АНОТАЦІЯ

Атласюк О. М. Одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена дослідженню характеристик розв'язності і неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних класів одновимірних неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку у просторах Соболєва на скінченному інтервалі.

Питання про обґрунтування граничного переходу щодо задач Коші та загальних крайових задач досліджено багатьма математиками. У роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962 – 1965) встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені та доповнені А. Ю. Левіним (1967 – 1973), З. Опялем (1967), В. Т. Рейдом (1967) і Нгуен Тхе Хоаном (1993).

Клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку введено і досліджено І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (1996). Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$. Встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. У роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової отримано узагальнення цих результатів для комплекснозначних функцій та лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

В. А. Михайлецем і його учнями (2008 – 2018) було введено і досліджено максимально широкі класи найбільш загальних крайових задач для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь щодо різних функціональних просторів, зокрема щодо просторів Соболєва (Рева Н. В., Кодлюк Т. І., Гнип Є. В.), просторів неперервно диференційовних функцій (Чеханова Г. О., Солдатов В. О.), просторів Гельдера (Солдатов В. О., Маслюк Г. О.), просторів Слободецького (Гнип Є. В., Маслюк Г. О.). Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Для найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку достатні умови неперервної залежності за параметром їх розв'язків у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем (2010). Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем (2017). Ці результати було застосовано до дослідження багатоточкових крайових задач, матриць Гріна та використано у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами. Але у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, а й випадок несепарабельних просторів Соболєва при $p = \infty$.

Отже, з огляду на сказане, актуальним є дослідження найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільних порядків щодо просторів Соболєва W_p^n, де $1 \leq p \leq \infty$, зокрема питання про необхідні та достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач. Варто зазначити, що найбільш загальні задачі можуть містити в крайових умовах похідні цілого та дробового порядку і тому мають істотні особливості, які відсутні у класичних задачах (Коші, дво- та багатоточкових, інтегральних і мішаних задачах). Зважаючи на це, систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та одного додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі обговорено об'єкт і предмет, наведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження. Об'єктом дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва, а предметом — характер залежності за параметром розв'язків цих задач у відповідних нормованих просторах.

У другому розділі досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m-l$ на парі нормованих просторів $(W_p^n)^m$ і $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$. Доведено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах. Встановлено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^n)^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва. Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^n)^m$ у випадку $p = \infty$ та у випадку $1 \leq p < \infty$.

У третьому розділі досліджено найбільш загальні крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $mr - l$ на парі нормованих просторів $(W_p^{n+r})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$. Доведено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі. Встановлено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у відповідних просторах. Для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва. Встановлено достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць крайових задач $M\,(L(k), B(k))$ до матриці $M\,(L, B)$ при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$; критерій сильної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p < \infty$; критерій рівномірної збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p < \infty$; достатні умови напівнеперервності зверху ядра і коядра оператора крайової задачі при $k \to \infty$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$, де $1 \leq p \leq \infty$.

Додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- для найбільш загальних крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ встановлено їх нетеровість і знайдено індекс;
- у термінах спеціально введеної числової характеристичної матриці знайдено вимірності ядра і коядра розглянутих крайових задач;
- доведено граничну теорему для характеристичних матриць послідовності крайових задач;
- вперше досліджено неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ для всіх значень $1 \leq p \leq \infty$. Знайдено критерій неперервності розв'язків за параметром;
- доведено, що похибка і нев'язка розв'язків крайових задач мають однаковий порядок малості;
- отримано граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва $(W_p^n)^m$ з $1 \leq p < \infty$ і $p = \infty$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних фредгольмових крайових задач, зокрема багатоточкових, задач із похідними дробового порядку. Особливістю роботи є те, що в ній вперше досліджено характер розв'язності крайових задач із перевизначеними або недовизначеними крайовими умовами; досліджено найбільш складний, але важливий для застосувань випадок несепарабельних нерефлексивних просторів Соболєва.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Соболєва, фредгольмів оператор, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача, характеристична матриця.

ABSTRACT

Atlasiuk O. M. One-dimensional Fredholm boundary-value problems with parameter. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of the characteristics of solvability and continuity in a parameter of solutions of the most general classes of one-dimensional inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations of arbitrary order in Sobolev spaces on a finite interval.

The question of the substantiation of the boundary transition with respect to Cauchy problems and general boundary-value problems has been studied by many mathematicians. I. I. Gikhman (1952), M. A. Krasnosel'skii and S. G. Krein (1955), J. Kurzweil and Z. Vorel (1957), A. M. Samoilenko (1962 – 1965) established the fundamental results on the continuous dependence with respect to the parameter of solutions of Cauchy problems for nonlinear systems. For linear systems, these results were specified and supplemented by A. Yu. Levin (1967 – 1973), W. T. Reid (1967) and Nguyen Tho Hoan (1993), Z. Opial (1967).

The class of linear general boundary-value problems for systems of first-order differential equations was introduced and investigated by I. T. Kiguradze (1975 – 2003) and M. Ashordia (1996). Solutions to these problems are absolutely continuous functions on the compact interval $[a, b]$. They also established the conditi-

ons of continuity in a parameter of these solutions in the space $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. The generalization of these results for complex-valued functions and linear systems of higher-order differential equations was obtained in the works of V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk, and H. A. Chekhanova.

V. A. Mikhailets and his disciples (2008 –2015) introduced and studied the most common classes of boundary-value problems for linear systems of ordinary differential equations that are generic with respect to the various functional spaces, in particular to Sobolev spaces (N. V. Reva, T. I. Kodliuk, Ye. V. Gnyp), to the spaces of continuously differentiable functions (H. A. Chekhanova, V. O. Soldatov), to Hölder spaces (V. O. Soldatov, H. O. Masliuk), to Slobodetskii spaces (Ye. V. Gnyp, H. O. Masliuk). They proved that such problems are Fredholm, obtained conditions that are sufficient for their well-posedness and continuity in the parameter of their solutions in these spaces.

For the most general boundary-value problems for systems of differential equations of the first order, sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of their solutions in Sobolev space W_p^n, with $1 \leq p < \infty$ were found by T. I. Kodliuk and V. A. Mikhailets (2010). Constructive criterion of continuity in the parameter of solutions of the most general boundary-value problems for systems of differential equations of an arbitrary order in Sobolev space W_p^n, with $1 \leq p < \infty$ was found by Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets, and O. O. Murach (2017). These results have been applied to the investigation of multipoint boundary-value problems, Green's matrices, and also to the spectral theory of differential operators with singular coefficients. However, in some problems of the theory of differential equations arise not only Sobolev spaces W_p^n, with $1 \leq p < \infty$, but also the case of nonseparable Sobolev spaces for $p = \infty$.

Thus, in view of the above, it is important to study the most general boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of arbitrary order with respect to Sobolev spaces W_p^n, with $1 \leq p \leq \infty$, in particular, the question of the necessary and sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of solutions to these problems. It should be noted that the most general problems may contain derivatives of integer and fractional order in boundary conditions. Therefore they have significant specificities that are absent in classical problems (Cauchy, two- and multipoint, integral and mixed problems). Hence, the systematic study of their properties is of scientific interest.

The thesis consists of the annotation in Ukrainian and in English, list of symbols, introduction, three sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, outlines the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

In the first section, we discuss the object, subject, and review the literature on the theme of the dissertation research. The object of research is one-dimensional Fredholm boundary-value problems, generic with respect to Sobolev spaces. The subject of research covers the character of the continuity in the parameter of solutions to these problems in the corresponding normed spaces.

In the second section, we investigate the most general boundary-value problems and the most general multipoint boundary-value problems for system of m ordinary differential equations of the first order whose solutions run through Sobolev space $(W_p^n)^m$, with $1 \leq p \leq \infty$. We show that these problems correspond to the the Fredholm operator with the index $m-l$ on a pair of normalized spaces $(W_p^n)^m$, and $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$. The criterion of well-posedness of these boundary-value problems in these spaces is proved. We prove that the dimensions of the kernel and cokernel of the operator of boundary-value problem are equal to the dimensions of the kernel and cokernel of the characteristic matrix of the boundary-value problem, respectively. For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, the constructive criterion of continuity in the parameter of solutions at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^n)^m$. We show that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness for $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Sobolev spaces is established. Sufficient conditions of continuity in the parameter of solutions to multipoint boundary-value problem at $\varepsilon = 0$ in normalized space $(W_p^n)^m$ in the case of $p = \infty$, and in case $1 \leq p < \infty$ are established.

In the third section, we investigate the most general boundary-value problems for system of m ordinary differential equations of an arbitrary order whose solutions run through Sobolev space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p \leq \infty$. We show that these problems correspond to the Fredholm operator with the index $mr - l$ on a pair of normalized spaces $(W_p^{n+r})^m$, and $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$. We prove that the dimensions of the kernel and cokernel of the operator of boundary-value problem are equal to the dimensions of the kernel and cokernel of the characteristic matrix of the boundary-value problem, respectively. The criterion of well-posedness of the investigated boundary-value problems in these spaces is proved. For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, the constructive criterion of continuity in the parameter of solutions at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^{n+r})^m$ is established. We show that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness for $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Sobolev spaces. Sufficient conditions are established for the convergence of sequence of characteristic matrices of boundary-value problems $M\,(L(k), B(k))$ to the matrix $M\,(L, B)$ for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with

$1 \leq p \leq \infty$. The criterion of strong convergence of the sequence of operators $(L(k), B(k))$ to the operator (L, B) for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p < \infty$ is proved. We have substantiated the criterion of uniform convergence of the sequence of operators $(L(k), B(k))$ to the operator (L, B) for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p < \infty$. Sufficient conditions are found for upper semi-continuous of the kernel and cokernel of the operator to boundary-value problems for $k \to \infty$ in the space $(W_p^{n+r})^m$, with $1 \leq p \leq \infty$.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the dissertation results.

The main results that determine the scientific novelty of the thesis:

- for the most general boundary-value problems in the Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ their Fredholm property is established and the index is found;
- in terms of a specially introduced numerical characteristic matrix, the dimensions of the kernel and cokernel of the considered boundary-value problems are found;
- the limit theorem for characteristic matrices of a sequence of the boundary-value problems is proved;
- for the first time the continuity in the parameter of solutions of boundary-value problems in Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ is investigated for all values $1 \leq p \leq \infty$. The criterion of continuity of solutions in a parameter is found;
- it is proved that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness;
- the limit theorems for solutions to multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces $(W_p^n)^m$ with $1 \leq p < \infty$ and $p = \infty$ are obtained.

Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the further development of the theory of one-dimensional Fredholm boundary-value problems, in particular multipoint problems, and problems with derivatives of fractional order. The peculiarity of thesis is that it first investigates the character of the solvability of boundary-value problems with overdetermined or underdetermined boundary conditions. The most complex but important for applications case of nonseparable nonreflexive Sobolev spaces is also investigated.

Keywords: system of differential equations, boundary-value problem, Sobolev space, Fredholm operator, continuity in a parameter, multipoint boundary-value problem, characteristic matrix.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 10. — С. 1324 – 1333.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 10. — P. 1526 – 1537. DOI: 10.1007/s11253-019-01588-w, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection)

2. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 11. — С. 1457 – 1465.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. — **70**, № 11. — P. 1677 – 1687. DOI: 10.1007/s11253-019-01599-7, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection)

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Нелінійні коливання — 2019. — **22**, № 1. — С. 18 – 26.

   (Переклад англ. мовою: *Atlasiuk O. M.* Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — **247**, № 2. — P. 238 – 247. DOI: 10.1007/s10958-020-04799-w, SCOPUS Q3)

4. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доповіді національної академії наук України — 2019, № 11. — С. 3 – 7. DOI: 10.15407/dopovidi2019.11.003

5. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. — 2020, № 6. — P. 3 – 6. DOI: 10.15407/dopovidi2020.06.003

Тези наукових доповідей

1. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // XIII-та Літня Школа "Аналіз, Топологія і Застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018, м. Вижниця, Чернівецька обл., Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Львівський національний університет імені І. Франка, 2018. — С. 56.

2. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies" dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, 17 – 19 September, 2018, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts. — Chernivtsi: Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. — P. 13.

3. *Атласюк О. М.* Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2019. — С. 49.

4. *Атласюк О. М.* Про нетерові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019, с. Світязь, Шацький р-н, Волинська обл. Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2019. — С. 70 – 71.

5. *Atlasiuk O. M.* On Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // International conference "Problems of Theoretical and Mathematical Physics" dedicated to the 110th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909 – 1992), 24 – 26 September, 2019, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 91.

6. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On linear boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2019", 7 – 9 December, 2019, Tbilisi, Georgia: Abstracts. — Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019. — P. 19 – 22.

7. *Атласюк О. М.* Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, м. Київ, Україна: Тези допо-

відей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 5 – 6.

8. *Атласюк О., Михайлець В.* Про неперервність за параметром розв'язків неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2020", 26 – 28 травня, 2020, м. Львів, Україна: Тези доповідей. — Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. — С. 1 – 2.