Лекція 5: Підпростори мінімального рангу Шмідта k

Нехай $H = H_1 \otimes H_2$. Питання полягає у тому як знайти підпростори $S \subset H$ такі, що для будь-якого стану $|\phi\rangle \in S$ його ранг Шмідта $\geq k$. Зокрема, яка найбільша можлива розмірність такого підпростору?

Нагадаємо, що між $H_1 \otimes H_2$ та $L(H_2, H_1)$ є ізометрія, яку можна задати як

$$\Gamma : |i\rangle|j\rangle \to |i\rangle\langle j|.$$

В свою чергу існує ізометрія між $L(H_2, H_1)$ та простором матриць $\mathbb{M}(d_1, d_2)$.

Один з наслідків цієї ізометрії це те, що ранг Шмідта $|\phi\rangle \in H_1 \otimes H_2$ співпадає із рангом матриці $\Gamma(|\phi\rangle)$.

Тож дану проблему можна вивчати лише в термінах матриць – знайти підпростір $S \subset \mathbb{M}(d_1, d_2)$ такий, що будь-яка ненульова матриця в ньому буде мати ранг $\geq k$.

Для початку розглянемо $k = 2$ та $d_1 = d_2$.

Нехай $\{W_i, i = 1, 2..., n^2\}$ це унітарний базис у просторі квадратних матриць $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}(n, n)$.

Розглянемо додатній самоспряжений оператор $\Phi \in L(\mathbb{M}_n)$:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n^2} p_i |W_i\rangle\langle W_i|,$$

де $p_i > 0$. Тобто $\Phi(W_i) = p_i W_i$.

Побудуємо підпростір $S \subset \mathbb{M}_{2n} = \mathbb{M}(2n, 2n)$ такий, що будь-яка ненульова матриця в ньому має ранг ≥ 2.

Теорема *Для $n > 1$ визначимо $S \subset \mathbb{M}(2n, 2n)$ наступним чином*

$$S = \left\{ X = \left(\begin{array}{c|c} A & \Phi(B) \\ \hline B & A \end{array} \right), A, B \in \mathbb{M}_n \right\}.$$

Тоді $\forall X \in S, X \neq 0$, маємо що $rank(X) \geq 2$.

Доведення.

Нехай $B = 0$ та $A \neq 0$. Тоді $\mathrm{rank}(X) = 2\mathrm{rank}(A) \geq 2$.

Нехай $B \neq 0$ та $A = 0$. Тоді $\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(\Phi(B)) \geq 2$.

Нехай тепер $B \neq 0$ та $A \neq 0$. Припустимо $\mathrm{rank}(X) = 1$.

Тоді X можна записати як вектор-стовпчик помножений на вектор-строчку, тобто

$$\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |v\rangle \end{pmatrix} (\langle u'| \ \langle v'|) = \begin{pmatrix} |u\rangle\langle u'| & |u\rangle\langle v'| \\ |v\rangle\langle u'| & |v\rangle\langle v'| \end{pmatrix}.$$

Звідси $|u\rangle\langle u'| = |v\rangle\langle v'| = A$ та $\Phi(|v\rangle\langle u'|) = |u\rangle\langle v'|$.

З першої рівності виходить, що $\exists c, c' \neq 0$ що $|v\rangle = c|u\rangle$ та $|v'\rangle = c'|u'\rangle$.

А отже

$$\Phi(|v\rangle\langle u'|) = c'c^{-1}|v\rangle\langle u'|,$$

звідси $|v\rangle\langle u'|$ є власним "вектором" для Φ. Але матриця рангу 1 не може бути унітарною якщо $n > 1$.

Теорема *Ортогональне доповнення $S^{\perp} \subset \mathbb{M}_{2n}$ має таку саму властивість як і S, тобто $\forall Y \in S^{\perp}, Y \neq 0 : \ rank(Y) \geq 2$.*

Доведення.

Нехай $Y \in S^{\perp}$. Запишемо

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right).$$

Оскільки $\mathrm{Tr}[Y^{\dagger}X] = 0$ для будь-яких $X \in S$ та $Y \in S^{\perp}$, маємо

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[\left(\begin{array}{c|c} K^{\dagger} & M^{\dagger} \\ \hline L^{\dagger} & N^{\dagger} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & \Phi(B) \\ \hline B & A \end{array}\right)\right] &= 0 \\ \Rightarrow \mathrm{Tr}[K^{\dagger}A + M^{\dagger}B + L^{\dagger}\Phi(B) + N^{\dagger}A] &= 0, \ \forall \ A, B. \end{aligned} \tag{1}$$

Покаладаючи $B = 0$ маємо

$$\mathrm{Tr}[(K^{\dagger} + N^{\dagger})A] = 0, \ \forall \ A \ \Rightarrow K + N = 0.$$

Так само, покладаючи $A = 0$ маємо

$$\mathrm{Tr}[(M + \Phi(L))^{\dagger}B] = 0, \ \forall B \ \Rightarrow M + \Phi(L) = 0.$$

(використали що $L^{\dagger}\Phi(B) = \langle L|\Phi|B\rangle = (\Phi|L\rangle)^{\dagger}|B\rangle = (\Phi(L))^{\dagger}B$).

Тож будь-який елемент з $S^{\perp}$ має вигляд

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline -\Phi(L) & -K \end{array}\right).$$

Аналогічно доводится, що $\mathrm{rank}(Y) \geq 2$ коли $Y \neq 0$.

Відкрита проблема. Визначити всі можливі набори (d_1, d_2, r_1, r_2) такі, що існує розклад $\mathbb{M}(d_1, d_2) = S \oplus S^{\perp}$ для якого

$$\forall X \in S \setminus \{0\}, Y \in S^{\perp} \setminus \{0\} : \mathrm{rank}(X) \geq r_1, \mathrm{rank}(Y) \geq r_2.$$

Теорема *Максимальна розмірність підпростору* $S \subset \mathbb{M}(d_1, d_2)$, *в якому будь-яка ненульова матриця має ранг* $\geq r$, *дорівнює*

$$\max_S \dim(S) = (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1)$$

Доведення.

1. Спочатку покажемо, що $\dim(S) \leq (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1)$.

Лема *Матриця* M *має ранг* $\mathit{rank}(M) < r$ *тоді й тільки тоді, коли усі її мінори порядку* r *нульові.*

Звідси множина усіх матриць з умовою $\operatorname{rank}(M) < r$ є алгебраїчним многовидом над $\mathbb{C}$ на $d_1 d_2$ вільних змінних. Цей многовид є множиною спільних нулів поліномів, які визначають усі мінори порядку r. Позначимо його $D_r(d_1, d_2) \subset \mathbb{C}^{d_1 d_2}$.

Для алгебраїчних многовидів є поняття розмірності, яке узагальнює поняття звичайної розмірності лінійного простору (довжина максимального ланцюга вкладень $V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_d$ різних підмноговидів).

Відомо, що

$$\dim D_r(d_1, d_2) = d_1 d_2 - (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1).$$

Далі потрібно розглянути проектифікацію многовидів у відповідному проективному просторі розмірності $\mathbb{P}^{d_1 d_2 - 1}$.

Оскільки мінор це однорідний поліном, то існує відповідний проективний многовид $\mathbb{P}(D_r(d_1, d_2)) \subset \mathbb{P}^{d_1 d_2 - 1}$ із розмірністю $\dim \mathbb{P}(D_r(d_1, d_2)) = \dim D_r(d_1, d_2) - 1$.

Для многовиду S також маємо $\dim \mathbb{P}(S) = \dim S - 1$.

Лема *Для проективних многовидів* $V, W \subset \mathbb{P}^d$ *якщо виконується*

$$\dim V + \dim W \geq d$$

то

$$V \cap W \neq 0.$$

Оскільки $\mathbb{P}(D_r(d_1, d_2)) \cap \mathbb{P}(S) = 0$, то з леми отримуємо

$$\dim \mathbb{P}(D_r(d_1, d_2)) + \dim \mathbb{P}(S) < d_1 d_2 - 1,$$

а звідси

$$\dim S \leq (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1).$$

2. Покажемо як побудувати такий S, що $\dim(S) = (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1)$. Для чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ розглянемо матрицю Вандермонда

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Будь-який її мінор додатній. Звідси будь-яка лінійна комбінація m стовпчиків має щонайбільше $m - 1$ нулів.

Побудуємо необхідну кількість лінійно незалежних матриць таких, що будь-яка їх лінійна комбінація має хоча б один ненульовий мінор порядку r.

Пронумеруємо діагоналі матриці розміру $d_1 \times d_2$ числами $k = 1, 2, ...$ $, d_1 + d_2 - 1$ (від лівого нижнього куда до протилежного). Довжину k-ої діагоналі позначимо $|k|$. Для кожного k такого, що $|k| \geq r$, побудуємо множину S_k лінійно незалежних матриць, у яких ненульві числа тільки на k-й діагоналі.

Загалом ми можемо знайти $t_k = |k| - r + 1$ векторів довжини $|k|$ таких, що будь-яка їх лінійна комбінація має щонайбільше $t_k - 1$ нулів, тобто щонайменше $|k| - (t_k - 1) = r$ ненульових елементів (беремо перші t_k стовпчиків Вандермонда).

Наприклад, якщо $|k| = r$, то $t_k = 1$, тобто ми можемо взяти лише один вектор. Якщо $|k| = r + 1$ то два вектори і т.д.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Якщо $d_1 \geq d_2$, то матриця $d_1 \times d_2$ має $d_1 - d_2 + 1$ діагоналей максимальної довжини d_2, та по 2 діагоналі кожної з довжин $1, 2, ..., d_2 - 1$. Тож загальна кількість матриць $\cup S_k$ вийде

$$\sum_{|k| \geq r} t_k = \sum_{|k| \geq r} |k| - r + 1 = (d_1 - d_2 + 1)(d_2 - r + 1) + 2 \sum_{i=r}^{d_2 - 1} (i - r + 1) =$$

$$= (d_1 - d_2 + 1)(d_2 - r + 1) + (d_2 - r)(d_2 - r + 1) = (d_1 - r + 1)(d_2 - r + 1)$$

Нехай M це якась лінійна комбінація матриць з $\cup S_k$, а $l-$ це найбільший індекс, для якого матриці з S_l включені в комбінацію. Тоді на l-й діагоналі в M буде щонайменше r ненульвих елементів, причому відповідна $r \times r$ підматриця буде нижньою трикутною, а отже буде невиродженою.

Теорема *Максимальна розмірність підпростору $S \subset \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$, в якому будь-який вектор має ранг Шмідта $\leq r$, дорівнює*

$$\max_S \dim(S) = r \max(d_1, d_2)$$

Нехай $d_1 \leq d_2$. У якості оптимальної конструкції достатньо взяти $S = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$, де $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}^{d_1}$ це будь-який лінійний підпростір розмірності r.

Теорема *Для максимальної розмірністі підпростору $S \subset \mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$, в якому будь-який вектор має ранг Шмідта $= r$, відомо що*

$$\max(d_1, d_2) - r + 1 \leq \max_S \dim(S) \leq d_1 + d_2 - 2r + 1$$