, \big\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;0), c(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;0), c(0))\big\|_{n,p} \to 0.$$

Оскільки $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ і $\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \to 0$, маємо збіжність $B(\varepsilon)y$ до $B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_p^n)^m$. Отже, крайова задача (2.18), (2.19) задовольняє умову (2.II).

Теорему 2.6 доведено.

2.7. Оцінка швидкості збіжності розв'язків за параметром

Перейдемо до дослідження швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (2.18), (2.19) при $\varepsilon \to 0+$.

Покладемо

$$\widetilde{d}_{n-1,p}(\varepsilon) := \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m},$$

де $\|\cdot\|_{n-1,p}$ є нормою у просторі W_p^{n-1}, а $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ — у просторі $\mathbb{C}^m$.

Величини

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p}$$

та $\widetilde{d}_{n-1,p}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (2.18), (2.19), якщо $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;0)$ — як наближений.

Теорема 2.7. *Нехай крайова задача* (2.18), (2.19) *задовольняє умову* (2.0) *та граничні умови* (2.I) *і* (2.II). *Тоді існують такі додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1 \, \widetilde{d}_{n-1,p}(\varepsilon) \leq \big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p} \leq \gamma_2 \, \widetilde{d}_{n-1,p}(\varepsilon), \tag{2.35}$$

де числа ε_2, γ_1, γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;0)$ *і* $y(\cdot;\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (2.18), (2.19) мають однаковий порядок малості.

Доведення теореми 2.7. Спочатку покажемо, що має місце ліва частина подвійної нерівності (3.64). Покладемо

$$f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon), \quad c(\varepsilon) := B(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon). \tag{2.36}$$

Із граничних умов (2.I), (2.II) випливає сильна збіжність обернених операторів

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) \xrightarrow{s} \big(L(0), B(0)\big), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тому існують такі числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, що норма цього оператора задовольняє нерівність

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'. \tag{2.37}$$

Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти таку послідовність додатних чисел $\big(\varepsilon^{(k)}\big)_{k=1}^{\infty}$, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$\big\|\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)\big\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Але за теоремою Банаха – Штейнгауза це суперечить сильній збіжності $\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)$ до $(L(0), B(0))$ при $k \to \infty$. Тому для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$ з урахуванням (2.36), (2.37) робимо висновок, що

$$\begin{gathered}
\big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m} = \\
= \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - L(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \big\|L(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p} + \big\|B(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p} \leq \\
\leq \gamma'\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p},
\end{gathered}$$

тобто встановлено ліву частину нерівності (3.64) із $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину подвійної нерівності (3.64). Згідно з теоремою 2.6 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, причому виконується сильна збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Справді, для довільних $f \in (W_p^{n-1})^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ за умовою $(**)$ означення 2.2, маємо збіжність

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1}(f;c) =: y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) := \big(L(0), B(0)\big)^{-1}(f;c)$$

у просторі $(W_p^n)^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тоді за теоремою Банаха – Штейнгауза як і вище випливає, що норми цих обернених операторів обмежені. Тобто існують такі додатні числа ε_2 і γ_2, що норма оберненого оператора

$$\left\| \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1} \right\| \leq \gamma_2.$$

Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} \left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{n,p} &= \left\| \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1} \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)\big(y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big) \right\|_{n,p} \leq \\ &\leq \gamma_2 \big(\, \|L(\varepsilon) y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\|_{n-1,p} + \|B(\varepsilon) y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \big). \end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає права частина двобічної оцінки (3.64).

Теорему 2.7 доведено.

2.8. Гранична теорема для розв'язків багатоточкових задач. Випадок $p = \infty$

Багатоточкові крайові задачі є важливими прикладами найбільш загальних крайових задач, розглянутих вище. Отже, для них є правильними отримані результати про коректну розв'язність цих задач і неперервну залежність їх розв'язків за параметром. У даних підрозділах дослідимо залежні від параметра багатоточкові крайові задачі для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають заданий простір Соболєва. Використовуючи одержані результати, отримаємо явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач.

Нехай, як і раніше, довільно задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ і параметри

$$1 \leq p \leq \infty, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \{m, k, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Розглянемо на інтервалі (a, b) систему m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) := y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in (a, b). \tag{2.38}$$

Тут, як і в п. 2.5, при кожному фіксованому значенні параметра ε матриці-функції $A(\cdot, \varepsilon)$ належать простору $(W_p^{n-1})^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot, \varepsilon)$ — простору $(W_p^{n-1})^m$, а невідомою є вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^m$.

Довільним чином виберемо $r \geq 1$ точок $\{t_1, \ldots, t_r\} \subset [a, b]$. Пов'яжемо з системою (2.38) багатоточкову фредгольмову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{2.39}$$

де вектори $q(\varepsilon)$ належать простору $\mathbb{C}^m$, а матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^{m \times m}$. Використання у крайовій умові (2.39) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ в залежності від значень параметра j.

З огляду на неперервне вкладення

$$(W_p^n)^m \hookrightarrow (C^{n-1})^m \tag{2.40}$$

ліва частина крайової умови (2.39) має сенс для всіх розв'язків рівняння (2.38). Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (W_p^n)^m$, є лінійним неперервним оператором

$$B(\varepsilon)\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{2.41}$$

У граничному випадку при $\varepsilon = 0$ розглядаємо наступну крайову задачу:

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad t \in (a,b), \tag{2.42}$$

$$B(0)y(\cdot,0) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=0}^{n} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j,0) = q(0), \tag{2.43}$$

де матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Зроблені припущення стосовно системи (2.38) та обмеженість оператора (2.41) означають, що крайова задача (2.38), (2.39) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і гранична крайова задача (2.42), (2.43) є найбільш загальними щодо простору Соболєва W_p^n. Отож, для них застосовні результати другого розділу, серед яких одним з основних є теорема 2.7 про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ у просторі W_p^n при $\varepsilon = 0$. Виявляється, що використану у цій теоремі граничну умову (2.II) можна замінити у сенсі достатності на деякі явні умови, пов'язані зі структурою багатоточкових крайових умов (2.39) і (2.43). Попередньо зауважимо, що у випадку, коли гранична багатоточкова крайова задача (2.42), (2.43) задовольняє умову (2.0), то за теоремою 2.3 ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,0) \in (W_p^n)^m$.

Крайовій задачі (2.38), (2.39) для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ відповідає лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \colon (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.44}$$

Згідно з теоремою 2.2, це обмежений фредгольмів оператор з індексом нуль. При $\varepsilon = 0$ цей оператор є ізоморфізмом, тобто

$$(L(0), B(0)) \colon (W_p^n)^m \leftrightarrow (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m.$$

Зауважимо, що крайові умови (2.39), (2.43) охоплюють як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні цілого та дробового порядку k, де $0 < k \leq n$.

Відповідно до означення 2.2 розв'язок $y = y(\cdot, \varepsilon)$ багатоточкової крайової задачі (2.38), (2.39) є неперервним за параметром ε у просторі Соболєва W_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, якщо розв'язок $y(\cdot, \varepsilon)$ існує, єдиний і задовольняє граничне співвідношення

$$\big\| y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0) \big\|_{n,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.45}$$

Сформулюємо граничну теорему для розв'язків багатоточкової крайової задачі (2.38), (2.39) у випадку $p = \infty$.

Розглянемо такі **припущення** при $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ і $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$;

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ і $l \in \{0, \ldots, n\}$;

(γ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ і $l \in \{0, \ldots, n\}$;

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \to 0$ для всіх $k \in \{1, \ldots, \omega_0(\varepsilon)\}$ і $l \in \{0, \ldots, n\}$.

Зауважимо, що для крайової задачі (2.38), (2.39) не припускається, що коефіцієнти $A(\cdot,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають певну регулярність за параметром ε при $\varepsilon > 0$. Будемо вимагати, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1,\dots,r\}$ всі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, проте для точок нульової серії $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

В умовах (γ) і (δ) вираз $\|\cdot\|$ є нормою комплексної числової матриці; ця норма дорівнює сумі модулів усіх елементів матриці. Припущення (β) і (γ) допускають, що коефіцієнти $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ можуть необмежено зростати при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. З умови (δ) випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$, на відміну від умови (α).

Теорема 2.8. *Нехай крайова задача* (2.38), (2.39) *при* $p = \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (2.II).

Якщо, крім того, виконані умови (2.0) *і* (2.I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення* (2.45).

Доведення. Запишемо оператор (2.41) у вигляді скінченної суми $r+1$ доданків, розділених за серіями

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = B_0(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + B_1(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + \dots + B_r(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon), \tag{2.46}$$

де

$$B_0(\varepsilon)y(t_{0,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)),$$

$$B_1(\varepsilon)y(t_{1,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_1(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{1,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{1,k}(\varepsilon)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B_r(\varepsilon)y(t_{r,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=r}^{\omega_r(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{r,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{r,k}(\varepsilon)). \tag{2.47}$$

Тоді співвідношення

$$B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} 0, \tag{2.48}$$

$$B_j(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_j(0), \quad j \in \{1, \dots r\}, \tag{2.49}$$

гарантують виконання граничної умови (2.II).

Покажемо спочатку сильну збіжність операторів $B_0(\varepsilon)$ до нуля, тобто виконання співвідношення (2.48). Враховуючи умову (δ), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \|y\|_{n,\infty} \to 0$$

для всіх допустимих значень індексів k і l. Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Для довільної вектор-функції $y \in (W_\infty^n)^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\begin{gathered} \left\| B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y \right\| = \\ = \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| + \\ + \sum_{l=0}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\|. \end{gathered} \tag{2.50}$$

Дослідимо другий доданок у правій частині формули (2.50). Для довільних $j \in \{1, \dots, r\}$ і $l \in \{0, \dots, n\}$ маємо

$$\begin{gathered} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| = \\ \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \\ \leq \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \Big) \right\| + \left\| \left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right) y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \end{gathered}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\| \|y\|_{n,\infty}. \quad (2.51)$$

Отож, на підставі умови (β) справджується збіжність

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\| \|y\|_{n,\infty} \to 0. \quad (2.52)$$

Зауважимо, що у просторі W_∞^n для довільних $\{t_1, t_2\} \subset [a, b]$ і $y \in (W_\infty^n)^m$ виконується нерівність

$$\left|y^{(n-1)}(t_1) - y^{(n-1)}(t_2)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y^{(n)}(s)\mathrm{d}s\right| \leq$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \left|y^{(n)}(s)\right|\mathrm{d}s = |t_2 - t_1| \operatorname*{ess\,sup}_{a\leq t_1<t_2\leq b} \left|y^{(n)}\right|. \quad (2.53)$$

Крім того, похідні функцій до порядку $(n-2)$ існують і є ліпшицевими, а похідна порядку n існує майже скрізь та є істотно обмеженою. З наведених міркувань і з умови (2.53) випливає, що похідна порядку $(n-1)$ також є ліпшицевою.

Тому має місце таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \to 0. \quad (2.54)$$

Справді, якщо $0 \leq l \leq n$, то це є прямим наслідком умови (γ) і того факту, що вектор-функція y належить простору $(W_\infty^n)^m$ з відповідно визначеною нормою

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| =$$
$$= \left\|y^{(n)}\right\|_\infty \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \leq$$
$$\leq \|y\|_{n,\infty} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0.$$

Із формул (2.51), (2.52), (2.54) безпосередньо випливає співвідношення

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \to 0. \tag{2.55}$$

Встановлена збіжність (2.55) обумовлює виконання умов (2.49). Тому, врахувавши формули (2.48) і (2.49), робимо висновок, що $\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \to 0$. Нагадаємо, що вектор-функція $y \in (W_\infty^n)^m$ є довільною. Як підсумок, гранична умова (2.II) справджується.

Перше твердження теореми 2.8 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище і теореми 2.6.

Теорему 2.8 доведено.

2.9. Гранична теорема для розв'язків багатоточкових задач. Випадок $1 \le p < \infty$

Сформулюємо граничну теорему для розв'язків багатоточкової крайової задачі (2.38), (2.39) у випадку $1 \le p < \infty$.

Розглянемо **Припущення** при $\varepsilon \to 0+$

(γ_p) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/p'} = O(1)$ для всіх $j \in \{1, \dots, r\}$ і $k \in \{1, \dots, \omega_j(\varepsilon)\}$, де $1/p + 1/p' = 1$;

(γ') $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{1, \dots, \omega_j(\varepsilon)\}$ і $l \in \{0, \dots, n-1\}$.

Теорема 2.9. *Нехай крайова задача* (2.38), (2.39) *при* $1 \le p < \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (2.II).

Якщо, крім того, виконані умови (2.0) *і* (2.I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення* (2.45).

Доведення. Як і раніше будемо вважати, що оператор (2.41) записаний у вигляді (2.46), де скінченна сума $r+1$ доданків розділена за серіями (2.47).

Згідно з теоремою Банаха – Штейнгауза достатньо показати, що норма оператора $B(\varepsilon)\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^m$ є обмеженою при $0 < \varepsilon \ll 1$; а також, що $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожної вектор-функції y, яка належить щільній множині $(C^\infty)^m := C^\infty\big([a,b], \mathbb{C}^m\big)$ у просторі $(W_p^n)^m$.

Доведемо спочатку рівномірну по ε обмеженість норми оператора

$$B(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{r} B_j(\varepsilon).$$

Виберемо довільну вектор-функцію $y \in (W_p^n)^m$ і достатньо малий параметр $\varepsilon > 0$. Згідно з крайовою умовою (2.39) маємо співвідношення

$$\begin{gathered}\left\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\right\| = \\ = \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{n}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n}\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\| \le \\ \le \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{n}\left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| + \\ + \sum_{l=0}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\|. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Покажемо обмеженість норми оператора, що відповідає нульовій серії. Використовуючи неперервність вкладення (2.40), одержуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| \le c_0\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y\right\|_{n,p} \tag{2.57}$$

для всіх допустимих значень індексів $l \in \{0,\dots,n\}$ і $k \in \{1,\dots,\omega_0(\varepsilon)\}$, де c_0 — норма оператора вкладення (2.40). Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Крім того, для будь-яких $l \in \{0,\dots,n\}$ і $j \in \{1,\dots,r\}$ маємо

$$\begin{gathered}\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\| = \\ \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\| \le \\ \le \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\left(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right)\right\| + \left\|\left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right)y^{(l)}(t_j)\right\| \le \\ \le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\|\left\|y\right\|_{n,p}. \end{gathered} \tag{2.58}$$

Тут для $l=n$ і кожного $k\in\{1,\dots,\omega_j(\varepsilon)\}$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(n)}(t_{j,k}(\varepsilon))-y^{(n)}(t_j)\right\|\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon)\right\|\,c_1\,\|y\|_{n,p}\,|t_{j,k}(\varepsilon)-t_j|^{1/q},$$

де c_1 є нормою неперервного оператора вкладення простору Соболєва W_p^n у комплексний простір Гельдера $C^{n-1,1/p'}\big([a,b]\big)$ $\big($див., наприклад, [96, теорема 4.6.1(e)]$\big)$. Якщо $1/p'=0$, то останній простір є C^{n-1} і нерівність (2.59) правильна при $c_1:=2c_0$.

Крім того, для кожного $l\in\mathbb{Z}$, де $0\leq l\leq n-1$, за теоремою Лагранжа одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-y^{(l)}(t_j)\right\|\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\max_{a\leq t\leq b}\left\|y^{(l+1)}(t)\right\||t_{j,k}(\varepsilon)-t_j|\leq \tag{2.59}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\,c_0\|y\|_{n,p}\,|t_{j,k}(\varepsilon)-t_j|\,.$$

Із нерівностей (2.56) – (2.59) та умов (β), (γ_p), (γ'), (δ) випливає

$$\|B(\varepsilon)y-B(0)y\|\leq c\,\|y\|_{n,p},$$

де число $c>0$ не залежить від $y\in(W_p^n)^m$ і достатньо малого $\varepsilon>0$. Отже, норма оператора $B(\varepsilon)$ обмежена при $0<\varepsilon\ll 1$.

Обґрунтуємо сильну збіжність оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$. Враховуючи умову (δ) і нерівність (2.57), маємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\|\to 0. \tag{2.60}$$

Крім того, за умовою (β)

$$c_0\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)-\beta_j^{(l)}\right\|\|y\|_{n,p}\to 0. \tag{2.61}$$

Якщо y належить $(C^{\infty})^m$, то

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \max_{a \leq t \leq b} \left\| y^{(l+1)}(t) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0\end{gathered} \tag{2.62}$$

для всіх $l \in \{0, \ldots, n\}$ з урахуванням умов (α) і (β). Таким способом, із формул (2.56), (2.60) – (2.62) маємо збіжність $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожного $y \in (C^{\infty})^m$.

Перше твердження теореми 2.9 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище і [15, теорема 1].

Теорему 2.9 доведено.

Зазначимо, що системи умов (α), (β), (γ), (δ) і (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) не гарантують рівномірну збіжність неперервних операторів $B(\varepsilon)$ до $B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому теореми 2.8, 2.9 не випливають із загальних фактів теорії лінійних операторів.

Зауважимо, що в роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [22, 23] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, але в цих роботах точки відрізка $[a, b]$, які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12] досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку в просторах Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра ε. Випадок $p = \infty$ раніше не вивчався.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Одержано такі основні результати:

1. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^n)^m$ і $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$ (теорема 2.2).

2. Встановлено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах (теорема 2.3).

3. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі (теорема 2.4).

4. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^n)^m$ (теорема 2.6).

5. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва (теорема 2.6).

6. Знайдено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^n)^m$ у випадку $p = \infty$ та у випадку $1 \leq p < \infty$ (теореми 2.8, 2.9).

Результати другого розділу опубліковано у статтях [1, 2, 3] і висвітлено в тезах конференцій [5, 6, 7, 61, 62, 63].

Розділ 3

Системи рівнянь довільного порядку в просторах Соболєва

У цьому розділі досліджуємо найбільш загальний клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких пробігають відповідний комплексний простір Соболєва W_p^n, де $1 \leq p \leq \infty$.

3.1. Постановка задачі

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ і параметри

$$\{m, n, r, l\} \subset \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Розглянемо на інтервалі (a, b) лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь порядку r

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{3.1}$$

$$By = c, \tag{3.2}$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot)$ належать простору $(W_p^n)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^n)^m$, вектор c — простору $\mathbb{C}^l$, B є лінійним неперервним оператором

$$B\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l. \tag{3.3}$$

Крайова умова (3.2) задає l скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r. Під розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє рівняння (3.1) (при $n \geq 1$ скрізь, а при $n = 0$ майже скрізь) на (a, b), та рівність (3.2), яка задає l скалярних крайових умов. Розв'язки рівняння (3.1) заповнюють простір $(W_p^{n+r})^m$, коли його права частина $f(\cdot)$ пробігає простір $(W_p^n)^m$ (див. лему 3.1, подану нижче). Тому крайова умова (3.2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов: задачі Коші, дво- та багатоточкові, інтегральні та мішані задачі, так і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні цілого і дробового порядку k, де $0 < k \leq n + r$.

Із відомих результатів функціонального аналізу [80] випливає, що кожний з операторів B в (3.3) при $1 \leq p < \infty$ допускає наступне однозначне аналітичне зображення:

$$By = \sum_{s=0}^{n+r-1} \alpha_s y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t) y^{(n+r)}(t)\mathrm{d}t, \quad y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m, \tag{3.4}$$

де матриці α_s належать простору $\mathbb{C}^{l\times m}$, а матриця-функція $\Phi(\cdot)$ — простору $L_{p'}([a,b];\mathbb{C}^{l\times m})$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

У випадку $p = \infty$ формула (3.4) також задає деякий оператор $B\colon (W_\infty^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l$, але існують й інші оператори цього класу, що визначаються інтегралами за скінченно-адитивними мірами [67].

Лема 3.1. *Якщо вектор-функція* $y\colon (a,b) \to \mathbb{C}^m$ *є розв'язком рівняння* (3.1) *для деякої правої частини* $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$*, то* $y(\cdot)$ *належить* $(W_p^{n+r})^m$*. Більше того, якщо* $f(\cdot)$ *пробігає весь простір* $(W_p^n)^m$*, то розв'язки рівняння* (3.1) *пробігають весь простір* $(W_p^{n+r})^m$*.*

Доведення розділимо на два кроки. Покажемо справедливість твердження леми спочатку для випадку $n = 0$. Припустимо, що вектор-функція $y(\cdot)$ є розв'язком рівняння (3.1) для деякого $f \in (L_p)^m$. Доведемо, що $y(\cdot)$ належить $(W_p^r)^m$. За визначенням розв'язку рівняння (3.1) маємо

$$y^{(r-1)}(\cdot) \in AC[a,b] \Longleftrightarrow y^{(r)}(\cdot) \in (L_1)^m.$$

Оскільки $f \in (L_p)^m$, то кожне $A_{r-j}(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$. А також вектор-функції $y^{(r-j)}(\cdot)$ є неперервними на $[a,b]$, тоді

$$y^{(r)}(\cdot) = f(\cdot) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) y^{(r-j)}(\cdot) \in (L_p)^m.$$

Звідси випливає, що y належить $(W_p^r)^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f(\cdot) \in (L_p)^m$ існує розв'язок $y(\cdot)$ рівняння (3.1). Як щойно було показано, $y(\cdot)$ належить $(W_p^r)^m$. Отже, якщо $f(\cdot)$ пробігає весь простір $(L_p)^m$, то розв'язки рівняння (3.1) потрапляють у простір $(W_p^r)^m$. Це, враховуючи очевидну імплікацію

$$y(\cdot) \in (W_p^r)^m \Longrightarrow Ly \in (L_p)^m,$$

доводить останнє твердження леми для випадку $n = 0$.

Покажемо справедливість леми для випадку $n \geq 1$. Припустимо, що r разів диференційовна вектор-функція $y(\cdot)$ є розв'язком рівняння (3.1) для деякого $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$. Доведемо, що $y(\cdot)$ належить $(W_p^{n+r})^m$. Враховуючи, що $f(\cdot)$ і всі $A_{r-j}(\cdot)$ є принаймні неперервними на $[a,b]$, маємо включення

$$y^{(r)}(\cdot) = f(\cdot) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) y^{(r-j)}(\cdot) \in \left(C^{(0)}\right)^m.$$

Звідси випливає, що $y(\cdot)$ належить $(C^{(r)})^m$. Більше того, отримуємо співвідношення

$$y^{(r)}(\cdot) \in (W_p^n)^m \Rightarrow y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m. \tag{3.5}$$

Справді, якщо $y^{(r)}(\cdot)$ належить $(W_p^n)^m$ для деякого цілого числа n, то

$$y^{(r)}(\cdot) = f(\cdot) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) y^{(r-j)}(\cdot) \in (W_p^n)^m,$$

оскільки всі $A_{r-j}(\cdot)$ належать $(W_p^n)^{m\times m}$. Отож, $y(\cdot)$ належить $(W_p^{n+r})^m$. Включення $y(\cdot) \in (C^{(r)})^m$ і властивість (3.5) обумовлюють потрібне включення $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$ існує r разів диференційовний розв'язок $y(\cdot)$ рівняння (3.1). Як щойно було показано, $y(\cdot)$ належить $(W_p^{n+r})^m$. Отже, якщо $f(\cdot)$ пробігає весь простір $(W_p^n)^m$, то розв'язки рівняння (3.1) потрапляють у простір $(W_p^{n+r})^m$. Це, враховуючи очевидну імплікацію

$$y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m \Longrightarrow Ly \in (W_p^n)^m,$$

доводить останнє твердження леми для випадку $n \geq 1$.

Лему 3.1 доведено.

3.2. Допоміжні результати

У даному підрозділі ми встановимо твердження допоміжного характеру, які будуть використані в доведенні основних теорем.

Означимо лінійний оператор

$$C\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^m, \tag{3.6}$$

поклавши

$$Cy := \Big(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\Big) \quad \text{для довільного} \quad y \in (W_p^{n+r})^m.$$

Оскільки $W_p^{n+r} \subset C^{r-1}$, то Cy означено коректно для кожної вектор-функції $y \in (W_p^{n+r})^m$. А також для кожного номера $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ виконується оцінка

$$\big|y^{(k)}(a)\big| \leq \big\|y\big\|_{C^k} \leq \big\|y\big\|_{C^{r-l}} \leq c\big\|y\big\|_{n+r,p},$$

де число $c > 0$ не залежить від $y \in (W_p^{n+r})^m$. Отже, оператор (3.6) є обмеженим.

Лема 3.2. *Лінійний обмежений оператор* (L, C) *є оборотним у парі банахових просторів*

$$(L, C)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3.7}$$

Доведення проведемо спочатку для випадку $r = 1$ методом математичної індукції по $n \in \mathbb{N}$.

Маємо задачу

$$Ly(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{3.8}$$

$$y(a) = c, \tag{3.9}$$

де вектор c належить $\mathbb{C}^m$, (L, C) є лінійним неперервним оператором

$$(L, C)\colon\ (W_p^n)^m \to (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3.10}$$

Із відомих результатів функціонального аналізу випливає, що кожен розв'язок крайової задачі (3.8), (3.9) має вигляд

$$y(t) = Y(t)c + Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

Нехай $n = 1$. Оскільки однорідна задача Коші має єдиний розв'язок $y = 0$, то $\ker(L, C) = \{0\}$, тобто оператор (L, C) є ін'єктивним.

За індуктивним припущенням $A(\cdot)$ належить простору $(L_p)^{m\times m}$. Звідси випливає, що $Y(\cdot)$ належить $(W_p^1)^{m\times m}$. Тоді згідно з лемою 2.2, $Y^{-1}(\cdot)$ також належить $(W_p^1)^{m\times m}$. Тому, використовуючи факт, що простір W_p^1 утворює банахову алгебру, отримуємо, що права частина рівності (3.11) належить $(W_p^1)^m$. Отож, для довільних правих частин f та c крайової задачі (3.8), (3.9) існує розв'язок $y(t) \in (W_p^1)^m$. Робимо висновок, що оператор (L, C) є сюр'єктивним, а отже і бієктивним.

Припустимо, що висновок леми правильний для деякого номера $n = k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що її висновок правильний і для $n = k + 1$. Міркування щодо ін'єктивності оператора (L, C) аналогічні наведеним вище. Покажемо сюр'єктивність оператора (L, C). За індуктивним припущенням $A(\cdot)$ належить простору $(W_p^k)^{m\times m}$. Звідси випливає, що $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$. Тоді згідно з лемою 2.2 $Y^{-1}(\cdot)$ також належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$. Тому, використовуючи факт, що простір W_p^{k+1} утворює банахову алгебру, отримуємо, що права частина рівності (3.11) належить $(W_p^{k+1})^m$. Отож, для довільних правих частин f та c задачі (3.8), (3.9) існує розв'язок $y(t) \in (W_p^{k+1})^m$. Робимо висновок, що оператор (L, C) є сюр'єктивним, а отже і бієктивним.

Як підсумок, за теоремою Банаха про обернений оператор лінійний обмежений оператор (3.10), що бієктивно відображає банаховий простір $(W_p^n)^m$ на банаховий простір $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$, є оборотним для випадку $r = 1$.

Доведемо твердження леми для випадку $r \geq 2$. Розглянемо неоднорідну задачу Коші

$$Ly(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{3.12}$$

$$y^{(j-1)}(a) = c_j, \quad j \in \{1, \dots, r\}, \tag{3.13}$$

де вектор-функція $y(\cdot)$ є шуканою, а вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$ є довільно вибраними. Вона є окремим випадком досліджуваної задачі (3.1), (3.2).

Зведемо задачу Коші (3.12), (3.13) до наступної задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку:

$$x'(t) + K(t)x(t) = g(t), \quad t \in (a, b), \quad x(a) = c, \tag{3.14}$$

де

$$x(\cdot) := col(y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(r-1)}(\cdot)) \in (W_p^{n+r})^{rm},$$

$$g(\cdot) := col(\underbrace{0, \dots, 0}_{(r-1)m}, f(\cdot)) \in (W_p^n)^{rm},$$

$$c(\cdot) := col(c_1(\cdot), \dots, c_r(\cdot)) \in \mathbb{C}^{rm}$$

і блочну матрицю-функцію $K(\cdot) \in (W_p^n)^{rm \times rm}$ визначимо рівністю

$$K(\cdot) := \begin{pmatrix} O_m & -I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & -I_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \dots & -I_m \\ A_0(\cdot) & A_1(\cdot) & A_2(\cdot) & \dots & A_{r-1}(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Задача Коші (3.14) має єдиний розв'язок $x(\cdot)$ для довільних $g \in (W_p^n)^{rm} \subset (W_p^0)^{rm}$ і $c \in C^{rm}$. За лемою 3.1 він задовольняє умову $x \in (W_p^{n+r})^{rm}$. Отже, лінійний обмежений оператор (3.7) є бієктивним. Тому за теоремою Банаха про обернений оператор, він є оборотним і для випадку $r \geq 2$.

Лему 3.2 доведено.

Для кожного номера $k \in \{1, \ldots, r\}$ розглянемо сім'ю матричних задач Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \tag{3.16}$$

з початковими умовами

$$Y_k^{(j-1)}(a) = \delta_{k,j} I_m, \qquad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{3.17}$$

Тут $Y_k(t)$ — шукана $(m \times m)$ — матриця-функція, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, O_m — нульова, I_m — одинична $(m \times m)$ — матриці. Єдиний розв'язок $Y_k(\cdot)$ кожної з задач Коші (3.16), (3.17) належить простору $(W_p^{n+r})^{m \times m}$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (3.1) можна однозначно записати у вигляді

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) g_k,$$

де вектори-стовпці $g_k \in \mathbb{C}^m$ довільно вибрані.

Позначимо через $[BY_k(\cdot)]$ числову матрицю розмірності $(m \times l)$, у якої j-й стовпчик є результатом дії оператора B з (3.3) на j-й стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Означення 3.1. Блочна числова матриця

$$M(L, B) := ([BY_0(\cdot)], \ldots, [BY_{r-1}(\cdot)]) \in \mathbb{C}^{mr \times l}, \tag{3.18}$$

що складається з r прямокутних блоків-стовпців $[BY_k(\cdot)] \in \mathbb{C}^{m \times l}$, є характеристичною матрицею неоднорідної крайової задачі (3.1), (3.2).

Лема 3.3. *Для довільної матриці-функції* $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$, *вектора* $q \in \mathbb{C}^m$ *і лінійного неперервного оператора* $B\colon (W_p^n)^{m\times m} \times \mathbb{C}^l$ *є правильною рівність*

$$B(Y(\cdot)q) = M(L,B)q,$$

де матрицю $M(L,B)$ *визначено рівністю* (3.18).

Доведення. Нехай матриця-функція $Y(\cdot) = (y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m$, вектор-стовпчик $q = (q_j)_{j=1}^m$. Позначимо через

$$(\alpha_i)_{i=1}^l = M(L,B)q \quad \text{і} \quad (\beta_i)_{i=1}^l = B(Y(\cdot)q).$$

Нехай

$$B(y_k(\cdot))_{k=1}^m =: (c_k)_{k=1}^l.$$

Під час дії оператора B на матрицю-функцію $Y(\cdot)$, отримуємо

$$M(L,B) = (c_{ij})_{i=1}^l{}_{,j=1}^{m}.$$

Тоді справджується співвідношення

$$(\alpha_i)_{i=1}^l = (c_{ij})_{i=1}^l{}_{,j=1}^{m}\,(q_j)_{j=1}^m = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}q_j\right)_{i=1}^l.$$

Отже, довільний елемент α_i має вигляд

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}q_j, \quad i \in \{1,\dots,l\}.$$

Але мають місце наступні рівності:

$$(\beta_i)_{i=1}^l = B\left((y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m (q_j)_{j=1}^m\right) = B\left(\sum_{j=1}^m y_{ij}(\cdot)q_j\right)_{i=1}^m =$$

$$= \sum_{j=1}^m (By_{ij}(\cdot))_{i=1}^m\, q_j = \sum_{j=1}^m (c_{ij})_{i=1}^l{}_{,j=1}^{m}\, q_j = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}q_j\right)_{i=1}^l.$$

Із цього випливає, що $\alpha_i = \beta_i$, $i \in \{1,\dots,l\}$.

Лему 3.3 доведено.

3.3. Розв'язність задачі у просторах Соболєва

Запишемо неоднорідну крайову задачу (3.1), (3.2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) є лінійним оператором у парі банахових просторів

$$(L, B)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l. \tag{3.19}$$

Теорема 3.1. *Лінійний оператор* (3.19) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом $mr - l$.*

Доведення теореми 3.1. Обґрунтуємо спочатку неперервність оператора (L, B). Оскільки оператор B за умовою є лінійним і неперервним, то достатньо довести неперервність оператора L, яка еквівалентна його обмеженості. Обмеженість лінійного оператора

$$L\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m$$

випливає з означення норм у просторах Соболєва W_p^n і неперервності добутку в банахових алгебрах, які утворюють ці простори.

Доведемо фредгольмовість оператора (L, B) і знайдемо його індекс. Виберемо деякий фіксований лінійний обмежений оператор

$$C_{l,m}\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l,$$

поклавши

$$C_{l,m}y = \Big(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\Big).$$

Тут

$$y^{(l)}(a) = \Big(y_1^{(l)}(a), \ldots, y_k^{(l)}(a)\Big), \quad l \in \{0, \ldots, r-1\}.$$

Оператор (L, B) допускає зображення

$$(L, B) = (L, C_{l,m}) + (0, B - C_{l,m}),$$

де оператор

$$(L, C_{l,m})\colon \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \left(W_p^n\right)^m \times \mathbb{C}^l,$$

а другий доданок є скінченновимірним оператором. Із другої теореми стійкості (див., наприклад, [81, розд. 3, § 1]) випливає, що оператор (L, B) є фредгольмовим, якщо оператор $(L, C_{l,m})$ є таким і

$$\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(L, C_{l,m}).$$

Тому достатньо довести фредгольмовість оператора $(L, C_{l,m})$ і знайти його індекс, вибравши належним чином оператор $C_{l,m}$. Для цього розглянемо три випадки.

1. Нехай $l = mr$. Покладемо

$$C_{m,m}y := \left(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\right), \tag{3.20}$$

де

$$y^{(l)}(a) = \left(y_1^{(l)}(a), \ldots, y_m^{(l)}(a)\right), \quad l \in \{0, \ldots, r-1\}.$$

У цьому випадку оператор (3.20) є оборотним за лемою 3.2. Знайдемо нуль-простір та область значень цього оператора. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{m,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad C_{m,m}y = \big(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\big) = 0.$$

Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що $y(\cdot) = 0$, тому $\ker(L, C_{m,m}) = 0$.

Нехай $h \in (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ вибрано довільним чином. Згідно з теоремою про гомеоморфізми 2.1, існує така вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$, що

$$Ly = h, \quad \big(y(a), y'(a), \dots, y^{(r-1)}(a)\big) = c,$$

тому $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $l > mr$. Покладемо

$$C_{l,m}y = \big(y(a), y'(a), \dots, y^{(r-1)}(a)\big),$$

де

$$y^{(l)}(a) = (y_1^{(l)}(a), \dots, y_m^{(l)}(a), \underbrace{0, \dots, 0}_{l-m}) \in \mathbb{C}^l.$$

Знайдемо нуль-простір оператора $(L, C_{l,m})$. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{l,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad \left(y_1^{(l)}(a), \dots, y_m^{(l)}(a)\right) = 0.$$

Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо $y(\cdot) = 0$.

Запишемо множину значень оператора $(L, C_{l,m})$ у вигляді прямої суми двох підпросторів

$$\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = \operatorname{ran}(L, C_{m,m}) \oplus (\underbrace{0, \dots, 0}_{l-m}).$$

Але, як доведено раніше, $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$, тому

$$\operatorname{def} \operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = mr - l.$$

3. Нехай $l < mr$. Покладемо

$$C_{l,m}y := \left(y(a), y'(a), \dots, y^{(r-1)}(a)\right),$$

де

$$y^{(l)}(a) = \left(y_1^{(l)}(a), \dots, y_k^{(l)}(a)\right) \in \mathbb{C}^l.$$

Доведемо, що

$$\dim\ker(L, C_{l,m}) = mr - l,$$

$$\operatorname{def}\operatorname{ran}(L, C_{l,m}) = 0.$$

Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{l,m})$. Тоді

$$Ly = 0 \quad \text{і} \quad \left(y_1^{(l)}(a), \dots, y_k^{(l)}(a)\right) = 0.$$

Розглянемо наступні $mr - l$ задач Коші.

$$Ly_s = 0, \quad C_{m,m}y_s = e_s, \quad \text{де} \quad s \in \{k+1, k+2, \dots, mr\},$$

$$e_s := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{s}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{mr}.$$

Згідно з теоремою про гомеоморфізми 2.1 розв'язки цих задач лінійно незалежні та утворюють базис у підпросторі $\ker(L, C_{l,m})$.

Сюр'єктивність оператора $(L, C_{l,m})$ випливає із вже доведеної сюр'єктивності оператора $(L, C_{m,m})$.

Отже, в кожному з трьох випадків оператор (L, B) є фредгольмів з індексом $mr - l$.

Теорему 3.1 доведено.

Розглянемо питання про вимірності ядра і коядра оператора задачі в термінах властивостей спеціальної прямокутної числової матриці.

Теорема 3.2. *Вимірності ядра і коядра оператора* (3.19) *дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці* (3.18)

$$\dim\ker(L, B) = \dim\ker\big(M(L, B)\big), \tag{3.21}$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = \dim\operatorname{coker}\big(M(L, B)\big). \tag{3.22}$$

Доведення теореми 3.2. Покажемо справедливість рівності (3.21). Введемо для зручності такі позначення:

$$\dim\ker(L,B)=n',$$
$$\dim\ker\big(M\big(L,B\big)\big)=n''.$$

Обґрунтуємо виконання рівності

$$n'=n''. \tag{3.23}$$

Нехай $\dim\ker(L,B)=n'$. Тоді існує n' таких лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння $(L,B)y=(0,0)$, що

$$y_s(\cdot)\in\ker(L,B)\Leftrightarrow\left(\exists\, q_s\in\mathbb{C}^m\colon y_s(t)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(t)q_s,\ \sum_{k=0}^{r-1}\left[BY_k\right]q_s=0\right)$$

згідно з лемою 3.3, де вектори $q_s\neq 0$, а $s\in\{1,\ldots,n'\}$. Це означає, що $l-n'$ стовпців матриці (3.18) лінійно залежні і $n'\leq n''$.

Навпаки, нехай $\dim\ker\big(M\big(L,B\big)\big)=n''$, тоді її $l-n''$ стовпців лінійно незалежні. Це означає, що для деяких векторів $q_s\neq 0$, $s\in\{1,\ldots,n'\}$,

$$\sum_{k=0}^{r-1}\left[BY_k\right]q_s=0.$$

Покладемо

$$y_s(\cdot):=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot)q_s.$$

Тоді $y_s(\cdot)\neq 0$, $Ly_s(\cdot)=0$ і

$$By_s(\cdot)=\sum_{k=0}^{r-1}B(Y_k(\cdot)q_s)=\sum_{k=0}^{r-1}\left[BY_k\right]q_s=0$$

на підставі леми 3.3. Тому $y_s(\cdot)\in\ker(L,B)$ і $n'\geq n''$. Отже, виконується рівність (3.21).

Згідно з визначенням характеристична матриця $M(L,B)$ належить простору $\mathbb{C}^{mr\times l}$. Як відомо, вимірність ядра матриці є різницею числа її рядків і рангу, а вимірність коядра — різницею числа стовпців і рангу. Тоді для матриці $M(L,B)$ маємо рівність

$$\dim\operatorname{coker}\big(M\big(L,B\big)\big) = l - mr + \dim\ker\big(M\big(L,B\big)\big)\,. \tag{3.24}$$

Із формули знаходження індексу для оператора (L,B)

$$\operatorname{ind}(L,B) := \dim\ker(L,B) - \dim\operatorname{coker}(L,B) \tag{3.25}$$

маємо

$$\dim\operatorname{coker}(L,B) = l - mr + \dim\ker(L,B). \tag{3.26}$$

Із рівностей (3.23), (3.24) і (3.26) робимо висновок про справедливість рівності (3.22).

Теорему 3.2 доведено.

Із теореми 3.2 випливає критерій оборотності оператора (L,B), тобто умови, за якої неоднорідна крайова задача (3.1), (3.2) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Наслідок 3.1. *Оператор* (3.19) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $l = mr$ *і матриця* $M(L,B)$ *є невиродженою.*

У випадку $l = mr$, $p < \infty$, наслідок 3.1 встановлено у роботі [68].

3.4. Неперервність розв'язків за параметром

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо на інтервалі (a, b) лінійну крайову задачу для системи m звичайних диференціальних рівнянь порядку r вигляду (3.1), (3.2), залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{3.27}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \quad t \in (a,b). \tag{3.28}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$ належать простору $(W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon)$ — простору $(W_p^n)^m$, вектор $c(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^{rm}$, $B(\varepsilon)$ є лінійним неперервним оператором

$$B(\varepsilon)\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.29}$$

Під розв'язком крайової задачі (3.27), (3.28) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє рівняння (3.27) (при $n \geq 1$ скрізь, а при $n = 0$ майже скрізь) на (a, b), та рівність (3.28), яка задає m скалярних умов. Розв'язки рівняння (3.27) заповнюють простір $(W_p^{n+r})^m$, коли його права частина $f(\cdot,\varepsilon)$ пробігає простір $(W_p^n)^m$. Тому крайова умова (3.28) є найбільш загальною для цього рівняння.

Запишемо крайову задачу (3.27), (3.28) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))y(\varepsilon) = (f(\varepsilon), c(\varepsilon)),$$

де $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.30}$$

Згідно з теоремою 3.1 оператор (3.30) є обмеженим фредгольмовим оператором з індексом нуль.

Для того щоб досліджувана задача мала зміст, надалі будемо вважати, що виконується **умова (3.0).** *Гранична однорідна крайова задача вигляду* (3.27), (3.28)

$$L(0)y(t;0) = 0, \quad t \in (a,b), \quad B(0)y(\cdot;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

У цьому випадку відповідна гранична неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок.

Також розглянемо наступні **граничні умови** при $\varepsilon \to 0+$:

(3.I) $A_{r-j}(\cdot;\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot;0)$ у просторі $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1,\ldots,r\}$;

(3.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Означення 3.2. Розв'язок крайової задачі (3.27), (3.28) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються умови:

($*$) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, довільних правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$, який належить простору $(W_p^{n+r})^m$;

($**$) зі збіжності правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ у $(W_p^n)^m$ і $c(\varepsilon) \to c(0)$ у $\mathbb{C}^{rm}$ випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y = y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (3.27), (3.28) за параметром ε при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 3.3. *Розв'язок крайової задачі* (3.27), (3.28) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (3.0) *та граничні умови* (3.I), (3.II).

Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва W_p^{n+r}, де $1 \leq p < \infty$, ця теорема сформульована і доведена Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [79].

Доведення теореми 3.3 подамо у наступних пп. 3.5 (необхідність) і 3.6 (достатність).

3.5. Доведення критерію. Необхідність

Обґрунтуємо необхідність у теоремі 3.3. Припустимо, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє означення 3.2. Тоді виконується умова (3.0). Залишилося показати, що для цієї задачі справедливими є умови (3.I) і (3.II). Проведемо міркування у три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє граничну умову (3.I). Зведемо цю задачу до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку (див., наприклад, [17, п. 2.5]). Для цього, як звичайно, покладемо

$$x(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(y(\cdot,\varepsilon), y'(\cdot,\varepsilon), \ldots, y^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (W_p^{n+r})^{rm}, \tag{3.31}$$

$$g(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(\underbrace{0,\ldots,0}_{(r-1)m}, f(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (W_p^{n})^{rm},$$

$$c(\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(c_1(\varepsilon), \ldots, c_r(\varepsilon)\bigr) \in \mathbb{C}^{rm},$$

а блочну матрицю-функцію $K(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^{rm\times rm}$ визначимо рівністю

$$K(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & -I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & -I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & -I_m \\ A_0(\cdot,\varepsilon) & A_1(\cdot,\varepsilon) & A_2(\cdot,\varepsilon) & \ldots & A_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ є розв'язком системи (3.27) тоді і лише тоді, коли вектор-функція (3.31) є розв'язком системи

$$x'(t,\varepsilon) + K(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b).$$

Позначимо через

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] := \left(\left[B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\right], \ldots, \left[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\right]\right) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$$

блочну числову матрицю розмірності $rm \times m$. Вона складається з r квадратних блоків-стовпців $[B(\varepsilon)Y_l(\cdot,\varepsilon)] \in \mathbb{C}^{m\times m}$, у яких j-й стовпчик матриці $[B(\varepsilon)Y_l(\cdot,\varepsilon)]$ є результатом дії оператора $B(\varepsilon)$ з (3.29) на j-й стовпчик матриці-функції $Y_l(\cdot,\varepsilon)$.

Розглянемо таку матричну крайову задачу:

$$Y_l^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) Y_l^{(r-j)}(t,\varepsilon) = O_{m\times rm}, \quad t \in (a,b),$$

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] = I_{rm}. \tag{3.32}$$

Тут

$$Y_l(\cdot,\varepsilon) := \Big(y_l^{j,k}(\cdot,\varepsilon) \Big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,rm}}$$

є шуканою $m \times rm$ — матрицею-функцією з простору $(W_p^{n+r})^{m\times rm}$, $O_{m\times rm}$ — нульовою, I_{rm} — одиничною матрицями. Ця задача є сукупністю rm крайових задач (3.27), (3.28), праві частини яких не залежать від ε.

За умови $(*)$ означення 3.2 ця задача має єдиний розв'язок $Y(\cdot;\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$. Більше того, враховуючи умову $(**)$ цього означення, маємо наступну збіжність

$$y_{j,k}(\cdot,\varepsilon) \to y_{j,k}(\cdot,0) \quad \text{в} \quad W_p^{n+r} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.33}$$

Для будь-яких $k \in \{1,\ldots,rm\}$ і $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ означимо вектор-функцію $x_k(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^{rm}$ за формулою (3.31). У цій вектор-функції замінимо $x(\cdot;\varepsilon)$ на $x_k(\cdot,\varepsilon)$ і візьмемо

$$y(\cdot;\varepsilon) := \mathrm{col}(y_{1,k}(\cdot;\varepsilon),\ldots,y_{m,k}(\cdot;\varepsilon)).$$

Нехай $X(\cdot;\varepsilon)$ позначає таку матрицю-функцію з простору $(W_p^{n+r})^{rm\times rm}$, що $x_k(\cdot,\varepsilon)$ — її k-й стовпець для кожного $k \in \{1,\ldots,rm\}$. Дана функція задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$X'(t,\varepsilon) + K(t,\varepsilon)X(t,\varepsilon) = O_{rm}, \quad t \in (a,b). \tag{3.34}$$

Крім того, $\det X(t;\varepsilon) \neq 0$ для кожного $t \in [a,b]$, оскільки інакше стовпці матриці-функції $X(\cdot;\varepsilon)$ і, отже, сама $Y(\cdot;\varepsilon)$ будуть лінійно залежними на $[a,b]$. Але в такому разі це суперечитиме крайовій умові (3.32). Завдяки (3.33) отримаємо збіжність $X(\cdot;\varepsilon) \to X(\cdot;0)$ на банаховій алгебрі $(W_p^{n+r})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, $\bigl(X(\cdot;\varepsilon)\bigr)^{-1} \to \bigl(X(\cdot;0)\bigr)^{-1}$ у цій алгебрі. Тому, враховуючи (3.34), робимо висновок, що

$$K(\cdot;\varepsilon) = -X'(\cdot;\varepsilon)\bigl(X(\cdot;\varepsilon)\bigr)^{-1} \to -X'(\cdot;0)\bigl(X(\cdot;0)\bigr)^{-1} = K(\cdot;0)$$

у просторі $(W_p^n)^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тобто задача (3.27), (3.28) задовольняє граничну умову (3.I). Зокрема, для кожного $j \in \{1,\ldots,r\}$

$$\bigl\|A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)\bigr\|_{n,p} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{3.35}$$

Крок 2. Покажемо, що виконується умова (3.II). Для цього спочатку доведемо співвідношення

$$\|B(\varepsilon)\| = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+, \tag{3.36}$$

де $\|\cdot\|$ позначає норму оператора (3.29).

Припустимо супротивне; тоді існує така числова послідовність $\bigl(\varepsilon^{(k)}\bigr)_{k=1}^{\infty} \subset (0,\varepsilon_1)$, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad 0 < \Bigl\|B\bigl(\varepsilon^{(k)}\bigr)\Bigr\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.37}$$

При цьому можна вважати, що $\bigl\|B\bigl(\varepsilon^{(k)}\bigr)\bigr\| \neq 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Для кожного номера $k \in \mathbb{N}$ виберемо вектор-функцію $\omega_k \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє умови

$$\|\omega_k\|_{n+r,p} = 1 \quad \text{і} \quad \bigl\|B\bigl(\varepsilon^{(k)}\bigr)\omega_k\bigr\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\bigl\|B\bigl(\varepsilon^{(k)}\bigr)\bigr\|. \tag{3.38}$$

Покладемо

$$y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) := \big\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\big\|^{-1}\omega_k \in (W_p^{n+r})^m,$$
$$f\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) := L\big(\varepsilon^{(k)}\big)\, y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) \in (W_p^{n})^m,$$
$$c\big(\varepsilon^{(k)}\big) := B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\, y\big(\cdot;\varepsilon^{(k)}\big) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Враховуючи співвідношення (3.37) і (3.38), маємо

$$y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0 \ \text{ в } \ (W_p^{n+r})^m \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{3.39}$$

Тому має місце збіжність

$$f\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0 \ \text{ в } \ (W_p^{n})^m \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{3.40}$$

оскільки крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє граничну умову (3.I), як було показано на кроці 1.

Через те, що скінченновимірний простір $\mathbb{C}^{rm}$ є локально компактним, то, враховуючи умови (3.38), виконуються наступні нерівності:

$$1/2 \leq \left\|c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq 1.$$

Дійсно, справджуються співвідношення

$$\left\|c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\| \left\|y\left(\cdot,\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{n+r,p} =$$
$$= \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\| \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|^{-1} \|\omega_k\|_{n+r,p} = 1$$

і

$$\left\|c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{\mathbb{C}^{rm}} = \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\left(\left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|^{-1}\omega_k\right)\right\| =$$
$$= \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|^{-1} \left\|B\left(\varepsilon^{(k)}\right)\omega_k\right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Тому існують такі підпослідовність

$$\left(c\left(\varepsilon^{(k_s)}\right)\right)_{p=1}^{\infty} \subset \left(c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$$

і ненульовий вектор $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$, що

$$c\left(\varepsilon^{(k_s)}\right) \to c(0) \text{ в } \mathbb{C}^{rm} \text{ при } s \to \infty. \tag{3.41}$$

Отож, для кожного номера $s \in \mathbb{N}$ вектор-функція $y\left(\cdot; \varepsilon^{(k_s)}\right) \in (W_p^{n+r})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L\left(\varepsilon^{(k_s)}\right) y\left(t; \varepsilon^{(k_s)}\right) = f\left(t; \varepsilon^{(k_s)}\right), \quad t \in (a, b),$$
$$B\left(\varepsilon^{(k_s)}\right) y\left(\cdot; \varepsilon^{(k_s)}\right) = c\left(\varepsilon^{(k_s)}\right).$$

Тоді на підставі формул (3.40) і (3.41) та умови (∗∗) означення 3.2 робимо висновок, що функція $y\left(\cdot; \varepsilon^{(k_s)}\right)$ при $k \to \infty$ збігається у просторі $(W_p^{n+r})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot; 0)$ граничної крайової задачі

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad t \in (a, b),$$
$$B(0)y(\cdot; 0) = c(0). \tag{3.42}$$

Отже, згідно з формулою (3.39) справедлива тотожність $y(\cdot; 0) \equiv 0$. Але дана еквівалентність суперечить крайовій умові (3.42), де $c(0) \neq 0$. З огляду на це зроблене припущення є хибним, чим і доведено властивість (3.36).

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (3.II). На підставі формул (3.35), (3.36) існують такі числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_1)$, що

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma' \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon'). \tag{3.43}$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора (3.30). Виберемо вектор-функцію $y \in (W_p^{n+r})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot; \varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$. Тоді

$$y = (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot; \varepsilon), c(\cdot; \varepsilon)) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon'). \tag{3.44}$$

Тут $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ позначає оператор, обернений до (3.30); він є оборотним за умовою (∗) означення 3.2.

Застосовуючи формули (3.43) і (3.44), отримаємо такі співвідношення для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$:

$$\begin{aligned}
\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^{rm}} \le \big\|(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big\|_{(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \\
= \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big\|_{(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}} \le \\
\le \gamma' \, \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big)\big\|_{n+r,p} = \\
= \gamma' \, \big\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;0), c(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;0), c(0))\big\|_{n+r,p}.
\end{aligned}$$

Остання норма прямує до нуля при $\varepsilon \to 0+$ на підставі умови $(**)$ означення 3.2. Оскільки

$$\|B(\varepsilon)\| = O(1) \quad \text{i} \quad \big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^{rm}} \to 0,$$

то маємо збіжність $B(\varepsilon)y$ до $B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$. Отже, крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє граничну умову (3.II).

Необхідність доведено.

3.6. Доведення критерію. Достатність

Обґрунтуємо достатність у теоремі 3.3. Припустимо, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє умову (3.0) і граничні умови (3.I), (3.II). Покажемо, що роз'язок цієї задачі неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$. Міркування проведемо у чотири кроки.

Крок 1 є підготовчим. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ розглянемо наступну задачу Коші:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{3.45}$$

$$\hat{y}^{(j-1)}(a,\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in \{1,\dots,r\}. \tag{3.46}$$

Тут для кожного ε довільно задано вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$ і вектори $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$. Згідно з лемою (2.1) єдиний розв'язок $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$ цієї задачі належить простору $(W_p^{n+r})^m$.

Покажемо, що зі збіжності правих частин

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \quad \text{у} \quad (W_p^n)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+, \tag{3.47}$$

$$c_j(\varepsilon) \to c_j(0) \ \text{ у } \ \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \text{для кожного } \ j \in \{1,\dots,r\} \tag{3.48}$$

цієї задачі випливає збіжність її розв'язків

$$\hat{y}(\cdot,\varepsilon) \to \hat{y}(\cdot,0) \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.49}$$

Зведемо задачу Коші (3.45), (3.46) до наступної задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$x'(t,\varepsilon) + K(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{3.50}$$

$$x(a,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{3.51}$$

Тут матриця-функція $K(\cdot,\varepsilon)$ і вектор-функція $g(\cdot,\varepsilon)$ такі ж як і на кроці 1 доведення необхідності. Крім того, маємо

$$x(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\left(\hat{y}(\cdot,\varepsilon), \hat{y}'(\cdot,\varepsilon), \ldots, \hat{y}^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\right) \in (W_p^{n+r})^{rm}$$

$$c(\varepsilon) := \mathrm{col}\,(c(\varepsilon), \ldots, c_r(\varepsilon)) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Оскільки, за припущенням, крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє умову (3.I), то

$$K(\cdot,\varepsilon) \to K(\cdot,0) \quad \text{у} \quad (W_p^n)^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Із умов (3.47) і (3.48) випливає збіжність правих частин задачі (3.50), (3.51)

$$g(\cdot,\varepsilon) \to g(\cdot,0) \quad \text{у} \quad (W_p^n)^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,$$

$$c(\varepsilon) \to c(0) \ \text{ у } \ \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Тому на підставі теореми 2.6, з умов (3.47) і (3.48) маємо збіжність (3.49).

Крок 2. Доведемо, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє умову $(*)$ означення 3.2, тобто для малих $\varepsilon \geq 0$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним.

Розглянемо для довільних $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ і $k \in \{0,\ldots,r-1\}$ матричну задачу Коші

$$Y_k^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) Y_k^{(r-j)}(t,\varepsilon) = O_m, \quad t \in (a,b),$$

з початковими умовами

$$Y_k^{(j)}(t_0,\varepsilon) = \delta_{k,j} I_m, \quad j \in \{1,\ldots,r-1\}.$$

У цій задачі

$$Y_k(t,\varepsilon) = \left(y_k^{\alpha,\beta}(t,\varepsilon)\right)_{\alpha,\beta=1}^{m}$$

є шуканою $m\times m$ матрицею-функцією, точка $t_0 \in [a,b]$ — фіксованою, $\delta_{k,j}$ — символом Кронекера, O_m — нульовою, I_m — одиничною $m\times m$ — матрицями. Дана задача складається з m задач Коші вигляду (3.45), (3.46) з $f = 0$ відносно вектор-функцій $\hat{y}(\cdot,\varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot,\varepsilon)$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (3.27) має такий вигляд:

$$y(\cdot,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon), \tag{3.52}$$

де вектор-стовпці $q_k(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}$ є довільними [17, розд. 2, п. 2.5].

Оскільки праві частини цієї задачі не залежать від ε, то

$$Y_l(\cdot,\varepsilon)\to Y_l(\cdot,0)\quad \text{у}\quad (W_p^{n+r})^{m\times m}\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+ \tag{3.53}$$

згідно з кроком 1. Оскільки крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє за припущенням граничну умову (3.II), то маємо таку збіжність блочних числових прямокутних матриць:

$$\begin{gathered}\big([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)],\ldots,[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big)\to\\ \to\big([B(0)Y_0(\cdot,\varepsilon)],\ldots,[B(0)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big)\quad \text{в}\quad \mathbb{C}^{rm\times rm}\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+.\end{gathered} \tag{3.54}$$

Згідно з припущенням про те, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє умову (3.0) і на підставі леми 2.7, гранична матриця є невиродженою. Тоді існує таке додатне число $\varepsilon_1<\varepsilon_0$, що для довільного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$

$$\det\big(M(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\big)\neq 0. \tag{3.55}$$

Отже, згідно з лемою 2.7 оператор (3.30) є оборотним для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$.

Крок 3. Покажемо, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє умову $(**)$ означення 3.2. Дослідимо спочатку випадок $f(\cdot,\varepsilon)\equiv 0$.

Розглянемо залежну від параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon)\equiv 0, \tag{3.56}$$

$$B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon)=c(\varepsilon). \tag{3.57}$$

Згідно з кроком 2 вона має єдиний розв'язок $v(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^{n+r})^m$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$, де ε_1 достатньо мале додатне число. Припустимо, що

$$c(\varepsilon)\to c(0)\quad \text{в}\quad \mathbb{C}^{rm}\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+. \tag{3.58}$$

Треба показати, що

$$v(\cdot,\varepsilon) \to v(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.59}$$

Запишемо для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (3.56) у вигляді (3.52), тобто

$$v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon) q_k(\varepsilon). \tag{3.60}$$

Тут вектор-стовпці $q_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільними, а кожна матриця-функція $Y_k(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^{m\times m}$ така як і на кроці 2. Згідно з лемою 2.3 справджуються рівності

$$B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B(\varepsilon)(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{r-1} \left[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\right] q_k(\varepsilon).$$

Тому крайова умова (3.57) еквівалентна рівності

$$\sum_{k=0}^{r-1} \left[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\right] q_k(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Останню умову можна записати у вигляді наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\big(\left[B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\right],\ldots,\left[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\right]\big)q(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Тобто

$$\left[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)\right] q(\varepsilon) = c(\varepsilon)$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon) := \operatorname{col}(q_0(\varepsilon),\ldots,q_{r-1}(\varepsilon))$. На підставі (3.54), (3.55) і припущення (3.58) маємо збіжність

$$q(\varepsilon)\left[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)\right]^{-1} c(\varepsilon) \to \left[B(0)Y(\cdot,0)\right]^{-1} c(0) = q(0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Як підсумок, з формул (3.53), (3.60) випливає потрібна збіжність (3.59)

$$v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon) \to \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,0)q_k(0) = v(\cdot,0)$$

у просторі $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 4. Перейдемо до загального випадку неоднорідного диференціального рівняння (3.27). Припустимо, що виконуються умови (3.58) і

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^n)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.61}$$

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ покладемо

$$z(\cdot; \varepsilon) = y(\cdot; \varepsilon) - \hat{y}(\cdot; \varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot; \varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (3.45), (3.46), а вектор-функція $\hat{y}(\cdot; \varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші (3.45), (3.46), де всі $c_j(\varepsilon) \equiv 0$. У цьому разі $z(\cdot; \varepsilon)$ є розв'язком наступної напіводнорідної крайової задачі:

$$L(\varepsilon) z(\cdot, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$B(\varepsilon) z(\cdot, \varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon),$$

$$\tilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon) - B(\varepsilon)\hat{y}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^m.$$

На кроці 1 було показано, що $\hat{y}(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє властивість (3.49), за умови (3.61). На підставі цієї властивості і припущень про те, що крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє граничні умови (3.I) і (3.58), маємо збіжність

$$\tilde{c}(\varepsilon) \to \tilde{c}(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тому згідно з кроком 3 робимо висновок, що

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Звідси та з формули (3.49) отримуємо потрібну збіжність

$$y(\cdot, \varepsilon) = \hat{y}(\cdot, \varepsilon) + z(\cdot, \varepsilon) \to \hat{y}(\cdot, 0) + z(\cdot, 0) = y(\cdot, 0)$$
$$\text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Достатність доведено.

3.7. Оцінка швидкості збіжності розв'язків за параметром

Перейдемо до дослідження швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (3.27), (3.28) при $\varepsilon \to 0+$.

Розглянемо такі величини:

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n+r,p}, \tag{3.62}$$

$$\widetilde{d}_{n,p}(\varepsilon) := \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^{rm}}, \tag{3.63}$$

де (3.62) є похибкою, а (3.63) — нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (3.27), (3.28), якщо $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;0)$ — як наближений.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (3.27), (3.28) *задовольняє умову* (3.0) *та граничні умови* (3.I) *і* (3.II). *Тоді існують такі додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1\, \widetilde{d}_{n,p}(\varepsilon) \leq \big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n+r,p} \leq \gamma_2\, \widetilde{d}_{n,p}(\varepsilon), \tag{3.64}$$

де числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;0)$ *і* $y(\cdot;\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (3.27), (3.28) мають однаковий порядок малості.

Доведення теореми 3.4. Спочатку покажемо, що має місце ліва частина оцінки (3.64). Із граничних умов (3.I) і (3.II) випливає сильна збіжність операторів

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Тому існують такі числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, що норма цього оператора задовольняє нерівність (3.43). Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти наступну послідовність додатних чисел $\left(\varepsilon^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$:

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad \left\| \left(L\left(\varepsilon^{(k)}\right), B\left(\varepsilon^{(k)}\right) \right) \right\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Але за теоремою Банаха – Штейнгауза це суперечить сильній збіжності

$$\left(L\left(\varepsilon^{(k)}\right), B\left(\varepsilon^{(k)}\right) \right) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тепер на підставі нерівності (3.43) робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_{n,p}(\varepsilon) = \left\| L(\varepsilon)y(\cdot;0) - L(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{n,p} + \left\| B(\varepsilon)y(\cdot;0) - B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq \\ \leq \left\| L(\varepsilon) \right\| \left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{n+r,p} + \left\| B(\varepsilon) \right\| \left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{n+r,p} \leq \\ \leq \gamma' \left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{n+r,p} \end{aligned}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$. Отримали ліву частину двобічної оцінки (3.64), де $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину цієї оцінки. Згідно з теоремою 3.3 крайова задача (3.27), (3.28) задовольняє означення 3.2. Тому оператор (3.30) є оборотним для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$. Більше того, оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$, обернений до (3.30), збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (W_p^n)^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ за умовою (**) означення 3.2 маємо збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, c) =: y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, c)$$

у просторі $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Отже, за теоремою Банаха – Штейнгауза існують такі додатні числа ε_2 і γ_2, що норма оберненого оператора

$$\left\| (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \right\| \leq \gamma_2 \quad \text{для кожного} \quad \gamma \in [0, \varepsilon_2).$$

Отож, для довільного числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ справджуються співвідношення

$$\big\| y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon) \big\|_{n+r,p} =$$
$$= \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))\|_{n+r,p} \leq$$
$$\leq \gamma_2 \, \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))\|_{(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \gamma_2 \, \widetilde{d}_{n,p}(\varepsilon).$$

Отримали праву частину двобічної оцінки (3.64).

Теорему 3.4 доведено.

3.8. Збіжність послідовності характеристичних матриць задач

Поряд із задачею (3.1), (3.2) розглянемо послідовність неоднорідних крайових задач

$$L(k)y(t,k) := y^{(r)}(t,k) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,k)y^{(r-j)}(t,k) = f(t,k), \tag{3.65}$$

$$B(k)y(\cdot,k) = c(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in (a,b), \tag{3.66}$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,k)$, вектор-функція $f(\cdot,k)$, вектор $c(k)$ і лінійний неперервний оператор $B(k)$ задовольняють наведеним у п. 3.1 умовам для задачі (3.1), (3.2).

Із крайовими задачами (3.65), (3.66) пов'яжемо послідовність лінійних неперервних операторів

$$(L(k), B(k)) \colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l \tag{3.67}$$

і послідовність характеристичних матриць, залежних від параметра $k \in \mathbb{N}$,

$$M\big(L(k), B(k)\big) := \big(\left[B(k)Y_0(\cdot,(k))\right], \ldots, \left[B(k)Y_{r-1}(\cdot,(k))\right]\big) \subset \mathbb{C}^{mr\times l}.$$

Позначимо через

$$(L(k), B(k)) \xrightarrow{s} (L, B) \tag{3.68}$$

сильну збіжність послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B).

Сформулюємо достатню умову збіжності послідовності характеристичних матриць $M\left(L(k), B(k)\right)$ до матриці $M\left(L, B\right)$ при $k \to \infty$

$$M\left(L(k), B(k)\right) \to M\left(L, B\right). \tag{3.69}$$

Теорема 3.5. *Якщо послідовність операторів $\big(L(k), B(k)\big)$ сильно збігається до оператора $\big(L, B\big)$ при $k \to \infty$, то послідовність характеристичних матриць $M\big(L(k), B(k)\big)$ збігається до матриці $M\big(L, B\big)$.*

Доведення теореми 3.5 розділимо на три частини.

Крок 1. Нехай $k, j \in \{1, \ldots, r\}$. Зведемо матричну задачу Коші (3.16), (3.17) до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку (див., наприклад, [81, п. 2.5]). Для цього, як звичайно, блочну матрицю-функцію $K(\cdot) \in (W_p^n)^{rm\times rm}$ визначимо рівністю (3.15) і для будь-яких k вектор-функцію $Z_k \in (W_p^n)^{rm\times m}$ визначимо такою формулою:

$$Z_k(\cdot) := col\,(Z_{k1}, Z_{k2}, \ldots, Z_{kr})\,.$$

Тоді Z_k є розв'язком матричної задачі Коші

$$Z_k'(t) + K(t)Z_k(t) = O_{rm\times m}, \quad t \in (a, b),$$

$$Z_k(t_0) = J_k = col\left(O_m, \ldots, O_m, \underbrace{I_m}_{k}, O_m, \ldots, O_m\right).$$

Нехай $\hat{Z}(\cdot)$ позначає таку матрицю-функцію з простору $(W_p^n)^{rm\times rm}$, що $Z_k(\cdot)$ — її k-й стовпець для кожного k. Ця функція задовольняє наступну матричну задачу Коші першого порядку:

$$\hat{Z}'(t) + K(t)\hat{Z}(t) = O_{rm\times rm}, \quad t \in (a, b), \tag{3.70}$$

$$\hat{Z}(t_0) = I_{rm}. \tag{3.71}$$

Із наведених міркувань випливає

Лема 3.4. *Розв'язки* $Y_k(\cdot)$ *задачі* (3.16), (3.17) *пов'язані з розв'язком* $\hat{Z}$ *задачі* (3.70), (3.71) *наступним чином:*

$$Y_k = Z_{k1}.$$

Крок 2. Для крайової задачі (3.65), (3.66) розглянемо **граничні умови** при $k \to \infty$:

(3.I$'$) $A_{r-j}(\cdot, k) \to A_{r-j}(\cdot)$ у просторі $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, r\}$;

(3.II$'$) $B(k)y \to By$ у просторі $\mathbb{C}^l$ для довільної вектор-функції $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Також розглянемо ще дві умови:

(A_1) $\|L(k) - L\| \to 0$;

(A_2) $L(k)y \to Ly$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Лема 3.5. *Граничні умови (3.I$'$), (3.II$'$) є еквівалентними умові* (3.68).

Доведення. Достатньо показати виконання імплікацій при $k \to \infty$

$$(3.I') \Longrightarrow (A_1) \Longrightarrow (A_2) \Longrightarrow (3.I').$$

Спочатку обґрунтуємо першу імплікацію. Припустимо, що виконується збіжність

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) \right\|_{n,p} \to 0.$$

Для довільної вектор-функції $y \in (W_p^{n+r})^m$ маємо

$$\left\|(L(k) - L)y\right\|_{n,p} = \left\| \left(\sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) \right) y \right\|_{n,p} \leq$$

$$\leq c_{n,p} \left\| \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) \right\|_{n,p} \|y\|_{n,p} \leq$$

$$\leq c_{n+r,p} \left\| \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) \right\|_{n,p} \|y\|_{n+r,p}.$$

Тут $c_{n,p}$ і $c_{n+r,p}$ — деякі додатні числа, що не залежить від y; вони існують, оскільки W_p^{n+r} є банаховою алгеброю. Тому при $k \to 0+$

$$\|L(k) - L\| \leq c_{n,p} \left\| \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot) \right\|_{n,p} \to 0,$$

де $\| \cdot \|$ позначає норму лінійного неперервного оператора на парі просторів

$$L(k)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m.$$

Першу імплікацію доведено. Імплікація $(A_1) \Longrightarrow (A_2)$ є очевидною. Доведемо, що з умови (A_2) випливає гранична умова (3.I$'$). Покажемо справедливість цього факту спочатку для скалярного випадку $m = 1$. Маємо

$$L(k)y = y^{(r)} + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k)y^{(r-j)} \to y^{(r)} + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot)y^{(r-j)} = Ly. \qquad (3.72)$$

Покладемо $y(t) \equiv 1$ і підставимо у співвідношення (3.72). Тоді має місце збіжність коефіцієнтів

$$A_0(\cdot, k) \to A_0(\cdot) \quad \text{у} \quad W_p^{n+r}. \qquad (3.73)$$

Покладемо тепер $y(t) \equiv t$ і підставимо у співвідношення (3.72). Тоді, враховуючи умову (3.73), справджується збіжність коефіцієнтів

$$A_1(\cdot, k) + A_0(\cdot, k)t \to A_1(\cdot) + A_0(\cdot)t \quad \text{у} \quad W_p^{n+r}.$$

Продовжуючи послідовно цей процес до r-го кроку, переконуємося у виконанні умови (A_2) для скалярного випадку $m = 1$.

Нехай $m \geq 2$. Оскільки сильна збіжність на вектор-функціях $y(\cdot)$ еквівалентна сильній збіжності на квадратних матрицях $Y \in (W_p^{n+r})^{m \times m}$, то маємо

$$L(k)Y = Y^{(r)} + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot, k)Y^{(r-j)} \to$$
$$\to Y^{(r)} + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(\cdot)Y^{(r-j)} = Ly. \qquad (3.74)$$

Покладемо $Y = I_m$, де I_m — одинична $m \times m$ — матриця, та послідовно підставлятимемо матриці у співвідношення (3.8). Тоді має місце наступна збіжність коефіцієнтів

$$A_0(\cdot, k) \to A_0(\cdot) \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^{m \times m}. \qquad (3.75)$$

Покладемо $Y \equiv tI_m$ і підставимо у співвідношення (3.8). Тоді, враховуючи умову (3.75), справджується збіжність коефіцієнтів

$$A_1(\cdot, k) + A_0(\cdot, k)t \to A_1(\cdot) + A_0(\cdot)t \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^{m \times m}.$$

Продовжуючи послідовно цей процес до r-го кроку, переконуємось у виконанні умови (A_2) для випадку $m \geq 2$. Отже, справджується імплікація $(A_2) \Longrightarrow (3.\mathrm{I}')$.

Лему 3.5 доведено.

Крок 3. Для кожного номера $k \in \{1, \ldots, r\}$ позначимо через матриці-функції $Y_s(\cdot, k) \in (W_p^{n+r})^{m\times m}$ відповідно розв'язки сім'ї матричних задач Коші

$$Y_s^{(r)}(t,k) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,k) Y_s^{(r-j)}(t,k) = O_m, \quad t \in (a,b),$$
$$Y_s^{(j-1)}(t_0) = \delta_{s,j} I_m, \quad j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Лема 3.6. *Якщо виконується гранична умова (3.I′), то послідовність матриць-функцій $Y_s^{(r)}(\cdot, k)$ збігається до матриці $Y_s^{(r)}(\cdot)$ для кожного $s \in \{1, \ldots, r\}$ у просторі $(W_p^{n+r})^{m\times m}$*

$$(3.I') \Longrightarrow Y_s^{(r)}(\cdot, k) \to Y_s^{(r)}(\cdot).$$

Доведення леми випливає з леми 3.4 і теореми про гомеоморфізми 2.1.

Теорему 3.5 доведено.

У випадку $1 \leq p < \infty$, враховуючи однозначне аналітичне зображення оператора B в (2.4), сформулюємо конструктивний критерій, який гарантує сильну збіжність послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B).

Запишемо для кожного $k \to \infty$ оператор $B(k)$ у вигляді (2.4), де

$$\alpha_s = \alpha_s(k), \quad \Phi(t) = \Phi(t,k).$$

Теорема 3.6. *Умова* (3.68) *є еквівалентною таким умовам при $k \to \infty$:*

(A_1) $\|L(k) - L\| \to 0$*;*

(A_2) $L(k)y \to Ly$ *для кожного значення* $y \in (W_p^{n+r})^m$*;*

а) $\alpha_s(k) \to \alpha_s$ *в* $\mathbb{C}^{l\times m}$ *для кожного* $s \in \{0,\ldots,n-1\}$*;*

б) $\|\Phi(\cdot,k)\|_q = O(1)$*;*

в) $\int\limits_a^t \Phi(\tau,k)d\tau \to \int\limits_a^t \Phi(\tau)d\tau$ *в* $\mathbb{C}^{l\times m}$ *для кожного* $t \in (a,b]$*.*

Доведення теореми 3.6. Згідно з лемою 3.5 сильна збіжність операторів є еквівалентною граничним умовам (3.I′), (3.II′). Тому для доведення теореми 3.6 достатньо показати, що граничні умови (3.I′), (3.II′) є еквівалентними умовам (A_1), (A_2), *(а), (б)* і *(в)* при $k \to \infty$. Із леми 3.5 випливає, що гранична умова (I) є еквівалентною умовам (A_1) і (A_2) при $k \to \infty$. Отже, залишилося переконатися у справедливості наступного твердження.

Лема 3.7. *Умова (3.II′) є еквівалентною умовам (а), (б) і (в) при* $k \to \infty$*.*

Зауважимо, що твердження леми 3.7 є справедливим у просторі W_p^{n+r}, де $1 \le p < \infty$.

Доведення. Нехай виконуються умови *(а), (б)* і *(в)*. Тоді, очевидно, справедлива гранична умова (3.II′), тобто справджується збіжність

$$B(k)y = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s(k) y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t,k) y^{(n)}(t)\mathrm{d}t \to \tag{3.76}$$
$$\to \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t) y^{(n)}(t)\mathrm{d}t = By.$$

Доведемо, що з граничної умови (3.II′) випливає виконання умов *(а), (б)* і *(в)*. Оскільки сильна збіжність на вектор-функціях $y(\cdot)$ еквівалентна сильній збіжності на квадратних матрицях $Y \in (W_p^{n+r})^{m\times m}$, то маємо

$$B(k)Y = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s(k)Y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t,k)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t \to \tag{3.77}$$
$$\to \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s Y^{(s)}(a) + \int_a^b \Phi(t)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t = BY.$$

Покладемо $Y = I_m$ і послідовно підставлятимемо матриці у співвідношення (3.77). Тоді має місце збіжність

$$\alpha_0(\cdot,k) \to \alpha_0(\cdot) \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^{m\times m}. \tag{3.78}$$

Покладемо $Y \equiv tI_m$ і підставимо у (3.77). Тоді, враховуючи умову (3.78), справджується збіжність

$$\alpha_1(\cdot,k) + \alpha_0(\cdot,k)t \to \alpha_1(\cdot) + \alpha_0(\cdot)t \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^{m\times m}.$$

Продовжуючи послідовно цей процес до n-го кроку, переконуємось у виконанні умови *(а)*.

Покажемо справедливість умов *(б)* і *(в)* спочатку для скалярного випадку $m = 1$. Із (3.76), враховуючи умову *(а)*, випливає збіжність

$$\int_a^b \Phi(t,k)y^{(n)}(t)\mathrm{d}t \to \int_a^b \Phi(t)y^{(n)}(t)\mathrm{d}t, \quad y(\cdot) \in W_p^n. \tag{3.79}$$

Оскільки $y(\cdot)$ належить простору W_p^n, то $y^{(n)}(\cdot) \in L_p$. Більше того, якщо $y(\cdot)$ пробігає весь простір W_p^n, то $y^{(n)}(\cdot)$ — весь простір L_p. Тому матриці $\Phi(\cdot,k)$ *-слабко збігаються до матриці $\Phi(\cdot)$ у просторі $L_{p'}$, де $1/p + 1/p' = 1$. Отже, за теоремою Ріса – Фреше справджуються умови *(б)* і *(в)* для скалярного випадку $m = 1$.

Нехай $m \geq 2$. Тоді маємо збіжність

$$\int_a^b \Phi(t,k)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t \to \int_a^b \Phi(t)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t, \quad Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}. \tag{3.80}$$

Оскільки $Y(\cdot)$ належить простору $(W_p^n)^{m\times m}$, то аналогічно з наведеними вище міркуваннями $Y^{(n)}(\cdot)$ належить простору $(L_p)^{m\times m}$. Більше того, якщо

$Y(\cdot)$ пробігає весь простір $(W_p^n)^{m\times m}$, то $Y^{(n)}(\cdot)$ — весь простір $(L_p)^{m\times m}$. Позначимо через $\varphi(\cdot)$ довільну функцію з простору W_p^n. Тоді $\varphi^{(n)}(\cdot)$ належатиме простору L_p. Позначимо через $E_{i,j}$ сім'ю числових $m\times m$ — матриць, $e_{i,j}$-та компонента яких дорівнює одиниці при $i=j$, де $i,j\in\{1,\ldots,m\}$, а всі інші компоненти є нулями у противному випадку. Отримаємо m^2 різних матриць такого вигляду. Покладемо $Y^{(n)}\equiv E_{i,j}\varphi^{(n)}$ і підставимо у співвідношення (3.80). Із *-слабкої збіжності матриць $\Phi(\cdot,k)$ до матриці $\Phi(\cdot)$ у просторі $L_{p'}$ випливає, що для кожного $i,j\in\{1,\ldots,m\}$ компоненти матриць $\Phi(\cdot,k)E_{i,j}\varphi^{(n)}$ також *-слабко збігаються до відповідних компонент матриці $\Phi(\cdot)E_{i,j}\varphi^{(n)}$ у просторі $(L_{p'})^{m\times m}$. Отже, справджуються умови *(б)* і *(в)* для випадку $m\geq 2$.

Лему 3.7 доведено.

Теорему 3.6 доведено.

У випадку $1\leq p<\infty$, враховуючи однозначне аналітичне зображення оператора B в (2.4), сформулюємо конструктивний критерій, який гарантує рівномірну збіжність послідовності операторів $(L(k),B(k))$ до оператора (L,B)

$$\big\|\,(L(k),B(k))-(L,B)\,\big\|\to 0. \tag{3.81}$$

Теорема 3.7. *Умова* (3.81) *є еквівалентною умовам* (A_1)*, а) і більш сильній, ніж умови б) і в), умові*

г) $\|\Phi(\cdot,k)-\Phi(\cdot)\|_{p'}\to 0.$

Доведення теореми 3.7. Із теореми 3.5 випливає еквівалентність умов (A_1) і (A_2). Залишається показати, що умова

$$\big\|B(k)-B\big\|\to 0 \tag{3.82}$$

є еквівалентною умовам *(а)* і *(г)* при $k\to\infty$. Нехай виконуються умови *(а)* і *(г)*. Тоді, очевидно, справедлива умова (3.82), тобто справджується рівномірна збіжність

$$\left\|\sum_{s=0}^{n-1}\alpha_s(k)y^{(s)}(a)+\int_a^b\Phi(t,k)y^{(n)}(t)\mathrm{d}t-\sum_{s=0}^{n-1}\alpha_s y^{(s)}(a)-\int_a^b\Phi(t)y^{(n)}(t)\mathrm{d}t\right\|\to 0. \tag{3.83}$$

Доведемо, що з умови (3.82) випливають умови *(а)* і *(г)*. Із рівномірної збіжності операторів (3.82) маємо їх сильну збіжність. Тоді, враховуючи лему 3.7, має місце умова *(а)*.

Обґрунтуємо справедливість імплікації

$$\left\|B(k)-B\right\|\to 0\Longrightarrow\left\|\Phi(\cdot,k)-\Phi(\cdot)\right\|_{p'}\to 0 \tag{3.84}$$

спочатку для скалярного випадку $m=1$. Оскільки $y(\cdot)$ належить простору W_p^n, то $y^{(n)}(\cdot)\ inL_p$. Більше того, якщо $y(\cdot)$ пробігає весь простір W_p^n, то $y^{(n)}(\cdot)$ — весь простір L_p. За теоремою Ріса про вигляд лінійного неперервного функціоналу B у просторі L_p, де $1\le p<\infty$, маємо наступну рівність норм:

$$\|B\|_p=\|\Phi(\cdot)\|_{p'}\,.$$

Отже, справджується імплікація (3.84).

Нехай $m\ge 2$. Тоді має місце збіжність

$$\left\|\int_a^b\Phi(t,k)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t-\int_a^b\Phi(t)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t\right\|\to 0. \tag{3.85}$$

Оскільки $Y(\cdot)$ належить простору $(W_p^n)^{m\times m}$, то аналогічно з наведеними вище міркуваннями $Y^{(n)}(\cdot)$ належить простору $(L_p)^{m\times m}$. Більше того, якщо $Y(\cdot)$ пробігає весь простір $(W_p^n)^{m\times m}$, то $Y^{(n)}(\cdot)$ — весь простір $(L_p)^{m\times m}$. Позначимо через $\varphi(\cdot)$ довільну функцію з простору W_p^n, тоді $\varphi^{(n)}(\cdot)$ належатиме простору L_p. Позначимо через $E_{i,j}$ сім'ю числових $m\times m$ — матриць як і в лемі (3.7). Покладемо

$$Y^{(n)}\equiv E_{i,j}\varphi^{(n)},\quad B'=\int_a^b\Phi(t)Y^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

і підставимо у співвідношення (3.85). Із того, що матриці $\Phi(\cdot,k)$ збігаються до матриці $\Phi(\cdot)$ у просторі $L_{p'}$ випливає, що для кожного $i,j\in\{1,\dots,m\}$ компоненти матриць $\Phi(\cdot,k)E_{i,j}\varphi^{(n)}$ також збігаються до відповідних компонент матриці $\Phi(\cdot)E_{i,j}\varphi^{(n)}$ у просторі $(L_{p'})^{m\times m}$. Тому згідно з теоремою Ріса маємо

$$0\leftarrow\left\|B'(k)-B'\right\|\geq\left\|E_{i,j}\big(B'(k)-B'\big)\right\|=\left\|\varphi_{i,j}(k)-\varphi_{i,j}\right\|_{p'}\geq 0,$$

де $\varphi_{i,j}$ — компоненти матриці $\Phi(\cdot)E_{i,j}\varphi^{(n)}$. Тоді справджується умова (3.85) для випадку $m\geq 2$, отже, і умова *(г)*.

Теорему 3.7 доведено.

Із теореми 3.5 випливають достатні умови напівнеперервності зверху вимірності ядра і коядра оператора (3.67).

Наслідок 3.2. *В умовах теореми 3.5 починаючи з достатньо великих k справджуються такі нерівності:*

$$\dim\ker\left(L(k),B(k)\right)\leq\dim\ker\left(L,B\right), \tag{3.86}$$

$$\dim\operatorname{coker}\left(L(k),B(k)\right)\leq\dim\operatorname{coker}\left(L,B\right). \tag{3.87}$$

Зокрема

1. Якщо $l=mr$ і оператор (L,B) є оборотним, то оператори $(L(k),B(k))$ також є оборотними для великих k.

2. Якщо крайова задача (3.1), (3.2) при будь-яких значеннях правих частин має розв'язок, то крайові задачі (3.65), (3.66) також мають розв'язок для великих k.

3. Якщо існує не більш як один розв'язок деякої крайової задачі (3.1), (3.2), то задачі (3.65), (3.66) не можуть мати різні розв'язки для кожного досить великого k.

Доведення. Враховуючи теорему 3.5, проведемо міркування на прикладі характеристичних матриць. Нехай послідовність характеристичних матриць $M\big(L(k), B(k)\big)$ збігається до граничної характеристичної матриці $M\big(L, B\big)$. Та нехай $\operatorname{rank}\big(M\big(L, B\big)\big) = r$, тобто існує мінор матриці $M\big(L, B\big)$ порядку $r \neq 0$. Тоді коефіцієнти послідовності визначників характеристичних матриць $M\big(L(k), B(k)\big)$ збігаються відповідно до коефіцієнтів визначника граничної характеристичної матриці $M\big(L, B\big)$, який відмінний від нуля

$$\det D_s \to \det D \neq 0, \quad s \in \{1, \ldots, k\}.$$

Отже, ранги послідовності характеристичних матриць можуть лише збільшуватися

$$\operatorname{rank}\big(M\big(L(k), B(k)\big)\big) \geq \operatorname{rank}\big(M\big(L, B\big)\big).$$

Як відомо, вимірність ядра матриці є різницею числа рядків і рангу матриці. Тому вимірності ядер послідовності характеристичних матриць можуть лише зменшуватися. Звідси випливає нерівність (3.86).

Аналогічно доводимо справедливість нерівності (3.87). Оскільки вимірність коядра матриці є різницею числа стовпців і рангу матриці, то вимірності коядер послідовності характеристичних матриць також можуть лише зменшуватися.

Наслідок 3.2 доведено.

Зауважимо, що з умови

$$\|(B(k) - B)y\| \to 0, \quad y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m, \quad k \to \infty$$

не випливає збіжність

$$\|B(k) - B\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тому твердження теореми 3.5 і наслідку 3.2 не випливають із загальних результатів теорії лінійних операторів [81], а зумовлені специфікою крайової задачі (3.1), (3.2).

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації досліджено найбільш загальні крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Одержано такі основні результати:

1. Показано, що досліджуваним крайовим задачам для рівнянь порядку r відповідає фредгольмів оператор з індексом $mr - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^{n+r})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$ (теорема 3.1).

2. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі (теорема 3.2).

3. Встановлено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у відповідних просторах (наслідок 3.1).

4. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$ (теорема 3.3).

5. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва (теорема 3.4).

6. Знайдено достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць крайових задач $M\left(L(k), B(k)\right)$ до матриці $M\left(L, B\right)$ при $k \to \infty$ (теорема 3.5).

7. Встановлено критерій сильної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ (теорема 3.6).

8. Встановлено критерій рівномірної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ (теорема 3.7).

9. Знайдено достатні умови напівнеперервності зверху вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \le p \le \infty$ (наслідок 3.2).

Результати третього розділу опубліковано у статтях [4, 64] та висвітлено в тезах конференцій [8].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Досліджено характер розв'язності найбільш загальних крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r, розв'язки яких належать простору Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

2. Показано, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь довільного порядку відповідає фредгольмів оператор з індексом $mr - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^{n+r})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь довільного порядку дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі.

4. Для крайових задач для системи диференціальних рівнянь довільного порядку, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$ та показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва.

5. Досліджено найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$ і встановлено достатні умови неперервності за параметром

розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^n)^m$ у випадках $p = \infty$ і $1 \leq p < \infty$.

6. Знайдено достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць $M\left(L(k), B(k)\right)$ крайових задач для системи диференціальних рівнянь довільного порядку до матриці $M\left(L, B\right)$ при $k \to \infty$.

7. Встановлено критерії сильної та рівномірної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$.

8. Знайдено достатні умови напівнеперервності зверху вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку.

Список використаних джерел

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Український математичний журнал. — 2018. — **70**, № 10. — С. 1324 – 1333. (Переклад англ. мовою:*Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Ukrainian Mathematical Journal. — 2019. — **70**, № 10. — P. 1526 – 1537.)

2. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Український математичний журнал. — 2018. — **70**, № 11. — С. 1457 – 1465. (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Mathematical Journal. — 2019. — **70**, № 11. — P. 1677 – 1687.)

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Нелінійні коливання. — 2019. — **22**, № 1. — С. 18 – 26. (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M.* Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — **247**, № 2. — P. 238 – 247.)

4. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доповіді Національної академії наук України. — 2019, № 11. — С. 3 – 7.

5. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // XIII-та Літня Школа "Аналіз, Топологія і Застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018, Вижниця, Україна: Тези доповідей. — Чер-

нівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Львівський національний університет імені І. Франка, 2018. — С. 56.

6. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, Київ, Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, 2019. — С. 49.

7. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019, Світязь, Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2019. — С. 70 – 71.

8. *Атласюк О. М.* Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 5 – 6.

9. *Атласюк О., Михайлець В.* Про неперервність за параметром розв'язків неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2020", 26 – 28 травня, 2020, Львів, Україна: Тези доповідей. — Інститут прикладних проблем меха-

ніки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. — С. 1 – 2.

10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Москва: Физматгиз, 1955. — 410 с.

11. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Український математичний журнал. — 1952. — № 4. — С. 215 – 219.

12. *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 2. — С. 101 – 112.

13. *Гнип Є. В., Михайлецъ В. А.* Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 1. — С. 76 – 87.

14. *Гнип Є. В.* Неперервність за пераметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 101 – 110.

15. *Гнип Є. В., Михайлецъ В. А., Мурач О. О.* Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 111 – 124.

16. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач на просторах Соболєва – Слободецького. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2016. — 116 с.

17. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — Москва: Мир, 1971. — 392 с.

18. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1975. — 352 с.

19. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. ВИНИТИ. — 1987. — **30**. — С. 3 – 103.

20. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференциальные уравнения. — 2003. — **39**, № 2. — С. 198 – 209.

21. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений одномерных линейных краевых задач // Доповіді Національної академії наук України. — 2010. — № 11. — С. 7 – 11.

22. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач // Аналіз і застосування: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 203 – 216.

23. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 11. — С. 15 – 19.

24. *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболєва. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2013. — 157 с.

25. *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 191 – 199.

26. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи математических наук. — 1955. — **3**, № 10. — С. 147 – 153.

27. *Курцвейль Я., Ворель З.* О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра // Чехословацкий математический журнал. — 1957. — **7**, № 4. — С. 568 – 583.

28. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Доклады Академии наук СССР. — 1961. — **136**, № 5. — С. 1022 – 1025.

29. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Доклады Академии наук СССР. — 1967. — **176**, № 4. — С. 774 – 777.

30. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестник Ярославского университета. — 1973. — № 5. — С. 105 – 132.

31. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче // Научные доклады высшей школы. — 1985. — № 5. — С. 34 – 37.

32. *Маслюк Г. О.* Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 193 – 203.

33. *Маслюк Г. О., Солдатов В. О.* Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — С. 185 – 197.

34. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 227 – 239.

35. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 28 – 30.

36. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 9. — С. 23 – 27.

37. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 268 – 274.

38. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 7. — С. 24 – 28.

39. *Мурач О. О., Солдатов В. О.* Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 1. — С. 256 – 273.

40. *Нгуен Тхе Хоан* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — **29**, № 6. — С. 970 – 975.

41. *Покорный Ю. В.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи // Математические заметки. — 1968. — **4**, № 5. — С. 533 – 540.

42. *Покорный Ю. В.* О неклассической задаче Валле–Пуссена // Дифференциальные уравнения. — 1978. — **14**. — С. 1018 – 1027.

43. *Покорный Ю. В.* Вопросы качественной теории краевой задачи Валле–Пуссена. Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз. – мат. наук. — Ленинград, 1980. — 20 с.

44. *Пономарев В. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1978. — **14**, № 5. — С. 929 – 932.

45. *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2009. — 148 с.

46. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Український математичний журнал. — 1962. — **14**, № 3. — С. 289 – 298.

47. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доповіді Академії наук УРСР. — 1962. — № 10. — С. 1290 – 1293.

48. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Київ: Вища школа, 1976. — 223 с.

49. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва: ИЛ, 1953. — 346 с.

50. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 2. — С. 327 – 337.

51. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 267 – 280.

52. *Солдатов В. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2016. — 120 с.

53. *Хасеинов К. А.* Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати: Автореф. дис. канд. фіз. – мат. наук. — Москва, 1984. — 223 с.

54. *Хасеинов К. А.* Сопряженная линейная задача и функции Грина: Методы оптимизации и их приложения // Тематич. сб. науч. тр. ВЦСО АНСССР, Иркутск. — 1988. — С. 238 – 243.

55. *Хасеинов К. А.* Построение сопряженной задачи к линейной многоточечной // Матер. 10-ой межвуз. конф. по математике и механике, Алматы. — 2005. — **2**. — С. 317 – 322.

56. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2. — С. 260 – 279.

57. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4 – 5. — С. 532 – 541.

58. *Чеханова Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2014. — 122 с.

59. *Чичкин Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач // Известия вузов. Математика. — 1962. — **27**, № 2. — С. 170 – 179.

60. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1996. — **46**, № 3. — P. 385 – 404.

61. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies" dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, 17 – 19 September, 2018, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts. — Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. — P. 13.

62. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // International conference "Problems of Theoretical and Mathematical Physics" dedicated to the 110th anniversary of M. M. Bogolyubov (1909 – 1992), 24 – 26 September, 2019, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 91.

63. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On linear boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE — 2019", 7 – 9 December, 2019, Tbilisi, Georgia: Abstracts. — Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019. — P. 19 – 22.

64. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nac. Acad. Nauk Ukr. — 2020. — № 6. — P. 3 – 6.

65. *Beesack P. R.* On the Green's function of an a-point boundary-value problem // Pacific Journal of Mathematics. — 1962. — **12**, № 3. — P. 801 – 812.

66. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv+317 p.

67. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. I. General theory. — New York; London: Interscience Publishers, 1958. — xiv+858 p.

68. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, № 5. — P. 658 – 667.

69. *Gnyp E. V.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in Slobodetsky spaces // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **68**, № 6 — P. 746 – 756.

70. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Mathematical Notes. — 2010. — **87**, № 1 – 2. — P. 287 – 292.

71. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2010. — **16**, № 2. — P. 20 – 130.

72. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukrainian Mathematical Journal. — 2012. — **63**, № 9 — P. 1361 – 1378.

73. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electronic Journal of Differential Equations. — 2013. — **2013**, № 101. — P. 1 – 16.

74. *Graves L. M.* Theory of function of real variables // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1948. — **54**, № 5. — P. 487 – 489.

75. *Grimm L. J., Eloe P. W.* Multipoint BVP for ODE // Differential Equations and Applications (I): Proc. of the 2 Conference, ”Rousse 81”. — Bulgaria, 1981.

76. *Jackson L. K.* Existense and uniqueness of solutions of boundary value problems for Lipschitz equations // Journal of Differential Equations. — 1979. — **32**. — P. 76 – 90.

77. *Hartman Ph.* Ordinary differential eqations. — New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1964. — 632 p.

78. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators. — Berlin: Springer, 1985. — viii+525 p.

79. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electronic Journal of Differential Equations. — 2017. — **2017**, № 81. — P. 1 – 13.

80. *Ioffe A. D., Tihomirov V. M.* Theory of extremal problems. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. — 399 p.

81. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — New York: Springer-Verlag, 1966. — xix+592 p.

82. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**, № 1. — P. 77 – 90.

83. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — **190**, № 4. — P. 589 – 599.

84. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1957. — **7**, № 3. — P. 418 – 449.

85. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1959. — **9**, № 4. — P. 564 – 573.

86. *Masliuk H., Soldatov V.* One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. — **24**, № 2. — P. 143 – 151.

87. *Maslyuk H. O.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Hölder spaces with respect to the parameter // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **69**, № 1. — P. 101 –110.

88. *Maslyuk H. O., Mykhailets V. A.* Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — **70**, № 3. — P. 467 – 476.

89. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **204**, № 3. — P. 333 – 342.

90. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2016. — № 87. — P. 1 – 16.

91. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // Journal of Differential Equations. — 1967. — № 3. — P. 571 – 579.

92. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // Journal of Differential Equations. — 1967. — **3**, № 3. — P. 423 – 439.

93. *Samoilenko A. M.* Certain questions in the investigation of differential equations with an irregular right side // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. — 1965. — **11**, № 3 – 4. — P. 85 – 92.

94. *Soldatov V. O.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, № 5. — P. 785 – 794.

95. *Tamarkin Y. D.* A lemma of the theory of linear differential systems // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1930. – № 36. – P. 99 – 102.

96. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. — Berlin: North–Holland Publication, 1978. — 528 p.

97. *Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M.* Linear differential equations with periodic coefficients. — New York; Toronto: Halsted Press, 1975. — xii+386 p.

Додаток

Цей додаток містить список публікацій здобувачки за темою роботи та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 10. — С. 1324 – 1333. (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 10. — P. 1526 – 1537.)

2. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 11. — С. 1457 – 1465. (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 11. — P. 1677 – 1687.)

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Нелінійні коливання — 2019. — **22**, № 1. — С. 18 – 26. (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M.* Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — **247**, № 2. — P. 238 – 247.)

4. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доповіді Національної академії наук України — 2019, № 11. — С. 3 – 7.

5. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nac. Acad. Nauk Ukr. — 2020, № 6. — P. 3 – 6.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // XIII-та Літня Школа "Аналіз, Топологія і Застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018, м. Вижниця, Чернівецька обл., Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Львівський національний університет імені І. Франка, 2018. — С. 56.

2. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies" dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, 17 – 19 September, 2018, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts. — Chernivtsi: Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. — P. 13.

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2019. — С. 49.

4. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній

математиці IV” присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019, с. Світязь, Шацький р-н, Волинська обл. Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2019. — С. 70 – 71.

5. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // International conference ”Problems of Theoretical and Mathematical Physics” dedicated to the 110th anniversary of M. M. Bogolyubov (1909 – 1992), 24 – 26 September, 2019, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 91.

6. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On linear boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations ”QUALITDE – 2019”, 7 – 9 December, 2019, Tbilisi, Georgia: Abstracts. — Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019. — P. 19 – 22.

7. *Атласюк О. М.* Про розв’язність одновимірних крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна науково-практична конференція ”Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз”, 15 – 16 квітня, 2020, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 5 – 6.

8. *Атласюк О., Михайлець В.* Про неперервність за параметром розв'язків неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2020", 26 – 28 травня, 2020, м. Львів, Україна: Тези доповідей. — Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. — С. 1 – 2.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на:

- семінарі "Спектральні і крайові задачі" лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз. – мат. наук, професор В. А. Михайлець), 11 лютого 2020 року;

- спільному засіданні відділів диференціальних рівнянь та теорії коливань і нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівники засідання: академік НАН України А. М. Самойленко, член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей), 15 вересня 2020 року;

- Літній школі "Алгебраїчна геометрія", 3 серпня – 2 вересня, 2018 року, м. Градець Кралове, Чеська Республіка;

- XIII Літній школі "Аналіз, топологія і застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018 року, м. Вижниця, Чернівецька обл., Україна;

- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики, 17 – 19 вересня 2018 року, м. Чернівці, Україна;

- Міжнародній конференції молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019 року, м. Київ, Україна;
- Міжнародній конференції “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV” присвяченій 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019 року, с. Світязь, Шацький р-н, Волинська обл. Україна;
- Літній школі ”Геометрія та топологія”, 1 – 31 вересня, 2019 року, м. Градець Кралове, Чеська Республіка;
- Міжнародній конференції ”Проблеми теоретичної та математичної фізики” присвяченій 110-річчю видатного теоретика фізичних наук і математика М. М. Боголюбова (1909 – 1992), 24 – 26 вересня, 2019 року, м. Київ, Україна;
- Міжнародній конференції ”Супергеометрія, суперсиметрія та квантування”, 16 – 19 грудня, 2019 року, м. Еш-сюр-Альзетт, Велике Герцогство Люксембург;
- Міжнародній науково-практичній конференції ”Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз”, 15 – 16 квітня, 2020 року, м. Київ, Україна;
- Конференції молодих учених ”Підстригачівські читання — 2020”, 26 – 28 травня, 2020 року, м. Львів, Україна.