Лекція 6: Ранг Шмідта для змішаних станів. Свідки сплутаності.

1. Ранг Шмідта для змішаних станів.

Нагадаємо, що змішаний стан моделюється матрицею (оператором) щільності ρ з множини $\mathbb{S}(H)-$ простору невід'ємних операторів зі слідом 1. При цьому чисті стани – це крайні точки цієї множини, тобто проектори $|\phi\rangle\langle\phi|$. Будь-який змішаний стан є опуклою комбінацією чистих станів.

Нехай $H = H_1 \otimes H_2$, $d_i = \dim H_i$.

Для числа $k \geq 1$ визначимо підмножини $\mathbb{S}(H)$:

$$\mathbb{S}_k = \{\rho = |\phi\rangle\langle\phi|, \text{s.rank}(|\phi\rangle) \leq k\},$$

$$\widetilde{\mathbb{S}}_k = \left\{ \int_{\rho \in \mathbb{S}_k} \rho d\mu \right\},$$

по всіх ймовірнісних розподілах μ на $\mathbb{S}_k$.

Зауважимо, що $\widetilde{\mathbb{S}}_k-$ це компактна опукла множина у дійсному лінійному просторі самоспряжених операторів на H, розмірність якого $d_1^2 d_2^2$.

За теоремою Каратеодорі будь-яка точка з опуклої оболонки підмножини в $\mathbb{R}^d$ є опуклою комбінацією щонайбільше $d+1$ точокціє множини.

Тож можна записати, що $\forall \rho \in \widetilde{\mathbb{S}}_k$:

$$\rho = \sum_{i=1}^{d_1^2 d_2^2+1} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|,$$

де $|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \in \mathbb{S}_k$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Означення *Стан* $\rho \in \mathbb{S}(H)$ *має ранг Шмідта* k *якщо* $\rho \in \widetilde{\mathbb{S}}_k \setminus \widetilde{\mathbb{S}}_{k-1}$.

Зокрема, ρ є сепарабельним тоді й тільки тоді, коли його ранг Шмідта дорівнює 1, тобто $\rho \in \widetilde{\mathbb{S}}_1$. Дійсно, якщо є (опуклий) розлад

$$\rho = \sum_i p_i \rho_1^{(i)} \otimes \rho_2^{(i)},$$

то є і розклад, в якому кожний доданок виду $\alpha|\phi\rangle\langle\phi|\otimes|\psi\rangle\langle\psi| = \alpha|\phi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\langle\psi|$.

Визначення рангу Шмідта для довільного стану ρ є дуже складної задачею. Складною є навіть задача з'ясування чи ранг ≤ 1 – **проблема сепарабельності**.

Для того, щоб переконати, що стан є сепарабельним, достатньо навести його розклад (кількість елементів розкладу може бути обмежена числом $d_1^2 d_2^2 + 1$). Тож в деякому сенсі задача належить до класу NP, адже перевірка розкладу це досить швидка процедура.

Виявляється, що для перевірки сплутаності ρ є також швидка процедура, за умови якщо знати *свідка сплутаності* для ρ. Тож в деякому сенсі задача належить до класу co-NP.

2. Свідки сплутаності.

Нехай $\rho \notin \widetilde{\mathbb{S}}_k$. З геометричної теореми Хана-Банаха виплаває, що існує лінійний функціонал F на дійсному лінійному просторі самоспряжених операторів на H такий, що відділяє ρ від опуклої множини $\widetilde{\mathbb{S}}_k$. Тобто $\exists F$:

$$F(\rho) < 0 \leq F(\sigma),\ \forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k.$$

За теоремою Ріса будь-який такий лінійний функціонал можна записати як $F(X) = \langle A|X\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger X)$, де A самоспряжений. Можна записати

$$\mathrm{Tr}(\rho A) < 0 \leq \mathrm{Tr}(\sigma A),\ \forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k.$$

Оператор $A \in L(H_1 \otimes H_2) = L(H_1) \otimes L(H_2)$, що ізоморфно до $L(L(H_1), L(H_2))$. Ізометрію можна задати формулою

$$A = (I \otimes \Gamma_A) \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij},$$

де $\{E_{ij} = |i\rangle\langle j|\}$ це ортонормований базис у $L(H_1)$, а $\Gamma_A : L(H_1) \to L(H_2)$.

Лема

$$\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij} = d_1 P,$$

де P це деякий ортопроектор у $L(H_1) \otimes L(H_1)$, тобто $P = P^\dagger = P^2$.

Оскільки $I \otimes \Gamma_A$ це лінійний супероператор, то можна записати що

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \langle \rho|(I \otimes \Gamma_A)(d_1 P)\rangle =$$

$$= \langle \rho|(I \otimes \Gamma_A)|d_1 P\rangle = \langle (I \otimes \Gamma_A^\dagger)(\rho)|d_1 P\rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}(((I \otimes \Gamma_A^\dagger)(\rho))^\dagger \cdot d_1 P).$$

Для будь-яких операторів $O_1, O_2 \geq 0$ виконується $\mathrm{Tr}(O_1 O_2) \geq 0$. Оскільки $\mathrm{Tr}(\rho A) < 0$, то звідси $(I \otimes \Gamma_A^\dagger)(\rho) \ngeq 0$.

Твердження 1 *Якщо* $\mathrm{Tr}(\rho A) < 0$ *для* $\rho \in \mathbb{S}(H_1 \otimes H_2)$, *то*

$$(I \otimes \Gamma_A^\dagger)(\rho) \ngeq 0$$

Твердження 2 *Якщо* $\mathrm{Tr}(\sigma A) \geq 0$ *для* $\forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k$, *то* $\Gamma_A^\dagger$ *це k-позитивне відображення.*

k-позитивні відображення

Відображення $u : L(H_1) \to L(H_2)$ називають k**-позитивним** якщо відповідне $u_k : \mathbb{M}_k(L(H_1)) \to \mathbb{M}_k(L(H_2))$ є позитивним, тобто

$$\forall \rho \in \mathbb{M}_k(L(H_1)), \rho \geq 0 : \quad u_k(\rho) \geq 0.$$

Оскільки між $\mathbb{M}_k(L(H_1))$ та $\mathbb{M}_k \otimes L(H_1)$ існує природня ізометрія, то є також еквівалентне визначення.

Відображення $u : L(H_1) \to L(H_2)$ є k-позитивним якщо відображення

$$I \otimes u : \mathbb{M}_k \otimes L(H_1) \to \mathbb{M}_k \otimes L(H_2)$$

є позитивним.

Є також наступна характеризація k-позитивності:

Твердження 3

Відображення $\Lambda : L(H_2) \to L(H_1)$ є k-позитивним тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k : \quad (I \otimes \Lambda)(\sigma) \geq 0.$$

Доведення. Ідея доведення полягає у наступному. По-перше, достатньо розглянути лише чисті стани $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathbb{S}_k$, тобто $|\phi\rangle = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r |u_r\rangle|v_r\rangle$, $\lambda_r \geq 0$. Тоді можна записати, що

$$(I \otimes \Lambda)(\sigma) = (I \otimes \Lambda)(\sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r \lambda_s |u_r\rangle\langle u_s| \otimes |v_r\rangle\langle v_s|) =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r \lambda_s |u_r\rangle\langle u_s| \otimes \Lambda(|v_r\rangle\langle v_s|).$$

Підпростір, породжений $\{|u_r\rangle\langle u_s|\} \subset L(H_1)$, можна ототожнити з $\mathbb{M}_k$. Тому дію $I \otimes \Lambda$ на $\sigma \in L(H_1) \otimes L(H_2)$ можна розглядати як дію на відповідний $\sigma \in \mathbb{M}_k \otimes L(H_2)$. А така дія переводить позитивні у позитивні, якщо Λ був k-позитивним. Також можна отримати твердження і в обернену сторону.

Твердження 4

Якщо $u : L(H_1) \to L(H_2)$ є k-позитивним, то $u^\dagger : L(H_2) \to L(H_1)$ також є k-позитивним.

Твердження 5

Відображення $\Lambda : L(H_2) \to L(H_1)$ є k-позитивним тоді й тільки тоді, коли

$$(I \otimes \Lambda)(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|) \geq 0,$$

для будь-якого $|\Psi_k\rangle$ рангу Шмідта k з однаковими коефіцієнтами (тобто максимально сплутаного рангу k).

Доведення твердження 2.

Ми маємо, що для $\forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k$ виконується

$$\mathrm{Tr}((I \otimes \Gamma_A)(\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij})\sigma) \geq 0.$$

Нехай $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$, де $|\phi\rangle$ має ранг Шмідта k, тобто $|\phi\rangle = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r |u_r\rangle|v_r\rangle$. Підставивши маємо

$$\sum_{ij} \mathrm{Tr}((|i\rangle\langle j| \otimes \Gamma_A(|i\rangle\langle j|))(\sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s |u_r\rangle\langle u_s| \otimes |v_r\rangle\langle v_s|)) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s \,\mathrm{Tr}(|i\rangle\langle j| \cdot |u_r\rangle\langle u_s|)\,\mathrm{Tr}(\Gamma_A(|i\rangle\langle j|) \cdot |v_r\rangle\langle v_s|) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s \langle j|u_r\rangle\langle u_s|i\rangle\langle v_s|\Gamma_A(|i\rangle\langle j|)|v_r\rangle =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s \langle v_s|\Gamma_A(\langle u_s|i\rangle|i\rangle \cdot \langle j|\langle j|u_r\rangle)|v_r\rangle =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s \langle v_s|\Gamma_A(\sum_{i}\langle u_s|i\rangle|i\rangle \cdot \sum_{j}\langle j|\langle j|u_r\rangle)|v_r\rangle.$$

Визначимо $|\bar{u}\rangle$ як комплексно спряжений до $|u\rangle$ у стандартному базисі, тобто $\langle i|\bar{u}\rangle = \overline{\langle i|u\rangle} = \langle u|i\rangle$. Тоді $\sum_i \langle u_s|i\rangle|i\rangle = |\bar{u}_s\rangle$. Аналогічно $\sum_j \langle j|\langle j|u_r\rangle = \langle \bar{u}_r|$.

Отже, ми отримали

$$\sum_{r,s=1}^{k} \lambda_r\lambda_s \langle v_s|\Gamma_A(|\bar{u}_s\rangle\langle\bar{u}_r|)|v_r\rangle \geq 0.$$

А це, насправді, еквівалентно k-позитивності Γ_A. Ідея доведення наступна. Для будь-якого базису $\{|\gamma_i\rangle\}_{i=1}^{k} \in \mathbb{C}^k$ останній вираз дорівнює

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle\gamma_i|\langle v_i|\Big((I \otimes \Gamma_A)(\sum_{r,s=1}^{k} |\gamma_s\rangle\langle\gamma_r| \otimes |\bar{u}_s\rangle\langle\bar{u}_r|)\Big) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |\gamma_j\rangle|v_j\rangle =$$

$$= \langle\Psi|\Big((I \otimes \Gamma_A)(\sum_{s=1}^{k} |\gamma_s\rangle|\bar{u}_s\rangle \cdot \sum_{r=1}^{k} \langle\gamma_r|\langle\bar{u}_r|)\Big)|\Psi\rangle$$

$$= \langle\Psi|\Big((I \otimes \Gamma_A)(|\Phi\rangle\langle\Phi|)\Big)|\Psi\rangle \geq 0,$$

де $|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |\gamma_j\rangle|v_j\rangle$, та $|\Phi\rangle = \sum_{s=1}^{k} |\gamma_s\rangle|\bar{u}_s\rangle$. Звідси стверджується, що Γ_A є k-позитивним.

Теорема 1 *(Свідок сплутаності рангу k)*

1) Відображення $\Lambda : L(H_2) \to L(H_1)$ є k-позитивним тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \sigma \in \widetilde{\mathbb{S}}_k : \quad (I \otimes \Lambda)(\sigma) \geq 0.$$

2) Якщо $\rho \notin \widetilde{\mathbb{S}}_k$,то існує k-позитивне відображення $\Lambda : L(H_2) \to L(H_1)$ таке, що

$$(I \otimes \Lambda)(\rho) \ngeq 0.$$

При цьому відповідне відображення Λ називають свідком сплутаності для ρ рангу Шмідта k.

Зауваження. Зокрема, щоб довести несепарабельність стану ρ достатньо існування позитивного відображення $\Lambda : L(H_2) \to L(H_1)$ такого, що $(I \otimes \Lambda)(\rho) \ngeq 0$. На основі цього існує відомий **критерій Переса-Городецького**, коли умову $(I \otimes \Lambda)(\rho) \ngeq 0$ перевіряють для конкретного оператору $\Lambda =$ транспозиції (тож інколи цей критерій називають **PPT** – від слів positive partial transpose). Виявляється, що у випадку коли розмірність $H_1 \otimes H_2$ не перевищує 6, то PPT критерій є також і достатнім. Тобто часткова транспозиція буде свідком сплутаності для будь-якого несапарабельного стану. Але вже у випадку 3×3 скінченної (наперед відомої) кількості свідків сплутаності не вистачить для достатності.