

Національна академія наук України
Інститут прикладної математики і механіки

Міністерство освіти і науки України
Донбаський державний педагогічний університет

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Несмєлова Ольга Володимирівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ
НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ,
НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

01.01.02 — диференціальні рівняння
11 – математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів
мають посилання на відповідне джерело _____ О.В. Несмєлова

Науковий консультант:
Самойленко Анатолій Михайлович,
академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Слов'янськ — 2020

АНОТАЦІЯ

Несмєлова О.В. Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння». Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України та Державному вищому навчальному закладі «Донбаський державний педагогічний університет» Міністерства освіти і науки України. Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Математичний опис численних явищ у багатьох галузях електроніки, теорії нелінійних коливань, механіки, біології та радіотехніки приводить до необхідності дослідження нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. У частковому випадку останнє рівняння приводить до нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, лінеаризація яких, в свою чергу, приводить до лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь вигляду

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t).$$

До нелінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + Z(z(t), t)$$

приводить вивчення багатьох процесів у теорії електричних мереж, робототехніці, фізиці та математичній економіці при дослідженні моделі Леонтьєва.

Дослідженню лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми та досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, а також численні роботи закордонних авторів S. Campbell,

J.R. Magnus, В.Ф. Чистякова та ін. У статтях С.М. Чуйка запропонована серія достатніх умов розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна задачі Коші для лінійної диференціально-алгебраїчної системи без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць. У статтях О.А. Бойчука та О.О. Покутного запропоновані умови розв'язності для нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з використанням узагальненої центральної канонічної форми.

Особливістю даного дисертаційного дослідження є те, що знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач здійснювалась без використання центральної канонічної форми. Це дало можливість дослідити розв'язки диференціально-алгебраїчних крайових задач у залежності від довільних неперервних функцій. Результатом цього стало уточнення класифікації як лінійних, так і нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Актуальність вивчення нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, пов'язана з тим фактом, що дослідження традиційної задачі, розв'язаної відносно похідної, іноді ускладнюється, у випадку наявності нелінійностей, не інтегровних в елементарних функціях. Прикладом подібної ситуації може бути крайова задача, не розв'язана відносно похідної, зокрема, автономна періодична задача для рівняння Лотки-Вольтерри.

Дослідження нелінійних крайових задач тісно пов'язане з явищем параметричного резонансу, актуального у механіці, теорії стійкості руху, біології, радіотехніці, теорії нелінійних коливань, фізиці, хімії та машинобудуванні. Знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нелінійних крайових задач у випадку параметричного резонансу ускладнюється залежністю задачі від невідомої функції, яка забезпечує розв'язність крайової задачі. Подібна залежність задачі від невідомої функції, як відомо, є характерною відмінністю автономних крайових

задач. Таким чином, особливістю даної дисертації є побудова розв'язків нелінійних крайових задач, в тому числі, у випадку параметричного резонансу, в залежності від власної функції крайової задачі.

Ще однією особливістю даного дисертаційного дослідження є систематичне використання методу Ньютона-Канторовича, який дозволяє побудову ітераційних схем без лінеаризації умов розв'язності крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь, взагалі кажучи, не розв'язаних відносно похідної.

Отже, дисертаційна робота присвячена дослідженню проблем знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. За допомогою апарату псевдообернених (за Муром – Пенроузом) матриць, методів теорії збурень та методів теорії нелінійних коливань у дисертації вдосконалено схему дослідження задач про існування та побудову розв'язків нелінійних крайових задач, взагалі кажучи, не розв'язаних відносно похідної в некритичному та різноманітних критичних випадках. Крім того, у дисертаційній роботі з єдиних позицій класифіковані численні постановки нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Метою дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, зокрема, нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, а також ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є конструктивні умови існування та алгоритми знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, спис-

ку використаних джерел та додатку. Повний обсяг роботи становить 353 сторінки.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць із теорії лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь та диференціально-алгебраїчних крайових задач, наведено необхідні відомості з теорії нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу та основні результати теорії квазіконформних відображень, показано їх зв'язок з лінійними еліптичними диференціальними рівняннями в дивергентній формі.

Другий розділ присвячено лінійним та нелінійним диференціально-алгебраїчним крайовим задачам; досліджено випадки виродженості та невиродженості диференціально-алгебраїчної системи. Вдосконалено класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схеми побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичному та некритичному випадках. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Також в другому розділі досліджено положення рівноваги нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Як приклади застосування побудованих ітераційних схем, знайдені наближення до розв'язків диференціально-алгебраїчних крайових задач для рівняння типу Дюффінга та рівняння типу Ріккати.

У третьому розділі досліджено нелінійні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, та автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Як приклади застосування отриманих результатів знайдені наближення до розв'язків періодичної задачі для рівняння типу Хілла у випадку параметричного резонансу, а також рівняння Мат'є. Також знайдені наближення до розв'язків періодичних задач для автономного рівняння типу Дюффінга й Лотки-Вольтерри та

періодичної задачі для рівняння типу Льєнара, не розв'язаного відносно похідної. Також в другому розділі знайдено конструктивні умови розв'язності та побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. В якості прикладу застосування отриманих результатів знайдені наближення до розв'язків періодичної задачі для рівняння типу Релея.

У четвертому розділі досліджено напівлінійні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині. Основним результатом даного розділу є теорема про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення. Також в четвертому розділі для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з не виродженими граничними компонентами. Дано застосування до рівнянь, які пов'язані з математичними моделями теорії горіння, стану плазми і процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Крім того, отримані результати вже використовуються в навчальних курсах з теорії крайових задач та теорії коливань для студентів класичних, педагогічних і технічних університетів.

Ключові слова: крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, псевдообернені матриці, узагальнений оператор Гріна, критичний випадок,

ітераційна схема, напівлінійні еліптичні рівняння, квазілінійне рівняння Пуассона, задача Діріхле, квазіконформні відображення.

ABSTRACT

Nesmelova O.V. Nonlinear boundary value problems not solved with respect to the derivative. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the doctor of science degree in Physics and Mathematics by speciality 01.01.02 «Differential equations». The work was performed at the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Higher Educational Institution «Donbas State Pedagogical University» of the Ministry of Education and Science of Ukraine. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

Mathematical description of numerous phenomena in many branches of electronics, theory of nonlinear vibrations, mechanics, biology and radio engineering leads to the need to study nonlinear partial differential equations. In a particular case, the latter equation leads to nonlinear differential equations that are not resolved with respect to the derivative, the linearization of which, in turn, leads to linear differential-algebraic equations of the form. The study of various processes in the theory of electrical networks, robotics, physics and mathematical economics in the research of the Leontief model leads to nonlinear differential-algebraic equations

The monographs of A. M. Samoilenko, M.O. Perestiuk, V.P. Yakovets, O.O. Boichuk, as well as numerous works by foreign authors S. Campbell, J.R. Magnus, and V.F. Chistyakov are devoted to the study of linear differential-algebraic equations using the central canonical form and perfect pairs and triples of matrices. In the articles of S.M. Chuiko, a series of sufficient solvability conditions is proposed, as well as the construction of the generalized Green operator of the Cauchy problem for a linear differential-algebraic

system without the use of a central canonical form and perfect pairs and triples of matrices. In the articles of O.O. Boichuk and O.O. Pokutnyi, the proposed solvability conditions for a nonlinear differential-algebraic boundary value problem using a generalized central canonical form, at that the main assumption regarding the linear part of a differential-algebraic system is the possibility of reducing it to a certain canonical form.

A feature of this study is that the finding for constructive conditions for existence and construction of solutions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems was carried out without using the central canonical form. This made it possible to investigate the solutions of differential-algebraic boundary value problems, that depend on arbitrary continuous functions. The consequence of this was the modification of classification of differential-algebraic boundary value problems.

The relevance of studying nonlinear boundary value problems, not resolved with respect to derivative, is also associated with the fact that the study of traditional problems, resolved by rather derivative, sometimes complicated, for example, in the case of nonlinearities, not integrable in elementary functions. An example of such situation can be the autonomous boundary value problem that is not resolved with respect to the derivative, in particular, the periodic problem for the Lotka-Voltaire equation.

The study of nonlinear boundary value problems is closely related to the phenomenon of parametric resonance, which is relevant in mechanics, the theory of stability of motion, biology and radio engineering, the theory of nonlinear vibrations, physics, chemistry and mechanical engineering. Finding constructive conditions for the existence and constructing solutions of nonlinear boundary value problems in the case of parametric resonance is complicated by the dependence of the problem on an unknown function and ensures the solvability of the boundary value problem. This dependence of the problem on an unknown function is known to be a characteristic feature of autonomous boundary value problems. Thus, the feature of this dissertation is construction of solutions of nonlinear boundary value problems, in particular,

in the case of parametric resonance depending on the eigenfunction of the boundary value problem.

Also, a feature of this dissertation is the systematic use of the Newton-Kantorovich method, which allows to construct iterative schemes without linearization of the conditions of solvability of boundary value problems for nonlinear systems of differential equations that are not resolved with respect to the derivative.

Thus the thesis is devoted to the study of the problems of finding constructive conditions for existence and construction of solutions of nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative. With the help of the apparatus of pseudoinverse matrices (by Moore-Penrose), methods of perturbation theory and the theory of nonlinear oscillations, the scheme for studying problems of the existence and construction of solutions of nonlinear boundary value problems not resolved with respect to the derivative in non-critical and various critical cases was improved in the dissertation. Necessary and sufficient conditions for existence were established and iterative procedures were constructed for finding solutions to nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative.

The purpose of the dissertation is to determine the constructive conditions of existence and build algorithms for finding solutions of nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative.

The research object of the thesis work are boundary value problems for nonlinear systems of differential equations, not resolved with respect to the derivative, in particular, non-linear differential-algebraic boundary value problem and iteration schemes for finding approximations to the solutions of nonlinear boundary value problems for nonlinear systems of differential equations, not resolved with respect to derivative.

The subject of research of the dissertation is the constructive conditions of existence and algorithms for finding solutions of nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative.

The dissertation consists of an introduction, four sections, a conclusion, a

list of references and an appendix. The total volume of work is 353 pages.

The first section is devoted to the review of scientific works on the theory of linear boundary value problems for systems of ordinary differential equations and differential-algebraic boundary value problems, provides necessary information from the theory of nonlinear boundary value problems for systems of ordinary differential equations in the case of parametric resonance, and also presents the main results of the theory of quasiconformal mappings, shows their connection with linear elliptic differential equations in divergent form.

The second section is devoted to linear and nonlinear differential-algebraic boundary value problems; the cases of degeneracy and non-degeneracy of the differential-algebraic system are investigated. The classification of nonlinear differential-algebraic boundary value problems was improved. We found constructive conditions of solvability and schemes for constructing solutions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems in critical and non-critical cases. We constructed converging iterative schemes for finding approximations to solutions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems. Also, in the second section, the equilibrium positions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems are investigated. As examples of application of the constructed iterative schemes, approximations to solutions of differential-algebraic boundary value problems for the Duffing type equation and the Riccati type equation were found.

In the third section, nonlinear boundary value problems for systems of ordinary differential equations are investigated. We found the constructive conditions for the solvability and a scheme for constructing solutions of the nonlinear non-autonomous boundary value problem that is not resolved with respect to the derivative and the nonlinear autonomous boundary value problem in the case of parametric resonance. As examples of the application of obtained results, approximations to the solutions of periodic problem for the Hill-type equation in the case of parametric resonance, and the Mathieu equation were found. We also found approximations to solutions of periodic problems for the autonomous equation of Duffing and Lotka-

Volterra type and a periodic problem for the equation of Lienard type that is not resolved with respect to the derivative. Also, in the second section, we found the constructive conditions for the solvability and constructed convergent iterative schemes for finding approximations to the solution of a nonlinear non-autonomous boundary value problem that is not resolved with respect to the derivative. As an example of the application of obtained results, approximations to the solution of periodic problems for the Rayleigh-type equation were found.

In the fourth section, semilinear partial differential equations on the plane are investigated. The main result of this section is a theorem on factorization of solutions of semi-linear strictly elliptic divergent equations with measurable coefficients in the form of a composition of the solution of the associated quasilinear Poisson equation and a proper quasiconformal mapping. Also in the fourth section, conditions for the existence of continuous solutions with arbitrary continuous boundary data were obtained for the Dirichlet problem for the quasilinear Poisson equation. Conditions for the existence of solutions to the Dirichlet problem for semi-linear strictly elliptic divergent equations with measurable coefficients for continuous boundary data in arbitrary regions with non-degenerate boundary components were obtained. Applications to equations related to mathematical models of the Gorenje theory, plasma state, and processes of diffusion and absorption in chemical reactions in anisotropic and inhomogeneous media were given.

This thesis is theoretical. The results obtained can be used in further research in the qualitative theory of differential equations, electronics, mechanics, and the theory of motion stability. In addition, the results obtained are already used in training courses on the theory of boundary value problems and the theory of oscillations for students of classical, pedagogical and technical universities.

Keywords: boundary value problems not solved with respect to the derivative, pseudo-inverse matrices, generalized Green's operator, critical

case, iterative scheme, semilinear elliptic equations, quasilinear Poisson equation, Dirichlet problem, quasiconformal mappings.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Український математичний вісник*. 2016. Т. 13, № 1. С. 91–105. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. V. 220, No. 5. P. 603–614.)
DOI: 10.1007/s10958-016-3203-5.
2. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Автономные неётеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. 2017. Т. 132. С. 144–148. (Chuiko S.M., Nesmelova (Starkova) O.V. Autonomous noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. V. 230, No. 5. P. 799–803.)
DOI: 10.1007/s10958-018-3793-1.
3. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. *Український математичний вісник*. 2017. Т. 14, № 2. С. 161–191. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. V. 229, No. 1. P. 7–29.)
DOI: 10.1007/s10958-018-3659-6.
4. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Дзюба М.В. Метод наименьших квадратов в теории матричных дифференциально-алгебраических крайових задач. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 2. С. 280–292. (Chuiko S.M., Nesmelova O.V., Dzyuba M.V. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. V. 70, No. 2. P. 319–333.)
DOI: 10.1007/s11253-018-1502-3.
5. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To the theory of semi-linear equation in the plane. *Український математичний вісник*. 2019. Т. 16, № 1. С. 105–140. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To

- the theory of semi-linear equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. V. 242, No. 6. P. 833–859.)
DOI: 10.1007/s10958-019-04519-z.
6. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. Semi-linear equations and quasiconformal mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020. V. 65, No. 5. P. 823–843.
DOI: 10.1080/17476933.2019.1631288.
 7. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a quasilinear Poisson equation in the plane. *Analysis and Mathematical Physics*. 2020. V.10, No. 1. Article number: 6. DOI: 10.1007/s13324-019-00345-3.
 8. Несмєлова О.В. Матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з Р-Лапласіаном. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 1. С. 49– 65. (Nesmelova O. Matrix boundary-value problems for differential equations with P-Laplacian. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. V. 248, No. 2. P. 175–187.)
DOI: 10.1007/s10958-020-04867-1.
 9. Чуйко С.М., Несмєлова (Старкова) О.В., Дзюба М.В. Про наближене розв’язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів. *Нелінійні коливання*. 2019. Т. 22, № 3. С. 423–436.
 10. Чуйко С.М., Несмєлова О.В., Чуйко О.С. Автономна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу. *Нелінійні коливання*. 2020. Т. 23, № 1. С. 134–144.
 11. Чуйко С.М., Старкова О.В. Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика*. 2011. Т. 22, № 1. С. 157–172.
 12. Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е. Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Динамические системы*. 2012. Т. (2)30, № 1–2. С. 169–186.
 13. Несмєлова О.В. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2018. Т. 32. С. 78–91.
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-9.

14. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On blow-up solutions and dead zones in semilinear equations. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 4. С. 9–15.
DOI: 10.15407/dopovidi2018.04.009.
15. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 10. С. 9–17.
DOI: 10.15407/dopovidi2018.10.009.
16. Несмелова О.В. Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. 2019. Т. 89. С. 10–20.
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-02.
17. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про положення рівноваги узагальненої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 218–231. DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-17.
18. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On semilinear equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2019. № 7. С. 9–16. DOI: 10.15407/dopovidi2019.07.009.
19. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. 2019. Т. 90. С. 60–72. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-90-04.
20. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона-Канторовича в теорії автономних нетерових крайових задач в случае параметрического резонанса. *Доповіді Національної академії наук України*. 2019. №12. С. 3–12. DOI: 10.15407/dopovidi2019.12.003.
21. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the quasilinear Poisson equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 1. С. 3–12.
DOI: 10.15407/dopovidi2020.01.003.

22. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 5. С. 10–16.
DOI: 10.15407/dopovidi2020.05.003.
23. Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Комп. исследов. и моделирование*. 2011. Т. 3, №4. С. 337–357.
24. Чуйко С.М., Старкова О.В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Комп. исследов. и моделирование*. 2012. Т. 4, №1. С. 31–43.
25. Чуйко С.М., Старкова О.В., Кулиш П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Комп. исследов. и модел.* 2014. Т. 6, №1. С. 27–43.
26. Чуйко С.М., Чуйко А.С., Старкова О.В. Периодическая задача для уравнения Лъенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики*. 2015. Т. 29. С. 157–171.
27. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Автономная периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2016. Т. 30. С. 133–142.
28. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2017. Т. 31. С. 140–150.
29. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in a plane and quasiconformal mappings. *Доповіді Національної академії наук України*. 2017. № 1. С. 10–16.
DOI: 10.15407/dopovidi2017.01.010.
30. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in the plane with measurable data. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 2. С. 12–18. DOI: 10.15407/dopovidi2018.02.012.

Зміст

Зміст	16
Перелік умовних позначень	19
ВСТУП	20
1 Необхідні відомості з теорії крайових задач та теорії квазіконформних відображень	28
1.1. Необхідні відомості з теорії лінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач	28
1.2. Нелінійна крайова задача у випадку параметричного резонансу	42
1.3. Квазіконформні відображення та еліптичні диференціальні рівняння на площині	50
Висновки до першого розділу	56
2 Нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі	57
2.1. Нелінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем	57
2.1.1. Лінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем.	58
2.1.2. Некритичний випадок.	65
2.1.3. Приведення диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку.	68
2.1.4. Критичний випадок першого порядку.	72
2.1.5. Приведення диференціально-алгебраїчної крайової задачі до критичного випадку першого порядку. . .	81
2.1.6. Нелінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем у випадку параметричного резонансу.	87

2.2.	Крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем	106
2.2.1.	Лінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем.	106
2.2.2.	Некритичний випадок.	117
2.2.3.	Критичний випадок першого порядку.	123
2.2.4.	Достатня умова існування розв'язку.	126
2.3.	Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних крайових задач	131
2.3.1.	Положення рівноваги нелінійних диференціально-алгебраїчних систем.	131
2.3.2.	Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних систем із запізненням.	137
2.3.3.	Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних крайових задач.	139
2.4.	Матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі . . .	145
2.4.1.	Положення рівноваги матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач.	145
2.5.	Матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з р-Лапласіаном	156
2.5.1.	Випадок розв'язності системи (2.129) відносно похідної	158
2.5.2.	Випадок нерозв'язності системи (2.129) відносно похідної.	163
	Висновки до другого розділу	169
3	Нелінійні крайові задачі у критичних випадках	170
3.1.	Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної	170
3.1.1.	Умови розв'язності нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної	171
3.1.2.	Періодична задача для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної.	177
3.2.	Автономна крайова задача у випадку параметричного резонансу	184
3.2.1.	Умови розв'язності крайової задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу.	185
3.2.2.	Ітераційна схема з використанням методу простих ітерацій.	192

3.2.3.	Ітераційна схема з використанням методу Ньютона–Канторовича.	196
3.2.4.	Періодична задача для рівняння Хілла у випадку параметричного резонансу.	200
3.2.5.	Періодична задача для рівняння Мат'є.	217
3.3.	Автономні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної .	235
3.3.1.	Періодична задача для рівняння типу Л'єнара, не розв'язаного відносно похідної.	236
Висновки до третього розділу		274

4 Напівлінійні еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині 275

4.1.	Квазіконформні відображення та напівлінійні еліптичні диференціальні рівняння на площині	275
4.1.1.	Теорема факторизації та її наслідки.	277
4.1.2.	Розв'язки, що вибухають ("blow-up") на границі напівлінійних еліптичних рівнянь.	281
4.1.3.	Задача з вільною границею.	293
4.2.	Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона . . .	296
4.2.1.	Потенціали та рівняння Пуассона.	297
4.2.2.	Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона в одиничному крузі.	304
4.2.3.	Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона в довільних гладких областях.	306
4.3.	Задача Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь . . .	308
4.3.1.	Задача Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь в анізотропних та неоднорідних середовищах.	308
4.3.2.	Деякі наслідки, пов'язані з застосуваннями.	310
Висновки до четвертого розділу		313
Загальні висновки		314

Предметний покажчик	315
----------------------------	------------

Бібліографія	316
---------------------	------------

Додаток	346
----------------	------------

Перелік умовних позначень

$\mathbb{R}^n$	простір дійсних векторів
$\mathbb{R}^{m \times n}$	простір дійсних $(m \times n)$ -матриць
$\mathbb{C}$	комплексна площина
$\mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$	простір дійсних, неперервних матриць
$\mathbb{C}_{m \times n}^1[a, b]$	простір неперервно-диференційовних матриць
$K \left[f(s) \right] (t)$	оператор Гріна задачі Коші
$K \left[f(s); \nu_0(s) \right] (t)$	узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи
$G \left[f(s); \alpha \right] (t)$	узагальнений оператор Гріна
$G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t)$	узагальнений оператор Гріна диференціально- алгебраїчної крайової задачі
A^+	псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця
$P_{A(t)}$	ортопроектор матриці A
$P_{A^*(t)}$	ортопроектор матриці, транспонованої до A
$P_{A_{\rho_1}(t)}$	матриця, утворена з ρ_1 лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора
$\ell z(\cdot, \varepsilon)$	лінійний векторний функціонал
$J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$	нелінійний векторний функціонал
$X_0(t)$	нормальна фундаментальна матриця
$\mathbb{N}(Q)$	нуль-простір матриці Q
$F(c_r^*) = 0$	рівняння для порожуючих констант
$\omega(z)$	квазіконформне відображення
$J_\omega(z)$	якобіан квазіконформного відображення $\omega(z)$
$J(w)$	якобіан оберненого квазіконформного відображення $\omega^{-1}(w)$

ВСТУП

Математичний опис численних явищ у багатьох галузях електроніки [227], теорії нелінійних коливань [194, 263], механіки [163, 181, 204], біології та радіотехніки [184, 263] приводить до необхідності дослідження нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних [104, 208, 217, 237, 242, 262, 265, 324]

$$F(z, z'_t, z'_x, z'_y, \dots, x, y, \dots, t) = 0.$$

У частковому випадку останнє рівняння приводить до нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної [195, 325]

$$F(z, z', t) = 0. \quad (i)$$

Тут $F(z, z', t)$ — нелінійна m -вимірна вектор-функція, визначена у деякій області фазового простору. Лінеаризація рівняння (i) приводить до лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t); \quad (ii)$$

тут $z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$ — невідома n -вимірна вектор-функція, крім того,

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}$$

— прямокутні матриці та $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — m -вимірний вектор. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або квадратною, але виродженою. Задачу про знаходження розв'язків лінійного рівняння (ii) можна віднести до некоректно поставленої [21, 183, 241, 257, 261], оскільки незначні збурення матриць $A(t)$, $B(t)$ та вектора $f(t)$ можуть привести до значних збурень розв'язків рівняння (ii).

Лінійне рівняння (ii) далі ми будемо називати диференціально-алгебраїчним, хоча у світі рівняння (ii) з прямокутною матрицею $A(t)$, або ж квадратною, але виродженою, називають сингулярними [28, 29, 30, 31, 172, 238, 241], алгебро-диференціальними [183, 268, 269], дескрипторними

[171, 202] та рівняннями, не розв'язаними відносно похідної [195].

Дослідженню лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь (ii) за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії, академіків НАН України А.М. Самойленка та М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука [128, 129, 241], а також численні роботи закордонних авторів S. Campbell, J.R. Magnus, В.Ф. Чистякова [28, 31, 178, 182, 183, 261, 268, 269]. У статтях [35, 41, 273] запропонована серія достатніх умов розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна задачі Коші для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (ii) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць. У статтях [22, 234] запропоновані умови розв'язності для нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з використанням узагальненої центральної канонічної форми [20], при цьому основним припущенням відносно лінійної частини диференціально-алгебраїчної системи є можливість приведення її до деякого канонічного виду, введеного в роботах В.Ф. Чистякова.

Окремо слід відзначити дослідження лінійних диференціальних рівнянь з необоротним оператором при похідній у нескінченновимірних просторах, започатковані у роботах С.Г. Крейна [209, 213], А.Г. Руткаса та Л.А. Власенко [136, 186, 238], Г.В. Деміденка [195], М.В. Фалалєєва [243, 260], С.П. Зубової [200, 201, 202, 203], А. Favini, А. Yagi [66], R.E. Showalter [144].

У статтях [22, 234] запропоновано схему дослідження нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у припущенні, що лінійна частина може бути приведена до центральної канонічної форми.

У статті [49] запропоновані умови розв'язності для нелінійної матричної диференціально-алгебраїчної системи (iii) у випадку розв'язності відносно похідної без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць. Розвитку даного підходу й буде присвячена дана дисертація.

До нелінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + Z(z(t), t) \quad (iii)$$

приводить вивчення багатьох процесів у теорії електричних мереж, радіотехніці, електроніці, робототехніці, фізиці [28, 137, 173, 185, 238], зокрема математичній економіці при дослідженні моделі Леонтьєва [116, 191, 229]. Тут $Z(z(t), t)$ — нелінійна m -вимірний вектор-функція, визна-

чена у деякій області фазового простору.

До нелінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь приводить також дослідження математичної моделі сонячної системи з урахуванням скінченної швидкості гравітації [246, 247].

Актуальність теми дослідження. Актуальність вивчення нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, пов'язана з тим фактом, що дослідження традиційної задачі [21], розв'язаної відносно похідної, буває, ускладнюється, наприклад, у випадку нелінійностей, не інтегровних в елементарних функціях. Приклад подібної ситуації наведений у статтях [258, 325]. Прикладом подібної ситуації може бути також автономна крайова задача, не розв'язана відносно похідної, зокрема, періодична задача для рівняння Лотки – Вольтерри [302, 188].

Дослідження нелінійних крайових задач тісно пов'язане з явищем параметричного резонансу, актуального у механіці [163, 181, 204], теорії стійкості руху [196, 226, 267], біології та радіотехніці [184, 205, 221, 227, 263], теорії нелінійних коливань [194], фізиці [169, 244, 245], хімії [12] та машинобудуванні [210]. Таким чином, особливістю даної дисертації є знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу в залежності від власної функції крайової задачі. Знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нелінійних крайових задач у випадку резонансу в залежності від деякої функції, яка забезпечує розв'язність крайової задачі, як відомо, є характерною відмінністю автономних крайових задач [16, 21].

Особливістю дисертації є також систематичне використання методу Ньютона-Канторовича [47, 206, 287] для знаходження умов існування та побудови розв'язків нелінійних крайових задач [15]. Зокрема, у випадку породжуючих фредгольмових $m = n$ крайових задач [140, 193, 225, 226] використовується класична схема методу Ньютона-Канторовича [206]. У випадку породжуючих нетерових $m \neq n$ крайових задач використовується модифікована схема методу Ньютона-Канторовича [47, 287], побудована С.М. Чуйком. Для породжуючих фредгольмових $m = n = 1$ скалярних крайових задач використовується класична схема методу Ньютона [236, 307].

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно

похідної.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, зокрема, нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, а також ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є конструктивні умови існування алгоритми знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром-Пенроузом) матриць та проекторів, конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А.М. Самойленка й О.А. Бойчука, метод найменших квадратів, розвинений для лінійних крайових задач у роботах М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, М.П. Кравчука та Н.І. Ахієзера. При розв'язанні проблем регуляризації некоректно поставлених лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєво використовується метод регуляризації некоректно поставлених крайових задач, розвинутий у роботах С.Г. Крейна, А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна та школою професора М.В. Азбелева. Різним аспектам теорії крайових задач присвячені роботи А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, І.Т. Кігурадзе, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука, М.Й. Ронто, В.П. Яковця та багатьох інших вчених. Серед іноземних вчених теорії крайових задач присвячені роботи таких науковців як G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, D. Bainov, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, O. Veivoda, S. Schwabik, T. Vogel, D. Wexler, зокрема, теорії крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь: S.L. Campbell, Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова. Ці методи застосовуються при аналізі крайових задач для різних класів систем: крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також, для операторних рівнянь у функціональних просторах.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

1. Побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.
2. Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу.
3. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схеми побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаної відносно похідної.
4. Досліджено напівлінійні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині. Доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення.
5. Для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Також отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з невикористаними граничними компонентами.

Особистий внесок здобувача. Результати, що ввійшли в дисертацію отримані автором особисто. Постановка задач у різних розділах проводилась спільно з А.М. Самойленком, В.Я. Гутлянським, С.М. Чуйком та В.І. Рязановим. Із результатів, надрукованих у сумісних статтях,

в основну частину дисертації ввійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком результатів розділу 4, де вклад співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на: XII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 13–15 травня 2010 р.); X Крымской Международной математической школе «Метод функций Ляпунова и его приложения» (г. Алушта, 13–18 сентября 2010 р.); Молодіжному науковому форумі «Наукові здобутки молодих учених: на шляху до інновацій» (Донецьк, 2010 р.); XVIII Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Пущино, Россия, 24–29 января 2011 г.); XIX Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Дубна, Россия, 30 января – 4 февраля 2012 г.); XIV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 19 – 21 квітня 2012 р.); Міжнародній науковій конференції, присвяченій 70-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка (м. Кам'янець-Подільський, 6–8 червня 2012 р.); XIX Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Пущино, Россия, 28 января – 2 февраля 2013 г.); Міжнародній науковій конференції «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75 - річчя акад. А.М. Самойленка (м. Слов'янськ, 12–14 червня 2013 р.); Міжнародній науковій конференції «Боголюбовські читання DIF - 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», присвяченій ювілею акад. НАН України А.М. Самойленка (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.); Crimea International Mathematical Conference (Sudak, Crimea, September 22 – October 4, 2013); Седьмой Международной научно-теоретической конференции «Образование и наука в третьем тысячелетии» (г. Барнаул, Россия, 2013 г.); XXI Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Дубна, Россия, 3–7 февраля 2014 г.); XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 15–17 травня 2014 р.); 18-й Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (г. Харьков, 2014 г.); XVII International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation» (Kyiv, May 27 – 29, 2015); Международном симпозиуме «Математика и глобальные вызовы XXI века» (г. Пермь, Россия, 16–21 мая 2016 г.); International conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv,

September 20–24, 2016); Семінарі «50 років теорії імпульсних крайових задач» відділу прикладної механіки ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'янськ, 4 травня 2017 р.); Міжнародній конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України О.І. Степанця (м. Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.); Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (м. Київ, 7–10 червня 2017 р.); Семінарі до 100-річчя С.Г. Крейна ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'янськ, 10 серпня 2017 р.); International Conference «Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications» (Bishkek, Kyrgyzstan, June 17–23, 2018); The Seventh International Workshop–2018 «Constructive Methods for Non-linear Boundary Value Problems» dedicated to Professor Miklos Ronto on the occasion of his 75th birthday (Miskolc, Hungary, July 5–8, 2018); 3-rd International Scientific Conference «Differential equations and control theory» (Kharkiv, September 25–27, 2018); Серії математичних семінарів до 80-річчя академіка НАН України А.М. Самойленка ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'янськ, 5 березня – 26 грудня 2018 р.); Серії математичних семінарів до 110 річчя академіка М.М. Боголюбова ІПММ НАН України та ДДПУ, (м. Слов'янськ, 20 березня, 22 квітня, 30 квітня 2019 р.); International Conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70-th anniversary of V. Sharko (Kyiv, September 25–28, 2019); XIX International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Kiyv, May 22-24, 2019); Серії математичних семінарів, присвячених року математики в Україні, ІПММ НАН України та ДДПУ (м. Слов'янськ, 27 грудня 2019 р., 3-4 березня 2020 р.); Об'єднаному семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань, відділу математичних проблем механіки та теорії керування і відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України (м. Київ, 13 липня 2020 року).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку виконаних джерел, що містить 330 найменувань та 1 додатку. Повний обсяг роботи становить 353 сторінки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота здійснювалась згідно з планами наукової роботи Донбаського державного педагогічного університету, Інституту прикладної

математики і механіки НАН України та планом досліджень спільної із Донбаським державним педагогічним університетом міжвідомчої лабораторії «Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь» Інституту математики НАН України та пов'язана з тематичними планами фундаментальних науково-дослідних робіт «Конструктивні методи аналізу нетерових крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень» (р/н 0115U003182), 2015–2017 рр. та «Конструктивні методи аналізу матричних крайових задач для систем диференціальних, диференціально-алгебраїчних та функціонально-диференціальних рівнянь і теорії наближень» (р/н 0118U003390), 2018 -2020 рр., які фінансуються Міністерством освіти і науки України й виконуються в ДДПУ.

Також дисертаційна робота виконувалась за фінансової підтримки Грантів Президента України для докторів наук «Задачі синтезу керування для нелінійних систем з багатомасштабною динамікою» (р/н 0117U006155), 2017 р.; «Класифікаційні методи теорії наближень, теорії крайових задач та їх застосування для керування складними механічними системам» (р/н 0118U00531), 2018 р. та «Стабілізація траєкторій динамічних систем з гібридними керуваннями та проблеми апроксимації розв'язків граничних задач» (р/н 0119U103214), 2019 р.

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів, пропозиції щодо використання наукових результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Крім того, отримані результати успішно використовуються в навчальному процесі в Донбаському державному педагогічному університеті. Отримані результати можуть бути використані в навчальних курсах з теорії диференціально-алгебраїчних крайових задач для студентів класичних, педагогічних і технічних університетів.

Автор висловлює щирі подяку науковому консультанту — академіку НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору А.М. Самойленку, члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку, члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору В.Я. Гутлянському та доктору фіз.-мат. наук, професору С.М. Чуйку за постійну увагу до роботи та обговорення одержаних результатів.

Розділ 1

Необхідні відомості з теорії крайових задач та теорії квазіконформних відображень

1.1. Необхідні відомості з теорії лінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач

Будемо досліджувати задачу про побудову розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}_n^1[a, b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^n$$

лінійної диференціально-алгебраїчної системи [278]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t); \quad (1.1)$$

тут $A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}_n[a, b]$ неперервний вектор-стовпець; далі, за традицією, нижній індекс останнього простору вектор-стовпців будемо опускати. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або квадратною, але виродженою.

Дослідженню диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії [28, 183, 241, 261, 268, 269]. У праці [31] запропоновано означення центральної канонічної форми лінійної диференціально-алгебраїчної системи і наведено підстановки, за допомогою яких задана система зводилась до центральної канонічної форми. Достатні умови звідності диференціально-алгебраїчної лінійної системи до центральної канонічної форми були отримані А.М. Самойленком і В.П. Яковцем [241]. Це дало змогу визначити структуру загального розв'язку ліній-

ної диференціально-алгебраїчної системи, з'ясувати достатні умови існування періодичних розв'язків вироджених систем із періодичними коефіцієнтами, а також розробити теорію асимптотичного інтегрування диференціально-алгебраїчних рівнянь. Необхідна умова перерахованих вище результатів, а саме, умова сталості рангу матриці при похідних, суттєво використовується у дисертації.

У статтях [35, 273] запропонована серія достатніх умов розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна задачі Коші для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (1.1) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць і не претендує на повноту охоплення всіх диференціально-алгебраїчних рівнянь. Досліджуватимемо задачу про побудову умов розв'язності, а також конструкції узагальненого оператора Гріна задачі Коші лінійної диференціально-алгебраїчної системи для довільних натуральних m і n . За умови [35, 273]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a; b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a; b] \quad (1.2)$$

система (1.1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \quad (1.3)$$

тут $\text{rank } A(t) := \sigma_0 = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (по Муру – Пенроузу) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор [21, 148, 166, 214, 218, 259, 266]: $P_{A^*(t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ — матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ — матриці-ортопроектора $P_A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(t))$. Таким чином, за умови $\rho_0 \neq 0$ система (1.3), розв'язна відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.3). За умови (1.2) система (1.3), а відповідно і система (1.1), має розв'язок

вигляду [35, 273, 278]

$$z(t, c) = X_0(t)c + X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 1.1.1. *За умови (1.2) система (1.1) має розв'язок вигляду*

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.1).

Оскільки за умови (1.2) система (1.1) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$, то, по аналогії з класифікацією імпульсних крайових задач [179], випадок (1.2) будемо називати невинродженим. З іншого боку, на відміну від класифікації імпульсних крайових задач, мова йде про розв'язність диференціально-алгебраїчної системи (1.2), а не відповідної крайової задачі.

За умови $P_{A^*(t)} \equiv 0$, але $A^+(t)B(t) \notin \mathbb{C}_{n \times n}[a; b]$, або $A^+(t)f(t) \notin \mathbb{C}[a; b]$, система (1.1) розв'язна, але розв'язок $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a, b]$ не є шуканим.

За умови $P_{A^*(t)} \neq 0$ система (1.1) не розв'язна відносно похідної. Припустимо, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме: $1 \leq \text{rank } A(t) = \sigma_0$. Як відомо [167], довільна $(m \times n)$ —матриця $A(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad R_0(t) \in \mathbb{C}_{m \times m}[a, b];$$

тут $R_0(t)$ і $S_0(t)$ — невинроджені матриці: $S_0(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b]$. Дійсно: довільна $(m \times n)$ —матриця $A(t)$ може бути представлена у вигляді скелетного розкладу $A(t) = \Phi(t)\Psi(t)$; тут матриця $\Phi(t) \in \mathbb{C}_{m \times \sigma_0}[a, b]$ і матриця $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0 \times n}[a, b]$ повного рангу [190, с. 31]:

$$\text{rank } A(t) = \text{rank } \Phi(t) := \text{rank } \Psi(t) := \sigma_0.$$

При цьому матриця $\Phi(t)$ утворена із σ_0 стовпців, що складають алгебраїчний базис [206, с. 74] стовпців матриці $A(t)$, а матриця $\Psi(t)$ визначає [190, с. 31] координати стовпців матриці $A(t)$ в базисі $\Phi(t)$. Представимо

матрицю J_{σ_0} у вигляді

$$J_{\sigma_0} = V \cdot W, \quad V := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} \\ O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times \sigma_0}, \quad W := (I_{\sigma_0} \ O) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times n}.$$

Рівняння $\Phi(t) = R_0(t) V$ відносно матриці $R_0(t)$ розв'язне, оскільки розв'язне рівнозначне йому рівняння

$$\Phi^*(t) = V^* R_0^*(t).$$

Розв'язність останнього рівняння визначає очевидну рівність $P_V = 0$, при цьому

$$R_0^*(t) = (V^+)^* \Phi^*(t) + P_{V^*} C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \text{rank } P_{V^*} = m - \sigma_0,$$

відповідно

$$R_0(t) = \Phi(t) V^+ + C_1 P_{V^*}.$$

Зауважимо, що перший доданок належить образу матриці V , а другий — ортогональному йому нуль-простору $\mathbb{N}(V^*)$. Оскільки

$$\text{rank } \Phi(t) V^+ = \text{rank } (\Phi(t) \ O) = \sigma_0,$$

то, за належного вибору матриці $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, має місце рівність $\text{rank } \Phi = \sigma_0$. Аналогічно, за належного вибору матриці $C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, знаходимо невиврожену матрицю

$$S_0(t) = W^+ \Psi(t) + P_W C_2.$$

Невиврожена заміна змінної $y(t) = S_0(t) z(t)$ приводить систему (1.1) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y'(t) = C_0(t) y(t) + R_0^{-1}(t) f(t); \quad (1.4)$$

тут

$$C_0(t) := (J_{\sigma_0} S_0'(t) + R_0^{-1}(t) B(t)) S_0^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(t) & C_{12}^{(0)}(t) \\ C_{21}^{(0)}(t) & C_{22}^{(0)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}_n^1[a, b], \quad u(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^1[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}_{n-\sigma_0}^1[a, b]$$

приводить систему (1.4) до вигляду

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t) u(t) + C_{12}^{(0)}(t) v(t) + g_1^{(0)}(t), \quad (1.5)$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + g_2^{(0)}(t) = 0, \quad (1.6)$$

Тут $P_{D_0^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{D_0^*}(t) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*(t))$, крім того

$$R_0^{-1}(t)f(t) := \text{col} \left(g_1^{(0)}(t), g_2^{(0)}(t) \right).$$

Рівняння (1.6) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [21, 122]

$$P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0;$$

в цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.6)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(t) - D_0^+(t)g_2^{(0)}(t),$$

$$D_0(t) := \left[C_{21}^{(0)}(t); C_{21}^{(0)}(t) \right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0) \times n}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ — матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(t)$ — матриці-ортопроектора: $P_{D_0}(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(D_0(t))$. Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t)$ і добутку $D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{col} (P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t)), \quad D_0^+(t)g_2^{(0)}(t) = - \text{col} \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\varphi'(t) = B_1(t)\varphi(t) + f_1(t), \quad A_1(t) := P_1^{(0)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times \rho_0}; \quad (1.7)$$

тут

$$B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - A_1'(t),$$

крім того

$$\text{rank } A_1(t) := \sigma_1 = \sigma_0 \leq \rho_0,$$

$$f_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)f_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)f_2^{(1)}(t) + g_1^{(0)}(t) - \left(f_1^{(1)}(t) \right)'.$$

За умови [41, 272, 273]

$$P_{A^*} \neq 0, \quad P_{A_1^*} \equiv 0, \quad P_{D_0^*}f_1(t) \equiv 0, \quad (1.8)$$

$$A_1^+(t)B_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0 \times \sigma_0}[a; b], \quad A_1^+(t)f_1(t) \in \mathbb{C}[a; b]$$

система (1.7) розв'язна відносно похідної

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\varphi + \mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)), \quad \nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a; b]; \quad (1.9)$$

тут

$$\mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)) := A_1^+(t)f_1(t) + P_{A_{\rho_1}}(t)\nu_1(t).$$

Крім того $P_{A_1^*}(t)$ — матриця-ортопроектор [21]: $P_{A_1^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1^*(t))$, $P_{A_{\rho_1}}(t)$ — $(n \times \rho_1)$ — матриця, утворена із ρ_1 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_0 \times \rho_0)$ — матриці-ортопроектора $P_{A_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1(t))$. Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$U_1'(t) = A_1^+(t)B_1(t)U_1(t), \quad U_1(a) = I_{\rho_1}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.9). За умови (1.8) система (1.9), а відповідно і система (1.1), має розв'язок вигляду [278]

$$\begin{aligned} z(t, c_{\rho_1}) &= X_1(t)c_{\rho_1} + P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\right](t) - \\ &\quad - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\right](t) := \\ &= X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) ds. \end{aligned}$$

Лема 1.1.2. *За умови (1.8) лінійна диференціально-алгебраїчна система (1.1) має розв'язок вигляду*

$$\begin{aligned} z(t, c_{\rho_1}) &= X_1(t)c_{\rho_1} + K\left[f(s), \nu_1(s)\right](t), \\ X_1(t) &:= P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1}, \end{aligned}$$

де

$$K\left[f(s), \nu_1(s)\right](t) := P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\right](t) - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.1).

За умов $P_{A^*} \neq 0$, $P_{A_1^*} \equiv 0$, $P_{D_0^*}f_1(t) = 0$, але $A_1^+(t)B_1(t) \notin \mathbb{C}_{\sigma_0 \times \sigma_0}[a; b]$,

або $A_1^+(t)f_1(t) \notin \mathbb{C}[a; b]$, система (1.1) розв'язна, але розв'язок $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a, b]$ не є шуканим. По аналогії з класифікацією імпульсних крайових задач [179] у випадку (1.8) будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (1.1) має місце виродження першого порядку.

За умови $P_{A^*(t)} \neq 0$ і $P_{A_1^*(t)} \neq 0$ диференціально-алгебраїчна система (1.7) не розв'язна відносно похідної. Припустимо, що матриця $A_1(t)$ має сталий ранг: $\text{rank } A_1(t) = \sigma_1$; в цьому випадку матриця $A_1(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді

$$A_1(t) = R_1(t) \cdot J_{\sigma_1} \cdot S_1(t), \quad J_{\sigma_1} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_1} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$R_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0 \times \sigma_0}[a, b], S_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times \rho_0}[a, b];$$

тут $R_1(t)$ і $S_1(t)$ — невироджені матриці. Невироджена заміна змінної

$$\psi(t) = S_1(t)\varphi(t)$$

приводить систему (1.7) до вигляду

$$J_{\sigma_1}\psi'(t) = C_1(t)\psi(t) + R_1^{-1}(t)f_1(t); \quad (1.10)$$

тут

$$C_1(t) := (J_{\sigma_1}S_1'(t) + R_1^{-1}(t)B_1(t))S_1^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)}(t) & C_{12}^{(1)}(t) \\ C_{21}^{(1)}(t) & C_{22}^{(1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$\psi(t) = \text{col}(\xi(t), \zeta(t)) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b], \quad \xi(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_1}^1[a, b], \quad \zeta(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 - \sigma_1}^1[a, b]$$

приводить систему (1.10) до вигляду

$$\xi'(t) = C_{11}^{(1)}(t)\xi(t) + C_{12}^{(1)}(t)\zeta(t) + g_1^{(1)}(t), \quad (1.11)$$

$$C_{21}^{(1)}(t)\xi(t) + C_{22}^{(1)}(t)\zeta(t) + g_2^{(1)}(t) = 0, \quad (1.12)$$

де

$$R_1^{-1}(t)f_1^{(1)}(t) := \text{col}(g_1^{(1)}(t), g_2^{(1)}(t)).$$

Рівняння (1.12) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [35, 273, 272]

$$P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0, \quad D_1(t) := \begin{bmatrix} C_{21}^{(1)}(t); & C_{22}^{(1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\rho_0 - \sigma_1) \times \rho_0};$$

тут $P_{D_1^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{D_1^*}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0 - \sigma_1} \rightarrow \mathbb{N}(D_1^*(t))$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.12)

$$\psi(t) = P_{D_{\rho_1}}\mu(t) - D_1^+(t)g_2^{(1)}(t), \quad \mu(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}^1[a, b]$$

визначає $P_{D_{\rho_1}}(t) - (\rho_0 \times \rho_1)$ — матриця, утворена із ρ_1 лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{D_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \rightarrow \mathbb{N}(D_1(t))$. Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_1}}(t)$ і добутку $D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)$

$$P_{D_{\rho_1}}(t) := \text{col} \left(P_1^{(1)}(t), P_2^{(1)}(t) \right), \quad D_1^+(t)g_2^{(1)}(t) := - \text{col} \left(f_1^{(2)}(t), f_2^{(2)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\mu(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_2(t)\mu'(t) = B_2(t)\mu(t) + f_2(t), \quad A_2(t) := P_1^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_1 \times \rho_1}; \quad (1.13)$$

тут

$$B_2(t) := C_{11}^{(1)}(t)P_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(1)}(t)P_2^{(1)}(t) - A_2'(t),$$

крім того

$$f_2(t) := C_{11}^{(1)}(t)f_1^{(2)}(t) + C_{12}^{(1)}(t)f_2^{(2)}(t) + g_1^{(1)}(t) - \left(f_1^{(2)}(t) \right)'.$$

За умови [272]

$$\begin{cases} P_{A^*}(t) \neq 0, & P_{A_1^*}(t) \neq 0, & P_{A_2^*}(t) \equiv 0, & P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \\ P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0, & A_2^+(t)B_2(t) \in \mathbb{C}[a; b], & A_2^+(t)f_2(t) \in \mathbb{C}[a; b] \end{cases} \quad (1.14)$$

система (1.13) розв'язна відносно похідної:

$$\mu' = A_2^+(t)B_2(t)\mu + \mathfrak{F}_2(t, \nu_2(t)), \quad \nu_2(t) \in \mathbb{C}_{\rho_2}[a; b]; \quad (1.15)$$

тут $\mathfrak{F}_2(t, \nu_2(t)) := A_2^+(t)f_2(t) + P_{A_{\rho_2}}(t)\nu_2(t)$. Крім того $P_{A_2^*}(t)$ — матриця-ортопроектор [21]: $P_{A_2^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_1} \rightarrow \mathbb{N}(A_2^*(t))$, $P_{A_{\rho_2}}(t) - (\rho_1 \times \rho_2)$ — матриця, утворена із ρ_2 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_1 \times \rho_1)$ — матриці-ортопроектора $P_{A_2}(t) : \mathbb{R}^{\rho_1} \rightarrow \mathbb{N}(A_2(t))$. Відмітимо, що за умови (1.14) $\text{rank } A_2(t) := \sigma_2 = \sigma_1 \leq \rho_1$. Позначимо $U_2(t)$ нормальну фундаментальну

матрицю:

$$U_2'(t) = A_2^+(t)B_2(t)U_2(t), \quad U_2(a) = I_{\rho_1}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.15). За умови (1.14) система (1.15), а відповідно і система (1.1), має розв'язок вигляду [278]

$$\begin{aligned} z(t, c_{\rho_2}) &= S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)P_{D_{\rho_1}}U_2(t)c_{\rho_2} + \\ &+ S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)\left\{P_{D_{\rho_1}}K\left[\mathfrak{F}_2(s, \nu_2(s))\right](t) - D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)\right\}, \end{aligned}$$

де

$$K\left[\mathfrak{F}_2(s, \nu_2(s))\right](t) := U_2(t) \int_a^t U_2^{-1}(s) \mathfrak{F}_2(s, \nu_2(s)) ds, \quad c_{\rho_2} \in \mathbb{R}^{\rho_2}.$$

Лема 1.1.3. *За умови (1.14) лінійна диференціально-алгебраїчна система (1.1) має розв'язок вигляду*

$$z(t, c_{\rho_2}) = X_2(t)c_{\rho_2} + K\left[f(s), \nu_2(s)\right](t), \quad X_2(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)P_{D_{\rho_1}}U_2(t),$$

де

$$\begin{aligned} K\left[f(s), \nu_2(s)\right](t) &:= S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t) \times \\ &\times \left\{P_{D_{\rho_1}}K\left[\mathfrak{F}_2(s, \nu_2(s))\right](t) - D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)\right\} \end{aligned}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.1).

По аналогії з класифікацією імпульсних крайових задач [179] у випадку (1.14) будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (1.1) має місце виродження другого порядку. За умови

$$P_{A^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_1^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_2^*(t)} \equiv 0, \quad P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \quad P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0,$$

але $A_2^+(t)B_2(t) \notin \mathbb{C}_{n \times n}[a; b]$, або $A_2^+(t)f_2(t) \notin \mathbb{C}[a; b]$, система (1.1) розв'язна, але розв'язок $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a, b]$ не є шуканим. За умови

$$P_{A^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_1^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_2^*(t)} \equiv 0, \quad P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \quad P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \neq 0$$

система (1.1) не розв'язна. Порівняємо ранги матриць $A_0(t) := A(t)$, $A_1(t)$ і $A_2(t)$ у рівняннях (1.1), (1.7) і (1.13), які визначають умови розв'язності системи (1.1). У невиврожденному випадку для розв'язності си-

стеми (1.1) достатньо тотожності $P_{A_0^*(t)} \equiv 0$, в цьому випадку

$$1 \leq \text{rank } A_0(t) := \sigma_0 = m \leq n.$$

У випадку виродження першого порядку $P_{A_0^*(t)} \neq 0$, відповідно $\sigma_0 < m$, при цьому для розв'язності системи (1.1) достатньо тотожності $P_{A_1^*(t)} \equiv 0$; в цьому випадку

$$1 \leq \text{rank } A_1(t) := \sigma_1 := \sigma_0 < \min(m, n).$$

У виродженому випадку другого порядку $P_{A_0^*(t)} \neq 0$ і $P_{A_1^*(t)} \neq 0$, при цьому для розв'язності системи (1.1) достатньо тотожності $P_{A_2^*(t)} \equiv 0$; в цьому випадку

$$1 \leq \text{rank } A_2(t) := \sigma_2 := \sigma_1 < \sigma_0 < \min(m, n).$$

Продовжуючи міркування, припустимо, що після розщеплення систем (1.1), (1.7), (1.13), ..., , отримано рівняння

$$A_k(t) \kappa'(t) = B_k(t) \kappa(t) + f_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.16)$$

не розв'язне відносно похідної: $P_{A_0^*(t)} \neq 0$, $P_{A_1^*(t)} \neq 0$, ... і $P_{A_k^*(t)} \neq 0$, при цьому розв'язні проміжні рівняння (1.6), (1.12), ..., , а саме:

$$P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \quad P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0, \quad \dots, \quad P_{D_{k-1}^*}(t)g_2^{(k-1)}(t) \equiv 0.$$

припустимо також, що матриця $A_k(t)$ має сталий ранг: $\text{rank } A_k(t) = \sigma_k$; при цьому матриця $A_k(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді

$$A_k(t) = R_k(t) \cdot J_{\sigma_k} \cdot S_k(t), \quad J_{\sigma_k} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_k} & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

тут

$$R_k(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_{k-1} \times \sigma_{k-1}}[a, b], \quad S_k(t) \in \mathbb{C}_{\rho_{k-1} \times \rho_{k-1}}[a, b]$$

— невироджені матриці. Невироджена заміна змінної

$$\kappa(t) = S_k(t) \omega(t)$$

приводить систему (1.16) до вигляду

$$J_{\sigma_k} \omega'(t) = C_k(t) \omega(t) + R_k^{-1}(t) f_k(t); \quad (1.17)$$

тут

$$C_k(t) := (J_{\sigma_k} S'_k(t) + R_k^{-1}(t)B(t)) S_k^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)}(t) & C_{12}^{(k)}(t) \\ C_{21}^{(k)}(t) & C_{22}^{(k)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$\omega(t) = \text{col} (\omega_1(t), \omega_2(t)) \in \mathbb{C}_{\rho_{k-1}}^1[a, b],$$

$$\omega_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_k}^1[a, b], \quad \omega_2(t) \in \mathbb{C}_{\rho_{k-1}-\sigma_k}^1[a, b]$$

приводить систему (1.17) до вигляду

$$\omega'_1(t) = C_{11}^{(k)}(t)\omega_1(t) + C_{12}^{(k)}(t)\omega_2(t) + g_1^{(k)}(t), \quad (1.18)$$

$$C_{21}^{(k)}(t)\omega_1(t) + C_{22}^{(k)}(t)\omega_2(t) + g_2^{(k)}(t) = 0, \quad (1.19)$$

де

$$R_k^{-1}(t)f_k(t) := \text{col} \left(g_1^{(k)}(t), g_2^{(k)}(t) \right).$$

Рівняння (1.19) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [35, 272, 273]

$$P_{D_k^*}(t)g_2^{(k)}(t) = 0, \quad D_k(t) := \begin{bmatrix} C_{21}^{(k)}(t); & C_{21}^{(k)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\rho_{k-1}-\sigma_k) \times \rho_{k-1}};$$

тут $P_{D_k^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{D_k^*}(t) : \mathbb{R}^{\rho_{k-1}-\sigma_k} \rightarrow \mathbb{N}(D_k^*(t))$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.19)

$$\omega(t) = P_{D_{\rho_k}} \theta(t) - D_k^+(t)g_2^{(k)}(t), \quad \theta(t) \in \mathbb{C}_{\rho_k}^1[a, b]$$

визначає $P_{D_{\rho_k}}(t)$ — $(\rho_{k-1} \times \rho_k)$ — матриця, утворена із ρ_k лінійно-незалежних стовпців $P_{D_k}(t)$ ортопроектора: $P_{D_k}(t) : \mathbb{R}^{\rho_{k-1}} \rightarrow \mathbb{N}(D_k(t))$. Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_k}}(t)$ і добутку $D_k^+(t)g_2^{(k)}(t)$

$$P_{D_{\rho_k}}(t) := \text{col} \left(P_1^{(k)}(t), P_2^{(k)}(t) \right),$$

$$D_k^+(t)g_2^{(k)}(t) := - \text{col} \left(f_1^{(k+1)}(t), f_2^{(k+1)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\theta(t) \in \mathbb{C}_{\rho_k}^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_{k+1}(t)\theta'(t) = B_{k+1}(t)\theta(t) + f_{k+1}(t), \quad A_{k+1}(t) := P_1^{(k+1)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_k \times \rho_k}; \quad (1.20)$$

тут

$$B_{k+1}(t) := C_{11}^{(k)}(t)P_1^{(k)}(t) + C_{12}^{(k)}(t)P_2^{(k)}(t) - A'_{k+1}(t),$$

крім того

$$f_{k+1}(t) := C_{11}^{(k)}(t)f_1^{(k+1)}(t) + C_{12}^{(k)}(t)f_2^{(k+1)}(t) + g_1^{(k)}(t) - \left(f_1^{(k+1)}(t)\right)'.$$

За умови [35, 272]

$$\begin{cases} P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A_1^*(t)} \neq 0, \dots, P_{A_k^*(t)} \neq 0, P_{A_{k+1}^*(t)} \equiv 0, \\ P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \dots, P_{D_k^*}(t)g_2^{(k)}(t) \equiv 0, \\ A_{k+1}^+(t)B_{k+1}(t) \in \mathbb{C}[a; b], A_{k+1}^+(t)f_{k+1}(t) \in \mathbb{C}[a; b] \end{cases} \quad (1.21)$$

система (1.20) розв'язна відносно похідної:

$$\theta' = A_{k+1}^+(t)B_{k+1}(t)\theta + \mathfrak{F}_{k+1}(t, \nu_{k+1}(t)), \nu_{k+1}(t) \in \mathbb{C}_{\rho_{k+1}}[a; b]; \quad (1.22)$$

тут $\mathfrak{F}_{k+1}(t, \nu_{k+1}(t)) := A_{k+1}^+(t)f_{k+1}(t) + P_{A_{\rho_{k+1}}}(t)\nu_{k+1}(t)$. Крім того $P_{A_{k+1}^*}(t)$ — матриця-ортопроектор [21]: $P_{A_{k+1}^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_k} \rightarrow \mathbb{N}(A_{k+1}^*(t))$, $P_{A_{\rho_{k+1}}}(t)$ — $(\rho_k \times \rho_{k+1})$ — матриця, утворена із ρ_{k+1} лінійно-незалежних стовпців $(\rho_k \times \rho_k)$ — матриці-ортопроектора $P_{A_{k+1}}(t) : \mathbb{R}^{\rho_k} \rightarrow \mathbb{N}(A_{k+1}(t))$. Зауважимо, що за умови (1.21)

$$1 \leq \text{rank } A_{k+1}(t) := \sigma_{k+1} = \sigma_k < \sigma_{k-1} < \dots < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 < \min(m, n).$$

В силу скінченності числа рядків $m \in \mathbb{N}$ матриць $A(t)$ і $B(t)$, за умови (1.21), послідовність $\{\sigma_k\}$ монотонно спадаюча, причому обмежена знизу, отже, згідно теореми Вейерштрасса [215, с. 102] послідовність $\{\sigma_k\}$ має границю $\sigma_p \geq 1$. За умови

$$P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A_1^*(t)} \neq 0, \dots, P_{A_k^*(t)} \neq 0, P_{A_{k+1}^*(t)} \equiv 0,$$

$$P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \dots, P_{D_k^*}(t)g_2^{(k)}(t) \equiv 0$$

будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (1.1) має місце виродження порядку $p := k + 1$. За умови (1.21) система (1.22), а отже і система (1.1) розв'язні. Дійсно, позначимо $U_p(t)$ нормальну фундаментальну матрицю:

$$U_p'(t) = A_p^+(t)B_p(t)U_p(t), U_p(a) = I_{\rho_{p-1}}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.22).

За умови (1.21) система (1.22), а отже і система (1.1), має розв'язок вигляду [278]

$$z(t, c_{\rho_p}) = \prod_{i=0}^p S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} U_p(t) c_{\rho_p} + \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} S_{p-1}^{-1}(t) \times \\ \times \left\{ P_{D_{\rho_{p-1}}} K \left[\mathfrak{F}_p(s, \nu_p(s)) \right] (t) - D_{p-1}^+(t) g_p^{(1)}(t) \right\},$$

де

$$K \left[\mathfrak{F}_p(s, \nu_p(s)) \right] (t) := U_p(t) \int_a^t U_p^{-1}(s) \mathfrak{F}_2(s, \nu_p(s)) ds, \quad c_{\rho_p} \in \mathbb{R}^{\rho_p}.$$

Теорема 1.1.1. У не виродженому випадку, за умови (1.2) для довільної неперервної вектор-функції $f(t) \in \mathbb{C}_m[a, b]$ система (1.1) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

який залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$.

У випадку виродження першого порядку, за умови (1.8) лінійна диференціально-алгебраїчна система (1.1) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t),$$

$$X_1(t) := P_{D_{\rho_0}} S_0^{-1}(t) U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

який залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$.

У випадку виродження другого порядку, за умови (1.14) лінійна диференціально-алгебраїчна система (1.1) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_2}) = X_2(t)c_{\rho_2} + K \left[f(s), \nu_2(s) \right] (t), \quad c_{\rho_2} \in \mathbb{R}^{\rho_2},$$

який залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_2(t) \in \mathbb{C}_{\rho_2}[a, b]$.

У випадку виродження порядку p , за умови (1.21) лінійна диференціально-алгебраїчна система (1.1) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_p}) = X_p(t)c_{\rho_p} + K \left[f(s), \nu_p(s) \right] (t),$$

$$X_p(t) := \prod_{i=0}^p S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} U_p(t), \quad c_{\rho_p} \in \mathbb{R}^{\rho_p},$$

який залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a, b]$. Тут

$$K[f(s), \nu_p(s)](t) := \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} S_{p-1}^{-1}(t) \left\{ P_{D_{\rho_{p-1}}} K \left[\mathfrak{F}_p(s, \nu_p(s)) \right](t) - \right. \\ \left. - D_{p-1}^+(t) g_p^{(1)}(t) \right\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.1).

За умови

$$P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A_1^*(t)} \neq 0, \dots, P_{A_p^*(t)} \equiv 0, P_{D_{p-1}^*}(t) g_p^{(1)}(t) \equiv 0,$$

але $A_p^+(t) B_p(t) \notin \mathbb{C}_{n \times n}[a; b]$, або $A_p^+(t) g_p(t) \notin \mathbb{C}[a; b]$, система (1.1) розв'язна, але розв'язок $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a, b]$ не є шуканим. За умови

$$P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A_1^*(t)} \equiv 0, \dots, P_{A_p^*(t)} \equiv 0, P_{D_0^*}(t) f_2(t) \equiv 0, \dots,$$

$$P_{D_1^*}(t) g_2^{(1)}(t) \neq 0$$

система (1.1) не розв'язна.

Запропонована схема дослідження диференціально-алгебраїчних систем аналогічно [43, 48] може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі. З іншого боку, у випадку нерозв'язності, диференціально-алгебраїчні крайові задачі можуть бути регуляризовані аналогічно [42, 257]. Запропонована схема дослідження диференціально-алгебраїчних систем аналогічно [21, 49, 193] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

1.2. Нелінійна крайова задача у випадку параметричного резонансу

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

крайової задачі [276]

$$dz/dt = A(t)z + f(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z, \mu, t, \varepsilon), \quad (1.23)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha(\varepsilon) + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)$$

у малому околі розв'язку породжуючої задачі

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t, \varepsilon), \quad \ell z_0(\cdot, \varepsilon) = \alpha(\varepsilon), \quad (1.24)$$

$$\alpha(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m.$$

Тут $A(t)$ — $(n \times n)$ -вимірна матриця і $f(t, \varepsilon)$ — n -вимірний вектор-стовпець, елементи яких — неперервні на відрізку $[a, b]$ дійсні функції. Припустимо нелінійну вектор-функцію $Z(z, \mu, t, \varepsilon)$ неперервно-диференційовною по z і неперервно-диференційовною по μ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (1.24) і початкового значення $\mu_0(\varepsilon)$ власної функції $\mu(\varepsilon)$; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений функціонал $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Крім того, вважаємо нелінійну вектор-функцію $Z(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ і неоднорідність породжуючої задачі $f(t, \varepsilon)$ неперервними по t на відрізку $[a, b]$ і по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Нелінійний векторний функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ вважаємо неперервно-диференційовним по z в малому околі розв'язку породжуючої задачі (1.24) і неперервно-диференційовним по μ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (1.24) та початкового значення $\mu_0(\varepsilon)$ функції $\mu(\varepsilon)$, а також неперервним по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлена задача узагальнює традиційні періодичні крайові задачі у випадку параметричного резонансу, досліджені в монографіях [227, 327, 330] на випадок загальної нетерової крайової задачі, а також задачі [21, 193] на випадок параметричного резонансу та явної залежності неоднорідностей $f(t, \varepsilon)$ і $\alpha(\varepsilon)$ породжуючої системи від малого параметру. Припустимо невідому $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ неперервною функцією малого параметру ε . Дослідимо критичний випадок

$(P_{Q^*} \neq 0)$; за умови

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha(\varepsilon) - \ell K \left[f(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0$$

породжуюча задача (1.24) має $(r := n - n_1)$ – параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X_r(t) c_0(\varepsilon) + G \left[f(s, \varepsilon); \alpha(\varepsilon) \right] (t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (1.24),

$$Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rank } Q = n_1, \quad X_r(t) := X(t) P_{Q_r},$$

P_{Q_r} – $(n \times r)$ – матриця, утворена із r лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ – матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$ і P_{Q^*} – $(m \times m)$ – матриці-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$,

$$G \left[f(s, \varepsilon); \alpha(\varepsilon) \right] (t) = K \left[f(s, \varepsilon) \right] (t) + X(t) Q^+ \left\{ \alpha(\varepsilon) - \ell K \left[f(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (1.24),

$$K \left[f(s, \varepsilon) \right] (t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s, \varepsilon) ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (1.24), Q^+ – псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу [21]. Припустимо, що задача (1.23) в малому околі розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (1.24) має розв'язок

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \quad c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^r,$$

при цьому в достатньо малому околі початкового значення функції $\mu_0(\varepsilon)$ існує неперервна власна функція $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $\mu_0(0) := \mu_0^*$. Таким чином, приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

та функції $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ слабконелінійної крайової задачі

$$dx(t, \varepsilon)/dt = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1.25)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon), \quad (1.26)$$

розв'язної тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*} \left\{ J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0.$$

Позначимо вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ \mu_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}$$

В силу неперервності по z і по μ нелінійної функції $Z(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ і нелінійного векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (1.24) і початкового значення $\mu_0(\varepsilon)$ функції $\mu(\varepsilon)$ приходимо до наступного рівняння

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) &:= P_{Q^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell K \left[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Необхідні умови існування розв'язку крайової задачі (1.23) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема [276], що є узагальненням відповідного твердження [290] на випадок довільних нелінійностей, а також [21, 193] на випадок параметричного резонансу та явної залежності неоднорідностей $f(t, \varepsilon)$ і $\alpha(\varepsilon)$ породжуючої крайової задачі від малого параметру.

Лема 1.2.1. *Нехай крайова задача (1.23) представляє критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок і виконана умова розв'язності*

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha(\varepsilon) - \ell K \left[f(s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0$$

породжуючої задачі (1.24). Припустимо також, що в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ слабконелінійна крайова задача (1.23) має розв'язок

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при цьому в достатньо малому околі функції $\mu_0(\varepsilon)$ існує власна функція $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0. \tag{1.27}$$

За аналогією з слабконелінійними крайовими задачами в критичному випадку [21], а також періодичними крайовими задачами [193, 327, 330],

рівняння (1.27) будемо називати рівнянням для породжуючих констант задачі (1.23) у випадку параметричного резонансу. Припустимо, що рівняння (1.27) має неперервні дійсні корені. Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (1.27), приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

крайової задачі (1.25), (1.26) в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X_r(t)c_0(\varepsilon) + G\left[f(s); \alpha(\varepsilon)\right](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r.$$

а також функції

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

в околі точки $\mu_0(\varepsilon)$. В малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ і функції $\mu_0(\varepsilon)$ має місце наступне розвинення

$$\begin{aligned} Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right)x(t, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right)\zeta(\varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right) &= \left. \frac{\partial Z(z, \mu, t, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}}, \\ \mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_0), \mu_0(\varepsilon)\right) &= \left. \frac{\partial Z(z, \mu, t, \varepsilon)}{\partial \mu} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Залишок

$$\mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)$$

розвинення функції

$$Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)$$

більш високого порядку малості по $x(t, \varepsilon)$ і $\zeta(\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ і функції $\mu_0(\varepsilon)$, ніж перші три члени розвинення,

тому

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}(z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}(z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial \zeta} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (в сенсі Фреше) векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)$ по першому аргументу і неперервність по другому аргументу, виділяємо лінійні по x і по $\zeta(\varepsilon)$ частини $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ і $\ell_2(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)))$, цих функціоналів і член $J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), \varepsilon)$ нульового порядку по ε в околі точок $x = 0$ і $\zeta(\varepsilon) = 0$:

$$\begin{aligned} J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) &= J_0(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), \varepsilon) + \\ &+ \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)))\zeta(\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) &= \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}}, \\ \ell_2(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon))) &= \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \mu} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Залишок

$$J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

розвинення функціоналу

$$J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

більш високого порядку малості по $x(t, \varepsilon)$ і $\zeta(\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ і функції $\mu_0(\varepsilon)$, ніж перші три члени розвинення,

тому

$$\begin{aligned} J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \zeta} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Розв'язок $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1.25), (1.26) може бути представлений у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)\nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \nu(\varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t). \end{aligned}$$

Позначимо $(d \times (r + 1))$ -вимірну матрицю

$$\begin{aligned} D_0(\check{c}_0(\varepsilon)) &= P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) X_r(t) \right] (\cdot); \right. \\ &\quad \left. \ell_2 (z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) \zeta(\varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_2 \left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) \right] (\cdot)) \right\}. \end{aligned}$$

Для знаходження функцій $\nu(\varepsilon)$ і $\zeta(\varepsilon)$ приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} D_0(\check{c}_0(\varepsilon)) \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} &= -P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + \right. \\ &\quad \left. + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови

$$P_{D_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0, \quad D_0^+ (\check{c}_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

задача (1.25), (1.26) має принаймі один розв'язок і власну функцію, які

визначає операторна система

$$\begin{aligned}
 x(t, \varepsilon) &= X_r(t)\nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad (1.28) \\
 x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Z(z(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon); J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \\
 \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} &= -D_0^+ \left(\check{c}_0(\varepsilon) \right) P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \right. \\
 &\quad \left. + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.
 \end{aligned}$$

Тут $P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))} - (d \times d)$ - матриця-ортопроектор:

$$P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N} \left(D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon)) \right),$$

$D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon))$ — псевдообернена по Муру-Пенроузу матриця [21]. Для побудови наближеного розв'язку операторної системи (1.28) у випадку $P_{D_0^*} P_{Q_d^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ може бути використаний метод простих ітерацій [21, 193]. Таким чином, доведено наступну теорему [276].

Теорема 1.2.1. *Нехай для крайової задачі (1.23) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову розв'язності породжуючої задачі (1.24). Тоді для кожного кореня $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, $\mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ рівняння для породжуючих констант (1.27) за умов*

$$P_{D_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0, \quad D_0^+ \left(\check{c}_0(\varepsilon) \right) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

в малому околі розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (1.24) і в достатньо малому околі початкового значення функції $\mu_0(\varepsilon)$ задача (1.25), (1.26) має єдиний розв'язок $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$, який визначається операторною системою (1.28), та існує неперервна функція $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^$. В цьому випадку в малому околі розв'язку $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (1.24) і в достатньо малому околі початкового значення функції $\mu_0(\varepsilon)$ нетерова ($m \neq n$) задача (1.23) має єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, $z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Для побудови розв'язку операторної системи (1.28) для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ може бути використана ітераційна схема*

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)\nu_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Z(z_k(s, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_k(\cdot, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \\
\begin{bmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) \end{bmatrix} &= -D_0^+ \left(\check{c}_0(\varepsilon) \right) P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \right. \\
&+ J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x_k(\cdot, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) + \right. \\
&\left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x_k(t, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Довжина відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використаний метод простих ітерацій, може бути оцінена, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 193], так і безпосередньо з умови стиснення оператора, який визначається системою (1.28) аналогічно [270, 284].

Зауважимо, що, як і у випадку нетерових крайових задач, а також критичних періодичних задач у відсутності параметричного резонансу, має місце рівність [21, 193]

$$D_0 \left(\check{c}_0(\varepsilon) \right) = \mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)} \left(\check{c}(\varepsilon) \right) \Big|_{\check{c}(\varepsilon) = \check{c}_0(\varepsilon)} \quad .$$

У випадку параметричного резонансу доведена теорема є узагальненням відповідних тверджень [290, 291, 323]. За відсутності параметричного резонансу доведена теорема є узагальненням відповідного твердження [21, 193] на випадок явної залежності неоднорідностей $\alpha(\varepsilon)$ і $f(t, \varepsilon)$ породжуючої крайової задачі (1.24) від малого параметру. Використані при доведенні теореми розвинення нелінійностей крайової задачі (1.23) істотно відрізняються від відповідних розвинень [21, 193] відмінністю від нуля значення малого параметру у всіх членах розвинення.

1.3. Квазіконформні відображення та еліптичні диференціальні рівняння на площині

Добре відомо, що лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$\omega_{\bar{z}} = \mu(z) \omega_z, \quad z \in \Omega \subseteq \mathbf{C}, \quad (1.30)$$

де $\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_x - i\omega_y)$, $\omega_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\omega_x + i\omega_y)$, $z = x + iy$, яке широко відоме як рівняння Бельтрамі, зіграло важливу роль у вивченні Ріманових поверхонь, просторів Тейхмюллера, груп Клейна, мероморфних функцій, топологій малої розмірності, голоморфного руху комплексної динаміки, аналізу Кліфорда і теорії управління. Як відомо, будь-яке K -квазіконформне відображення $\omega : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, $K \geq 1$, є зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, що задовольняє рівняння Бельтрамі, коли вимірний коефіцієнт μ задовольняє умову сильної еліптичності $|\mu(z)| \leq (K-1)/(K+1)$ майже всюди в Ω . Зауважимо, що якщо $\mu = 0$ в області $\Omega \subset \mathbf{C}$, тоді рівняння Бельтрамі зводиться до рівняння Коші-Рімана, і розв'язок ω є аналітичним в Ω [3, 98, 115].

Слід звернути увагу на тісний взаємозв'язок між лінійними і нелінійними еліптичними системами на площині та квазіконформними відображеннями. Узагальнена лінійна однорідна еліптична система першого порядку з дійсними коефіцієнтами може бути записана у вигляді $\omega_{\bar{z}} + \mu(z)\omega_z + \nu(z)\overline{\omega_z} = 0$, з вимірними коефіцієнтами μ і ν такими, що $|\mu| + |\nu| \leq (K-1)/(K+1) < 1$. Це рівняння є частинним випадком нелінійної системи першого порядку $\omega_{\bar{z}} = H(z, \omega_z)$, де $H : G \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ це ліпшицевість другої змінної,

$$|H(z, w_1) - H(z, w_2)| \leq \frac{K-1}{K+1} |w_1 - w_2|, \quad H(z, 0) \equiv 0.$$

Фундаментальна властивість, наведеного вище рівняння, полягає в тому, що різниця двох розв'язків не повинна бути розв'язком рівняння, однак кожний розв'язок може бути представлено у вигляді композиції квазіконформного гомеоморфізму і аналітичної функції. Таким чином, квазіконформні відображення стають центральним інструментом для вивчення таких нелінійних систем. Досить всебічний підхід до сучасного стану теорії описаний в монографії Астала К., Іванець Т., Мартін Г. [6]. Також ця монографія містить вичерпну бібліографію. Зокрема, наступна фундаментальна Теорема про гармонічну факторизацію для рівномірно

еліптичного дивергентного рівняння

$$\operatorname{div} A(z, \nabla u) = 0, \quad z \in \Omega, \quad (1.31)$$

стверджує [6, Теорема 16.2.1] Кожний розв'язок $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ рівняння (1.31) може бути представлено у вигляді $u(z) = h(\omega(z))$, де $\omega : \Omega \rightarrow G$ є K -квазіконформним і h – гармонічна на G .

Будемо досліджувати так звані напівлінійні рівняння в частинних похідних, лінійна частина яких містить еліптичний оператор в дивергентній формі $\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)]$. Тут, $A(z) = \{a_{ij}(z)\}$, $\det A(z) = 1$ – симетрична матрична функція з вимірними елементами, що задовольняє умові рівномірної еліптичності

$$\frac{1}{K} |\xi|^2 \leq \langle A(z) \xi, \xi \rangle \leq K |\xi|^2 \quad \text{м.в. в } \Omega \quad (1.32)$$

для кожного $\xi \in \mathbf{C}$, де $1 \leq K < \infty$.

Деякі приклади таких напівлінійних рівнянь включають, в анізотропному випадку, нелінійне рівняння теплопровідності таке, як

$$u_t - \operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u), \quad (1.33)$$

(це ж рівняння описує броунівський рух, дифузійні моделі динаміки чисельності населення і багато інших явищ), нелінійне хвильове рівняння

$$u_{tt} - \operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u), \quad (1.34)$$

з неперервними функціями f або нелінійне рівняння Шредінгера

$$iu_t + \operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = k|u|^p u, \quad (1.35)$$

а також їх стаціонарні аналоги.

Отже, визначимо $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$ і для початку розглянемо наступне еліптичне однорідне рівняння другого порядку в дивергентній формі

$$\operatorname{div} (A(z) \nabla u) = 0 \quad \text{м.в. в } \Omega. \quad (1.36)$$

Рівняння (1.36) розуміється в узагальненому в сенсі. Іншими словами, функція u є слабким розв'язком рівняння, якщо вона має локально інтегрований градієнт ∇u з

$$\int_{\Omega} \langle A(z) \nabla u, \nabla \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.37)$$

Це твердження має сенс принаймні для $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, де $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ позначення для відомого простору Соболева. Тут ми припускаємо більш сильну регулярність, а саме, що $u \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, оскільки в дисертаційній роботі ми будемо мати справу з квазіконформними відображеннями, породженими A з умовою рівномірної еліптичності (1.32).

Таким чином, нехай $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$ і $u \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ є слабким розв'язком (1.36). Тоді існує $v \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, що називається функцією току від u , такою що

$$\nabla v = H A \nabla u \quad \text{м.в в } \Omega, \quad \text{де } H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Слід звернути увагу на те, що

$$H^2 = -I, \quad \text{де } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто, H грає роль подібно умовної одиниці в просторі 2×2 матриць.

Визначимо $\omega(z) = u(z) + i v(z)$, як одне із представлень в комплексному вигляді, таке що ω задовольняє рівняння Бельтрамі

$$\omega_{\bar{z}}(z) = \mu(z) \omega_z(z) \quad \text{м.в. в } \Omega, \quad (1.38)$$

де комплексна дилатація $\mu(z)$ визначена у вигляді

$$\mu(z) = \frac{a_{22}(z) - a_{11}(z) - 2ia_{12}(z)}{\det(I + A(z))}. \quad (1.39)$$

Рівняння (1.38) називається невиродженим, якщо $\|\mu\|_{\infty} < 1$. Умова еліптичності (1.32) може бути записана у вигляді

$$|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1} \quad \text{м.в. в } \Omega. \quad (1.40)$$

І навпаки, дану вимірну комплекснозначну функцію μ , що задовольняє (1.40), можна представити у вигляді алгебраїчної системи (1.39) [6, Теорема 16.1.6],

$$A(z) = \begin{pmatrix} \frac{|1-\mu|^2}{1-|\mu|^2} & \frac{-2\text{Im } \mu}{1-|\mu|^2} \\ \frac{-2\text{Im } \mu}{1-|\mu|^2} & \frac{|1+\mu|^2}{1-|\mu|^2} \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Таким чином, матриці $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$, відповідає за формулою (1.39) єдина комплексна дилатація $\mu(z)$. З іншого боку, комплексна дилатація

$\mu(z)$ через рівняння Бельтрамі (1.38) породжує квазіконформний гомеоморфізм $\omega : \Omega \rightarrow G$, що є його розв'язком згідно теореми Рімана про вимірне відображення [3, Теорема V.B.3],[115, Теорема V.1.3]. В якості області G , можна взяти будь-яку плоску область, яка конформно еквівалентна Ω . В подальшому будемо казати, що матрична функція A породжує відповідне квазіконформне відображення ω , або A і ω узгоджені.

Слід також звернути увагу, що дуже часто використовується той факт, що квазіконформне відображення ω допускає заміну змінних в інтегралах, оскільки гомеоморфізм класу $W_{\text{loc}}^{1,2}$ є абсолютно неперервним відносно міри площі [115, Теорема III.6.1, Лема III.2.1 і III.3.3].

Далі нагадаємо наступний важливий результат про композиції операторів в просторах Соболева. Нехай Ω є областю в n -мірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для повноти викладу нагадаємо, що простір Соболева $L_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, складається з локально інтегрованих функцій $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ з частинними похідними першого порядку з напівнормою

$$\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = \|\nabla \varphi\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dm \right)^{1/p} < \infty,$$

де m – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\nabla \varphi$ – це градієнт розподілу функції φ , $\nabla \varphi = (\partial \varphi / \partial x_1, \dots, \partial \varphi / \partial x_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, визначена із умови

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dm = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \eta dm \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тут, $C_0^\infty(\Omega)$ позначає простір всіх нескінченно гладких функцій з компактним носієм в Ω . Аналогічно, кажуть вектор-функція належить класу Соболева $L_p^1(\Omega)$, якщо її координатні функції належать $L_p^1(\Omega)$. Класи $W^{1,p}(\Omega) = L_p^1(\omega) \cap L_p(\Omega)$, які будуть використовуватися пізніше, відрізняються від класів $L_p^1(\Omega)$ тільки нормою

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla \varphi\|_{L_p(\Omega)}.$$

Наступне твердження буде відігравати важливу роль в наших подальших міркуваннях [77, 150, 158].

Лема 1.3.1. *Нехай $\omega : \Omega \rightarrow G$ є гомеоморфізмом. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) композиція $\omega^*\varphi = \varphi \circ \omega$ породжує обмежений оператор

$$\omega^* : L_p^1(G) \rightarrow L_q^1(\Omega) , \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

2) відображення ω належить класу $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, і функція

$$K_p(x; \omega) := \inf \left\{ k(x) : \|D\omega\|(x) \leq k(x)|J_\omega(x)|^{1/p} \right\}$$

належить $L_r(\Omega)$, де r визначається із рівності

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Тут, $\|D\omega\|(x)$ позначає операторну норму якобіана матриці $D\omega$ відображення ω в точці x , тобто, $\|D\omega\|(x) := \sup_{h \in \mathbf{C}, |h|=1} D\omega \cdot h$.

Припускаючи, що ω є квазіконформним гомеоморфізмом і, внаслідок цього, $\omega \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ і $K_2(x, \omega) \in L^\infty(\Omega)$, ми приходимо до наступного висновку, коли $n = 2$, $p = 2$, $q = 2$, і $r = \infty$.

Пропозиція 1.3.1. *Нехай $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформним гомеоморфізмом і нехай $\varphi : G \rightarrow \mathbf{C}$ належить до класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$. Тоді композиція функції $\varphi \circ \omega \in W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$.*

Вивчення суперпозиції операторів на просторах Соболева впливає з класичної статті [146] та [76, 155, 156]. Задача Решетняка про опис всіх ізоморфізмів простору Соболева L_n^1 , породжених квазіконформним відображенням в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, була запропонована в 1968 на першому Донецькому Колоквіум з теорії квазіконформних відображень. Задача була розв'язана в [157, 134]. Як наслідок, композиція, $\omega^*\varphi = \varphi \circ \omega$ породжує обмежений оператор

$$\omega^* : L_2^1(G) \rightarrow L_2^1(\Omega)$$

тоді і тільки тоді, коли гомеоморфізм ω є квазіконформним [133].

Також в цій роботі будемо досліджувати квазілінійне рівняння Пуассона

$$\Delta U(w) = J(w) \cdot f(U(w)) , \quad w \in \mathbb{D} , \quad (1.42)$$

де J є якобіан оберненого квазіконформного відображення $\omega^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D$ узгоджений з матрицею A . Нижче будуть встановлені глибокі зв'язки між розв'язками рівняння (1.14) і розв'язками дивергентного рівняннями $\text{div} [A(z)\nabla u(z)] = f(u)$, $z \in \Omega$.

Властивості регулярності розв'язків рівняння (1.42) сильно залежать від степеня інтегровності його $J(w)$. Зауважимо, що відображення $\omega^* := \omega^{-1}$ може бути продовжено до квазіконформного відображення розширеної комплексної площини $\mathbf{C}$ на себе, якщо ∂D є квазіколом [115, Теорема II.8.3]. Добре відомий результат Боярського [25], говорить, що узагальнені похідні квазіконформного відображення на площині локально інтегровні з деяким степенем $q > 2$. Відмітимо також, що якобіан $J(w) = |\omega_w^*|^2 - |\omega_{\bar{w}}^*|^2$ [3, I.A(9)]. Отже, в цьому випадку $J \in L^p(\mathbb{D})$ для деяких $p > 1$.

Нагадаємо також, що образ одиничного круга $\mathbb{D}$, при квазіконформному відображенні $\mathbf{C}$ на себе, називається квазідиском, а його границя називається квазіколом або квазіконформною кривою. Нагадаємо також, що жорданова крива є неперервним взаємнооднозначним відображенням одиничного круга на $\mathbf{C}$. Як відомо, така гладка (C^1) або ліпшицева крива, є квазіконформною кривою і, в той же час, квазіконформна крива, може бути навіть локально неспрямлюваною в [115, II.8.10]. Монографія [71] містить всебічне обговорення та численні характеристики квазідисків, див. також [3, 70, 95, 115].

Згідно Теорема 4.7 в [7], а також теорема 1 та її наслідку із [11], якобіан квазіконформного гомеоморфізму $\omega^* : \mathbb{D} \rightarrow D$ належить простору $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, тоді і тільки тоді, коли D задовольняє квазігіперболічній граничній умові введеній Герингом–Мартіо [72], тобто

$$k_D(z, z_0) \leq a \cdot \ln \frac{d(z_0, \partial D)}{d(z, \partial D)} + b \quad \forall z \in D \quad (1.43)$$

для деяких констант a і b та фіксованої точки $z_0 \in D$, де $k_D(z, z_0)$ це квазігіперболічна відстань між точкою z і z_0 в області D ,

$$k_D(z, z_0) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{ds}{d(\zeta, \partial D)} . \quad (1.44)$$

Тут $d(\zeta, \partial D)$ позначає евклидову відстань від точки $\zeta \in D$ до границі D , а інфімум береться по всім спрямлюваним кривим γ , які з'єднують точки z і z_0 в D . Відмітимо, що такі області можуть не задовольняти стандартній (A)–умові Ладиженської–Уральцевої [112]. Легко побачити, що квазідиски і, зокрема, гладкі та ліпшицеві області, задовольняють квазігіперболічній граничній умові.

Висновки до першого розділу

1. Встановлено тісні зв'язки диференціально-алгебраїчних крайових задач та крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.
2. Доведено необхідність вдосконалення класифікації нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.
3. Доведено актуальність дослідження нелінійних автономних крайових задач із урахуванням явища параметричного резонансу та побудови ітераційних схем з прискореною збіжністю для знаходження розв'язків нелінійних автономних крайових задач.
4. Наведено основні результати теорії квазіконформних відображень та їх зв'язок з лінійними еліптичними диференціальними рівняннями в дивергентній формі.

Розділ 2

Нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі

2.1. Нелінійні крайові задачі для невинроджених диференціально-алгебраїчних систем

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [180, 295]

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (2.2)$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ нетерової ($n \neq k$) породжуючої задачі

$$A(t)z'_0(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^k. \quad (2.3)$$

Тут $A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно-диференційовна за невідомою $z(t, \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a, b]$ і неперервно-диференційовна по малому параметру; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний і $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний векторний функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою $z(t, \varepsilon)$ і неперервний по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Нелінійна диференціально-

алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) узагальнює численні постановки нелінійних крайових задач [21, 176, 193].

2.1.1. Лінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \quad (2.4)$$

тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}$$

— неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор-стовпець; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений функціонал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, чи квадратною, але виродженою.

Припустимо, що рівняння (2.4) задовольняє вимоги леми 1.1.1. Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (2.4) в крайову умову (2.4), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Qc = \alpha - \ell K[f(s), \nu_0(s)](\cdot). \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_0(s)](\cdot) \right\} = 0. \quad (2.6)$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*} , крім того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times n}$. За умови (2.6) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (2.5)

$$c = Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_0(s)](\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_0(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_0(s)](\cdot) \right\} +$$

$$+K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q . Зазначимо, що навідміну від [180] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (2.4) до центральної канонічної форми. Таким чином, доведена наступна теорема [231, 278].

Теорема 2.1.1. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лема 1.1.1. За умови (2.6) і тільки за неї для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t) := X_0(t)Q^+ \left\{ \alpha - \right. \\ \left. - \ell K[f(s), \nu_0(s)](\cdot) \right\} + K[f(s), \nu_0(s)](t).$$

Наслідок 2.1.1. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лема 1.1.1. За умови $P_{Q^*} = 0$, крайова задача (2.4) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна $G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t)$ крайової задачі (2.4).

Приклад 2.1.1. *Вимоги наслідку 2.1.1 задовольняє диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := \Upsilon(z(0) + z(\pi)) = 0, \quad (2.7)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки система (2.7) не вироджена і має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В даному випадку матриця $A(t)$ прямокутна, при цьому

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної скалярної функції; в цьому випадку $\nu_0(t) := 0$. Загальний розв'язок однорідної задачі (2.7) визначає матриця повного рангу

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = 0.$$

Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.7)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \sin t & 1 \end{pmatrix}^*, \quad G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right] (t) = K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t).$$

В загальному випадку, тобто для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$ розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової зада-

чі (2.4) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w; \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.4) представимо у вигляді

$$K \left[f(s), \nu_0(s) \right] (t) = K \left[A^+(s)f(s) \right] (t) + K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s) \right] (t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \left[Q ; \ell K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s) \right] (\cdot) \right] \in \mathbb{R}^{k \times (\rho_0 + w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_0}) = X_0(t)c_{\rho_0} + K \left[A^+(s)f(s) \right] (t) + K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\gamma \right] (t), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (2.4) в крайову умову (2.4), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D} \check{c} = \alpha - \ell K \left[A^+(s)f(s) \right] (\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0 + w}. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.62) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s)f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.9)$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$; матриця $P_{\mathcal{D}^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$. За умови (2.9) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (2.8)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s)f(s) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + w}$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$\begin{aligned} z(t, \delta) = & K \left[A^+(s)f(s) \right] (t) + \\ & + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}} \Psi(s) \right] (t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[A^+(s)f(s) \right] (\cdot) \right\} + \\ & + \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + w}. \end{aligned}$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p+w} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема [297].

Теорема 2.1.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лема 1.1.1. За умови (2.9) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) := K[A^+(s)f(s)](t) + \left\{ X_0(t); K[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)](t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot) \right\}.$$

Матриця $X_r(t)$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\left\{ X_0(t); K[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)](t) \right\} P_{\mathcal{D}}.$$

Означення 2.1.1. *За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) приведена до некритичного випадку.*

Останнє визначення є узагальненням критичного випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, що отримана з системи (2.4) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.4) від довільної неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$. Зазначимо, що на відміну від [180] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (2.4) до центральної канонічної форми.

Приклад 2.1.2. *Вимоги теореми 2.1.2 задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & e^t \end{pmatrix}^*, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2.10)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \quad \alpha := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 - e^{2\pi} \\ 1 - e^{2\pi} \\ -4 - e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки система (2.10) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$X_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix},$$

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3(1 - \cos t) \\ 2 \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку матриця $A(t)$ прямокутна, при цьому

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної скалярної функції; в цьому випадку $\nu_0(t) := \sin t$. Загальний розв'язок однорідної задачі (2.10) визначає вироджена матриця $Q = 0$. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$, остільки задача (2.10) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову (2.9) її розв'язності. Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.10):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} -5t - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \\ 2\pi(-\cos t + e^t \cos t + 2\sin t + 2e^t \sin t) \\ 5t - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.10). Таким чином доведено теорему [297]

Наслідок 2.1.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лемми 1.1.1. За умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α , а також початкової функції $\varphi(t)$. Загальний розв'язок диференціально алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) := K[A^+(s)f(s)](t) + \left\{ X_0(t); K[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)](t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot) \right\}$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4).

Приклад 2.1.3. *Вимоги наслідку 2.1.2 задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2.11)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також вектор-функція $f(t)$ наведені в прикладі 2.2.5, крім того

$$\ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (z(0) - z(2\pi)), \quad \alpha := 0.$$

В прикладі 2.1.2 було показано, що диференціально-алгебраїчна система (2.11) не вироджена. Використаємо знайдені в прикладі 2.1.2 матрицю $X_0(t)$, а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.11). Для однорідної задачі (2.11) матриця $Q = 0$, отже, відповідно традиційній класифікації нетеро-

вих крайових задач для диференціальних систем, для задачі (2.11) має місце критичний випадок. Покладемо

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, остільки задача (2.11) представляє некритичний випадок, отже, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.11) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.11):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$\begin{aligned} G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \\ = \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} t - e^{2\pi t} - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \\ 2\pi (-\cos t + e^t \cos t + 2 \sin t + 2e^t \sin t) \\ e^{2\pi t} - t - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.11).

У випадку незалежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (2.4) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ твердження теореми 2.1.2 приводить до теореми 2.1.1. Припустимо, що крайова задача (2.1), (2.2) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1; при цьому система (2.1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) + \varepsilon A^+(t)Z(z, t, \varepsilon). \quad (2.12)$$

2.1.2. Некритичний випадок. Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.3) невироджена і некритична ($P_{Q^*} = 0$), тобто, задовольняє вимоги наслідку 2.1.1, при цьому породжуюча задача (2.3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.3) для фіксованої непе-

первної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Фіксуємо одну з констант $c_r \in \mathbb{R}^r$, для знаходження вектора

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

аналогічно [176], приходимо до задачі

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \quad (2.13)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (2.14)$$

В некритичному випадку задача (2.13), (2.14) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.13), (2.14) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon G\left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](t).$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) при цьому визначає операторна система [21, 176, 232]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний [176, 21] метод простих ітерацій; таким чином отимуємо ітераційну схему

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (2.15)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\left[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](t).$$

Таким чином, доведено наступну теорему [232].

Теорема 2.1.3. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна для довільних неоднорід-*

ностей диференціально-алгебраїчної системи та крайової умови (2.3) і має r —лінійно-незалежних розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За додаткової умови

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b], \quad A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[||z - z_0|| < q] \quad (2.16)$$

для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (2.15).

Зазначимо, що навідміну від [180, 234] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (2.4) до центральної канонічної форми.

Для визначення величини ε_* може бути використаний метод мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 176, 193, 219, 223]; крім того, конструктивна оцінка величини ε_* знайдена в статті [270].

Приклад 2.1.4. Вимоги теореми 2.1.3 задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.17)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon(z(0, \varepsilon) + z(\pi, \varepsilon)).$$

В прикладі 2.1.1 було показано, що породжуюча система для рівняння (2.17) не вироджена, а також знайдені матриця $X_0(t)$ і оператор $K[f(s), \nu_0(s)](t)$. У випадку рівняння (2.17) породжуючий розв'язок залежить від довільної неперервної функції; покладемо, як і в прикладі

2.1.1: $\nu_0(t) := 0$. Фіксуємо константу $c_r := 10^{-1}$, знаходимо

$$z_0(t, c_r) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 4 + \cos t - 5 \cos 3t \\ 15 \sin 3t - \sin t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.17) може бути використана ітераційна схема (2.15), при цьому, поклавши $c(\varepsilon) := 0$, маємо [232]:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ x_{1b}(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} x_{1a}(t, \varepsilon) = & -\frac{\varepsilon}{28\,672\,000} \left(-98\,560 + 125\,312 \cos t - 8\,064 \cos 2t - \right. \\ & -19\,096 \cos 3t - 1\,792 \cos 4t + 280 \cos 5t + 1\,920 \cos 6t + 175 \cos 7t - \\ & \left. -175 \cos 9t + 18\,480 \pi \sin t - 18\,480 t \sin t \right), \\ x_{1b}(t, \varepsilon) = & -\frac{\varepsilon}{28\,672\,000} \left(18\,480 (\pi - t) \cos t - 143\,792 \sin t + \right. \\ & +16\,128 \sin 2t + 57\,288 \sin 3t + 7\,168 \sin 4t - 1\,400 \sin 5t - \\ & \left. -11\,520 \sin 6t - 1\,225 \sin 7t + 1\,575 \sin 9t \right). \end{aligned}$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.17) визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| A(t) z'_k(t, \varepsilon) - B(t) z_k(t, \varepsilon) - f(t) - \varepsilon Z(z_k) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$

нульового і першого наближень до розв'язку крайової задачі (2.17). Поклавши $\varepsilon = 0, 1$, $k = 0, 1$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,00\,134\,314, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 8,94\,744 \cdot 10^{-6}.$$

Відмітимо також, що перше наближення до розв'язку крайової задачі (2.17) в точності задовольняє крайову умову.

2.1.3. Приведення диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. У загальному випадку, а саме для

довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$ розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w; \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b].$$

Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. В умовно некритичному випадку ($P_{\mathcal{D}^*} = 0$) задача (2.13) розв'язна для довільних нелінійностей. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.13) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); \right. \\ \left. J(z_0(\cdot, c_r(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t).$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) при цьому визначає операторна система [21, 176]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); J(z_0(\cdot, c_r(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний [21, 176] метод простих ітерацій; тобто отримуємо ітераційну схему

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (2.18)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \psi(s); J(z_0(\cdot, c_r) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t).$$

Таким чином, доведено наступну теорему [296].

Теорема 2.1.4. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.2. В умовно некритичному випадку ($P_{\mathcal{D}^*} = 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна для довільних неоднорідностей диференціально-алгебраїчної системи та крайової умови (2.3) і має r -лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За додаткової умови (2.16) для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (2.18).

Приклад 2.1.5. Вимоги теореми 2.1.3 задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t) z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.19)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_b^2(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon (z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon)).$$

У прикладі 2.1.1 було показано, що породжуюча система для рівняння (2.19) не вироджена, а також знайдена матриця $X_0(t)$ і оператор

$$K[f(s), \nu_0(s)](t).$$

Для однорідної частини породжуючої задачі матриця $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, отже, згідно традиційної класифікації нетерових крайових задач для диференціальних систем для задачі (2.19) має місце критичний випадок. У випадку рівняння (2.19) породжуючий розв'язок залежить від довільної неперервної функції. Покладемо [296]

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, остільки у випадку рівняння (2.19) породжуюча задача представляє умовно не критичний випадок, отже, породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння (2.19) розв'яз-

на для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Фіксуємо константу

$$c_r := \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

знаходимо

$$z_0(t, c_r) = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 5 \sin 2t - 7 \sin t \\ -2(7 \cos t + 5 \cos 2t - 15) \\ 5 \sin 2t - 7 \sin t \end{pmatrix}.$$

Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.19) може бути використана ітераційна схема (2.18), при цьому, поклавши $c(\varepsilon) := 0$, маємо:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ x_{1b}(t, \varepsilon) \\ x_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad x_{1c}(t, \varepsilon) = x_{1a}(t, \varepsilon),$$

де

$$\begin{aligned} x_{1a}(t, \varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{86\,400} \left(-4\,200 + 7\,125 \cos t - 2\,240 \cos 2t - \right. \\ &\quad \left. -903 \cos 3t + 168 \cos 4t + 50 \cos 5t - 3\,012 t \sin t \right), \\ x_{1b}(t, \varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{43\,200} \left(-3\,012 t \cos t + 5\,451 \sin t - \right. \\ &\quad \left. -560 \sin 2t - 603 \sin 3t + 168 \sin 4t + 50 \sin 5t \right). \end{aligned}$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.19) визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$ нульового і першого наближення до розв'язку крайової задачі (2.19). Поклавши $\varepsilon := 0, 1$, $k = 0, 1$, маємо [296]

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,0500\,556, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,00\,281\,729.$$

Відмітимо також, що перше наближення до розв'язку крайової задачі (2.19) в точності задовольняє крайову умову.

Доведені теореми 2.1.3 и 2.1.4 узагальнюють відповідні твердження [21, 176] на випадок нелінійної невідродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в некритичному, а також, умовно некритичному випадку.

2.1.4. Критичний випадок першого порядку. Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) має місце критичний випадок. Припустимо також, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.6) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r —лінійно-незалежних розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

У критичному випадку в малому околі розв'язку породжуючої задачі крайова задача (2.2), (2.12) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (2.20)$$

Необхідну умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку визначає наступна теорема [231].

Теорема 2.1.5. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.6) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r —лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_r^)$. За додаткової умови (2.16) для існування розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) необхідно виконується умова*

$$F(c_r^*) := P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0), \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.21)$$

По аналогії з нетеровими крайовими задачами [21] рівняння (2.21) будемо називати рівнянням для породжуючих констант. Припустимо далі необхідну умову розв'язності нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) виконаним. Фіксуємо один із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$

рівняння (2.21), розв'язок

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t).$$

Таким чином, аналогічно [176], приходимо до задачі

$$x'(t, \varepsilon) = A^+(t)B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon A^+(t)Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2.22)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (2.23)$$

Розв'язки крайової задачі (2.22), (2.23) при цьому визначає операторна система [21, 176]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\left[A^+(s)Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon); \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](t).$$

Використовуючи неперервну диференційовність по першому аргументу функції $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку, розвинемо цю функцію в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + \\ &+ A_1(t)x(t, \varepsilon) + R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.24)$$

де $A_1(t) = Z'_z(z_0(t, c_r^*), t, 0)$. Залишок $R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ розвинення функції $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ за умови $Z'_\varepsilon(z_0(t, c_r^*), t, 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення, тому

$$R(z, t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має місце розвинення

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (2.25)$$

де $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := J'_{1_z}(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$. Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функціоналу $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ за умови $J'_{1_\varepsilon}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення, тому

$$\left. J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ принаймі один розв'язок крайової задачі (2.22), (2.23) визначає операторна система

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$B_0 c_r(\varepsilon) = P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ \left. - \ell K \left[A_1(s) x^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) \right\},$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t),$$

еквівалентна до задачі про побудову розв'язку системи рівнянь (2.22), що задовольняють крайову умову (2.23); тут

$$B_0 = P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[A_1(s) X_r(s), \nu_0(s) \right](\cdot) \right\}$$

— стала $(d \times r)$ — матриця, $P_{B_0^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*)$. Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний [21, 176] метод простих ітерацій; таким чином отримуємо ітераційну схему

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t) c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \\ c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_{k+1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ \left. - \ell K \left[A_1(s) x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z_0(s, c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) \right\}, \quad (2.26) \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s); \right.$$

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Достатню умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку визначає наступна теорема [231].

Теорема 2.1.6. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.6) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r -лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (2.21) для породжуючих констант за умови (2.16) нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. Для побудови розв'язків $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$ нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (2.26).

Доведені теореми 2.1.5 і 2.1.6 узагальнюють відповідні твердження [21, 176] на випадок нелінійної не виродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) у критичному випадку.

На відміну від статей [22, 234] результати теорем 2.1.5 і 2.1.6 отримано без використання означення центральної канонічної форми лінійної диференціально-алгебраїчної системи [31, 241].

Приклад 2.1.6. *Вимоги теореми 2.1.6 задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння типу Дюффінга*

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.27)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon(z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon)).$$

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки система (2.27) невинроджена і має розв'язок вигляду [231]

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В даному випадку матриця $A(t)$ прямокутна, при цьому

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної скалярної функції; в даному випадку $\nu_0(t) := 0$. Загальний розв'язок однорідної частини для породжуючої задачі (2.27) визначає матриця

$$Q = 0, \quad P_Q = P_{Q_r} = I_3, \quad P_{Q^*} = I_2.$$

Таким чином, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.27) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.6). Загальний розв'язок неоднорідної частини для породжуючої задачі (2.27)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t) = K[f(s), \nu_0(s)](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ 3 \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а також матриця $X_r(t) = X_0(t)$. У випадку нелінійної диференціально-

алгебраїчної крайової задачі (2.27) рівняння (2.21) має розв'язок

$$c_r^* = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

якому відповідає розв'язок породжуючої задачі

$$z(t, c_r^*) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ 3 \sin 3t \\ 0 \end{pmatrix},$$

а також матриця повного рангу

$$B_0 = \frac{3\pi}{128} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки виконано умову $P_{B_0^*} = 0$, остільки принаймі один розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.27) визначає ітераційна схема (2.26). Таким чином, знаходимо

$$z_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{1a}(t, \varepsilon) \\ z_{1b}(t, \varepsilon) \\ z_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$z_{1a}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{327\,680} (31\varepsilon - 124\varepsilon \cos t - 40\,960 \cos 3t + 60\varepsilon \cos 3t + 2\varepsilon \cos 9t),$$

$$x_{1b}(t, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{327\,680} (62\varepsilon \sin t + 61\,440 \sin 3t - 90\varepsilon \sin 3t - 9\varepsilon \sin 9t)$$

$$x_{1c}(t, \varepsilon) = \frac{31\varepsilon}{327\,680}.$$

Аналогічно знаходимо [231]

$$z_2(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{2a}(t, \varepsilon) \\ z_{2b}(t, \varepsilon) \\ z_{2c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$z_{2a}(t, \varepsilon) = \frac{31\varepsilon}{327\,680} + \frac{37\,059\varepsilon^2}{18\,790\,481\,920} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\,343\,800\,971\,\varepsilon^3}{275\,152\,784\,850\,944\,000} + \frac{1\,150\,416\,221\,963\,\varepsilon^4}{36\,402\,933\,558\,007\,771\,955\,200} - \\
& -\frac{31\,\varepsilon\cos t}{81\,920} - \frac{129\,\varepsilon^2\cos t}{117\,440\,512} + \frac{755\,013\,771\,\varepsilon^3\cos t}{68\,788\,196\,212\,736\,000} - \\
& -\frac{3\,054\,692\,099\,539\,\varepsilon^4\cos t}{91\,007\,333\,895\,019\,429\,888\,000} - \frac{961\,\varepsilon^3\cos 2t}{214\,748\,364\,800} - \\
& -\frac{961\,\varepsilon^4\cos 2t}{4\,398\,046\,511\,104\,000} - \frac{\cos 3t}{8} + \frac{3\,\varepsilon\cos 3t}{16\,384} - \frac{273\,\varepsilon^2\cos 3t}{335\,544\,320} + \\
& + \frac{34\,233\,\varepsilon^3\cos 3t}{6\,871\,947\,673\,600} - \frac{311\,981\,\varepsilon^4\cos 3t}{70\,368\,744\,177\,664\,000} - \\
& -\frac{961\,\varepsilon^3\cos 4t}{1\,073\,741\,824\,000} + \frac{2\,883\,\varepsilon^4\cos 4t}{2\,199\,023\,255\,552\,000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 5t}{167\,772\,160} - \\
& -\frac{279\,\varepsilon^4\cos 5t}{703\,687\,441\,776\,640} - \frac{93\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\,468\,006\,400} + \frac{2\,883\,\varepsilon^4\cos 6t}{15\,032\,385\,536\,000} - \\
& -\frac{279\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\,924\,145\,348\,608\,000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 7t}{335\,544\,320} - \frac{961\,\varepsilon^3\cos 7t}{3\,435\,973\,836\,800} + \\
& + \frac{13\,919\,\varepsilon^4\cos 7t}{70\,368\,744\,177\,664\,000} + \frac{961\,\varepsilon^4\cos 8t}{92\,358\,976\,733\,184\,000} + \frac{\cos 9t}{163\,840} - \\
& -\frac{3\,\varepsilon^2\cos 9t}{104\,857\,600} + \frac{153\,\varepsilon^3\cos 9t}{3\,435\,973\,836\,800} - \frac{1\,167\,\varepsilon^4\cos 9t}{28\,147\,497\,671\,065\,600} + \\
& + \frac{961\,\varepsilon^4\cos 10t}{145\,135\,534\,866\,432\,000} - \frac{31\,\varepsilon^3\cos 11t}{8\,589\,934\,592\,000} - \\
& -\frac{31\,\varepsilon^4\cos 11t}{175\,921\,860\,444\,160\,000} + \frac{93\,\varepsilon^3\cos 12t}{61\,418\,032\,332\,800} - \\
& -\frac{279\,\varepsilon^4\cos 12t}{125\,784\,130\,217\,574\,400} - \frac{31\,\varepsilon^3\cos 13t}{12\,025\,908\,428\,800} + \\
& + \frac{93\,\varepsilon^2\cos 13t}{24\,629\,060\,462\,182\,400} - \frac{3\,\varepsilon^3\cos 15t}{9\,395\,240\,960} + \\
& + \frac{183\,\varepsilon^4\cos 15t}{192\,414\,534\,860\,800} - \frac{279\,\varepsilon^4\cos 15t}{394\,064\,967\,394\,918\,400} + \\
& + \frac{31\,\varepsilon^4\cos 17t}{844\,424\,930\,131\,968\,000} - \frac{93\,\varepsilon^4\cos 18t}{5\,682\,276\,092\,346\,368\,000} + \\
& + \frac{31\,\varepsilon^4\cos 19t}{1\,055\,531\,162\,664\,960\,000} + \frac{3\,\varepsilon^3\cos 21t}{377\,957\,122\,048\,000} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9\varepsilon^4 \cos 21t}{774\,056\,185\,954\,304\,000} - \frac{\varepsilon^4 \cos 27t}{12\,807\,111\,440\,334\,848\,000} \\
& -\frac{93\pi\varepsilon^2 \sin t}{20\,971\,520} - \frac{93\varepsilon^2 t \sin t}{20\,971\,520} + \frac{2\,697\pi\varepsilon^3 \sin t}{429\,496\,729\,600} + \\
& + \frac{2\,697t\varepsilon^3 \sin t}{429\,496\,729\,600} - \frac{441\,471\pi\varepsilon^4 \sin t}{17\,592\,186\,044\,416\,000} - \frac{441\,471t\varepsilon^4 \sin t}{17\,592\,186\,044\,416\,000}, \\
x_{2b}(t, \varepsilon) = & -\frac{93\pi\varepsilon^2 \cos t}{20\,971\,520} - \frac{93\varepsilon^2 \cos t}{20\,971\,520} + \frac{2\,697\pi\varepsilon^3 \cos t}{429\,496\,729\,600} + \\
& + \frac{2\,697t\varepsilon^3 \cos t}{429\,496\,729\,600} - \frac{441\,471\pi\varepsilon^4 \cos t}{17\,592\,186\,044\,416\,000} - \\
& - \frac{441\,471t\varepsilon^4 \cos t}{17\,592\,186\,044\,416\,000} + \frac{31\varepsilon \sin t}{81\,920} - \frac{1\,959\varepsilon^2 \sin t}{587\,202\,560} - \\
& - \frac{323\,062\,251\varepsilon^3 \sin t}{68\,788\,196\,212\,736\,000} + \frac{770\,888\,449\,411\varepsilon^4 \sin t}{91\,007\,333\,895\,019\,429\,888\,000} + \\
& + \frac{961\varepsilon^3 \sin 2t}{107\,374\,182\,400\,2\,199\,023\,255\,552\,000} + \frac{3 \sin 3t}{8} - \\
& - \frac{9\varepsilon \sin 3t}{16\,384} + \frac{819\varepsilon^2 \sin 3t}{335\,544\,320} - \frac{102\,699\varepsilon^3 \sin 3t}{6\,871\,947\,673\,600} + \\
& + \frac{935\,943\varepsilon^4 \sin 3t}{70\,368\,744\,177\,664\,000} + \frac{961\varepsilon^3 \sin 4t}{268\,435\,456\,000} - \\
& - \frac{2\,883\varepsilon^4 \sin 4t}{549\,755\,813\,888\,000} - \frac{31\varepsilon^2 \sin 5t}{33\,554\,432} + \frac{279\varepsilon^4 \sin 5t}{140\,737\,488\,355\,328} + \\
& + \frac{279\varepsilon^2 \sin 6t}{734\,003\,200} - \frac{8\,649\varepsilon^3 \sin 6t}{7\,516\,192\,768\,000} + \frac{837\varepsilon^4 \sin 6t}{962\,072\,674\,304\,000} - \\
& - \frac{217\varepsilon^2 \sin 7t}{335\,544\,320} + \frac{6\,727\varepsilon^3 \sin 7t}{3\,435\,973\,836\,800} - \frac{97\,433\varepsilon^4 \sin 7t}{70\,368\,744\,177\,664\,000} - \\
& - \frac{961\varepsilon^4 \sin 8t}{11\,544\,872\,091\,648\,000} - \frac{9\varepsilon \sin 9t}{163\,840} + \frac{27\varepsilon^2 \sin 9t}{104\,857\,600} - \\
& - \frac{1\,377\varepsilon^3 \sin 9t}{3\,435\,973\,836\,800} + \frac{10503\varepsilon^4 \sin 9t}{28\,147\,497\,671\,065\,600} - \\
& - \frac{961\varepsilon^4 \sin 10t}{14\,513\,553\,486\,643\,200} + \frac{341\varepsilon^3 \sin 11t}{8\,589\,934\,592\,000} + \\
& + \frac{341\varepsilon^4 \sin 11t}{175\,921\,860\,444\,160\,000} - \frac{279\varepsilon^3 \sin 12t}{15\,354\,508\,083\,200} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{837 \varepsilon^4 \sin 12t}{31\,446\,032\,554\,393\,600} + \frac{403 \varepsilon^3 \sin 13t}{12\,025\,908\,428\,800} - \\
& - \frac{1\,209 \varepsilon^4 \sin 13t}{24\,629\,060\,462\,182\,400} + \frac{9 \varepsilon^2 \sin 15t}{1\,879\,048\,192} - \\
& - \frac{549 \varepsilon^3 \sin 15t}{38\,482\,906\,972\,160} - \frac{837 \varepsilon^4 \sin 15t}{78\,812\,993\,478\,983\,680} - \\
& - \frac{527 \varepsilon^4 \sin 17t}{844\,424\,930\,131\,968\,000} + \frac{837 \varepsilon^4 \sin 18t}{2\,841\,138\,046\,173\,184\,000} - \\
& - \frac{589 \varepsilon^4 \sin 19t}{1\,055\,531\,162\,664\,960\,000} - \frac{63 \varepsilon^3 \sin 21t}{377\,957\,122\,048\,000} + \\
& + \frac{189 \varepsilon^4 \sin 21t}{774\,056\,185\,954\,304\,000} + \frac{27 \varepsilon^4 \sin 27t}{12\,807\,111\,440\,334\,848\,000}. \\
& x_{2c}(t, \varepsilon) = \frac{31 \varepsilon}{327\,680} - \frac{921 \varepsilon^2}{3\,758\,096\,384} - \\
& - \frac{556\,415\,371 \varepsilon^3}{275\,152\,784\,850\,944\,000} + \frac{1\,032\,284\,380\,167 \varepsilon^4}{182\,014\,667\,790\,038\,859\,776\,000}.
\end{aligned}$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.27) визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$ нульового і першого наближення до розв'язку крайової задачі (2.27). Поклавши $\varepsilon := 0, 1$, $k = 0, 1, 2$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,000\,195\,312, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 2,23\,935 \times 10^{-7},$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,62\,572 \times 10^{-9}.$$

Аналогічно, маємо

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,0000\,195\,312, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 2,24\,013 \times 10^{-9},$$

$$\Delta_2(0, 01) \approx 1.62\,658 \times 10^{-12}.$$

Відмітимо також, що нульове і перше наближення до розв'язку крайової задачі (2.27) в точності задовольняє крайову умову. В той же час, друге наближення до розв'язку крайової задачі (2.27) містить нев'язку в крайовій умові

$$\ell z_2(\cdot, \varepsilon) = \frac{93 \pi \varepsilon^2}{10\,485\,760} - \frac{2\,697 \pi \varepsilon^3}{214\,748\,364\,800} + \frac{441\,471 \pi \varepsilon^4}{8\,796\,093\,022\,208\,000},$$

яка викликана лінеаризацією умови розв'язності (2.20), що використана

при знаходженні вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$.

Уникнути нев'язки в крайовій умові для другого наближення до розв'язку крайової задачі (2.27) можна при знаходженні вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$ безпосередньо з умови розв'язності (2.20), в даному випадку, нелінійного рівняння, аналогічно [47, 287].

Зауважимо також, що матриця B_0 , ключова при дослідженні нелінійної невідродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку, може бути знайдена безпосередньо з рівняння (2.21) для породжуючих амплітуд:

$$B_0 := \left. \frac{\partial F_0(c_r)}{\partial c_r} \right|_{c_r = c_r^*}.$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(c_r^*)}{\partial c_r} &= \frac{\partial}{\partial c_r} P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 [X_r(\cdot) c_r + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + \right. \\ &\quad \left. + J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K [Z(z_0(s, c_r^*), s, 0) + A_1(s) [X_r(s) c_r + \right. \\ &\quad \left. + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s)](\cdot) \right\} \Big|_{\varepsilon = 0} = \\ &= P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K [A_1(s) X_r(s), \nu_0(s)](\cdot) \right\} := B_0. \end{aligned}$$

2.1.5. Приведення диференціально-алгебраїчної крайової задачі до критичного випадку першого порядку. Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). Припустимо також, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w; \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b].$$

Відповідно до теореми 2.1.2 породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.9); і в цьому випадку має розв'язок

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t) c_{\rho_0+w} + G[f(s); \psi(s); \alpha](t),$$

де

$$X_{\rho_0+w}(t) := \left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}}, \quad c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

В малому околі розв'язку породжуючої задачі крайова задача (2.2), (2.12) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ J(z_0(t, c_{\rho_0+w}) + x(t, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z_0(t, c_{\rho_0+w}) + x(t, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.28)$$

Необхідна умова існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку визначає наступна теорема.

Теорема 2.1.7. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. У критичному випадку ($P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$ породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.9); і в цьому випадку має розв'язок*

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t) c_{\rho_0+w} + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t),$$

де

$$\psi(t) := \Psi(t) \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w, \quad c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

Припустимо також, що нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_{\rho_0+w}^*)$. За додаткової вимоги (2.16) для існування розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) необхідно виконується умова

$$F(c_{\rho_0+w}^*) := P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(t, c_{\rho_0+w}^*), 0) - \ell K \left[Z(z_0(t, c_{\rho_0+w}^*), 0) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.29)$$

Припустимо далі теорему 2.1.7 — необхідну умову розв'язності нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) виконаною. Фіксуємо один з розв'язків $c_{\rho_0+w}^* \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}$ рівняння (2.21), розв'язок

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_{\rho_0+w}^*) + x(t, \varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) шукатимемо в

околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}^*) = X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w}^* + G[f(s); \psi^*(s); \alpha](t), \quad \psi^*(t) := \Psi(t)\gamma^*.$$

Таким чином, аналогічно [176], приходимо до задачі (2.22), (2.23). Розв'язки крайової задачі (2.22), (2.23) при цьому визначає операторна система [176, 21]

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_{\rho_0+w}^*) + x(t, \varepsilon), \\ x(t, \varepsilon) &= X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w}(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) &= G\left[A^+(s)Z(z_0(s, c_{\rho_0+w}^*) + x(s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. \Psi(s)\gamma(\varepsilon); J(z_0(t, c_{\rho_0+w}) + x(t, \varepsilon), \varepsilon)\right](t). \end{aligned}$$

Почнемо вектор $\check{c}(\varepsilon) := \text{col}(c_{\rho_0+w}(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)) \in \mathbb{C}_{\rho_0+w}[0, \varepsilon_0]$. За умови $P_{\mathcal{B}_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ принаймі один розв'язок крайової задачі (2.22), (2.23) визначає операторна система

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w}(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ \mathcal{B}_0 \check{c}(\varepsilon) &= P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell K \left[A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) \right\}, \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) &= G\left[A^+(s)Z(z_0(s, c_{\rho_0+w}^*) + x(s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. \Psi(s)\gamma(\varepsilon); J(z_0(t, c_{\rho_0+w}) + x(t, \varepsilon), \varepsilon)\right](t), \end{aligned}$$

еквівалентна задачі про побудову розв'язку системи рівнянь (2.22), які задовольняють крайову умову (2.23); тут

$$\mathcal{B}_0(c_{\rho_0+w}^*) := P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ \ell_1 X_{\rho_0+w}(\cdot) - \ell K \left[A_1(s)X_{\rho_0+w}(s) \right](\cdot) \right\}$$

— стала $(d \times (\rho_0 + w))$ — матриця, $P_{\mathcal{B}_0^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*)$. Для побудови розв'язків цієї операторної системи можу бути використаний [21, 176] метод простих ітерацій; таким чином отримуємо ітераційну схему

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_{\rho_0+w_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \check{c}_{k+1}(\varepsilon) &= \mathcal{B}_0^+ P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$-\ell K \left[A_1(s) c_{\rho_0+w_{k+1}}^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s) \gamma_k(\varepsilon) \right] (\cdot) \Big\},$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_{\rho_0+w}^*) + x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s) \gamma_k(\varepsilon); \alpha \right] (t).$$

Достатню умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) у критичному випадку визначає наступна теорема.

Теорема 2.1.8. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги наслідку 2.1.1. В критичному випадку ($P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$), для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$, породжуюча задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.9); і в цьому випадку має розв'язок*

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t) c_{\rho_0+w} + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t),$$

де

$$\psi(t) := \Psi(t) \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w, \quad c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ для кожного кореня $c_{\rho_0+w}^* \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}$ рівняння (2.29) для породжуючих констант і, додатковій умові (2.16), нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) має принаймі один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий

$$z(t, 0) = z_0(t, c_{\rho_0+w}^*).$$

Для побудови розв'язків $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_{\rho_0+w}^*) + x(t, \varepsilon)$ нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (2.30).

Означення 2.1.2. *В критичному випадку ($P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$ за умови*

$$P_{B_0^*} \neq 0, \quad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$$

будемо казати, що нелінійна невивроджена диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) приведена до критичного випадку першого порядку.

Оскільки ранг матриці B_0 істотно залежить від вибору лінійно-незалежних стовпців матриці $X_r(t)$, при доведенні теореми 2.1.8 замість матриці $X_r(t)$ використана матриця $X_{\rho_0+w}(t)$.

Доведені теореми 2.1.7 і 2.1.8 узагальнюють існуючі твердження [21, 176] на випадок нелінійної невинродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2), приведенної до критичного випадку першого порядку

Приклад 2.1.7. *Вимоги теореми 2.1.8 задовольняє нелінійна автономна двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A z'(t, \varepsilon) = B z(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.31)$$

де

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon(z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon)),$$

$$\Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^2(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки система (2.31) невинроджена, а породжуюче рівняння для системи (2.31) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[\nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В даному випадку матриця A прямокутна, при цьому $\rho_0 = 1 \neq 0$, тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної скалярної функції; покладемо $\psi(t) := 0$, при цьому $K[\nu_0(s)](t) \equiv 0$. Загальний розв'язок породжуючої задачі (2.31) визначає матриця

$$Q = 0, \quad P_Q = P_{Q_r} = I_3, \quad P_{Q^*} = I_2.$$

Таким чином, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.31) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.6) породжуючої крайової задачі (2.31). Загальний розв'язок породжуючої

задачі (2.31) $z(t, c_r) = X_r(t)c_r$, $c_r \in \mathbb{R}^3$; визначає матриця $X_r(t) = X_0(t)$. У випадку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.31) рівняння (2.78) має розв'язок

$$c_r^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

якому відповідає матриця

$$B_0(c_r^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & -2\pi \end{pmatrix}.$$

Оскільки для фіксованої функції $\psi(t) := 0$ умова $P_{B_0^*} = 0$ не виконана, остільки не можливо зробити висновок, що має місце критичний випадок першого порядку. Покладемо

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} \sin 6t & \cos 6t \end{pmatrix};$$

при цьому має місце критичний випадок: $\mathcal{D} = 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = I_2$. Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$, остільки породжуюча задача для системи (2.31) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову (2.9) її розв'язності. Рівняння (2.29) для породжуючих амплітуд при цьому має корінь

$$c_{\rho_0}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \frac{35}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

для якого матриця

$$\mathcal{B}_0(c_{\rho_0}^*, \gamma^*) = \frac{\pi}{18} \begin{pmatrix} 0 & 35 & 0 & 0 & 1 \\ -35 & 0 & 35 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу. Оскільки виконано умову $P_{\mathcal{B}_0^*} = 0$, остільки принаймі один розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.31) визначає ітераційна схема (2.30).

Зауважимо, що крайова задача (2.31) є прикладом автономної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, розв'язок якої визначено на відрізьку фіксованої довжини, на відміну від традиційних крайових задач для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь [16, 21, 284, 37, 51, 315, 225, 292, 307].

Відмітимо також, що матриця $\mathcal{B}_0$, ключова при дослідженні нелінійної невідродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку, і може бути знайдена безпосередньо з рівняння (2.29) для породжуючих амплітуд:

$$\mathcal{B}_0 := \left. \frac{\partial F_0(c_{\rho_0+w})}{\partial c_{\rho_0+w}} \right|_{c_{\rho_0+w} = c_{\rho_0+w}^*}.$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(c_{\rho_0+w}^*)}{\partial c_{\rho_0+w}} &= \frac{\partial}{\partial c_{\rho_0+w}} P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_{\rho_0+w}^*), 0) + \right. \\ &\quad \left. + \ell_1 A_1(\cdot) \left[X_{\rho_0+w}(\cdot) c_{\rho_0+w} + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] + \right. \\ &\quad \left. + J_1(z_0(\cdot, c_{\rho_0+w}^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_{\rho_0+w}^*), s, 0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_1(s) \left[X_{\rho_0+w}(s) c_{\rho_0+w} + x^{(1)}(s, \varepsilon) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + R(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s) \right] (\cdot) \right\} \Big|_{\varepsilon = 0} = \mathcal{B}_0. \end{aligned}$$

2.1.6. Нелінійні крайові задачі для невідроджених диференціально-алгебраїчних систем у випадку параметричного резонансу. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, h(\varepsilon), \varepsilon), \quad (2.32)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon). \quad (2.33)$$

Розв'язки диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ лінійної нетерової ($n \neq q$) породжуючої задачі

$$A(t)z_0'(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (2.34)$$

Тут $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; $Z(z, t, h(\varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійна функція, двічі неперервно-диференційовна за невідомою $z(t)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, двічі неперервно-диференційовна за невідомою $h(\varepsilon)$ в малому

околі точки h_0 , неперервна по $t \in [a, b]$ і неперервно-диференційовна по малому параметру; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний і $J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний векторні функціонали:

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Нелінійний векторний функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ двічі неперервно-диференційовний за невідомою $z(t)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, двічі неперервно-диференційовний за невідомою $h(\varepsilon)$ в малому околі точки h_0 і неперервно-диференційовний по малому параметру ε . Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.32) узагальнює багаточисленні постановки нелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [21, 176, 193], в тому числі нелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [39, 276]. На відміну від нелінійних задач на власні значення, значення $h(\varepsilon)$ не фіксоване, а забезпечує розв'язність.

Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34) задовольняє вимоги леми 1.1.1; при цьому система (2.32) розв'язна відносно довільної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) + \varepsilon A^+(t)Z(z, t, h(\varepsilon), \varepsilon). \quad (2.35)$$

За умови (1.2) система (2.34) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.34). За умови (2.6) і тільки за неї, для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34)

$$G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) := X_0(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K\left[f(s), \nu_0(s)\right](\cdot)\right\} + K\left[f(s), \nu_0(s)\right](t).$$

Розв'язки нетерової ($n \neq q$) крайової задачі (2.32), (2.33) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ породжуючої задачі (2.34):

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0 + \mu(\varepsilon).$$

Таким чином, за умови (1.2) приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

і власної функції $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ слабонелінійної нетерової крайової задачі

$$x'(t, \varepsilon) = A^+(t)B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon A^+(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2.36)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon), \quad (2.37)$$

розв'язної тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) \right\} = 0.$$

Позначимо вектори

$$\check{c} := \begin{bmatrix} c_r \\ h_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+p}, \quad \check{c}_0 := \begin{bmatrix} c_r^* \\ h_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+p}.$$

У силу неперервності по z і по μ нелінійної функції $Z(z, h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ і нелінійного векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (2.34) і початкового значення h_0 функції $h(\varepsilon)$ приходимо до наступного рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}) := P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r), h_0, 0) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_r), h_0, s, 0) \right](\cdot) \right\} = 0.$$

Необхідні умови існування розв'язку нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема.

Лема 2.1.1. *Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34) задовольняє вимоги лемми 1.1.1. За умови (2.6) і тільки за неї для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ загальний розв'язок породжу-*

ючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34) має вигляд

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ крайова задача (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу має розв'язок

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при цьому в малому околі вектора $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ існує власна функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0^*) = 0. \quad (2.38)$$

По аналогії з нетеровими слабконелінійними крайовими задачами у критичному випадку [21], а також періодичними крайовими задачами [193, 327, 330], рівняння (2.38) будемо називати рівнянням для породжуючих констант нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу.

Припустимо, що рівняння (2.38) має дійсні корені. Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (2.38), приходимо до задачі про знаходження розв'язку $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.36), (2.37) у випадку параметричного резонансу в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\left[f(s); \alpha(\varepsilon)\right](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

а також функції $h(\varepsilon) := h_0^* + \mu(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$ в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$. У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ і вектора h_0^* має місце наступне розвинення

$$\begin{aligned} Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) = & Z(z_0(t, c_r^*), h_0^*, t, 0) + \\ & + \mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right)x(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right)\mu(\varepsilon) + \\ & + \varepsilon \mathcal{A}_3\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right) + \mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right) &= \frac{\partial Z(z, h, t, \varepsilon)}{\partial z} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0,}} \\ \mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right) &= \frac{\partial Z(z, h, t, \varepsilon)}{\partial h} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0,}} \\ \mathcal{A}_3\left(z_0(t, c_r^*), h_0^*\right) &= \frac{\partial Z(z, h, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0.}}\end{aligned}$$

Залишок

$$\mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$$

розвинення функції

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$$

більш високого порядку малості по $x(t, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і ε в околі породжуючої розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ і вектора h_0^* , ніж перші чотири члени розвинення. Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (за Фреше) векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ по $x(t, \varepsilon)$, $h(\varepsilon)$ і ε , виділяємо лінійні по $x(t, \varepsilon)$, $h(\varepsilon)$ і ε частини $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$, $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) \mu(\varepsilon)$, і $\varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*))$ цих функціоналів і член $J(z_0(\cdot, c_r^*), h_0^*)$ нульового порядку по ε в околі точок $x = 0$, $\mu(\varepsilon) = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon) &= J(z_0(\cdot, c_r^*), h_0^*, 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \\ &+ \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) \mu(\varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon),\end{aligned}$$

де

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0,}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) \mu(\varepsilon) := \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial h} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0}},$$

$$\varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) := \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0}}.$$

Залишок

$$J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$$

розвинення функціоналу

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$$

більш високого порядку малості по $x(t, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і ε в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ і вектора h_0^* , ніж перші чотири члени розвинення. Таким чином, за умови (1.2) приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad c_r(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$$

і власної функції $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ слабконелінійної нетерової крайової задачі (2.36), (2.37), де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*)) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), s, \varepsilon \right];$$

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon) \Big] (t).$$

Позначимо сталу $(d \times (r + p))$ -вимірну матрицю

$$B_0(\check{c}_0^*) = P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[\mathcal{A}_1(z_0(t, c_r^*), h_0^*) X_r(t) \right] (\cdot); \right.$$

$$\left. \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_2(z_0(t, c_r^*), h_0^*) \right] (\cdot) \right\}.$$

Для знаходження функції $c_r(\varepsilon)$ і $\mu(\varepsilon)$ приходимо до рівняння

$$B_0(\check{c}_0) \check{c}_0(\varepsilon) = -P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_1(z_0(t, c_r^*), h_0^*) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_3(z_0(t, c_r^*), h_0^*) + \right. \right.$$

$$+\mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Таким чином, за умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.36), (2.37) у випадку параметричного резонансу в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$, а також функції $h(\varepsilon)$ в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ визначає операторна система

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon) \right](t), \\ \check{c}(\varepsilon) &= -B_0 \left(\check{c}_0^* \right)^+ P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ &\quad \left. + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_3 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) \right](\cdot) \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Тут $P_{B_0^*(\check{c}_0^*)} — (d \times d)$ —матриця-ортопроектор: $P_{B_0^*(\check{c}_0^*)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*(\check{c}_0^*))$. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема 2.1.2. *Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34) задовольняє вимоги лемми 1.1.1. Нехай також для крайової задачі (2.32), (2.33) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову розв'язності (2.6) породжуючої задачі (2.34). За умови (2.6) і тільки за неї для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ загальний розв'язок породжуючої задачі (2.34) має вигляд*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_0(s); \alpha \right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ рівняння для породжуючих констант (2.38) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ за умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G \left[f(s); \alpha(\varepsilon) \right](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

а також в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ принаймні один розв'язок

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу визначає операторна система (2.39).

Для побудови наближеного розв'язку операторної системи (2.39) у випадку $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ може бути використаний метод простих ітерацій [21, 193]. Довжина відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використаний метод простих ітерацій, може бути оцінена, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 193], так і безпосередньо із умови стискання оператора, який визначається системою (2.39) аналогічно [270, 274].

Зауважимо також, що матриця $B_0(\check{c}_0^*)$, ключова при дослідженні нелінійної невинродженої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу, і може бути знайдена безпосередньо з рівняння для породжуючих констант (2.38):

$$B_0(\check{c}_0^*) := \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\check{c}_0)}{\partial \check{c}_0} \right|_{\check{c}_0 = \check{c}_0^*}.$$

При побудові операторної системи (2.39) виконана лінеаризація умови розв'язності диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33), тому при побудові ітераційної схеми з використанням методу простих ітерацій наближені розв'язки операторної системи (2.39) не завжди задовольняють крайову умову. Для побудови ітераційної схеми, що збігається до розв'язку крайової задачі (2.32), (2.33) без використання лінеаризації умови розв'язності диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) використаємо узагальнений метод Ньютона [47].

Для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ рівняння для породжуючих констант (2.38) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ умови існування розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\left[f(s); \alpha(\varepsilon)\right](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

а також в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ визначає рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon)) := P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*) + X_r(\cdot)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon) - \right.$$

$$-\ell K \left[Z(z_0(s, c_r^*)) + X_r(s) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon) \right] (\cdot) \Big\} = 0.$$

Функція $\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon))$ двічі неперервно-диференційовна по $\check{c}(\varepsilon)$ в околі нуля.

Лема 2.1.3. *Припустимо, що для рівняння*

$$\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon)) = 0 \quad (2.40)$$

виконані наступні умови.

1. Нелінійна вектор-функція $\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon)) : \mathbb{R}^{p+r} \rightarrow \mathbb{R}^d$, двічі неперервно диференційовна в околі точки $\check{c}_0$, має корінь $\check{c}(\varepsilon)$.
2. В околі точки $\check{c}_0$ мають місце нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \left\| d^2 \mathcal{F}(\xi_k; \check{c}(\varepsilon) - \check{c}_k(\varepsilon)) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \left\| \check{c}(\varepsilon) - \check{c}_k(\varepsilon) \right\|. \quad (2.41)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов

$$P_{\mathcal{J}_k^*} = 0, \quad \mathcal{J}_k := \mathcal{F}'(\check{c}_k(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d \times r+p} \quad (2.42)$$

і

$$\theta \cdot |\check{c}(\varepsilon)| < 1 \quad (2.43)$$

для знаходження розв'язку $\check{c}(\varepsilon)$ рівняння (2.40) може бути використана ітераційна схема

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = \check{c}_k(\varepsilon) - \mathcal{J}_k^+ \mathcal{F}(\check{c}_k(\varepsilon)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.44)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{\check{c}_k(\varepsilon)\}$ до розв'язку $\check{c}(\varepsilon)$ рівняння (2.40) квадратична. Тут $P_{\mathcal{J}_k^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_k^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{J}_k^* \in \mathbb{R}^{(p+r) \times d}$.

Зауважимо, що умова (2.42) рівнозначна до вимоги повноти рангу матриці $\mathcal{J}_k$ і можлива лише у випадку $d \leq r + p$.

Теорема 2.1.9. *Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34) задовольняє вимоги леми 1.1.1. Нехай також для крайової задачі (2.32), (2.33) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову розв'язності (2.6) породжуючої задачі (2.34). За умови (2.6) і тільки за неї*

для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ загальний розв'язок породжуючої задачі (2.34) має вигляд

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_0(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що для рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}_k(\varepsilon)) = 0 \quad (2.45)$$

виконані умови леми 2.1.3. Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ рівняння для породжуючих констант (2.38) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \alpha(\varepsilon)](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

а також в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ для знаходження принаймні одного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_r^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \varepsilon) \right](t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \mathcal{F}(\check{c}_{k+1}(\varepsilon)) = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (2.46), можна оцінити із умов виконання вимог леми 2.1.3 по відношенню до рівняння (2.45), вимоги стискання для оператора $\varepsilon G'_z$, а також із умови стиснення для оператора, визначеного для операторної системи для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу. Достатньою умовою збіжності ітераційної схеми є вимога [206, с. 639], [270]

$$\sup_{\varepsilon \in [0; \varepsilon_*]} \left\| \varepsilon G \left\{ \left[\frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial h} \right] \right\} \right\|;$$

$$\left\| \left[\frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial h} \right] \right\| (t) \leq \lambda < 1.$$

Приклад 2.1.8. Вимоги леми 2.1.2 і теореми 2.1.9 задовольняє нелінійна двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння типу Дюффінга

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t) z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, h, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.47)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того [301]

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} (\sin \varepsilon + h(\varepsilon)) z_a(t, \varepsilon) + z_a^3(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\ell z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon) := \Upsilon (z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon)).$$

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки породжуюча система для рівняння (2.47) задовольняє вимоги леми 1.1.1 і при цьому має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де для фіксованої функції $\nu_0(t) = 0$:

$$X_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \sin t - \sin 3t \\ 3(\cos t - \cos 3t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Породжуюча задача для рівняння типу Дюффінга (2.47) критична: $Q = 0$, при цьому умова (2.6) її розв'язності виконана:

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$X_r(t) = X_0(t), \quad G[f(s); \alpha](t) = K[f(s), \nu_0(s)](t).$$

Рівняння для породжуючих констант (2.38) у випадку рівняння типу Дюффінга (2.47) для фіксованої функції $\nu_0(t) = 0$ має корінь

$$c_r^* = -\frac{3}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_0^* = 0,$$

якому відповідає матриця повного рангу

$$B_0(\check{c}_0) = \frac{3\pi}{64} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, крайова задача для рівняння типу Дюффінга (2.47) задовольняє вимоги леми 2.1.2, отже в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \alpha](t)$$

а також в околі точки $h_0^* = 0$ для знаходження принаймі одного розв'язку диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.47) у випадку параметричного резонансу може бути використана ітераційна схема (2.46). На періоду кроці ітераційної схеми (2.46) в силу повноти рангу матриці

$$\mathcal{J}_0 \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{33975241}{232314368} & -\frac{1175281}{723034507} \\ -\frac{28597495}{193931646} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

умова (2.42) виконана, при цьому

$$c_{r1}(\varepsilon) \approx \frac{2\,952\,163}{5\,705\,681\,367} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(\varepsilon) \approx -\frac{290\,977}{50\,499\,404\,932},$$

крім того

$$x_1(t, \varepsilon) \approx \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ x_{1b}(t, \varepsilon) \\ x_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$x_{1a}(t, \varepsilon) \approx \frac{1\,034\,894}{5\,937\,420\,849} \sin 3t - \frac{3\,141\,461\,793}{5\,146\,971\,001\,651\,199} \sin 9t,$$

$$x_{1b}(t, \varepsilon) \approx \frac{1\,034\,894}{1\,979\,140\,283} \cos 3t - \frac{2\,249\,001\,052}{409\,418\,147\,066\,311} \cos 9t, \quad x_{1c}(t, \varepsilon) \approx 0.$$

На другому кроці ітераційної схеми (2.46) в силу повноти рангу матриці

$$\mathcal{J}_0 \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{20939095}{142604194} & \frac{1}{4611686018427387904} \\ -\frac{20939095}{142604194} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

умова (2.42) виконана, при цьому

$$c_{r_2}(\varepsilon) \approx \frac{2\,227\,342}{4\,304\,810\,997} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(\varepsilon) \approx -\frac{290\,977}{50\,499\,404\,932},$$

крім того

$$z_2(t, \varepsilon) \approx \begin{pmatrix} z_{2a}(t, \varepsilon) \\ z_{2b}(t, \varepsilon) \\ z_{2c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} z_{1a}(t, \varepsilon) &\approx \frac{51\,906}{58\,617\,651\,179} \sin t - \frac{54\,319\,472}{435\,161\,511} \sin 3t - \frac{24\,693}{40\,633\,008\,023} \sin 9t, \\ z_{1b}(t, \varepsilon) &\approx \frac{51\,906}{58\,617\,651\,179} \cos t - \frac{33\,336\,885}{89\,022\,277} \cos 3t - \frac{201\,407}{36\,824\,526\,280} \cos 9t, \\ z_{1c}(t, \varepsilon) &\approx 0. \end{aligned}$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку крайової задачі для рівняння типу Дюффінга (2.47) визначимо нев'язки

$$\begin{aligned} \Delta_k(\varepsilon) := & \left\| A(t) z'_k(t, \varepsilon) - B(t) z_k(t, \varepsilon) - f(t) - \right. \\ & \left. - \varepsilon Z(z_k(t, \varepsilon), h_k, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Зокрема

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0.000\,390\,625, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 2,63\,686 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,67\,477 \times 10^{-8}.$$

Припустимо, що породжуюче диференціально-алгебраїчне рівняння (2.34) задовольняє вимоги леми 1.1.1. У загальному випадку, а саме для

довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$$

розв'язність породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w; \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. Згідно теореми 2.1.2 за умови (2.9) загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34) має вигляд

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Матриця $X_r(t)$ утворена із r лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\left\{ X_0(t); K \left[P_{A_{\rho_0}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}}.$$

В силу неперервності по z і по μ нелінійної функції $Z(z, h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ і нелінійного векторного функціоналу $J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (2.34) і початкового значення h_0 функції $h(\varepsilon)$ приходимо до наступного рівняння

$$\mathcal{F}_\rho(\check{c}) := P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r), h_0, 0) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_r), h_0, s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0.$$

Необхідні умови існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема.

Лема 2.1.4. *Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34) задовольняє вимоги лемми 1.1.1. За умови (2.9) і тільки за неї загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34) має вигляд*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \psi(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^)$ крайова задача (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу має розв'язок*

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при цьому в малому околі вектору $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ існує власна функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{F}_\rho(\check{c}_0) = 0. \quad (2.48)$$

Позначимо сталу $(d \times (r + p))$ -вимірну матрицю

$$C_0(\check{c}_0) = P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) X_r(t) \right] (\cdot); \right. \\ \left. \ell_2 (z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_2 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) \right] (\cdot)) \right\}.$$

Для знаходження функцій $c_r(\varepsilon)$ і $\mu(\varepsilon)$ приходимо до рівняння

$$C_0(\check{c}_0) \check{c}_0(\varepsilon) = -P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + \right. \\ \left. + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_3 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}.$$

Таким чином, за умови $P_{C_0^*} P_{\mathcal{D}_d^*} = 0$ розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.36), (2.37) у випадку параметричного резонансу в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$, а також функції $h(\varepsilon)$ в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ визначає операторна система

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*)) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \\ \check{c}(\varepsilon) = -C_0(\check{c}_0)^+ P_{\mathcal{D}_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ \left. + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + x(\varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ \left. - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_3 \left(z_0(t, c_r^*), h_0^* \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{R}(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}. \quad (2.49)$$

Тут $P_{C_0^*}(\check{c}_0)$ — $(d \times d)$ -матриця-ортопроектор: $P_{C_0^*}(\check{c}_0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(C_0^*(\check{c}_0))$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.1.10. Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.34)

задовольняє вимоги лема 1.1.1. Нехай також для крайової задачі (2.32), (2.33) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову розв'язності (2.6) породжуючої задачі (2.34). За умови (2.9) загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.34) має вигляд

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що для рівняння

$$\mathcal{F}_\rho(\check{c}_k(\varepsilon)) = 0 \quad (2.50)$$

виконано умови лема 2.1.3. Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ рівняння для породжуючих констант (2.48) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$ в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

а також в околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^p$ для знаходження принаймні одного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.32), (2.33) у випадку параметричного резонансу може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_r^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G\left[Z(z_0(s, c_r^*)) + x_k(s, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon; \psi(s); \right. \\ &\quad \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \varepsilon)\right](t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \mathcal{F}_\rho(\check{c}_{k+1}(\varepsilon)) = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Зауважимо, що, як і у випадку нетерових крайових задач, а також критичних періодичних задач у відсутності параметричного резонансу, має місце рівність [21, 193, 276]

$$C_0(\check{c}_0) = \mathcal{F}'_\rho(\check{c}) \Big|_{\check{c} = \check{c}_0}.$$

У випадку параметричного резонансу теорема 2.1.10 є узагальненням відповідних тверджень [276].

Достатньою умовою збіжності ітераційної схеми є вимога [206, с. 639], [270]

$$\sup_{\varepsilon \in [0; \varepsilon_*]} \left\| \varepsilon G \left\{ \left[\frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial h} \right]; \right. \right. \\ \left. \left. \left[\frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial h} \right] \right\} (t) \right\| \leq \lambda < 1.$$

Приклад 2.1.9. Вимоги теореми 2.1.9 задовольняє нелінійна 2π -періодична диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння типу Дюффінга (2.47).

Оскільки умова (1.2) виконана, остільки породжуюча система для рівняння (2.47) задовольняє вимоги леми 1.1.1 і при цьому має розв'язок вигляду

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

в даному випадку

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t),$$

де

$$K[f(s)](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \sin t - \sin 3t \\ 3(\cos t - \cos 3t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Породжуюча задача для рівняння типу Дюффінга (2.47) критична: $Q = 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, при цьому умова (2.6) її розв'язності виконана:

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$X_r(t) = X_0(t), \quad G[f(s); \alpha](t) = K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad \nu_0(t) := 0.$$

Рівняння для породжуючих констант (2.38) у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (2.47) для фіксованої функції $\nu_0(t) = 0$ має корінь

$$c_r^* = -\frac{3}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_0^* = 0,$$

якому відповідає матриця

$$B_0(\check{c}_0) = \frac{3\pi}{64} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $B_0(\check{c}_0)$ вирождена, остільки у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (2.47) для фіксованої функції $\nu_0(t) = 0$ вимоги леми 2.1.2 і теореми 2.1.9 не виконано.

З іншого боку, умова (1.2) виконана, тому породжуюча система для рівняння (2.47) задовольняє вимоги леми 1.1.1 і при цьому для матриці $\Psi(t) = 1$ має місце розв'язок вигляду

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

в даному випадку

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = K[f(s)](t).$$

При цьому, рівняння для породжуючих констант (2.48) у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (2.47) для фіксованої функції $\nu_0(t) = 0$ має той же корінь c_r^* , h_0^* , якому відповідає матриця

$$C_0(\check{c}_0) = \frac{3\pi}{64} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

повного рангу. Таким чином, 2π -періодична крайова задача для рівняння типу Дюффінга (2.47) задовольняє вимоги теореми 2.1.10, отже в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \psi(s); \alpha](t)$$

а також в околі точки $h_0^* = 0$ для знаходження принаймі одного розв'язку диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.47) у випадку параметричного резонансу може бути використана ітераційна схема (2.51). Функція $\mathcal{F}(\check{c}_1(\varepsilon))$ у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (2.47) має корінь

$$c_{r_1}(\varepsilon) = \frac{3(27\varepsilon + 2560\varepsilon \sin \varepsilon)}{163\,840} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(\varepsilon) = 0,$$

крім того

$$x_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon}{64} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 3 \cos 3t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{163\,840} \begin{pmatrix} 30 \sin 3t - \sin 9t \\ 9(10 \cos 3t - \cos 9t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0.000\,390\,625, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 2,56\,494 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,0000\,390\,625, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 1,96\,473 \times 10^{-9}.$$

2.2. Крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем

2.2.1. Лінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем. За умови $P_{A^*(t)} \neq 0$ система (2.4):

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t)$$

не розв'язна відносно похідної. Припустимо, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме: $1 \leq \text{rank } A(t) = \sigma_0$. Як відомо [167], довільна $(m \times n)$ -матриця $A(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді стандартного розвинення

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) \in \mathbb{C}_{m \times m}[a, b], \quad S_0(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b];$$

тут $R_0(t)$ і $S_0(t) \in \mathbb{C}_{n \times n}[a, b]$ — невироджені матриці. Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)z(t)$ приводить систему (2.4) до вигляду

$$J_{\sigma_0}y'(t) = C_0(t)y(t) + R_0^{-1}(t)f(t); \quad (2.52)$$

тут

$$C_0(t) := (R_0^{-1}(t)B(t) + J_{\sigma_0}S_0'(t))S_0^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(t) & C_{12}^{(0)}(t) \\ C_{21}^{(0)}(t) & C_{22}^{(0)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}_n^1[a, b], \quad u(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^1[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}_{n-\sigma_0}^1[a, b]$$

приводить систему (2.4) до вигляду

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t)u(t) + C_{12}^{(0)}(t)v(t) + g_1^{(0)}(t), \quad (2.53)$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + g_2^{(0)}(t) = 0; \quad (2.54)$$

тут

$$R_0^{-1}(t)f(t) := \text{col } (g_1^{(0)}(t), g_2^{(0)}(t)).$$

Крім того $P_{D_0^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{D_0^*}(t) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*(t))$. Рівняння (2.54) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [21] $P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) = 0$;

при цьому загальний розв'язок рівняння (2.54)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}} \varphi(t) - D_0^+(t) g_2^{(0)}(t),$$

$$D_0(t) := \begin{bmatrix} C_{21}^{(0)}(t); C_{22}^{(0)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0) \times n}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a, b]$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(t) — (n \times \rho_0) —$ матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(t) —$ матриці-ортопроектора: $P_{D_0}(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(D_0(t))$. По-значивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t)$ і добутку $D_0^+(t) g_2^{(0)}(t)$

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{col} (P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t)), \quad D_0^+(t) g_2^{(0)}(t) = - \text{col} \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t) \varphi'(t) = B_1(t) \varphi(t) + f_1(t), \quad \text{rank } A_1(t) := \sigma_1; \quad (2.55)$$

тут

$$A_1(t) := P_1^{(0)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times \rho_0}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 \leq \rho_0,$$

$$B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t) P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t) P_2^{(0)}(t) - A_1'(t),$$

крім того

$$f_1(t) := C_{11}^{(0)}(t) f_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(0)}(t) f_2^{(1)}(t) + g_1^{(0)}(t) - \left(f_1^{(1)}(t) \right)'.$$

Лема 2.2.1. *За умови (1.8) лінійна диференціально-алгебраїчна система (2.4) має розв'язок вигляду*

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t) c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t),$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t) P_{D_{\rho_0}} U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

$$K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t) := S_0^{-1}(t) P_{D_{\rho_0}} K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (t) - S_0^{-1}(t) D_0^+(t) g_2^{(0)}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.4).

За умови

$$P_{A^*}(t) \neq 0, \quad P_{A_1^*}(t) = 0, \quad P_{D_0^*} g_2^{(0)}(t) = 0,$$

але $A_1^+(t) B_1(t) \notin \mathbb{C}_{\sigma_0 \times \sigma_0}[a, b]$, або $A_1^+(t) f_1(t) \notin \mathbb{C}[a, b]$, система (2.4) роз-

в'язна, але розв'язок $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a, b]$ не є шуканим. за аналогією з класифікацією імпульсних крайових задач [34] у випадку (1.8) будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.4) має місце виродження першого порядку. Розміри матриці A менші за розміри матриці A_1 , проте використана нами схема зменшення розмірності матриці A суттєво відрізняється від [326].

Приклад 2.2.1. Вимоги лема 2.2.1 задовольняє диференціально-алгебраїчна система

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad (2.56)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*(t)} \neq 0$, оскільки умова (1.2) не виконана, при цьому матриця $A(t)$ може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

тут

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. У даному випадку матриця $A_1(t) = I_3$ не-

роджена, при цьому $P_{A_1}(t) = 0$, $P_{A_{\rho_1}}(t) = 0$, тому шуканий розв'язок

$$z(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix}, \quad K[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.56).

У частковому випадку $P_{D_0} = P_{D_{\rho_0}} = 0$, за умови (1.8) система (2.4) має принаймі один розв'язок вигляду $z(t) = -S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$.

Приклад 2.2.2. *Вимоги лема 2.2.1 задовольняє диференціально-алгебраїчна система*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad (2.57)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*(t)} \neq 0$, остільки умова (1.2) не виконана, при цьому матриця $A(t)$ може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_2 \\ O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

тут $S_0(t) = I_2$,

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix},$$

крім того

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

В даному випадку матриця $D_0 = -2I_2$ невиводжена, тому шуканий розв'язок визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.57)

$$z(t) = K[f(s)](t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Більш просту схему знаходження подібних розв'язків, які є положеннями рівноваги диференціально-алгебраїчної системи (2.4), зокрема, системи (2.57), визначає лема [256].

Припустимо, що рівняння (2.4) задовольняє вимоги леми 2.2.1. Зафіксуємо довільну неперерівну вектор функцію $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$. Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K[f(s), \nu_1(s)](t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

задачі Коші $z(a) = c_{\rho_1}$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (2.4) у крайову умову (2.4), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Q c_{\rho_1} = \alpha - \ell K[f(s), \nu_1(s)](\cdot). \quad (2.58)$$

Рівняння (2.8) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_1(s)](\cdot) \right\} = 0. \quad (2.59)$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*} , крім того $Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times \rho_1}$. За умови (2.59) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (2.58)

$$c = Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_1(s)](\cdot) \right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової за-

дачі (2.4)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_1(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} + \\ + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p} \rightarrow N(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_1 \times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q . Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.2.1. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лема 2.2.1. За умови (2.6) і тільки за неї для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$ загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t) := X_1(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} + \\ + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

Приклад 2.2.3. *Вимоги теореми 2.2.1 задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2.60)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також вектор-функція $f(t)$ наведена в прикладі 2.2.1, крім того

$$\ell z(\cdot) := ez(1) - z(0), \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 - e(\cos 1 - 1) \\ 2 \\ e \end{pmatrix}.$$

У прикладі 2.2.1 було показано, що диференціально-алгебраїчна система (2.56), а отже, і система (2.60) представляють вироджений випадок першого порядку. Скористаємось знайденими в прикладі 2.2.1 матрицею $X_1(t)$, а також узагальненим оператором Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.56). Загальний розв'язок одно-

рідної задачі (2.60) визначає матриця

$$Q = \begin{pmatrix} e-1 & 0 & e \\ 0 & 0 & e-1 \\ e-1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при цьому виконана умова (2.6) розв'язності задачі (2.60). Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.60)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$\begin{aligned} X_r(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*, \quad G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t) = \\ &= \frac{1}{(e-1)^2} \begin{pmatrix} e - e^2 + 2et - 2(1+t) + (e-1)^2 \cos t \\ 2(e-1) \\ e + e^2 - e^{1-t} - e^{2-t} + 2t - 2et \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.60).

Наслідок 2.2.1. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лема 2.2.1. За умови $P_{Q^*} = 0$, крайова задача (2.4) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна $G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t)$ крайової задачі (2.4).

Приклад 2.2.4. *Вимоги наслідку 2.2.1 задовольняє антиперіодична диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(1) + z(0) = \alpha, \quad (2.61)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також вектор-функція $f(t)$ наведені в прикладі 2.2.1, крім того

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^*.$$

У прикладі 2.2.1 було показано, що диференціально-алгебраїчна система (2.56), а отже, і система (2.60) представляють вироджений випадок першого порядку ($p := 1$). Загальний розв'язок однорідної задачі (2.61)

визначає невироджена матриця

$$Q = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 2e & 0 & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 1-e & 1+e & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{Q^*} = P_Q = 0$, остільки виконана умова однозначної розв'язності задачі (2.61). Таким чином, знаходимо єдиний розв'язок неоднорідної задачі (2.61)

$$z(t) = G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t);$$

тут

$$G[f(s); \nu_1(s); \alpha](t) = \frac{1}{2(e+1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} -(1+e)(1-2t+\cos 1-2\cos t) \\ 2(1+e) \\ e^{-t}(-2e(1+\cos 1) + (e^t + e^{1+t})(3-2t+\cos 1)) \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.61).

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$$

розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_1(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w; \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1 \times w}[a, b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.4) представимо у вигляді

$$K[f(s), \nu_1(s)](t) = K[A^+(s)f(s)](t) + K[P_{A_{\rho_1}}(s)\nu_1(s)](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \left[Q ; \ell K[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)](\cdot) \right] \in \mathbb{R}^{k \times (\rho_1 + w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_p(t)c_{\rho_1} + K\left[A^+(s)f(s)\right](t) + K\left[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)\gamma\right](t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1}$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (2.4) у крайову умову (2.4), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}\check{c} = \alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_1}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_1+w}. \quad (2.62)$$

Рівняння (2.62) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*}\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} = 0. \quad (2.63)$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$, крім того $Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times \rho_p}$. За умови (2.9) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (2.62)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} + P_{\mathcal{D}}\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_p+w}$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$z(t, \delta) = K\left[A^+(s)f(s)\right](t) + \left\{X_p(t); K\left[P_{A_{\rho_p}}\Psi(s)\right](t)\right\} \times \\ \times \mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} + \left\{X_p(t); K\left[P_{A_{\rho_p}}(s)\Psi(s)\right](t)\right\} P_{\mathcal{D}}\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_p+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p+w} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.2.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги лемми 2.2.1. За умови (2.63) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \psi(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4)

$$G\left[f(s); \psi(s); \alpha\right](t) := K\left[A^+(s)f(s)\right](t) + \\ + \left\{X_p(t); K\left[P_{A_{\rho_1}}\Psi(s)\right](t)\right\} \mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\}.$$

Матриця $X_r(t)$ утворена із r лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\left\{ X_1(t); K \left[P_{A_{\rho_1}}(s) \Psi(s) \right] (t) \right\} P_{\mathcal{D}}.$$

Означення 2.2.1. За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) приведена до некритичного випадку.

Останнє визначення є узагальненням критичного випадку ($P_{Q^*} = 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, що отримана із системи (2.4) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.4) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a, b]$.

Приклад 2.2.5. Вимоги теореми 2.2.2 задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t), f(t) := \begin{pmatrix} 0 & e^t \end{pmatrix}^*, \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2.64)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, наведені в прикладі 2.2.5, крім того

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \quad \alpha := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 - e^{2\pi} \\ 1 - e^{2\pi} \\ -4 - e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

У прикладі 2.2.5 було показано, що диференціально-алгебраїчна система (2.64) не вироджена. Використаємо знайдені в прикладі 2.2.5 матрицю $X_0(t)$, а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.64). Загальний розв'язок однорідної задачі (2.64) визначає вироджена матриця $Q = 0$. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$, остільки задача (2.64) представляє критичний випадок, при цьому виконана умова (2.63) її розв'язності. Таким чином,

знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.64):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} -5t - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \\ 2\pi (-\cos t + e^t \cos t + 2 \sin t + 2e^t \sin t) \\ 5t - 2\pi \cos t + 2e^t \pi \cos t - \pi \sin t - e^t \pi \sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.64).

Результати теорем 2.2.1 та 2.2.2 можуть бути перенесені на гібридні різницево-диференціальні крайові задачі [139].

Наслідок 2.2.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.4) задовольняє вимоги леми 2.2.1. За умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.4) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α , а також початкової функції $\varphi(t)$. Загальний розв'язок диференціально алгебраїчної крайової задачі (2.4)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) := K[A^+(s)f(s)](t) + \left\{ X_p(t); K[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)](t) \right\} \mathcal{D}^+ \left\{ \alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot) \right\}$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.4).

Приклад 2.2.6. *Вимоги наслідку 2.2.2 задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2.65)$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також вектор-функція $f(t)$ наведені в прикладі 2.2.5, крім того

$$\ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (z(0) - z(2\pi)), \quad \alpha := 0.$$

У прикладі 2.2.5 було показано, що диференціально-алгебраїчна система (2.65) не вироджена. Використаємо знайдені у прикладі 2.2.5 матрицю $X_0(t)$, а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи. Для однорідної задачі (2.65) матриця $Q = 0$, отже, згідно традиційної класифікації нетерових крайових задач для диференціальних систем для задачі (2.65) має місце критичний випадок. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому $\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$. Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, остільки задача (2.65) представляє не критичний випадок, отже, диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.65) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (2.65):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$\begin{aligned} & G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \\ &= \frac{1}{10\pi} \begin{pmatrix} t - e^{2\pi}t - 2\pi \cos t + 2e^t\pi \cos t - \pi \sin t - e^t\pi \sin t \\ 2\pi(-\cos t + e^t \cos t + 2\sin t + 2e^t \sin t) \\ e^{2\pi}t - t - 2\pi \cos t + 2e^t\pi \cos t - \pi \sin t - e^t\pi \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.65).

2.2.2. Некритичний випадок. Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.3) вироджена і не критична ($P_{Q^*} = 0$), тобто, задовольняє вимоги леми 2.2.1, при цьому породжуюча задача (2.3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α . Загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.3) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K[f(s), \nu_1(s)](t),$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Для знаходження вектора

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

аналогічно [176], приходимо до задачі

$$A(t)x'(t, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2.66)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \quad (2.67)$$

Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)x(t)$ приводить систему (2.66) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y'(t) = C_0(t)y(t) + \varepsilon R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (2.68)$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}_n^1[a, b], \quad u(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^1[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}_{n-\sigma_0}^1[a, b]$$

приводить систему (2.68) до вигляду

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t)u(t) + C_{12}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon Z_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2.69)$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0; \quad (2.70)$$

тут

$$\begin{aligned} & R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := \\ & = \text{col } (Z_1(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Рівняння (2.70) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{D_0^*}(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv 0; \quad (2.71)$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (2.70) має вигляд

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\mu(t) - D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{col } (P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t))$ і добутку

$$D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = - \text{col } (M(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), N(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\mu(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}^1[a, b]$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\mu'(t) = B_1(t)\mu(t) + \varepsilon Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon); \quad (2.72)$$

тут $A_1(t) := P_1^{(0)}(t)$, $B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - \left(P_1^{(0)}(t)\right)'$; крім того

$$Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := C_{11}^{(0)}(t)M(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \\ + C_{12}^{(0)}(t)N(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + Z_1(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - M'_y(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\mu'(t).$$

За умови $P_{A_1^*}(t) \equiv 0$ система (2.72), принаймні однозначно, розв'язна відносно похідної:

$$\frac{d\mu}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\mu + \varepsilon A_1^+(t)Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (2.73)$$

За умови (1.8) і (2.71) система (2.66) має розв'язок вигляду

$$x(t, c_{\rho_1}(\varepsilon)) = X_1(t)c_{\rho_1}(\varepsilon) + \varepsilon K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (t),$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (t) := \\ = S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t) \int_a^t U_1^{-1}(s) A_1^+(s) Y(y(s, \varepsilon), y'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \\ - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad c_{\rho_1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\rho_1}.$$

Таким чином, за умови (1.8) і (2.71) розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.1) має вигляд $z(t, c_{\rho_1}) = z_0(t, c_{\rho_1}) + x(t, c_{\rho_1}(\varepsilon))$, де

$$z_0(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K \left[f(s), \nu_1(s) \right] (t).$$

У некритичному випадку задача (2.1), (2.2) розв'язна для довільних нелінійностей. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.66), (2.67) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд $x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon)$, де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) := G \left[Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_1(s) \right] (t).$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) при цьому визначає операторна система [21, 176]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = G \left[Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_1(s) \right] (t); \quad G \left[Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_1(s) \right] (t) :=$$

$$= K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (t) - X(t) Q^+ \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (\cdot).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний [21, 176] метод простих ітерацій:

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (2.74)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = G \left[Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \nu_1(s) \right] (t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.2.3. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (2.3) задовольняє вимоги лема 2.2.1. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) породжуюча задача (2.3) розв'язна для довільних неоднорідностей диференціально-алгебраїчної системи і крайової умови (2.3) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G \left[f(s); \nu_1(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (1.8), (2.71) і

$$A_1^+(\cdot) Y(y, y', \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a, b], \quad A_1^+(t) Y(\cdot, y', t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[\|y - y_0\| < q], \quad (2.75)$$

$$A_1^+(t) Y(y, \cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[\|y' - y'_0\| < q']$$

для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітерацийна схема (2.74).

Для визначення величини ε_* може бути використаний метод мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 176, 193, 219, 223]; крім того, конструктивна оцінка величини ε_* може бути знайдена аналогічно [270].

На відміну від статей [22, 234] результат теореми 2.2.3 отриманий без використання означення центральної канонічної форми лінійної диференціально-алгебраїчної системи [31, 241].

Приклад 2.2.7. *Вимоги теореми 2.2.3 задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна антиперіодична задача для рівняння типу Рікатті*

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (2.76)$$

де матриці $A(t), B(t)$ і функція $f(t)$ визначені в прикладі 2.2.1, крім

того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^2(t, \varepsilon) \\ 0 \\ z_a^2(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) := z(0, \varepsilon) + z(\pi, \varepsilon).$$

У прикладі 2.2.1 знайдено розв'язок породжуючої системи

$$z_0(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

який не залежить від довільної функції $\nu_1(t)$. Загальний розв'язок породжуючої задачі визначає невироджена матриця

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 + e^{-\pi} & 1 + e^{-\pi} & 1 - e^{-\pi} - \pi \end{pmatrix},$$

отже, для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.76) має місце не критичний випадок. Таким чином, знаходимо єдиний розв'язок породжуючої задачі

$$z_0(t) = G[f(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої задачі для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.76). Оскільки $D_0 = 0$, остільки $D_0^+ = 0$, отже, умова (2.71) виконана. Умову (1.8) для диференціально-алгебраїчної системи (2.76) перевірено в прикладі 2.2.1. Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.76) може бути використана ітераційна схема (2.74), при цьому, поклавши $c(\varepsilon) := 0$, маємо:

$$x_1(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t, \varepsilon) \\ 0 \\ x_{1c}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$x_{1a}(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{12}(9 \sin t + \sin 3t),$$

$$x_{1c}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{60}(15 \cos t - 3 \cos 3t - 15 \sin t + \sin 3t).$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної дифе-

ренціально-алгебраїчної крайової задачі (2.76) визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$ нульового і першого наближення до розв'язку крайової задачі (2.76). Поклавши $\varepsilon := 0, 1$, $k = 0, 1$, отримуємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0, 1, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0, 00\,879\,984.$$

Аналогічно, маємо

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0, 01, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 0, 0000\,852\,294.$$

Відмітимо також, що нульове і перше наближення до розв'язку крайової задачі (2.76) в точності задовольняє крайову умову.

Звауважимо, що наближення до розв'язку крайової задачі (2.76) можуть бути знайдені за допомогою методу малого параметру Пункаре. Покладемо

$$z(t, \varepsilon) := \text{col} \left(u(t, \varepsilon) \ v(t, \varepsilon) \ w(t, \varepsilon) \right)^*,$$

де

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &:= u_0(t) + \varepsilon \xi_1(t) + \varepsilon^2 \xi_2(t) + \varepsilon^3 \xi_3(t) + \dots, \\ v(t, \varepsilon) &:= v_0(t) + \varepsilon \zeta_1(t) + \varepsilon^2 \zeta_2(t) + \varepsilon^3 \zeta_3(t) + \dots, \\ w(t, \varepsilon) &:= w_0(t) + \varepsilon \eta_1(t) + \varepsilon^2 \eta_2(t) + \varepsilon^3 \eta_3(t) + \dots. \end{aligned}$$

Нульове наближення

$$z_0(t, \varepsilon) := \text{col} \left(u_0(t, \varepsilon) \ v_0(t, \varepsilon) \ w_0(t, \varepsilon) \right)^*$$

до розв'язку крайової задачі (2.76) визначає невироджена породжуюча диференціально-алгебраїчної крайова задача

$$A(t) z'_0(t) = B(t) z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = 0.$$

Таким чином, знаходимо єдиний розв'язок породжуючої задачі

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перше наближення

$$z_1(t, \varepsilon) := \text{col} \left(u_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi_1(t) \ v_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \zeta_1(t) \ w_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \eta_1(t) \right)^*$$

до розв'язку крайової задачі (2.76) визначає невироджена диференціально-

алгебраїчна крайова задача

$$A(t) x_1'(t) = B(t)x_1(t) + Z(z_0(t)), \quad \ell x_1(\cdot) = 0;$$

тут

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon x_1(t), \quad Z(z_0(t)) := \begin{pmatrix} u_0^2(t) \\ 0 \\ u_0^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ 0 \\ \eta_1(t) \end{pmatrix}, \quad \xi_1(t) = -\frac{1}{12}(9 \sin t + \sin 3t),$$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{60}(15 \cos t - 3 \cos 3t - 15 \sin t + \sin 3t).$$

Наприкінці, відмітимо, що перші наближення до розв'язку крайової задачі (2.76), знайдені за допомогою методу малого параметру Пункаре в точності співпадають з першими наближеннями до розв'язку крайової задачі (2.76), знайденими з використанням ітераційної схеми (2.74).

Результат теореми 2.2.3 можна перенести на нелінійні вироджені диференціально-алгебраїчні крайові задачі у критичних випадках [21, 36, 176, 177, 179, 276].

2.2.3. Критичний випадок першого порядку. Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), при чому породжуюча крайова задача (2.3) є виродженою, тобто $P_{A^*}(t) \neq 0$. У критичному випадку задача (2.1), (2.2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*} \left\{ J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.77)$$

Необхідні умови існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) у критичному випадку визначає наступна лема [295].

Лема 2.2.2. *За умови (1.8) та (2.9) породжуюча диференціально-алгеб-*

раїчна задача (2.3) має розв'язок вигляду

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. За додаткової умови (2.71) для існування розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) необхідно виконується умова

$$F(c_r^*) := P_{\mathcal{D}^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), \varepsilon) - \ell K \left[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0), \nu_1(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (2.78)$$

По аналогії з монографією [21], рівняння (2.78) будемо називати рівнянням для породжуючих констант.

Контрприклад. Умови доведеної лема не виконуються у випадку задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) & z_b(t, \varepsilon) & z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}^*$$

диференціально-алгебраїчної системи

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon); \quad (2.79)$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \\ \sin 2t \\ \cos 2t - 1 \end{pmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^2(t, \varepsilon) \cos t \\ -z_a^2(t, \varepsilon) \sin t \\ z_c^2(t, \varepsilon) \cos t \\ -z_c^2(t, \varepsilon) \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*}(t) \neq 0$, оскільки для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.79) має місце виродження, при цьому матриця $A(t)$ може бути

представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

тут

$$P_{A^*}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. У даному випадку матриця $A_1(t) = I_3$ невироджена, при цьому $P_{A_1}(t) = 0$, $P_{A_{\rho_1}}(t) = 0$, тому шуканий розв'язок породжуючої системи

$$z_0(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix},$$

а також

$$K[f(s)](t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(t + \cos t - 1) \\ -2(\cos t + \sin t - 1) \\ 4 - 3e^{-t} - 2t - \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної частини для породжуючої 2π -періодичної задачі для системи (2.79) визначають матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-2\pi} & 1 - e^{-2\pi} & -1 + e^{-2\pi} + 2\pi \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, диференціально-алгебраїчна 2π -періодична задача для си-

стеми (2.79) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.9). Загальний розв'язок породжуючої задачі

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає узагальнений оператор Гріна [295]

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \cos t - 3 \\ -4(\cos t + \sin t) \\ 3 - 2(\cos t + \sin t) \end{pmatrix},$$

при цьому необхідну умову розв'язності нелінійної 2π -періодичної диференціально-алгебраїчної задачі для системи (2.79) не виконано: $F(c_r^*) = 8\pi \neq 0$, тому 2π -періодична задача для системи (2.79) не має розв'язків, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$.

2.2.4. Достатня умова існування розв'язку. Припустимо далі необхідну умову розв'язності нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) виконаною. Фіксуємо один із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (2.78), розв'язок $z(t, \varepsilon)$ диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$. Використовуючи неперервну диференційовність по першому аргументу функції $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку, розвинемо цю функцію в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $A_1(t) = Z'_z(z_0(t, c_r^*), t, 0)$. Залишок $R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ розвинення функції $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ за умови $Z'_\varepsilon(z_0(t, c_r^*), t, 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення, тому

$$R(z, t, \varepsilon) \left| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{array} \right. \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial R(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{array} \equiv 0.$$

Аналогічно, в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має місце розвинення

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

де $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := J'_{1_z}(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$. Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функціоналу $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ за умови $J'_{1_\varepsilon}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення, тому

$$J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \left| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{array} \right. \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \right| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{array} \equiv 0.$$

Розв'язки крайової задачі (2.1), (2.2) при цьому визначає операторна система [21]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad (2.80)$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Позначимо сталу $(d \times r)$ – вимірну матрицю

$$B_0(\psi) = P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[A_1(s) X_r(s), \Psi(s) \right] (\cdot) \right\}$$

та $P_{B_0^*}(\psi)$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*(\psi))$. За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ для побудови принаймні одного із розв'язків операторної системи може бути використаний [21] метод простих ітерацій

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^+(\psi) P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_{k+1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ \left. - \ell K \left[A_1(s) x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z_0(s, c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \Psi(s) \right] (\cdot) \right\}, \quad (2.81)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Достатню умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) в критичному випадку визначає наступна теорема [295].

Теорема 2.2.4. *За умови (1.8) та (2.9) для кожного із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (2.78) породжуюча диференціально-алгебраїчна задача (2.3) має розв'язок вигляду*

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (2.71) та $P_{B_0^}P_{Q_d^*} = 0$ для побудови принаймні одного із розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути використано ітераційну схему (2.81).*

Зазначимо, що на відміну від статей [180, 234], доведена теорема визначає умови розв'язності для нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2) без використання центральної канонічної форми. Крім того, на відміну від статей [180, 234], умови розв'язності крайової задачі (2.1), (2.2) визначає матриця $B_0(\psi)$, яка залежить від матриці $\Psi(t)$. Довжина відрізка $[0, \varepsilon_*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (2.81), може бути оцінена, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [21], так і безпосередньо з умови стискання оператора, яка визначається системою (2.80) аналогічно [284].

Приклад 2.2.8. *Умови доведеної теореми виконуються у випадку задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчної системи*

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon); \quad (2.82)$$

тут $A(t)$, $B(t)$ — матриці, визначені у контрприкладі, крім того

$$f(t) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^3(t, \varepsilon) \cos t \\ -z_a^3(t, \varepsilon) \sin t \\ z_a^2(t, \varepsilon) \cos t \\ -z_a^2(t, \varepsilon) \sin t \end{pmatrix}.$$

У даному випадку матриця шуканий породжуючий розв'язок

$$z(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не залежить від довільної неперервної функції; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix},$$

$$K[f(s)](t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 0 \\ \cos t - \sin t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задача про знаходження 2π -періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчної системи (2.79) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.9). Загальний розв'язок неоднорідної частини для породжуючої задачі (2.79)

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^2;$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[f(s); \psi(s); \alpha](t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 4 \sin t \\ 0 \\ 2 \cos t - 2 \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.79) рівняння (2.78) має розв'язок

$$c_r^* = \left(0 \quad \frac{1}{12} \left(\frac{14 \cdot 2^{2/3}}{(4+3\sqrt{78})^{1/3}} - 2(8+6\sqrt{78})^{1/3} - 1 \right) \right)^*,$$

якому відповідає розв'язок породжуючої задачі [295]

$$z_0(t, c_r^*) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - \frac{7 \cdot 2^{2/3}}{(4+3\sqrt{78})^{1/3}} + (8+6\sqrt{78})^{1/3} + 6 \sin t \\ 0 \\ -2 + \frac{7 \cdot 2^{2/3}}{(4+3\sqrt{78})^{1/3}} - (8+6\sqrt{78})^{1/3} + 3 \cos t - 3 \sin t \end{pmatrix},$$

а також матриця повного рангу $B_0 =$

$$\begin{pmatrix} \left(49 \cdot 2^{1/3} + (2 \cdot 2^{2/3} + 3 \cdot 2^{1/6} \sqrt{39}) (4+3\sqrt{78})^{1/3} - 7(4+3\sqrt{78})^{2/3} \right) \pi \\ - \left(49 \cdot 2^{1/3} + (2 \cdot 2^{2/3} + 3 \cdot 2^{1/6} \sqrt{39}) (4+3\sqrt{78})^{1/3} - 7(4+3\sqrt{78})^{2/3} \right) \pi \end{pmatrix}^*.$$

Оскільки виконано умову $P_{B_0^*} = 0$, остільки принаймі один розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.79) визначає ітераційна схема (2.81).

Запропонована у статті схема дослідження нелінійної диференціально-

алгебраїчної крайової задачі (2.1), (2.2) аналогічно [17, 21, 38] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, у частинних похідних [83, 145].

2.3. Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних крайових задач

2.3.1. Положення рівноваги нелінійних диференціально-алгебраїчних систем. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + Z(z, t). \quad (2.83)$$

Тут $A(t)$, $B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; нелінійну функцію $Z(z, t)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по z в деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ і неперервною по $t \in [a, b]$. Називатимемо положенням рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.83) вектор-функцію $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, що задовольняє двом умовам [320]:

$$A(t)z' = 0, \quad B(t)z + f(t) + Z(z, t) = 0. \quad (2.84)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f - \text{const}, \quad Z(z, t) \equiv Z(z),$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.83) визначає рівняння

$$\varphi(z) := Bz + f + Z(z) = 0. \quad (2.85)$$

Функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq n$ двічі неперервно-диференційовна по z в області Ω . Для побудови ітераційної схеми $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку рівняння (2.85) використаємо узагальнений метод Ньютона [47].

Лема 2.3.1. *Припустимо, що для рівняння (2.85) виконані наступні умови*

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.
2. У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (2.86)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.87)$$

і

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \quad (2.88)$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (2.85) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (2.89)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (2.85) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f - \text{const}, \quad Z(z, t) \equiv Z(z)$$

є положенням рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.83). Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Зауважимо, що умова (2.87) рівнозначна до вимоги повноти матриці J_k і можлива лише у випадку $m \leq n$.

Приклад 2.3.1. Вимоги лему 2.3.1 задовольняє диференціально-алгебраїчна система

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + Z(z), \quad (2.90)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z) := \begin{pmatrix} u + \sin v + \cos w \\ v + \sin w + \cos u \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функція

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} u + v + \sin v + \cos w \\ u + v + \sin w + \cos u \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$z_0 := (-0,3 \quad -0,3 \quad -0,3),$$

при цьому

$$\text{rank} [\varphi'(z_0)] = 2, \quad z_1 \approx \begin{pmatrix} -0,321\,395 \\ -0,317\,310 \\ -0,315\,480 \end{pmatrix}, \quad \text{rank} [\varphi'(z_1)] = 2.$$

Далі

$$\left\| [\varphi'(z_1)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(1) \approx 1,13\,263, \quad \left\| d^2\varphi(z_1) \right\|_{\infty} := \sigma_2(1) \approx 0,948\,796,$$

при цьому виконана умова (2.88)

$$\theta_1 \cdot \|z_1 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0114\,959 \ll 1, \quad \theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,537\,317.$$

Оскільки умова (2.88) для першого кроку ітераційної схеми (2.89) виконана, остільки знаходимо

$$z_2 \approx \begin{pmatrix} -0,321\,307 \\ -0,317\,335 \\ -0,315\,384 \end{pmatrix}, \quad \text{rank} [\varphi'(z_2)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'(z_2)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(2) \approx 1,13\,276, \quad \left\| d^2\varphi(z_2) \right\|_{\infty} := \sigma_2(2) \approx 0,948\,824.$$

при цьому виконана умова (2.88)

$$\theta_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0114\,501 \ll 1, \quad \theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 0,537\,395.$$

Для другого кроку ітераційної схеми (2.89) нев'язка отриманого наближення

$$\|\varphi(z_2)\|_{\infty} \approx 4,82\,846 \times 10^{-9}$$

достатньо велика, тому знаходимо

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} -0,321\,307 \\ -0,317\,335 \\ -0,315\,384 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'(z_3)] = 2, \quad \left\| [\varphi'(z_3)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(3) \approx 1,13\,276,$$

$$\left\| d^2 \varphi(z_3) \right\|_{\infty} := \sigma_2(3) \approx 0,948\,824.$$

при цьому виконана умова (2.88)

$$\theta_3 \cdot \|z_3 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0114\,501 \ll 1, \quad \theta_3 := \frac{\sigma_1(3) \sigma_2(3)}{2} \approx 0,537\,395.$$

Для третього кроку ітераційної схеми (2.89) нев'язка отриманого наближення $\|\varphi(z_3)\|_{\infty} \approx 0$, тому природно обмежитися цим наближенням.

Припустимо, далі що для рівняння (2.85) не виконані умови леми 2.3.1, а саме: припустимо, що для рівняння (2.85) не виконана умова (2.87): $P_{J_k^*} \neq 0$, або не виконана умова

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f - \text{const}, \quad Z(z, t) \equiv Z(z).$$

Позначимо $\Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b] - (\rho \times \rho)$ – вимірну невідроджену матрицю. У випадку

$$P_{A_{\rho}(t)} \Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

перша із умов (2.106) задовольняє вектор

$$z(t) = P_{A_{\rho}(t)} x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t) = \Phi(t) y(t), \quad y(t) \in \mathbb{C}^1[a, b].$$

За умов

$$B_{\rho}(t) := B(t) P_{A_{\rho}(t)} \Phi(t) \equiv B_{\rho}, \quad f(t) + Z(P_{A_{\rho}(t)} \Phi(t) y(t), t) \equiv Z_{\rho}(y) - \text{const}$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.83) визначає рівняння

$$\varphi_{\rho}(y) := B_{\rho} y + Z_{\rho}(y) = 0, \quad \rho \neq m. \quad (2.91)$$

Для побудови ітераційної схеми $\{y_k\}$, збіжної до розв'язку рівняння (2.91), використаємо метод Ньютона [47].

Теорема 2.3.1. *Припустимо, що для рівняння (2.91) виконані наступні умови*

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi_{\rho}(y) : \mathbb{R}^{\rho} \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки y_0 має корінь $y^* \in \mathbb{R}^{\rho}$.
2. У заданому околі нульового наближення y_0 мають місце нерівно-

сти

$$\left\| \mathcal{J}_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \left\| d^2 \varphi_\rho(\xi_k; \tilde{y} - y_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\tilde{y} - y_k\|. \quad (2.92)$$

3. Існує константа

$$\check{\theta} := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{\mathcal{J}_k^*} = 0, \quad \mathcal{J}_k := \varphi'_\rho(y_k) \in \mathbb{R}^{m \times \rho} \quad (2.93)$$

і

$$\check{\theta} \cdot |\tilde{y} - y_0| < 1 \quad (2.94)$$

для знаходження розв'язку y^* рівняння (2.91) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1} = y_k - \mathcal{J}_k^+ \varphi_\rho(y_k), \quad (2.95)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{y_k\}$ до розв'язку y^* рівняння (2.91) квадратична. За умови $B_\rho(t) := B(t)P_{A_\rho(t)}\Phi(t) \equiv B_\rho$, а також

$$f(t) + Z(P_{A_\rho(t)}\Phi(t)y(t), t) \equiv Z_\rho(y) - \text{const}$$

вектор y^* визначає положення рівноваги $z(t) = P_{A_\rho(t)}\Phi(t)y^*$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.83).

Тут $P_{\mathcal{J}_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_k^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{J}_k^* \in \mathbb{R}^{m \times \rho}$. Відмітимо, що умова (2.93) рівнозначна до вимоги повноти матриці $\mathcal{J}_k$ і можлива лише у випадку $m \leq \rho$.

Приклад 2.3.2. Вимоги теореми 2.3.1 задовольняє диференціально-алгебраїчна система

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + Z(z(t), t), \quad (2.96)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$Z(z(t), t) := B(t) z(t) z^*(t) z(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для рівняння (2.96) не виконана умова

$$B(t) \equiv B - \text{const}, \quad Z(z, t) \equiv Z(z).$$

Нехай

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

при цьому вектор-функція

$$\varphi_\rho(y) = \begin{pmatrix} 3 + u(1 + u^2 + v^2) \\ 3 + v(1 + u^2 + v^2) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і двічі неперервно-диференційовна по y в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$y_0 := \begin{pmatrix} -0,98 & -0,98 \end{pmatrix}, \quad \text{rank} [\varphi'_\rho(y_0)] = 2, \quad y_1 \approx \begin{pmatrix} -1,00 \ 035 \\ -1,00 \ 035 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_1)] = 2, \quad \left\| [\varphi'_\rho(y_1)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(1) \approx 1,13 \ 263,$$

$$\left\| d^2 \varphi_\rho(y_1) \right\|_\infty := \sigma_2(1) \approx 0,948 \ 796.$$

при цьому виконана умова (2.94)

$$\check{\theta}_1 \cdot \|y_1 - y_0\|_\infty \approx 0,0406 \ 956 \ll 1, \quad \check{\theta}_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 1,99 \ 977.$$

Оскільки умова (2.94) для першого кроку ітераційної схеми (2.95) виконана, остільки знаходимо

$$y_2 \approx \begin{pmatrix} -1,000 \ 000 \ 105 \\ -1,000 \ 000 \ 105 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_2)] = 2, \quad \left\| [\varphi'_\rho(y_2)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(2) \approx 0,333 \ 333,$$

$$\left\| d^2 \varphi_\rho(y_2) \right\|_\infty := \sigma_2(2) \approx 12,0 \ 000.$$

при цьому виконана умова (2.94)

$$\check{\theta}_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_\infty \approx 0,0400 \ 002 \ll 1, \quad \check{\theta}_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 2.$$

Для другого кроку ітераційної схеми (2.95) нев'язка отриманого набли-

ження $\|\varphi_\rho(z_2)\|_\infty \approx 7,35\,451 \times 10^{-7}$ достатньо велика, тому знаходимо

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} -1,0000\,000\,000\,000\,095 \\ -1,0000\,000\,000\,000\,095 \end{pmatrix}.$$

Для третього кроку ітераційної схеми (2.95) нев'язка отриманого наближення $\|\varphi_\rho(y_3)\|_\infty \approx -6,70\,575 \times 10^{-14}$, тому природньо обмежитися цим наближенням. Знайдений вектор y_3 визначає положення рівноваги

$$z(t) = P_{A_\rho(t)} \Phi(t) y_3 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

диференціально-алгебраїчної системи (2.96).

2.3.2. Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних систем із запізненням. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [264, 328] нелінійної диференціально-алгебраїчної системи із запізненням

$$\begin{aligned} A(t)z'(t) &= B(t)z(t) + C(t)z(t - \Delta) + \\ &+ f(t) + Z(z(t), z(t - \Delta), t). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Тут $A(t)$, $B(t)$, $C(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; нелінійну функцію $Z(z(t), z(t - \Delta), t)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по $z(t)$ у деякій області $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, а також по $z(t - \Delta)$ у деякій області $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, і неперервною по $t \in [a, b]$. Будемо називати положенням рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.97) вектор-функцію $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, що задовольняє двом умовам:

$$\begin{aligned} A(t)z'(t) &= 0, \quad B(t)z(t) + C(t)z(t - \Delta) + \\ &+ f(t) + Z(z(t), z(t - \Delta), t) = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Позначимо $\Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b] - (\rho \times \rho)$ — вимірну невідроджену матрицю. У випадку $P_{A_\rho(t)} \Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ першу із умов (2.98) задовольняє вектор

$$z(t) = P_{A_\rho(t)} x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t) = \Phi(t)y(t), \quad y(t) \in \mathbb{C}^1[a, b].$$

За умови

$$B_\rho(t) \equiv B_\rho, \quad C_\rho(t) \equiv C_\rho, \quad f(t) \equiv f,$$

а також

$$Z(B_\rho y(t), C_\rho y(t - \Delta), t) \equiv Z_\rho(y) - \text{const}$$

положення рівноваги $y(t) \equiv y - \text{const}$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.97) визначає рівняння

$$\psi_\rho(y) := D_\rho y + f + Z_\rho(y) = 0, \quad D_\rho := B_\rho + C_\rho. \quad (2.99)$$

Тут

$$B_\rho(t) := B(t)P_{A_\rho(t)}\Phi(t), \quad C_\rho(t) := C(t)P_{A_\rho(t-\Delta)}\Phi(t-\Delta), \quad \rho \neq m.$$

Для побудови ітераційної схеми $\{y_k\}$, збіжної до розв'язку рівняння (2.99) скористаємось методом Ньютона [47].

Теорема 2.3.2. *Припустимо, що для рівняння (2.99) виконані наступні умови*

1. *Неілінійна вектор-функція $\psi_\rho(y) : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки y_0 має корінь $y^* \in \mathbb{R}^\rho$.*
2. *У визначеному околі нульового наближення y_0 мають місце нерівності*

$$\left\| \mathfrak{J}_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \psi_\rho(\xi_k; \tilde{y} - y_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \left\| \tilde{y} - y_k \right\|. \quad (2.100)$$

3. *Існує константа*

$$\vartheta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{\mathfrak{J}_k^*} = 0, \quad \mathfrak{J}_k := \psi'_\rho(y_k) \in \mathbb{R}^{m \times \rho} \quad (2.101)$$

і

$$\vartheta \cdot |\tilde{y} - y_0| < 1 \quad (2.102)$$

для знаходження розв'язку y^* рівняння (2.99) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1} = y_k - \mathfrak{J}_k^+ \psi_\rho(y_k), \quad (2.103)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{y_k\}$ до розв'язку y^* рівняння (2.99) квадратична. За умови

$$B_\rho(t) \equiv B_\rho, \quad C_\rho(t) \equiv C_\rho, \quad f(t) \equiv f,$$

а також

$$Z(B_\rho y(t), C_\rho y(t - \Delta), t) \equiv Z_\rho(y) - \text{const}$$

вектор y^* визначає положення рівноваги $z(t) = P_{A_\rho(t)} \Phi(t) y^*$ диференціально-алгебраїчної системи (2.97).

Тут $P_{\mathfrak{J}_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{J}_k^*)$ — ортопроектор матриці $\mathfrak{J}_k^* \in \mathbb{R}^{m \times \rho}$. Відмітимо, що умова (2.101) рівнозначна до вимоги повноти матриці $\mathfrak{J}_k$ і можлива лише у випадку $m \leq \rho$.

Приклад 2.3.3. Вимоги теореми 2.3.2 задовольняє диференціально-алгебраїчна система

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + C(t) z(t - \Delta) + f(t) + Z(z(t), z(t - \Delta), t), \quad (2.104)$$

де

$$\begin{aligned} A(t) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 & \sin t \\ 0 & -\sin t & 0 \end{pmatrix}, \\ C(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & \cos t & 0 \\ \cos t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ Z(z(t), z(t - \Delta), t) &:= B(t) z(t) z^*(t - \Delta) z(t). \end{aligned}$$

Дійсно, матриця

$$B(t) + C(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

співпадає з матрицею $B(t)$ диференціально-алгебраїчної системи (2.96), тому знаходження положення рівноваги диференціально-алгебраїчної системи (2.104) в точності співпадає із знаходженням положення рівноваги диференціально-алгебраїчної системи (2.96); зауважимо лише, що знайдене округленням в прикладі 2.3.2 положення рівноваги диференціально-алгебраїчної системи (2.96) є точним розв'язком цієї системи.

2.3.3. Положення рівноваги диференціально-алгебраїчних крайових задач. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t) + Z(z, t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha. \quad (2.105)$$

Тут $A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервний вектор; нелінійну функцію $Z(z, t)$ вважаємо двічі неперервно-

диференційовною по z у деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ і неперервною по $t \in [a, b]$; крім того $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k.$$

Будемо називати положенням рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.105) вектор-функцію $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, яка задовольняє трьом умовам:

$$A(t)z' = 0, \quad B(t)z + f(t) + Z(z, t) = 0, \quad \ell z(\cdot) = \alpha. \quad (2.106)$$

Позначимо вектор-функцію

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} Bz + f + Z(z) \\ \ell z(\cdot) - \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}.$$

Задача про побудову положення рівноваги $z(t) \equiv z_0 \in \mathbb{C}^1[a, b]$ нелінійної автономної диференціально-алгебраїчної крайової задачі приводить до задачі про знаходження констант $z(t) \equiv z^*$, які є коренями рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (2.107)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (2.107) може бути використаний узагальнений метод Ньютона [47].

Лема 2.3.2. *Припустимо, що для рівняння (2.107) виконані наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.*
2. *У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності*

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \left\| z^* - z_k \right\|. \quad (2.108)$$

3. *Існує константа*

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{(m+k) \times n} \quad (2.109)$$

та

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \quad (2.110)$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (2.107) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (2.111)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (2.107) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f - \text{const}, \quad Z(z, t) \equiv Z(z)$$

є положенням рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.105). Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times (m+k)}$.

У частковому випадку $n = m + k$ для розв'язання рівняння (2.107) може бути використаний традиційний метод Ньютона-Канторовича [206, с. 680, 682]. Позначимо вектор-функцію $f(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, визначену у відкритій області D . Досліджуємо задачу про знаходження розв'язку $z \in D \subset \mathbb{R}^n$ нелінійного рівняння

$$f(z) = 0. \quad (2.112)$$

Функцію $f(z)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по z в області D . Для побудови послідовності $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ скористаємось методом Ньютона [206]. Нехай знайдено наближення $z_k(\varepsilon)$, достатньо близьке до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (2.112). Для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку покладемо

$$z_{k+1} = z_k - [f'(z_k)]^{-1} f(z_k). \quad (2.113)$$

Припустимо, що в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$ точного розв'язку $\tilde{z} \in \Omega$ мають місце нерівності

$$\left\| [f'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| f(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| f''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Умови збіжності ітераційної схеми (2.113) визначає наступна лема [206, с. 680, 682].

Лема 2.3.3. *Нехай вектор-функція $f(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ визначена у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі*

$\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$. Нехай також $\det [f'(z_0)] \neq 0$ та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді рівняння (2.112) має єдиний розв'язок $z^* \in \Omega$, до якого збігається ітераційна схема (2.113).

Припустимо, що вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, також що в малому околі точки z_0 мають місце нерівності

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| \varphi''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді відповідно до леми 2.3.3 рівняння (2.107) у малому околі точки z_0 має єдиний розв'язок, до якого збігається ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{-1} \varphi(z_k), \quad (2.114)$$

Приклад 2.3.4. Знайдемо положення рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A z'(t) = B z(t) + Z(z(t)), \quad \ell z(\cdot) = \alpha := 0, \quad (2.115)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

крім того

$$Z(z) := \begin{pmatrix} \sin v(t) + \cos w(t) \\ \sin w(t) + \cos u(t) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot) := w(0) + \sin u(0) + \cos v(1).$$

Вектор-функція

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} u + \sin v + \cos w \\ v + \sin w + \cos u \\ w + \sin u + \cos v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по y в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$y_0 := \begin{pmatrix} -0,455 & -0,455 & -0,455 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\det [\varphi'(z_0)] \approx 0,625\,399 \neq 0,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1 \approx 1,93\,338, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2 \approx 0,00\,657\,957.$$

Перший диференціал Фреше даної вектор-функції

$$d\varphi(z, dz) := \varphi'(z) dz = \begin{pmatrix} du + \cos v \, dv - \sin w \, dw \\ -\sin u \, du + \cos w \, dw \\ \cos u \, du - \sin v \, dv + dw \end{pmatrix}$$

визначає матриця Якобі

$$J(z) = \begin{pmatrix} 1 & \cos v & -\sin w \\ -\sin u & 1 & \cos w \\ \cos u & -\sin v & 1 \end{pmatrix}.$$

Диференціал Фреше другого порядку даної вектор-функції

$$d^2\varphi(z, dz) = - \begin{pmatrix} \sin v \, dv^2 + \cos w \, dw^2 \\ \sin w \, dw^2 + \cos u \, du^2 \\ \sin u \, du^2 + \cos v \, dv^2 \end{pmatrix}$$

має норму $\|d^2f(z, dz)\| \leq \gamma_3 := 2\sqrt{3}$, отже

$$\theta_1 \approx 0,0881\,325 < 1.$$

Таким чином, ітераційна схема (2.114) може бути використана для знаходження положення рівноваги нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.115) для даної вектор-функції, при цьому

$$z_1 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,963\,187\,254 \\ -0,456\,624\,963\,187\,254 \\ -0,456\,624\,963\,187\,254 \end{pmatrix}, \quad z_2 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,567\,637 \\ -0,456\,624\,704\,567\,637 \\ -0,456\,624\,704\,567\,637 \end{pmatrix},$$

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \end{pmatrix}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень z_k до розв'язку рівняння (2.107) для даної вектор-функції визначимо нев'язки

$$\Delta_k := \left\| \varphi(z_k) \right\|, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема

$$\Delta_1 \approx 1,0475 \times 10^{-6}, \quad \Delta_2 \approx 2,67\,292 \times 10^{-14}, \quad \Delta_3 \approx 3,84\,593 \times 10^{-16}.$$

2.4. Матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі

2.4.1. Положення рівноваги матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [17, 170, 198]

$$Z(t) = \left(z^{(i,j)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a; b], \quad i = 1, 2, \dots, \beta, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (2.116)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.117)$$

Тут

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathcal{A}Z(t) := \sum_{j=1}^q \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t),$$

— лінійні матричні оператори, $S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, $R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ і $F(t)$ — неперервні матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал: $\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{C}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$. Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu$. Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) узагальнює традиційні постановки задач, як для матричних диференціальних рівнянь [17, 170, 198], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [28, 183, 268, 269]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.116), (2.117) узагальнює традиційні постановки нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [21, 180, 272, 273].

Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, $j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$ — базис простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, при цьому задача про знаходження розв'язків рівняння (2.116) приводить до задачі про знаходження вектора

$$y(t) \in \mathbb{R}^{\beta \gamma}, \quad y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$$

компоненти якого $y_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$$

по векторах $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. Визначимо оператор [282, 283] $\mathcal{M}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{\beta \times \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ — вектор-стовпець $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$, утворений з γ стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\beta \times \gamma},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. У нових позначеннях лінійний матричний оператор $\mathcal{D}Z(t)$ набуває вигляду

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p S_i(t) Z'(t) R_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \sum_{i=1}^p S_i(t) \Xi^{(j)} R_i(t) y'_j(t),$$

при цьому

$$\mathcal{M}[\mathcal{D}Z(t)] = Q(t) \cdot y'(t), \quad Q(t) := \left[Q_i(t) \right]_{i=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha \delta \times \beta \cdot \gamma},$$

де

$$Q_j(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^p S_i(t) \Xi^{(j)} R_i(t) \right], \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}Z(t)] = \Omega(t) \cdot y(t), \quad \Omega(t) := \left[\Omega_i(t) \right]_{i=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha \delta \times \beta \cdot \gamma},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^q \Phi_i(t) \Xi^{(j)} \Psi_i(t) \right], \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma.$$

Таким чином, задача про побудову розв'язків узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116), приведена до задачі про знаходження розв'язків

$$y(t) = \text{col} \left(y_i(t) \right) \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}, \quad y_i(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a; b], \quad i = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [28, 183, 268, 269]

$$Q(t) \cdot y'(t) = \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \quad (2.118)$$

За умови $\mathcal{D}Z(t) = 0$, $\mathcal{A}Z(t) + F(t) = 0$ будемо казати, що матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$. Якщо ж положення рівноваги матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) задовольняє крайову умову (2.117), будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.116), (2.117) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$. Зокрема, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) може мати стаціонарні положення рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.118), то для знаходження стаціонарних положень рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо знайти вектор $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^{\beta \gamma}$, для якого $\Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0$. Остання рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\Omega^*(t)} \mathcal{F}(t) = 0. \quad (2.119)$$

За умови (2.119) знаходимо вектор $y(t) = P_{\Omega_r}(t)c_r - \Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$. Тут $\Omega^+(t) \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \alpha \delta}$ — псевдообернена (по Муру – Пенроузу) матриця, $P_{\Omega^*(t)} - (\alpha \delta \times \alpha \delta)$ — матриця-ортопроектор $P_{\Omega^*(t)} : \mathbb{R}^{\alpha \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega^*(t))$; матриця P_{Ω_r} утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma)$ — ортопроектора $P_{\Omega} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega)$, які представляють із себе константи. В тому випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, утворений із констант, за умови (2.119), узагальнене матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}[P_{\Omega_r}c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$K[F(t)] := \mathcal{M}^{-1}[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)]$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.116). Таким чином, доведена наступна достатня умова [297] розв'язності задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.116).

Лема 2.4.1. За умови (2.119), у випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, утворений із констант, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}[P_{\Omega_r} c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$K[F(t)] := -\mathcal{M}^{-1}[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)]$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.116).

Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^r$, $j = 1, 2, \dots, r$ — базис простору $\mathbb{R}^r$. Підставляючи розв'язок узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) в крайову умову (2.117), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c_r = \sum_{j=1}^r \Theta^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^r, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

матричного рівняння типу Сильвестра [282]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c_r) + \mathcal{L}K[F(\cdot)] = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.120)$$

В критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (2.119), у випадку, коли

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K[F(\cdot)] \right\} = 0, \quad (2.121)$$

і $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, утворений із констант, розв'язок матричного рівняння (2.120) визначає вектор [282, 283]

$$c_r = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K[F(\cdot)] \right\} + P_{\mathcal{Q}_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*} - (\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{Q}_i \right]_{i=1}^r \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times r}, \quad \mathcal{Q}_i := \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1} [P_{\Omega_r} \Theta_i] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_\rho}$ утворена із ρ лінійно-незалежних стовпців ($r \times r$) — матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^r \rightarrow N(\mathcal{Q})$. Матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умови (2.119) і (2.121), коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, утво-

рений із констант, розв'язок узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116), який задовольняє крайову умову (2.117)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G[F(t); \mathfrak{A}], \quad W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}[P_{\Omega_r} c_\rho], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[F(t); \mathfrak{A}] = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K[F(\cdot)] \right\} \right\} + K[F(t)]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.116), (2.117). Таким чином, доведена наступна достатня умова [297] розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.116), (2.117).

Теорема 2.4.1. *У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), за умови (2.119) і (2.121), коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, утворений із констант, положення рівноваги матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116), яке задовольняє крайову умову (2.117)*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G[F(t); \mathfrak{A}], \quad W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}[P_{\Omega_r} c_\rho], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[F(t); \mathfrak{A}] = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K[F(\cdot)] \right\} \right\} + K[F(s)]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.116), (2.117), де

$$K[F(t)] := \mathcal{M}^{-1}[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)]$$

узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.116).

Приклад 2.4.1. *Вимоги теореми 2.4.1 задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи*

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (2.122)$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := R_2, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, при цьому [297] умову (2.119) виконано і

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— вектор, утворений із констант, отже узагальнене матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.122) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ 2c_3 & -c_3 \end{pmatrix},$$

де

$$K[F(t)] := -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (2.122). Для узагальненої матричної крайової задачі (2.122) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), при цьому $\mathfrak{A} = 0$, $\mathcal{L}K[F(\cdot)] = 0$, відповідно, умову (2.121) виконано; таким чином, положення рівноваги узагальненої матричної крайової задачі (2.122)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G[F(t); \mathfrak{A}], \quad W(t, c_\rho) = W(t, c_r), \quad c_r \in \mathbb{R}^5$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[F(t); \mathfrak{A}] = K[F(t)]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.122).

Зокрема, узагальнене матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.116) може мати нестационарні положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.118), отже для знаходження нестационарних положень рівноваги, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо знайти вектор $y(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$, для якого

$$Q(t) \cdot y'(t) \equiv 0, \quad \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0.$$

Перша рівність має місце за умови $P_{Q(t)} \neq 0$, наприклад, для вектора

$$y(t) = P_{Q_r}(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a; b].$$

Позначимо матрицю $\mathcal{B}(t) := \Omega(t) \cdot P_{Q_r}(t)$; за умови

$$P_{Q(t)} \neq 0, \quad P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \quad \mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) \in C^1[a; b]. \quad (2.123)$$

для знаходження нестационарних положень рівноваги достатньо знайти вектор

$$x(t) = -\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t), \quad \varphi_\rho(t) \in \mathbb{R}^\rho,$$

при цьому

$$y(t) = P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t) - P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t).$$

За умови (2.123) і

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, \varphi_\rho(\cdot)) + \mathcal{L}\mathcal{K}[F(\cdot)] = \mathfrak{A} \quad (2.124)$$

знайдене нестационарне положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}[F(t)],$$

$$\mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)]$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) задовольняє крайову умову (2.117) і залежить від довільної вектор-функції $\varphi_\rho(t) \in$

$\mathbb{C}^1[a; b]$; тут

$$\mathcal{G}[F(t)] := \mathcal{K}[F(t)] := -\mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\right].$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову [297] розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.116), (2.117).

Теорема 2.4.2. *За умов (2.123) і (2.124) нестационарне положення рівноваги*

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}[F(t)],$$

$$\mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\right]$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (2.116) задовольняє крайову умову (2.117) і залежить від довільної вектор-функції

$$\varphi_\rho(t) \in \mathbb{C}^1[a; b];$$

тут

$$\mathcal{G}[F(t)] := -\mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\right]$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2.116), (2.117).

Зауважимо, що рівняння (2.122), досліджене в прикладі 1, не має нестационарних положень рівноваги, отже не виконано умову (2.123), а саме: $P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t)$, відповідно $\mathcal{B}(t) \equiv 0$.

Приклад 2.4.2. *Вимоги доведеної теореми 2.4.2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи*

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (2.125)$$

які задовольняють крайову умову

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \int_0^{2\pi} \Lambda(t)Z(t)\Pi(t)dt = 0. \quad (2.126)$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
R_2 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
F(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Використовуючи природний базис

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ знаходимо

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\left[F(t)\right] = K\left[F(t)\right] = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (2.124) виконано, тоді знайдене нестационарне положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\left[F(t)\right],$$

$$\mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)P_{B_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\right]$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (2.125) задовольняє крайову умову (2.126) і залежить від довільної неперервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Припустимо далі, що матрична диференціально-алгебраїчна задача (2.116), (2.117) задовольняє вимоги і теореми 2.4.1 і теореми 2.4.2 і, отже, має і стаціонарні

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G\left[F(t); \mathfrak{A}\right], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

і нестационарні положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\left[F(t)\right].$$

В цьому випадку однорідна частина диференціально-алгебраїчної задачі (2.116), (2.117) має розв'язок

$$Z(t, c_\rho, \varphi_\rho(t)) = W(t, c_\rho) + \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

який залежить від довільної неперервної функції $\varphi_\rho(t)$; при цьому частинний розв'язок неоднорідної диференціально-алгебраїчної задачі (2.116), (2.117) визначає довільний: $G[F(t); \mathfrak{A}]$, або $\mathcal{G}[F(t)]$ — узагальнений оператор Гріна матричної крайової задачі (2.116), (2.117).

Приклад 2.4.3. Вимоги і теореми 2.4.1 і теореми 2.4.2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (2.125), які задовольняють крайову умову (2.126), досліджену в прикладі 2.4.2.

У прикладі 2.4.2 показано, що задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної задачі (2.125), (2.126), задовольняє вимоги теореми 2. Для матричної диференціально-алгебраїчної системи

(2.125) виконується вимога (2.119), при цьому

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 & 0 & \cos t - \sin t & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

— вектор, утворений із констант, отже матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (2.125) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & -2c_2 \end{pmatrix},$$

де

$$K[F(t)] = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вимоги і теореми 2.4.1 і теореми 2.4.2 виконані, то знайдене положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}[F(t)], \quad \mathcal{G}[F(t)] = K[F(t)]$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (2.125) задовольняє крайову умову (2.126) і залежить від довільної неперервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Запропонована схема дослідження матричних диференціально-алгебраїчних задач аналогічно [21, 49] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі.

2.5. Матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з р-Лапласіаном

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [28, 35, 42, 45, 230, 241]

$$Z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t) \quad (2.127)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu} \quad (2.128)$$

з матричним р-Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))'.$$

Тут

$$R(t) \in \mathbb{C}_{\gamma \times \alpha}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}, \quad S(t) \in \mathbb{C}_{\beta \times \delta}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\beta \times \delta},$$

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma \times \delta}[a, b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma \times \delta},$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{C}^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \lambda \neq \mu$ — довільні натуральні числа. Позначимо

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

— природний базис [187] простору $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при цьому задача про знаходження розв'язків рівняння (2.127) приводить до задачі про знаходження вектора $z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \beta}^2[a, b]$, компоненти якого $z_j(t) \in \mathbb{C}^2[a, b]$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha \beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

по векторах $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ базису простору $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Визначимо оператор $\mathcal{M}[\mathcal{A}] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{B} := \mathcal{M}[\mathcal{A}] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A , а також обернений оператор [37, 280, 281, 282]

$$\mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{B} \right] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Добуток $A(t)Z(t)$ представимо в вигляді

$$A(t)Z(t) := A(t) \sum_{k=1}^{\alpha\beta} \Xi^{(k)} z_k(t), \quad \mathcal{M} \left[A(t)Z(t) \right] = \check{A}(t) \cdot z(t),$$

де

$$\check{A}(t) := \left[\check{A}_k(t) \right]_{k=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_{\gamma\delta \times \alpha\beta}[a, b], \quad \check{A}_k(t) = \mathcal{M} \left[A(t)\Xi^{(k)} \right],$$

$$k = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Визначимо матриці

$$B(t), C(t), D(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\delta \times \alpha\beta}[a, b]$$

наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial z''} \mathcal{M} \mathcal{P} Z(t) := B(t)z(t), \quad \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{M} \mathcal{P} Z(t) := C(t)z(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{M} \mathcal{P} Z(t) := D(t)z(t).$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (2.127) приводить до задачі про знаходження вектора $z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}^2[a; b]$, який визначений системою

$$B(t)z'' + C(t)z' + D(t)z = \check{A}(t)z + f(t), \quad f(t) := \mathcal{M}F(t),$$

яка, в свою чергу, за допомогою заміни змінних $y_1 := z$, $y_2 := y_1'$, приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{C}_{2\alpha\beta}^2[a; b]$, визначеного диференціально-алгебраїчною системою рівнянь [35, 42, 45]

$$U(t)y' = V(t)y + \check{f}(t); \tag{2.129}$$

тут

$$U(t) := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O_{\alpha\beta} \\ C(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad V(t) := \begin{pmatrix} O_{\alpha\beta} & I_{\alpha\beta} \\ \check{A}(t) - D(t) & O_{\gamma\delta \times \alpha\beta} \end{pmatrix},$$

$$\check{f}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

2.5.1. Випадок розв'язності системи (2.129) відносно похідної
За умов [35, 42, 45, 230]

$$P_{U^*(t)}V(t) = 0, \quad P_{U^*(t)}\check{f}(t) = 0, \quad (2.130)$$

у випадку

$$U^+(t)V(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \alpha\beta}[a; b], \quad U^+(t)\check{f}(t) \in \mathbb{C}_{2\alpha\beta}[a; b],$$

$$P_{U_e}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2\alpha\beta \times \varrho}[a; b] \quad (2.131)$$

система (2.129) розв'язна відносно похідної [35, 42, 45]:

$$y' = W(t)y + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)). \quad (2.132)$$

Тут

$$W(t) := U^+(t)V(t), \quad \mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := U^+(t)\check{f}(t) + P_{U_e}(t)\varphi(t),$$

$P_{U_e}(t) - (2\alpha\beta \times \varrho)$ – матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(2\alpha\beta \times 2\alpha\beta)$ – матриці-ортопроектора $P_U(t) : \mathbb{R}^{2\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{N}(U(t))$. Позначимо $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{dX(t)}{dt} = U^+(t)V(t)X(t), \quad X(a) = I_{2\alpha\beta}$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (2.132). За умови (2.130), (2.131) система (2.132) має розв'язок вигляду

$$y(t, c) = X(t)c + K[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t),$$

$$K[f(s)](t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds, \quad c \in \mathbb{R}^{2\alpha\beta},$$

який визначає розв'язок матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127)

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^{2\alpha\beta}, \quad (2.133)$$

де

$$W(t, c) := \mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{J}_{\alpha\beta} X(t) c \right], \quad \mathcal{J}_{\alpha\beta} := \begin{bmatrix} I_{\alpha\beta} & O_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times 2\alpha\beta}$$

і

$$\mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (t) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{J}_{\alpha\beta} K \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (t) \right\}.$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності задачі Коші для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127).

Лема 2.5.1. *За умов (2.130), (2.131) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) однозначно розв'язна для довільного початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$. За умов (2.130), (2.131) загальний розв'язок (2.133) задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) $\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t)$ і загальний розв'язок $W(t, c)$ задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127).*

Підставляючи розв'язок матричного рівняння з p -Лапласіаном (2.127) в крайову умову (2.128), приходимо до задачі про знаходження розв'язків матричного рівняння [37]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.134)$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (2.130), (2.131) і

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (2.135)$$

розв'язок рівняння (2.134) визначає вектор [37]

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{Q^*} - (\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матриця-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$, де

$$Q := \left[Q_i \right]_{i=1}^{2\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times 2\alpha \cdot \beta}, \quad Q_i := \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1} \left[X(\cdot) \Xi^{(i)} \right] \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, 2\alpha \cdot \beta;$$

матриця P_{Q_r} утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(2\alpha \cdot 2\beta \times \alpha \cdot \beta)$ — матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^{2\alpha \cdot \beta} \rightarrow \mathbb{N}(Q)$. Таким чином, у критичному випадку, за умов (2.130), (2.131) і (2.135) розв'язок матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) має вигляд

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A} \right] (t), \quad (2.136)$$

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{J}_{\alpha\beta} X(t) P_{Q_r} c_r \right],$$

де

$$G \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A} \right] (t) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{J}_{\alpha\beta} X(t) Q^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \mathcal{L} \mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (\cdot) \right\} \right\} + \mathcal{K} \left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)) \right] (t).$$

Отже, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної крайової задачі для диференціального рівняння (2.127), (2.128) [230].

Теорема 2.5.1. *У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умов (2.130), (2.131) і (2.135) розв'язок (2.136) матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) визначає узагальнений оператор Гріна $G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$ матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) і загальний розв'язок $W(t, c_r)$ для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127), (2.128).*

Відзначимо, що другий доданок, який складає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127) за умов (2.130), (2.131) і $\varrho \neq 0$ залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\varrho \times 1}[a; b]$. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умов (2.130), (2.131) і $\varrho \neq 0$ узагальнений оператор Гріна $G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$ матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127) за умов (2.130), (2.131) також залежить від функції $\varphi(t)$.

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$), за умов (2.130), (2.131) матрична крайова задача з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) розв'язна для довільної функції $F(t)$ і неоднорідності в крайовій умові $\mathcal{A}$. Візначимо, що для

квадратної матриці Q умова $P_{Q^*} = 0$ тягне за собою $P_Q = 0$ і рівнозначна традиційній до вимоги $\det Q \neq 0$. Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок 2.5.1. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) за умов (2.130) і (2.131) розв'язок (2.136) матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) визначає узагальнений оператор Гріна $G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$ матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) і загальний розв'язок $W(t, c_r)$ для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127), (2.128).

Приклад 2.5.1. Досліджуємо задачу про знаходження антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p -Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t), \quad \mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))', \quad t \in [0; e]. \quad (2.137)$$

Тут

$$R(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(t) := e^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (2.137) приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{C}_8^2[0; e]$, який визначається диференціально-алгебраїчною системою рівнянь (2.129); тут

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{f}(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^*.$$

При цьому умови (2.130) і (2.131) виконані; тоді загальний розв'язок задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (2.137) має вигляд

$$W(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 + c_5 t & c_3 + c_7 - c_7 e^{-t} \\ c_2 + c_6 t & c_4 + c_4 - c_4 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$

Оскільки $P_{Q^*} = 0$, то в задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p -Лапласіаном (2.137) має місце некритичний випадок; тут

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-e} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо загальний розв'язок однорідної частини антиперіодичної задачі для системи (2.137)

$$W(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_{r_1} e & c_{r_3} - c_{r_3} e^e \\ c_{r_2} e & c_{r_4} - c_{r_4} e^e \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_{r_1} \\ \dots \\ c_{r_4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Відзначимо, що $\varrho = 2 \neq 0$, при цьому оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.137) залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2 \times 1}[0; 1]$. Покладемо $\varphi(t) := 0$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.137)

$$\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t + e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

дозволяє перевірити виконання умови (2.135) і визначає узагальнений оператор Гріна антиперіодичної задачі для системи (2.137)

$$G\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\right](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(1-e-e^{-e})}{4+(-1+e^{-e})^2} \end{pmatrix}.$$

2.5.2. Випадок нерозв'язності системи (2.129) відносно похідної. Припустимо далі, що умову (2.130) не виконано [35, 42, 45], тобто або $P_{U^*(t)}V(t) \neq 0$, або $P_{U^*(t)}\check{f}(t) \neq 0$. Тоді задача про знаходження розв'язків рівняння (2.127) за допомогою заміни змінних

$$y_1 := z := \Omega x_1, \quad y_2 := y'_1 := \Omega x'_1 := \Omega x_2, \quad \Omega \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta}, \quad x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

приводить до задачі про знаходження вектора $x(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}^2[a; b]$, визначеного диференціально-алгебраїчною системою рівнянь [35, 42, 45]

$$\check{U}(t)x' = \check{V}(t)x + \check{f}(t); \quad (2.138)$$

тут

$$\check{U}(t) := \begin{pmatrix} \Omega & O_{\alpha\beta} \\ C(t)\Omega & B(t)\Omega \end{pmatrix}, \quad \check{V}(t) := \begin{pmatrix} O_{\alpha\beta} & \Omega \\ (\check{A}(t) - D(t))\Omega & O_{\gamma\delta \times \alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

За умов [35, 42, 45]

$$P_{\check{U}^*(t)}\check{V}(t) = 0, \quad P_{\check{U}^*(t)}\check{f}(t) = 0, \quad (2.139)$$

у випадку

$$\begin{aligned} \check{U}^+(t)\check{V}(t) &\in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta \times \alpha\cdot\beta}[a; b], \quad \check{U}^+(t)\check{f}(t) \in \mathbb{C}_{2\alpha\cdot\beta}[a; b], \\ P_{\check{U}_\varrho}(t)\varphi(t) &\in \mathbb{C}_{2\alpha\cdot\beta \times \varrho}[a; b] \end{aligned} \quad (2.140)$$

система (2.138) розв'язна відносно похідної [35, 42, 45]:

$$x' = \check{W}(t)x + \mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)); \quad (2.141)$$

Тут

$$\check{W}(t) := \check{U}^+(t)\check{V}(t), \quad \mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)) := \check{U}^+(t)\check{f}(t) + P_{\check{U}_\varrho}(t)\varphi(t),$$

$P_{\check{U}_\varrho}(t)$ — $(2\alpha\beta \times \varrho)$ — матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(2\alpha\beta \times 2\alpha\beta)$ — матриці-ортопроектора $P_{\check{U}}(t) : \mathbb{R}^{2\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{N}(\check{U}(t))$. Умова (2.139) представляє собою, взагалі кажучи, нелінійне рівняння відносно сталої матриці

$$\Omega := \text{diag} \left(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_{\alpha\beta} \right) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta}.$$

Істотна перевага заміни змінної $z := \Omega x_1$ полягає в тому, що використана в статті [45] заміна

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t) \mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta},$$

дає можливість знаходження $\alpha^2 + \beta^2$ невідомих, що більше

$$\alpha^2 + \beta^2 > \alpha\beta$$

числа невідомих $\alpha\beta$, які визначаються заміною змінної $z := \Omega x_1$. Позначимо $\check{X}(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{d\check{X}(t)}{dt} = \check{U}^+(t)\check{V}(t)\check{X}(t), \quad \check{X}(a) = I_{2\alpha\beta}$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (2.141). За умови (2.139), (2.140) система (2.141) має розв'язок вигляду

$$x(t, c) = \check{X}(t)c + K \left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^{2\alpha\beta},$$

який визначає розв'язок матричного диференціального рівняння з р-Лапласіаном (2.127)

$$Z(t, c) = \check{W}(t, c) + \mathcal{K} \left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)) \right] (t), \quad c \in \mathbb{R}^{2\alpha\beta}, \quad (2.142)$$

де

$$\begin{aligned} \check{W}(t, c) &:= \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega \mathcal{J}_{\alpha\beta} \check{X}(t)c \right], \quad \mathcal{K} \left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)) \right] (t) := \\ &:= \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{J}_{\alpha\beta} K \left[\Omega \mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)) \right] (t) \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної задачі Коші для диференціального рівняння (2.127) з p -Лапласіаном [230].

Наслідок 2.5.2. *За умов (2.139), (2.140) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) однозначно розв'язна для довільного початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$. За умов (2.139), (2.140) загальний розв'язок (2.142) задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127) $\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))](t)$ і загальний розв'язок $\check{W}(t, c)$ задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127).*

Підставляючи розв'язок матричного рівняння з p -Лапласіаном (2.127) в крайову умову (2.128), приходимо до задачі про знаходження розв'язків матричного рівняння [37]

$$\mathcal{L}\check{W}(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.143)$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (2.130), (2.131) і

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))](\cdot) \right\} = 0 \quad (2.144)$$

розв'язок рівняння (2.143) визначає вектор [37]

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))](\cdot) \right\} + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, у критичному випадку, за умов (2.139), (2.140) і (2.144) розв'язок матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) має вигляд

$$\begin{aligned} Z(t, c_r) &= \check{W}(t, c_r) + G[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t), \quad \check{W}(t, c_r) := \\ &:= \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega \mathcal{J}_{\alpha\beta} \check{X}(t) P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right], \end{aligned} \quad (2.145)$$

де

$$G[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \Omega \mathcal{J}_{\alpha\beta} \check{X}(t) \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot) \right\} \right\} +$$

$$+\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))\right](t).$$

Отже, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної крайової задачі для диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127), (2.128).

Наслідок 2.5.3. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умов (2.139), (2.140) і (2.144) розв'язок (2.145) матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) визначає узагальнений оператор Гріна $G[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$ матричної крайової задачі з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) і загальний розв'язок $\check{W}(t, c_r)$ для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.127), (2.128).

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$), за умов (2.139), (2.140) матрична крайова задача з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) розв'язна для довільної функції $F(t)$ і неоднорідності в крайовій умові $\mathcal{A}$.

Приклад 2.5.2. Досліджуємо задачу про знаходження антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p -Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t), \quad \mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))', \quad t \in [-1; 0]. \quad (2.146)$$

Тут

$$R(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(t) := e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (2.146) приводить до диференціально-алгебраїчної системи рівнянь (2.129). При цьому умова (2.130) не виконана. Умови (2.139) і (2.140) виконані, наприклад, для матриці

$$\Omega := \text{diag} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_4 \end{pmatrix} := \text{diag} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Загальний розв'язок

$$W(t, c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_2 + c_6 - c_6 e^{-t} & c_4 + c_8 t \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$$

задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (2.146) визначає матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що для обраної матриці Ω загальний розв'язок $W(t, c)$ реально залежить від чотирьох, а не восьми довільних констант. Оскільки $P_{Q^*} \neq 0$, то в задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p -Лапласіаном (2.146) має місце критичний випадок.

Загальний розв'язок, що має вигляд однорідної частини задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p -Лапласіаном (2.146), визначає матриця

$$W(t, c_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{r_1} e^{-t} (e^t - 2 + e^{1+t}) & c_{r_2} (1 + 2t) \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_{r_1} \\ c_{r_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Відзначимо, що для обраної матриці Ω загальний розв'язок $W(t, c_r)$ однорідної частини антиперіодичної задачі для рівняння (2.146) також залежить від двох, а не шести довільних констант. Оскільки $\varrho = 5 \neq 0$, то оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.137) залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{5 \times 1}[-1; 0]$. Покладемо $\varphi(t) := 0$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p -Лапласіаном (2.146)

$$\mathcal{K} \left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)) \right] (t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-1-t} + t & 0 \end{pmatrix}$$

дозволяє перевірити виконання умови (2.144) і визначає узагальнений оператор Гріна антиперіодичної задачі для системи (2.146)

$$G \left[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)); \mathfrak{A} \right] (t) = \frac{1}{e(5 - 2e + e^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 + e - 3e^{1-t} + e^{2-t} + 6e^{-t} + 5et - 2e^2t + e^3t & 0 \end{pmatrix}.$$

Запропонована в статті схема дослідження матричних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) аналогічно [19, 21, 43, 44, 165, 233, 271] може бути перенесена на матричні крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь в абстрактних просторах. Крім того, запропонована в статті схема дослідження матричних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном (2.127), (2.128) аналогічно [17, 294] може бути перенесена на нелінійні матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном.

Висновки до другого розділу

1. Побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.
2. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу.
3. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Як приклади застосування побудованих ітераційних схем, знайдені наближення до розв'язків диференціально-алгебраїчних крайових задач для рівняння типу Дюффінга, рівняння типу Рікатті та матричної крайової задачі з p -Лапласіаном.

Розділ 3

Нелінійні крайові задачі у критичних випадках

3.1. Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

крайової задачі [21, 302, 239, 325]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, z', t, \varepsilon), \quad (3.1)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \quad (3.2)$$

у малому околі розв'язку породжуючої нетерової ($m \neq n$) крайової задачі

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (3.3)$$

Тут $A(t)$ — $(n \times n)$ -вимірна матриця та $f(t)$ — n -вимірний вектор-стовпець, елементи яких — неперервні на відріжку $[a, b]$ дійсні функції, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Нелінійності $Z(z, z', t, \varepsilon)$ та $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задачі (3.1), (3.2) припускаємо неперервно-диференційовними за невідомою z та її похідною z' у малому околі породжуючого розв'язку та його похідної та по малому параметру ε у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо нелінійну вектор-функцію $Z(z, z', t, \varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною t на відріжку $[a, b]$.

Досліджуємо критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), причому припускаємо

виконаною умову

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} = 0; \quad (3.4)$$

в цьому випадку породжуюча задача (3.3) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad r := n - n_1, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ — нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (3.3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$ -матриця, $\text{rank } Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$ -матриця, утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$ -матриця, утворена з $(d := m - n_1)$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$ -матриці-ортопроектора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t) + X(t)Q^+ \{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3.3),

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (3.3), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром-Пенроузом [21].

3.1.1. Умови розв'язності нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної Необхідні умови існування розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$$

задачі (3.1), (3.2) у критичному випадку визначає наступна лема [240]. Доведення леми аналогічне [21, 302, 318, 321].

Лема 3.1.1. *Припустимо, що для крайової задачі (3.1), (3.2) має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок і виконується умова (3.4) розв'язності породжуючої задачі (3.3). Припустимо також, що задача (3.1), (3.2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z_0(t, c_r^*)$. Тоді вектор $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівнянню*

$$F(c_r) := P_{Q_d^*} \{ J(z_0(\cdot, c_r), z'_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), z'_0(s, c_r), s, 0)](\cdot) \} = 0. \quad (3.5)$$

По аналогії з слабконелінійними крайовими задачами у критичному випадку [21], рівняння (3.5) будемо називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (3.1), (3.2), не розв'язаної відносно похідної. Припустимо, що рівняння (3.5) має дійсні корені та не перетворюється на тотожність [36, 225]. Фіксуємо один із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (3.5), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

крайової задачі

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, z'_0 + x', t, \varepsilon), \quad (3.6)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (3.7)$$

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови (3.4) крайова задача (3.6), (3.7) розв'язна за умови

$$P_{Q_d^*} \{ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \ell K[Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), z'_0(t, c_r^*) + x'(t, \varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) \} = 0.$$

У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має місце наступне розвинення

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), z'_0(t, c_r^*) + x'(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Z(z_0(t, c_r^*), z'_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + A_2(t)x'(t, \varepsilon) + \varepsilon A_3(t) + \\ + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), z'_0(t, c_r^*) + x'(t, \varepsilon), t, \varepsilon);$$

тут

$$A_1(t) := \left. \frac{\partial Z(z, z', t, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}}, \\ A_2(t) := \left. \frac{\partial Z(z, z', t, \varepsilon)}{\partial z'} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}},$$

$$A_3(t) := \left. \frac{\partial Z(z, z', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0.}}$$

Залишок $R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), z'_0(t, c_r^*) + x'(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ більш високого порядку малості за x , x' та ε в околі точок $x = 0$, $x' = 0$ та $\varepsilon = 0$, ніж перші чотири члени розвинення, тому

$$\begin{aligned} R_1(z, z', t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z, z', t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial R_1(z, z', t, \varepsilon)}{\partial z'} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Використовуюючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першими трьома аргументами векторного функціоналу $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$, виділяємо лінійні $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$, $\ell_1 x'(\cdot, \varepsilon)$ та $\varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*))$ частини цього функціоналу та член $J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), z'(\cdot, 0), 0)$ нульового порядку за ε в околі точок $x = 0$, $x' = 0$ та $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) &= J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \\ &+ \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ більш високого порядку малості за x , x' і ε в малому околі точок $x = 0$, $x' = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \right| \begin{matrix} z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{matrix} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z'} \right| \begin{matrix} z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{matrix} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right| \begin{matrix} z = z_0(t, c_r^*), \\ z' = z'_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0 \end{matrix} = 0.$$

Позначимо $(d \times r)$ -вимірну матрицю

$$B_0 := P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) + \ell_2 X'_r(\cdot) - \ell K \left[A_1(s) X_r(s) + A_2(s) X'_r(s) \right] (\cdot) \right\}.$$

Враховуючи отримані розвинення та рівняння для породжуючих констант, приходимо до операторної системи, рівнозначної до задачі про знаходження розв'язків системи (3.6), які задовольняють крайову умову (3.7)

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= X_r(t) c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x^{(2)}(t, \varepsilon) := \left(x^{(1)}(t, \varepsilon) \right)', \\ B_0 c_r &= -P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ &\quad + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[A_1(s) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + A_2(s) x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \left. \right\}, \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ принаймні один розв'язок другого рівняння операторної системи (3.8) набуває вигляду

$$c_r = -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*)) + \right.$$

$$+J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + A_2(s)x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \Big\};$$

тут $P_{B_0^*} - (d \times d)$ -вимірний матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*)$. Таким чином, за умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ принаймні один розв'язок крайової задачі (3.6), (3.7) визначає операторна система

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x^{(2)}(t, \varepsilon) := \left(x^{(1)}(t, \varepsilon) \right)', \\ c_r = -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ \left. + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2(s)x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}, \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \right. \\ \left. J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Операторна система (3.9) відрізняється від аналогічної операторної системи [21, 177] урахуванням похідних $A_2(s)$, $A_3(s)$ та $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))$, $\ell_3(z_0(\cdot, c_r^*))$ нелінійностей крайової задачі (3.6), (3.7) і, в свою чергу, в критичному випадку еквівалентна до операторної системи [270]

$$x(t, \varepsilon) = \Phi \left(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon) \right). \quad (3.10)$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи традиційно [21, 177, 219] застосовується ітераційна схема

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \Phi \left(z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon) \right), \quad x_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.11)$$

яка відповідає методу простих ітерацій; тут

$$\Phi \left(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon) \right) := \\ = -X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ \left. + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_2(s)x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \Big] (\cdot) \Big\} + \\
& + \varepsilon G \Big[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \\
& J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big] (t).
\end{aligned}$$

Достатньою умовою збіжності ітераційної схеми (3.11) є умова [206, с. 639]

$$\sup_{\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]} \left\| \frac{\partial \Phi(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon))}{\partial x} \right\| \leq \lambda < 1; \quad (3.12)$$

тут $x(t, \varepsilon)$ — вектор-функція з малого околу нуля. Достатня умова збіжності ітераційної процедури (3.11) безпосередньо впливає з означення оператора стиснення та теореми про середнє значення

$$\begin{aligned}
& \left\| \Phi(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)) - \Phi(z_0(t, c_r^*) + y(t, \varepsilon)) \right\| = \\
& = \left\| \frac{\partial \Phi \xi(t, \varepsilon)}{\partial x} \right\| \cdot \|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\|;
\end{aligned}$$

тут $\xi(t, \varepsilon)$ — точка відрізка, який з'єднує точки $z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$ та $z_0(t, c_r^*) + y(t, \varepsilon)$. Для оператора $\Phi(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon))$ умова (3.12) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \sup_{\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]} \left\| \varepsilon G \left\{ \left[\frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), z'(s, \varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial Z(z(s, \varepsilon), z'(s, \varepsilon), s, \varepsilon)}{\partial x'} \right]; \right. \right. \\
& \left. \left. \left[\frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial x'} \right] \right\} (t) \right\| \leq \lambda < 1.
\end{aligned}$$

Таким чином, доведено наступну теорему [240].

Теорема 3.1.1. *Припустимо, що для крайової задачі (3.1), (3.2), не розв'язаної відносно похідної, має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок і виконується умова (3.4) розв'язності породжуючої задачі (3.3). Припустимо, що рівняння (3.5) не перетворюється на тотожність та має дійсні розв'язки. Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (3.5) за умови (3.12) та*

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad (3.13)$$

крайова задача (3.1), (3.2), не розв'язана відносно похідної, має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, $z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$, який

при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \alpha](t).$$

Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ітераційного процесу (3.11).

Матриця B_0 , ключова в дослідженні резонансних слабконелінійних крайових задач, може бути знайдена безпосередньо з рівняння (3.5), як похідна

$$B_0 = \left. \frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r} \right|_{c_r = c_r^*}. \quad (3.14)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(c_r^*)}{\partial c_r} = \frac{\partial}{\partial c_r} P_{Q_d^*} \Big\{ & J(z_0(\cdot, c_r^*), z_0'(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \\ & + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K \Big[Z(z_0(s, c_r^*), z_0'(s, c_r^*), t, 0) + A_1(s)x(s, \varepsilon) + A_2(s)x'(s, \varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + \\ & + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\} \Big|_{\varepsilon = 0} = B_0. \end{aligned}$$

У випадку $m = n$, наприклад, для періодичних крайових задач, матриця B_0 стає квадратною, при цьому умова (3.13) перетворюється на відому [21, 177, 193] вимогу невиродженості матриці B_0 . Умова (3.13) є узагальненням традиційної достатньої умови розв'язності нелінійних крайових задач у критичному випадку, зокрема, вимоги простоти коренів рівняння для породжуючих констант [193, 225], а також аналогічної вимоги для нелінійних крайових задач, розв'язаних відносно похідної, з нетеровою лінійною частиною [21]. За умови (3.13) будемо казати, що для крайової задачі (3.1), (3.2), не розв'язаної відносно похідної, має місце критичний випадок першого порядку. У випадку $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$ для крайової задачі (3.1), (3.2), не розв'язаної відносно похідної, може мати місце критичний випадок другого, чи більш високого порядку [21, 177, 222]. Доведена теорема узагальнює результати [21, 318, 325] на випадок нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

3.1.2. Періодична задача для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної. Послідовність наближень, утворена схе-

мою (3.11) лише на границі перетворюється на розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2); інакше кажучи, у частковому випадку, в задачі про знаходження періодичних розв'язків системи (3.1) послідовність наближень, утворена схемою (3.11), взагалі кажучи, не є періодичною, а лише на границі перетворюється на періодичний розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2). Крім того, схема (3.11) відповідає методу простих ітерацій, отже, має лінійну збіжність, тому природно поставити задачу про прискорення цих ітерацій. Продemonструємо схему побудови ітераційної схеми методом Ньютона – Канторовича [47, 206, 287] на прикладі T -періодичної задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно старшої похідної [199, с. 177]

$$y'' = f(t) + \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon). \quad (3.15)$$

Тут $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ — нелінійна скалярна функція, двічі неперервно диференційовна за невідомою y та її похідним y' , а також y'' в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна за t на відрізку $[a, b]$ та неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Породжуюча T -періодична задача

$$y_0'' = f(t), \quad y(0) - y(T) = 0, \quad y'(0) - y'(T) = 0$$

критична:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що породжуюча T -періодична задача розв'язна; для цього необхідно і достатньо виконується рівність

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Якщо ця вимога виконується, розв'язок породжуючої задачі має вигляд

$$y_0(t, c_0) = c_0 + g[f(s)](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$g[f(s)](t) := k[f(s)](t) - \frac{t}{T} \int_0^T (T - s) f(s) ds$$

— оператор Гріна породжуючої T -періодичної задачі,

$$k[f(s)](t) := \int_0^t (t-s)f(s) ds$$

— оператор Гріна задачі Коші. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$ шукатимемо в околі розв'язку $y_0(t, c_0)$ лінійної частини цього рівняння. Для знаходження збурення $x(t, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0; T]$ отримуємо T -періодичну задачу для рівняння

$$x'' = \varepsilon Y(y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), y_0'(t, c_0) + x'(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

розв'язну тоді й тільки тоді, коли

$$F(c_0) := \int_0^T Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt = 0. \quad (3.16)$$

Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної задачі для рівняння типу Релея

$$F_0(c_0) := \int_0^T Y(y_0(t, c_0), y_0'(t, c_0), y_0''(t, c_0), t, 0) dt = 0.$$

має простий $B_0 := F'(c_0^*) \neq 0$ дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^1$. Для знаходження періодичного розв'язку рівняння типу Релея можна скористатися методом Ляпунова – Пуанкаре [225], але більш ефективно, саме для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (3.16), використання методу Ньютона – Канторовича [47, 206, 287]. Згідно прийнятим позначенням, функція $F(c(\varepsilon))$ двічі неперервно-диференційовна за невідомою $c(\varepsilon)$ у малому околі точки c_0^* . Припустимо, що для рівняння (3.16) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ мають місце нерівності

$$\left\| \mathcal{J}_j^+(\varepsilon) \right\| \leq \sigma_1(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left\| d^2 F(\zeta_j(\varepsilon); c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)) \right\| \leq \sigma_2(j) \cdot \|c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)\|$$

та існує константа

$$\theta := \sup_{j \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(j) \sigma_2(j)}{2} \right\}.$$

Тоді, згідно [206], за умов

$$\mathcal{J}_j \neq 0, \quad \theta \cdot \|c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)\| < 1 \quad (3.17)$$

для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (3.16) застосовна ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^{-1} F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (3.16) квадратична [47, 206, 287]. Тут $\mathcal{J}_j(\varepsilon) := F'(c_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^1$ — Якобіан перетворення $F(c(\varepsilon)) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $j = 0, 1, 2, \dots$ у точці $c_j(\varepsilon)$. Крім того, $P_{\mathcal{J}_j^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_j^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{J}_j^*$. Шуканий розв'язок вихідної T -періодичної задачі для рівняння типу Релея (3.15) визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned} y_{k+1}(t, \varepsilon) &= y_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= \xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon g \left[Y(y_k(s, \varepsilon), y_k'(s, \varepsilon), y_k''(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (t), \\ c_{k+1}(\varepsilon) &= c_0^* + \xi_{k+1}(\varepsilon), \quad F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким чином, доведено наступне твердження [240].

Наслідок 3.1.1. *Припустимо, що для T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15), не розв'язаного відносно похідної, виконується умова розв'язності (3.16) породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15) не перетворюється на тотожність та має дійсний розв'язок $c_0^* \in \mathbb{R}^1$. Припустимо також, що для рівняння (3.16) виконується умова (3.17). Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^1$ рівняння породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15) в околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ для знаходження принаймні одного розв'язку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15) може бути використана ітераційна схема (3.19).*

Проміжок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ збіжності ітераційної схеми (3.19) до розв'язку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15), не розв'язаного відносно похідної, може бути знайдена з умов (3.12) та (3.17). Застосуємо знайдені умови розв'язності T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15), не розв'язаного відносно похідної, для 2π -періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника [325].

Приклад 3.1.1. Умови доведеної теореми справджуються у випадку 2π -періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті

$$y'' = \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon), \quad (3.20)$$

де, зокрема,

$$Y(y, y', y'', t, \varepsilon) := 4 \sin t - \sin y + 2 y' \sin t - y'' \cos t.$$

Рівняння породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (3.15), не розв'язаного відносно похідної, має простий: $B_0 = -2\pi \neq 0$ дійсний корінь $c_0^* = 0$. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея (3.20), не розв'язаного відносно похідної, $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$ будемо шукати в околі розв'язку $y_0(t, c_0) \equiv 0$ лінійної частини цього рівняння. Періодична задача для рівняння першого наближення розв'язна в наслідок рівності $F_0(c_0^*) = 0$, при цьому $x_1(t, \varepsilon) = c_1 - 4\varepsilon \sin t$. Рівняння (3.16) у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.20) типу Релея має дійсний корінь $c_1 = 0$, при цьому $x_2(t, \varepsilon) = c_2 + x_2^{(1)}(t, \varepsilon)$. де

$$x_2^{(1)}(t, 0, 1) \approx -\frac{97\,945\,284 \sin t}{223\,005\,689} + \frac{3 \sin 2t}{200} - \frac{229\,674 \sin 3t}{7\,829\,478\,409} - \frac{9\,171 \sin 5t}{432\,784\,095\,812},$$

$$c_2 = 0,$$

а також

$$x_2^{(1)}(t, 0, 01) \approx -\frac{11393739 \sin t}{282\,023\,801} + \frac{3 \sin 2t}{20\,000} - \frac{2\,676 \sin 3t}{903\,240\,320\,419}.$$

Умовою збіжності ітераційної схеми (3.19) є умова стиснення

$$\left\| \varepsilon g'_x \left[Y(y_k(s, \varepsilon), y'_k(s, \varepsilon), y''_k(s, \varepsilon)) \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} \leq \lambda < 1,$$

для $k = 0, 1, 2 \dots$. Суттєвою особливістю останньої вимоги стиснення є залежність оператора

$$\Phi \left[y_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (t) := \varepsilon g \left[Y(y_k(s, \varepsilon), y'_k(s, \varepsilon), y''_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] (t)$$

від похідних $y'_k(s, \varepsilon)$ та $y''_k(s, \varepsilon)$. Оскільки в околі

$$\Omega : \left\| y(t, \varepsilon) - y_0(t, c_0^*) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} \leq q, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$$

породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ та точки $\varepsilon = 0$ мають місце розвинення

$$\begin{aligned} & Y(y_k(t, \varepsilon), y'_k(t, \varepsilon), y''_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\ & + Y(y_0(t, \varepsilon), y'_0(t, \varepsilon), y''_0(t, \varepsilon), t, 0) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + A_2(t)x'(t, \varepsilon) + \\ & + A_3(t)x''(t, \varepsilon) + \varepsilon A_4(t) + R(y_k(t, \varepsilon), y'_k(t, \varepsilon), y''_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

в околі Ω породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ та точки $\varepsilon = 0$ має місце рівність

$$\Phi'_{x_k} \left[y_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (t) = \varepsilon \begin{pmatrix} g[A_1(s)](t) & g[A_2(s)](t) & g[A_3(s)](t) \end{pmatrix};$$

тут

$$\begin{aligned} A_1(t) &:= Y'_{x_k}(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0), \\ A_2(t) &:= Y'_{x'_k}(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0), \\ A_3(t) &:= Y'_{x''_k}(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0), \\ A_4(t) &:= Y'_\varepsilon(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0). \end{aligned}$$

Таким чином, умовою збіжності ітераційної схеми (3.19) є умова стиснення

$$\sup_{y_k, \varepsilon \in \Omega} \left\| \varepsilon \Phi'_{x_k} \left[y_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} \leq \lambda < 1. \quad (3.21)$$

Покладемо $\varepsilon_* = 0,073$, при цьому мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \left\| \Phi'_{x_1} \left[y_1(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} &\approx 0,999\,773 < 1, \\ \left\| \Phi'_{x_2} \left[y_2(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} &\approx 1,00\,963 > 1. \end{aligned}$$

У той же час для $\varepsilon_* = 0,01$, мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \left\| \Phi'_{x_1} \left[y_1(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} &\approx 0,138\,307 \ll 1, \\ \left\| \Phi'_{x_2} \left[y_2(s, \varepsilon), s, \varepsilon \right] (\cdot) \right\|_{\mathbb{C}^2[0; 2\pi]} &\approx 0,138\,306 \ll 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що умови (3.17) не впливають на оцінку величини ε_* , оскільки $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$. Точність знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Релея (3.20), не розв'язного відносно старшої похідної, знайдених за допомогою ітераційної схеми (3.19), ха-

рактизують нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$. Зокрема,

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0, 4, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0, 000892 \, 783, \quad \Delta_2(0, 1) \approx 0, 0149 \, 468,$$

а також

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0, 04, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 0, 000 \, 897 \, 698, \quad \Delta_2(0, 01) \approx 0, 0000 \, 152 \, 203.$$

Порівняємо знайдені нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (3.20) з нульовим $y_{0p}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*) = 0$ та першими двома наближеннями до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (3.20), знайденими за допомогою методу Пуанкаре

$$y_{1p}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon u_1(t), \quad u_1(t) = -4 \sin t,$$

$$y_{2p}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t);$$

тут

$$u_2(t) = 4 + 8 \cos t - 4 \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Знайдені за допомогою методу Пуанкаре нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (3.20) характеризують нев'язки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left\| y_{kp}''(t) - \varepsilon Y(y_{kp}, y_{kp}', y_{kp}'', t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0; 2\pi]}, \quad k = 1, 2.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо:

$$\delta_{0p}(0, 1) \approx 0, 4, \quad \delta_{1p}(0, 1) \approx 0, 107 \, 069, \quad \delta_{2p}(0, 1) \approx 0, 0233 \, 128.$$

Таким чином, знайдені нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (3.20) за допомогою ітераційної схеми (3.19), точніші перших двох наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (3.20), знайдених за допомогою методу Пуанкаре.

Запропонована схема дослідження нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної аналогічно [22, 28, 41, 241] може бути перенесена на нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної.

3.2. Автономна крайова задача у випадку параметричного резонансу

Досліджуємо задачу про знаходження розв'язків [16, 21, 224, 225, 300]

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], b(\varepsilon), h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономної системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [39, 227]

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon), \quad (3.22)$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon), \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (3.23)$$

Розв'язки нетерової ($m \neq n$) крайової задачі (3.22), (3.23) шукатимемо в малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], b_0 = b(0), h_0 = b(0) \in \mathbb{R}^q$$

породжуючої задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f, f \in \mathbb{R}^n, \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (3.24)$$

Тут A – стала ($n \times n$)-вимірна матриця, $Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за невідомими $z(t, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі і неперервно-диференційован по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний і $J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомими $z(t, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі та по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлена задача узагальнює традиційні періодичні крайові задачі у випадку параметричного резонансу [227, 330] на випадок загальної нетерової крайової задачі та продовжує дослідження автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [39].

Крім того, поставлена задача узагальнює автономні нелінійні крайові

задачі [16, 50].

3.2.1. Умови розв'язності крайової задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\} = 0 \quad (3.25)$$

породжуюча задача (3.24) має сім'ю розв'язків [21]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q := \ell X(\cdot) - (m \times n)$ -матриця, $\text{rank } Q = n_1$, $n - n_1 = r$, $P_{Q^*} - (m \times m)$ -матриця-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$, $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (3.24); $P_{Q_r} - (n \times r)$ -матриця, утворена із r -лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$;

$$G[f; \alpha](t) = X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\} + K[f](t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі (3.24), Q^+ — псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу [21],

$$K[f](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для диференціальної системи (3.24), I_n — одинична $(n \times n)$ -матриця; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена із d — лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{Q_d^*}$. У критичному випадку задача (3.22), (3.23) істотно відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач; на відміну від останніх, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (3.22), (3.23), невідомий та підлягає визначенню в процесі побудови розв'язку. Здійснюючи в задачі (3.22), (3.23) заміну незалежної змінної [16]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon),$$

$$\beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad z(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(\varepsilon), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dz(\tau, \varepsilon)/dt = & Az(\tau, \varepsilon) + f + \varepsilon Z(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \beta(\varepsilon)[Az(\tau, \varepsilon) + \varepsilon Z(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)], \end{aligned}$$

що задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon \beta(\varepsilon)[\alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)].$$

Далі, здійснюючи заміну незалежної

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0 + \mu(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \eta(\varepsilon),$$

приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь

$$dx(\tau, \varepsilon)/d\tau = Ax(\tau, \varepsilon) + \varepsilon Y(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon), \quad (3.26)$$

що задовольняють крайову умову

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon); \quad (3.27)$$

тут

$$\begin{aligned} Y(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon) &:= (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \times \\ &\times Z(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon) + \beta(\varepsilon) A(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon)), \\ H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon) &:= (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \times \\ &\times J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon) + \alpha \beta(\varepsilon) : \mathbb{C}[a, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови (3.25) крайова задача (3.26), (3.27) розв'язна за умови

$$\begin{aligned} P_{Q_d^*} \Big\{ & H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K[Y(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon)](\cdot) \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Позначимо вектори

$$\check{c}_0 := \begin{bmatrix} c_r \\ \beta_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1}, \quad \check{c}_0^* := \begin{bmatrix} c_r^* \\ \beta_0^* \\ h_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1},$$

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1}.$$

В силу неперервності по z , β і по h нелінійної функції $Y(z, \beta(\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ і нелінійного векторного функціоналу $H(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (3.24), початкового значення h_0 функції $h(\varepsilon)$ і початкового значення β_0 функції $\beta(\varepsilon)$, приходимо до наступного рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}_0) := P_{Q_d^*} \left\{ \alpha \beta_0 + J(z_0(\cdot, c_r), h_0, 0) - \right. \\ \left. - \ell K \left[\beta_0 A z_0(s, c_r) + Z(z_0(s, c_r), h_0, s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0.$$

Необхідні умови існування розв'язку автономної нетерової крайової задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема [294, 300], яка є узагальненням відповідного твердження [16, 21] на випадок параметричного резонансу, а також [39] на випадок автономної крайової задачі (3.22), (3.23).

Лема 3.2.1. *Нехай нетерова ($m \neq n$) крайова задача (3.22), (3.23) представляє критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок і виконана умова розв'язності (3.25) породжуючої задачі (3.24). Припустимо також, що у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*) \in \mathbb{C}^1[a, b^*]$ слабконелінійна крайова задача (3.22), (3.23) має розв'язок*

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad b(\varepsilon), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при цьому в достатньо малому околі вектора h_0^* існує власна функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0^*) = 0. \tag{3.28}$$

За аналогією з нетеровими слабконелінійними крайовими задачами у критичному випадку [16, 21], а також періодичними крайовими задачами [330], рівняння (3.28) будемо називати рівнянням для породжуючих констант задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу.

Припустимо, що рівняння (3.28) має дійсні корені. Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0^* \in \mathbb{R}^{r+q+1}$ рівняння (3.28), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

задачі (3.26), (3.27) в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f; \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

а також функцій

$$h(\varepsilon) := h_0^* + \mu(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

в околі точок h_0^* і β_0^* . У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* має місце наступне розвинення

$$\begin{aligned} & Y(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) = \\ & = Y(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0) + \mathcal{A}_1(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*)x(\tau, \varepsilon) + \\ & + \mathcal{A}_2(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*)\mu(\varepsilon) + \mathcal{A}_3(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*)\eta(\varepsilon) + \\ & + \mathcal{A}_0(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*)\varepsilon + \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{A}_0(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) := \left. \frac{\partial Y(z, h, \beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*}},$$

$$\mathcal{A}_1(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) := \left. \frac{\partial Y(z, h, \beta, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*}},$$

$$\mathcal{A}_2\left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*\right) := \frac{\partial Y(z, h, \beta, \varepsilon)}{\partial h} \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*,}} \\ \mathcal{A}_3\left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*\right) := \frac{\partial Y(z, h, \beta, \varepsilon)}{\partial \beta} \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*,}}$$

Залишок $\mathcal{R}(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функції

$$Y(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon)$$

більш високого порядку малості по $x(\tau, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і $\eta(\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* и β_0^* , ніж перші п'ять членів розвинення, тому

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial h} \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta} \bigg|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} &\equiv 0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right| \begin{array}{l} z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0 \end{array} \equiv 0.$$

Аналогічно, в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* має місце розвинення

$$\begin{aligned} & H(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) = \\ & = H(z_0(\cdot, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) \mu(\varepsilon) + \\ & \quad + \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) \eta(\varepsilon) + \varepsilon \ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) + \\ & \quad + H_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) := \left. \frac{\partial H(z(\cdot, \varepsilon), h, \beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right| \begin{array}{l} z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \end{array}$$

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := \left. \frac{\partial H(z(\cdot, \varepsilon), h, \beta, \varepsilon)}{\partial z} \right| \begin{array}{l} z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \end{array}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) := \left. \frac{\partial H(z(\cdot, \varepsilon), h, \beta, \varepsilon)}{\partial h} \right| \begin{array}{l} z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \end{array}$$

$$\ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) := \left. \frac{\partial H(z(\cdot, \varepsilon), h, \beta, \varepsilon)}{\partial \beta} \right| \begin{array}{l} z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \end{array}$$

Залишок

$$H_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon)$$

розвинення функціоналу

$$H(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon)$$

більш високого порядку малості по $x(\tau, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і $\eta(\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* , ніж перші п'ять членів розвинення, тому

$$\begin{aligned}
 & \left. H_1(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \\
 & \left. \frac{\partial H_1(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \\
 & \left. \frac{\partial H_1(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial h} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \\
 & \left. \frac{\partial H_1(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \\
 & \left. \frac{\partial H_1(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \beta = \beta_0^*, \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Позначимо $(d \times (r + q + 1))$ – вимірну матрицю

$$\begin{aligned}
 C_0(\check{c}_0^*) &:= P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) X_r(\tau) \right] (\cdot); \right. \\
 & \quad \left. \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_3 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) \right] (\cdot)); \right.
 \end{aligned}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_2 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) \right] (\cdot) \}.$$

Для знаходження функцій $c_r(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і $\eta(\varepsilon)$ приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} C_0^* \left(\check{c}_0 \right) \check{c}(\varepsilon) = & -P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ & + H_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) x^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_0 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) + \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови $P_{C_0^*(\check{c}_0^*)} P_{Q_d^*} = 0$ задача (3.22), (3.23) має принаймні один розв'язок і власну функцію, які визначає операторна система

$$\begin{aligned} z(\tau, \varepsilon) &= z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \\ x(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon), \quad (3.29) \\ x^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Y(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon); \right. \\ & \quad \left. H(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau), \\ \check{c}(\varepsilon) &= -C_0^+ (\check{c}_0^*) P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ & \quad + H_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) - \\ & \quad - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) x^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_0 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Тут $P_{C_0^*(\check{c}_0)}$ — $(d \times d)$ — матриця-ортопроектор: $P_{C_0^*(\check{c}_0^*)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N} \left(C_0^*(\check{c}_0) \right)$, $C_0^+ (\check{c}_0^*)$ — псевдообернена по Муру-Пенроузу матриця [21].

3.2.2. Ітераційна схема з використанням методу простих ітерацій. Для побудови наближеного розв'язку операторної системи (3.29) у випадку $P_{C_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ може бути використаний метод простих ітерацій [21, 39, ?]. Таким чином, доведена наступна теорема [300].

Теорема 3.2.1. *Нехай для крайової задачі (3.22), (3.23) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконана умова розв'язності (3.25) породжуючої задачі (3.24). Тоді для кожного кореня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+q+1}$ рівняння для*

породжуючих констант (3.28) за умови $P_{C_0^*(\check{c}_0)}P_{Q_d^*} = 0$ в малому околі розв'язку $z_0(t, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* крайова задача (3.22), (3.23) має принаймні один розв'язок

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

який визначається операторною системою (3.29). Для побудови розв'язку операторної системи (3.29) для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= z_0(\tau, c_r^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta_{k+1}(\varepsilon), \\ x_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \quad (3.30) \\ x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Y(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. H(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau), \\ \check{c}_{k+1}(\varepsilon) &= -C_0^+(\check{c}_0^*)P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ &\quad \left. + H_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) x_{k+1}^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_0 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{R}(z_k(\tau, \varepsilon), h_k(\varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Довжина відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використаний метод простих ітерацій, може бути оцінена, як із умови стиснення оператора, яка визначається системою (3.29) аналогічно [270, 284], так і за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 193].

Приклад 3.2.1. Умови теореми виконуються у випадку автономної періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням

$$y'' + y = \varepsilon y^3 + \varepsilon h(\varepsilon) (y' + y'^3). \quad (3.31)$$

Відмітимо, що на відміну від статті [39] рівняння типу Дюффінга (3.31) з параметричним збуренням є автономним. Рівняння (3.31) приводиться до вигляду (3.22) при

$$z(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)}(t, \varepsilon) \\ z^{(b)}(t, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(\varepsilon)z^{(b)}(t, \varepsilon) + h(\varepsilon) \left(z^{(b)}(t, \varepsilon) \right)^3 + \left(z^{(a)}(t, \varepsilon) \right)^3 \end{bmatrix}.$$

Породжуюча періодична задача для рівняння типу Дюффінга (3.31) з параметричним збуренням розв'язна і при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної має загальний розв'язок [225]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r, \quad X_r(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Рівняння для породжуючих констант (3.28) у випадку періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (3.31) з параметричним збуренням

$$\begin{cases} \pi c_r (3 c_r^2 - 8 \beta_0) = 0, \\ \pi c_r h_0 (3 c_r^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

має корінь [300]

$$c_r^* = \frac{1}{10}, \quad \beta_0^* = \frac{3}{800}, \quad h_0^* = 0,$$

якому відповідає матриця повного рангу

$$C_0(\check{c}_0^*) = \frac{\pi}{4000} \begin{bmatrix} 0 & -800 & 0 \\ 403 & 0 & 403 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, згідно доведеної теореми автономна періодична задача для рівняння типу Дюффінга (3.31) з параметричним збуренням розв'язна. Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (3.31)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = c_{r_1}(\varepsilon) \cos \tau + y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_1(\varepsilon) = h_0^* + \mu_1(\varepsilon)$$

визначають функції

$$y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32\,000} (\cos \tau - \cos 3\tau), \quad \mu_1(\varepsilon) = 0, \quad \eta_1(\varepsilon) = 0,$$

а також

$$\begin{aligned} c_{r_1}(\varepsilon) \approx & \frac{19\,\varepsilon}{64\,000} + \frac{821\,\varepsilon^2}{819\,200\,000} - \frac{9\,891\,\varepsilon^3}{2\,621\,440\,000\,000} + \\ & + \frac{1\,882\,967\,\varepsilon^4}{134\,217\,728\,000\,000\,000} - \frac{22\,550\,643\,\varepsilon^5}{429\,496\,729\,600\,000\,000\,000}. \end{aligned}$$

Знайдені два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюф-фінга (3.31) с параметричним збуренням і функції $h(\varepsilon)$ характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\| y_k''(t, \varepsilon) + y_k(t, \varepsilon) - \varepsilon y_k^3(t, \varepsilon) - \varepsilon h_k(\varepsilon) y_k'(t, \varepsilon) - \right. \\ \left. - \varepsilon h_k(\varepsilon) y_k^3(t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0; 2\pi(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))]}, \quad k = 0, 1.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо:

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,000\,025, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 5,85\,895 \times 10^{-9}.$$

Відзначимо, що, як і у випадку нетерових крайових задач, а також критичних періодичних задач при відсутності параметричного резонансу, для автономної нетерової крайової задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу має місце рівність, аналогічна [21, 193]

$$C_0(\check{c}_0^*) = \mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)}(\check{c}(\varepsilon)) \Big|_{\check{c}(\varepsilon) = \check{c}_0^*}.$$

Дійсно [300]:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)}(\check{c}(\varepsilon)) \Big|_{\check{c}(\varepsilon) = \check{c}_0^*} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \check{c}(\varepsilon)} P_{Q_d^*} \{ H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K[Y(z_0(t, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon)](\cdot)) \} \Big|_{\check{c} = \check{c}_0^*} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \check{c}(\varepsilon)} P_{Q_d^*} \left\{ H(z_0(\cdot, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) \mu(\varepsilon) + \right. \\ & \quad + \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) \eta(\varepsilon) + \varepsilon \ell_0(z_0(\cdot, c_r^*)) + \\ & \quad \left. + H_1(z(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} - \\ & - \ell K \left[Y(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0) + \mathcal{A}_1(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) x(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & \quad + \mathcal{A}_2(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) \mu(\varepsilon) + \mathcal{A}_3(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) \eta(\varepsilon) + \\ & \quad \left. + \mathcal{A}_0(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^*) \varepsilon + \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \} \Big|_{\check{c} = \check{c}_0^*} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \left[\mathcal{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) X_r(\tau) \right] (\cdot); \right. \\
&\quad \left. \ell_3 (z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_3 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) \right] (\cdot)); \right. \\
&\quad \left. \ell_2 (z_0(\cdot, c_r^*) - \ell K \left[\mathcal{A}_2 \left(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*, \beta_0^* \right) \right] (\cdot)) \right\} = C_0(\check{c}_0^*).
\end{aligned}$$

У випадку параметричного резонансу доведена теорема є узагальненням відповідних тверджень [290]. Використані при доведенні теореми розвинення нелінійностей автономної нетерової крайової задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу істотно відрізняються від відповідних розвинень [21, 193] відмінністю від нуля значення малого параметра у всіх членах розвинення.

Для знаходження розв'язку операторної системи (3.29) у випадку $P_{C_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ може бути використаний метод Ньютона [47, 206]. Зокрема, при знаходженні наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (3.31) з параметричним збуренням і функції $h(\varepsilon)$ з використанням методу Ньютона [47], відсутня проблема появи у наближеннях до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (3.31) вікових членів.

3.2.3. Ітераційна схема з використанням методу

Ньютона–Канторовича. Для знаходження розв'язку

$$\begin{aligned}
x(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon), \\
x^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Y(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon); \right. \\
&\quad \left. H(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau)
\end{aligned}$$

крайової задачі (3.26), (3.27) може бути використаний метод Ньютона – Канторовича [47, 206, 294].

Лема 3.2.2. *Припустимо, що для рівняння*

$$\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon)) = 0 \tag{3.32}$$

виконані наступні умови.

1. *Нелінійна вектор-функція $\mathcal{F}(\check{c}(\varepsilon)) : \mathbb{R}^{r+q+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, двічі неперервно-диференційовна в околі нуля, має корінь $\check{c}(\varepsilon)$.*

2. В околі нуля мають місце нерівності

$$\left\| J_j^+ \right\| \leq \sigma_1(j), \quad \left\| d^2 \mathcal{F}(\xi_j; \check{c}(\varepsilon) - \check{c}_j(\varepsilon)) \right\| \leq \sigma_2(j) \cdot \left\| \check{c}(\varepsilon) - \check{c}_j(\varepsilon) \right\|.$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{j \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(j) \sigma_2(j)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов

$$P_{J_j^*} = 0, \quad J_j := \mathcal{F}'(\check{c}_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d \times (r+q+1)}, \quad \theta \cdot |\check{c}(\varepsilon)| < 1 \quad (3.33)$$

для знаходження розв'язку $\check{c}(\varepsilon)$ рівняння (3.32) може бути використана ітераційна схема

$$\check{c}_{j+1}(\varepsilon) = \check{c}_j(\varepsilon) - J_j^+ \mathcal{F}(\check{c}_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

при цьому збіжність послідовності $\{\check{c}_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $\check{c}(\varepsilon)$ рівняння (3.32) квадратична. Тут $P_{J_j^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(J_j^*)$ — ортопроектор.

Зауважимо, що умова (3.33) рівнозначна до вимоги повноти матриці J_k і можлива лише у випадку $d \leq p + q + 1$. Таким чином, доведена наступна теорема [294].

Теорема 3.2.2. Припустимо, що для породжуючої задачі (3.24) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконана умова її розв'язності (3.25). Припустимо також, що для рівняння (3.32) виконані умови леми 2. Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^q$ рівняння для породжуючих констант (3.28) в околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* для знаходження принаймі одного розв'язку

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad z(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

задачі (3.22), (3.23) у випадку параметричного резонансу може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= z_0(\tau, c_r^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta_{k+1}(\varepsilon), \\ h_{k+1}(\varepsilon) &= h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \quad \mathcal{F}(\check{c}_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot G \left[Y(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon); \right. \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$H(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon) \Big] (\tau).$$

Довжина відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (3.35), може бути оцінена із умови (3.33) та умови стискання $\varepsilon G'_z$.

Приклад 3.2.2. Умови теореми 3.2.2 виконуються у випадку автономної періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням

$$y'' + y = \varepsilon y^3 + \varepsilon h(\varepsilon) (y' + y'^3). \quad (3.36)$$

Відмітимо, що на відміну від статті [39] рівняння типу Дюффінга (3.36) з параметричним збуренням є автономним. Рівняння (3.36) приводиться до вигляду (3.22) при

$$z(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)}(t, \varepsilon) \\ z^{(b)}(t, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(\varepsilon) z^{(b)}(t, \varepsilon) + h(\varepsilon) \left(z^{(b)}(t, \varepsilon) \right)^3 + \left(z^{(a)}(t, \varepsilon) \right)^3 \end{bmatrix}.$$

Породжуюча періодична задача для рівняння типу Дюффінга (3.36) з параметричним збуренням розв'язна і при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної має загальний розв'язок [225]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r, \quad X_r(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Рівняння для породжуючих констант (3.28) у випадку періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (3.36) з параметричним збуренням

$$\pi c_r (3 c_r^2 - 8 \beta_0) = 0, \quad \pi c_r h_0 (3 c_r^2 + 4) = 0$$

має простий корінь [16, 21, 39, 193, 294]

$$c_r^* = \frac{1}{10}, \quad \beta_0^* = \frac{3}{800}, \quad h_0^* = 0, \quad C_0(\check{c}_0^*) = \frac{\pi}{4000} \begin{bmatrix} 0 & -800 & 0 \\ 403 & 0 & 403 \end{bmatrix}.$$

На першому кроці ітераційної схеми (3.35) в силу повноти рангу матриці J_0 умова (3.33) виконана. Покладемо $\varepsilon := 0, 1$. Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (3.36) має вигляд [294]

$$y_1(\tau, \varepsilon) = c_{r_1}(\varepsilon) \cos \tau + y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_1(\varepsilon) = h_0^* + \mu_1(\varepsilon)$$

де

$$y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32\,000} (\cos \tau - \cos 3\tau),$$

а також

$$c_{r_1}(\varepsilon) \approx -\frac{8413}{25\,079\,771\,422}, \quad \beta_1(\varepsilon) \approx \frac{7\,140\,587}{1\,903\,038\,646}, \quad h_1(\varepsilon) = \mu_1(\varepsilon) = 0.$$

На другому кроці ітераційної схеми (3.35) в силу повноти рангу матриці J_1 умова (3.33) також виконана, при цьому

$$y_2(\tau, \varepsilon) = c_{r_2}(\varepsilon) \cos \tau + y_2^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_2(\varepsilon) = h_0^* + \mu_2(\varepsilon);$$

тут

$$y_2^{(1)}(\tau, \varepsilon) \approx \frac{155\,839 \cos \tau}{49\,833\,136\,807} - \frac{1\,12138 \cos 3\tau}{35\,857\,607\,281} + \frac{67 \cos 5\tau}{685\,548\,603\,382} - \\ - \frac{\cos 7\tau}{654\,850\,200\,560\,485} - \frac{\cos 9\tau}{104\,778\,954\,869\,870\,365\,088},$$

а також

$$c_{r_2}(\varepsilon) \approx -\frac{34\,312}{102\,284\,783\,173}, \quad \beta_2(\varepsilon) \approx \frac{31\,802\,653}{8\,475\,728\,456}, \quad h_2(\varepsilon) = \mu_2(\varepsilon) = 0.$$

На третьому кроці ітераційної схеми (3.35) в силу повноти рангу матриці J_2 умова (3.33) також виконана, при цьому

$$y_3(\tau, \varepsilon) = c_{r_3}(\varepsilon) \cos \tau + y_3^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_3(\varepsilon) = h_0^* + \mu_3(\varepsilon);$$

тут

$$y_3^{(1)}(\tau, \varepsilon) \approx \frac{149\,943 \cos \tau}{47\,947\,755\,026} - \frac{106\,169 \cos 3\tau}{33\,948\,940\,663} + \frac{447 \cos 5\tau}{4\,570\,493\,090\,387} + \\ + \frac{\cos 7\tau}{327\,064\,274\,993\,900} + \frac{\cos 9\tau}{12\,308\,773\,007\,388\,528\,938},$$

а також

$$c_{r_3}(\varepsilon) \approx -\frac{39\,176}{116\,784\,468\,121}, \quad \beta_3(\varepsilon) \approx \frac{1\,318\,533}{351\,402\,371}, \quad h_3(\varepsilon) = \mu_3(\varepsilon) = 0.$$

Знайдені нульове та перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (3.36) з параметричним збуренням і функції

$h(\varepsilon)$ характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\| y_k''(t, \varepsilon) + y_k(t, \varepsilon) - \varepsilon y_k^3(t, \varepsilon) - \varepsilon h_k(\varepsilon) y_k'(t, \varepsilon) - \right. \\ \left. - \varepsilon h_k(\varepsilon) y_k'^3(t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0; 2\pi(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо [294]:

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,0000\ 25, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 1,99\ 328 \times 10^{-8}, \\ \Delta_2(0, 1) \approx 1,72\ 064 \times 10^{-12}, \quad \Delta_3(0, 1) \approx 1,03\ 067 \times 10^{-16}.$$

Запропонована схема дослідження автономних нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу аналогічно [18, 45] може бути перенесена на матричні крайові задачі.

3.2.4. Періодична задача для рівняння Хілла у випадку параметричного резонансу. Досліджено задачу про знаходження 2π -періодичного розв'язку [21]

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння типу Хілла [207, 317], [329, с. 315]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = f(t) + \varepsilon Y(y, \mu, t, \varepsilon), \quad (3.37)$$

Розв'язок 2π -періодичної задачі для рівняння (3.37) шукемо в малому околі нетривіального періодичного розв'язку $y_0(t) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi]$ породжувального рівняння

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = f(t). \quad (3.38)$$

Тут $Y(y, \mu, t, \varepsilon)$ нелінійна скалярна функція, неперервно-диференційовна по першому і другому аргументу в малому околі породжувального розв'язку і точки $\mu_0 := \mu(0)$, а також неперервна по $t \in [0, 2\pi]$ і по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Згідно традиційної класифікації періодичних крайових задач поставлена задача для рівняння (3.37) є критичною [21, 193, 225]. Для довільної функції $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ періодична задача для рівняння (3.38) розв'язна

тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} f(s) ds = 0; \quad (3.39)$$

в цьому випадку при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної загальний розв'язок 2π -періодичної задачі для рівняння (3.38) має вигляд

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + g[f(s)](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Тут

$$g[f(s)](t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s) ds$$

оператор Гріна 2π -періодичної задачі для рівняння (3.38). Припустимо умову (3.39) виконаною; крім того, припустимо, що система (3.37) має T -періодичний розв'язок

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \quad c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^1$$

в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0(\varepsilon))$, при цьому в достатньо малому околі функції $\mu_0(\varepsilon)$ існує неперервна власна функція

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

В цьому випадку умова розв'язності періодичної задачі для рівняння (3.37)

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon) ds = 0 \quad (3.40)$$

приводить до рівняння для породжуючих амплітуд 2π -періодичної задачі для рівняння типу Хілла

$$F(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) ds = 0. \quad (3.41)$$

Припустимо, що рівняння (3.41) має кратні корені; при цьому рядки умови (3.40) розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.37) лінійно залежні. Для визначеності припустимо, що перший рядок умови (3.40)

не нульовий. В цьому випадку умова (3.40) розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.37) приводить до рівняння для породжуючих амплітуд 2π -періодичної задачі для рівняння Хілла

$$F(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \cos s \, ds = 0. \quad (3.42)$$

Таким чином, доведено наступне твердження [317, 323], яке є необхідною умовою розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.37).

Лема 3.2.3. *Якщо виконано умову (3.39) і 2π -періодична задача для рівняння типу Хілла (3.37) у малому околі породжуючого розв'язку*

$$y_0(t, c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon) \cdot \cos t + g[f(s)](t)$$

і в достатньо малому околі функції $\mu_0(\varepsilon)$ має розв'язок

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

то вектор $\check{c}_0(\varepsilon) := \text{col}(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^2$, $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ задовольняє рівнянню для породжуючих амплітуд 2π -періодичної задачі для рівняння типу Хілла (3.42).

Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ рівняння (3.41), приходимо до задачі про знаходження 2π -періодичного розв'язку рівняння типу Хілла (3.37) $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$, а також власної функції

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$$

в малому околі точки μ_0 . Збурення породжуючого розв'язку

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

а також функцію $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ визначає 2π -періодична задача для рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon). \quad (3.43)$$

В малому околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0)$ і точки $\mu_0(\varepsilon)$ має місце

наступне розвинення

$$Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \\ \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon))x(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon) + \\ + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

де

$$\mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) = \left. \frac{\partial Y(y, \mu, t, \varepsilon)}{\partial y} \right|_{\substack{y = y_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}}, \\ \mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) = \left. \frac{\partial Y(y, \mu, t, \varepsilon)}{\partial \mu} \right|_{\substack{y = y_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon)}},$$

Розв'язок 2π -періодичної задачі для рівняння (3.43) при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної представимо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cdot \cos t + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,$$

де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot g \left[Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (t).$$

Позначимо матрицю

$$D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \cos s \right. \\ \left. \mathcal{A}_2(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \right] \cos s \, ds.$$

Умова розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.43) за наявності кратних коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.42) приводить до рівняння

$$D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = - \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds. \quad (3.44)$$

За умови

$$D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \neq 0 \quad (3.45)$$

мають місце рівності

$$\text{rank } D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) = 1, \text{ rank } P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} = 0,$$

отже $P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} = 0$. Тут $P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} - (1 \times 1)$ -матриця-ортопроектор [21]:

$$P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{N} \left[D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \right].$$

Таким чином, за умови (3.45) рівняння (3.44) має принаймі один розв'язок

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (3.44) за додаткової умови $D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ неперервний. При цьому періодична задача для рівняння (3.37) має принаймі один розв'язок, визначений операторною системою

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \nu(\varepsilon) \cdot \cos t + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \cdot g \left[Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](t), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds. \end{aligned}$$

Для побудови розв'язку операторної системи (3.46) у випадку простоти коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.41) може бути використаний метод простих ітерацій [21, 193]. Таким чином, доведено наступне твердження [317].

Теорема 3.2.3. *У випадку кратних коренів $\det D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) = 0$ рівняння для породжуючих амплітуд (3.41) для довільного кореня*

$\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ у малому околі породжуючого розв'язку

$$y_0(t, c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon) \cdot \cos t + g[f(s, \varepsilon)](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

і відповідної власної функції $\mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ за умови (3.45) і

$$D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

періодична задача для рівняння (3.37) має принаймні один розв'язок

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

визначений операторною системою (3.46). Для знаходження цього розв'язку $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon)$, а також власної функції $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= \nu_1(\varepsilon) \cdot \cos t + x_1^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x_1^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon g[Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)](t), \\ \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} &= -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x_1^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds; \\ x_2(t, \varepsilon) &= \nu_2(\varepsilon) \cdot \cos t + x_2^{(1)}(t, \varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + x_2^{(2)}(t, \varepsilon), \\ x_2^{(2)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon g \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x_1(s, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}_2(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](t), \\ \begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} &= -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x_2^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds; \\ x_{k+2}(t, \varepsilon) &= \nu_{k+2}(\varepsilon) \cdot \cos t + x_{k+2}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \mu_{k+2}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon), \\ x_{k+2}^{(1)}(t, \varepsilon) &= x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t, \varepsilon), \quad x_{k+2}^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t, \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{k+2}^{(2)}(t, \varepsilon) = & \varepsilon g \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_{k+1}(s, \varepsilon) + \right. \\
& + \mathcal{A}_2 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) \zeta_{k+1}(\varepsilon) + \\
& \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (t), \\
\begin{bmatrix} \nu_{k+2}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+2}(\varepsilon) \end{bmatrix} = & -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0), \mu_0 \right) x_{k+2}^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\
& \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_{k+2}^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_{k+1}(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Довжина відрізка $[0, \varepsilon_*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (3.2.3), може бути оцінена, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [21, 193, 219], так і безпосередньо з умови стискання оператора, яка визначається системою (3.46) аналогічно [284]. Знаходження наближених розв'язків періодичної задачі для рівняння (3.37) в критичному випадку, як методом простих ітерацій, так і методом малого параметра А. Пуанкаре, відрізняють простота обчислювальної схеми, показова швидкість збіжності, загасання помилок округлення і чисельна стійкість [21, 193, 219], однак побудова наближених розв'язків із застосуванням методу простих ітерацій або методу малого параметра А. Пуанкаре для крайових задач пов'язана з швидко зростаючою від ітерації до ітерації складністю в обчислень.

Побудуємо далі наближені розв'язки періодичної задачі для рівняння (3.37) у критичному випадку з використанням методу найменших квадратів [40, 46, 52, 168, 211, 312], який забезпечує більшу точність при меншому числі ітерацій.

Нехай $\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \dots, \varphi^{(k)}(t), \dots$ — система лінійно-незалежних двічі неперервно-диференційовних 2π -періодичних функцій. Перше наближення $x_1(t, \varepsilon)$ до розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.43) шукаємо, як 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned}
x_1''(t, \varepsilon) + x_1(t, \varepsilon) = & \varepsilon \left[Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \right. \\
& \left. + \mathcal{A}_1 \left(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_1(t, \varepsilon) \right].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Розв'язок 2π -періодичної задачі для рівняння (3.47) шукаємо у вигляді

$$x_1(t, \varepsilon) \approx \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}, \quad \gamma_1(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_1};$$

тут

$$\varphi_1(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t) \ \varphi_1^{(2)}(t) \ \dots \ \varphi_1^{(\mu_1)}(t) \right]$$

— $(1 \times \mu_1)$ -матриця. Вимагатимемо

$$\begin{aligned} \Theta(\gamma_1(\varepsilon)) = & \left\| \left[\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) - 1 \right] \xi_1(t, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \varepsilon Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) - \xi_1''(t, \varepsilon) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Позначимо $(1 \times \mu_1)$ -матрицю

$$\mathcal{F}_1(t, \varepsilon) = \left[\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) - 1 \right] \varphi_1(t) - \varphi_1''(t).$$

Необхідна умова мінімізації функції $\Theta(\gamma_1(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) \gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t, \varepsilon) \cdot Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) dt,$$

однозначно розв'язного відносно вектора $\gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ за умови невиродженості $(\mu_1 \times \mu_1)$ -матриці Грама [168]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t, \varepsilon) \mathcal{F}_1(t, \varepsilon) dt.$$

Таким чином, за умови $\det \left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) \right] \neq 0$ знаходимо вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t, \varepsilon) \cdot Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) dt,$$

який у випадку $\gamma_1(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon^*]$, $\gamma_1(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_1(t, \varepsilon) \approx \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$$

до розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.47). Друге наближення $x_2(t, \varepsilon)$ до розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.43)

шукаємо, як 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} x_2''(t, \varepsilon) + x_2(t, \varepsilon) = & \varepsilon \left[Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \right. \\ & + \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x_2(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \\ & \left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) \right]. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Розв'язок 2π -періодичної задачі для рівняння (3.48) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} x_2(t, \varepsilon) & \approx \nu_1(\varepsilon) \cos t + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \mu_1(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon), \\ \xi_2(t, \varepsilon) & = \varphi_2(t) \gamma_2(\varepsilon), \quad \gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}, \quad \gamma_2(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_2}; \end{aligned}$$

тут

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \varphi_2^{(1)}(t) & \varphi_2^{(2)}(t) & \dots & \varphi_2^{(\mu_2)}(t) \end{bmatrix}$$

— $(1 \times \mu_2)$ -матриця. Умова розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.48) приводить до рівняння

$$\begin{aligned} D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \cdot \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = & - \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \xi_1(s, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds. \quad (3.49) \end{aligned}$$

За умов (3.45) і $D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ рівняння (3.49) має принаймі один неперервний розв'язок

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = & -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \xi_1(s, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds. \end{aligned}$$

Вимагатимемо

$$\begin{aligned} \Theta(\gamma_2(\varepsilon)) = & \left\| \left[\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) - 1 \right] x_2(t, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left[Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) \right] - x_2''(t, \varepsilon) \Big|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min.$$

Позначимо $(1 \times \mu_2)$ -матрицю

$$\mathcal{F}_2(t, \varepsilon) = \left[\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) - 1 \right] \varphi_2(t) - \varphi_2''(t).$$

Необхідна умова мінімізації функції $\Theta(\gamma_2(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t, \varepsilon) \cdot \left[\mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

однозначно розв'язного відносно вектора $\gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ за умови невинордженості $(\mu_2 \times \mu_2)$ -матриці Грама [168]

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t, \varepsilon) \mathcal{F}_2(t, \varepsilon) dt.$$

Таким чином, за умови $\det \left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \right] \neq 0$ знаходимо вектор

$$\begin{aligned} \gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t, \varepsilon) \cdot \left[\mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

який у випадку $\gamma_2(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon^*]$, $\gamma_2(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) друге наближення $x_2(t, \varepsilon)$ до розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.47). Продовжуючи міркування, приходимо до наступного твердження [317].

Наслідок 3.2.1. У випадку кратних коренів $\det D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) = 0$ рівняння для породжуючих амплітуд (3.41) для довільного кореня $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ в малому околі породжуючого озв'язку

$$y_0(t, c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon) \cdot \cos t + g[f(s, \varepsilon)](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

і відповідної власної функції $\mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ за умови (3.45) і

$$D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \neq 0, \quad D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

у випадку

$$\det [\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot, \varepsilon))] \neq 0, \quad \gamma_k(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon^*], \quad \gamma_k(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

періодична задача для рівняння (3.37) має принаймні один розв'язок

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

визначений операторною системою (3.46). Для знаходження цього розв'язку $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon)$, а також власної функції $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ може бути використана ітераційна схема

$$x_1(t, \varepsilon) \approx \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1},$$

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t, \varepsilon) \cdot Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) dt,$$

$$x_2(t, \varepsilon) \approx \nu_1(\varepsilon) \cos t + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t)\gamma_2(\varepsilon),$$

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \xi_1(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s ds,$$

$$\gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t, \varepsilon) \cdot \left[\mathcal{A}_2(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) \zeta_1(\varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) \right],$$

$$x_{k+2}(t, \varepsilon) \approx \nu_k(\varepsilon) \cos t + \xi_1(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+2}(t, \varepsilon),$$

$$\xi_{k+2}(t, \varepsilon) = \varphi_{k+2}(t)\gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad \mu_{k+1}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_k(\varepsilon) \\ \zeta_k(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) x_k(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_k(s, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s ds,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{k+2}(\varepsilon) = & -\varepsilon \left[\Gamma \left(\mathcal{F}_{k+2}(\cdot, \varepsilon) \right) \right]^{-1} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+2}^*(t, \varepsilon) \cdot \left[\mathcal{A}_2 \left(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) \zeta_{k+1}(\varepsilon) + \right. \\ & \left. + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}(s, \varepsilon), \mu_k(\varepsilon), t, \varepsilon) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Умови доведеного наслідку виконуються у випадку задачі про знаходження періодичних розв'язків і власної функції рівняння Мат'є [193, 312].

Приклад 3.2.3. Умови доведеної теореми, а також наслідку, виконуються у випадку задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

а також власної функції $h(\varepsilon)$ рівняння

$$y'' + \left(h(\varepsilon) + (1 + \varepsilon \sin \varepsilon) \cos 2t \sin \varepsilon \right) \cdot y = \cos 5t + \varepsilon y^3. \quad (3.50)$$

Дійсно, рівняння для породжуючих амплітуд (3.42) має корінь

$$c_0(\varepsilon) = c_0^* = -\frac{1}{24}, \quad \mu_0(\varepsilon) = \mu_0^* = 0,$$

якому відповідає ненульова матриця

$$\begin{aligned} D_0 \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) = \\ = \pi \left(-\frac{191}{384} - \frac{5}{12} \varepsilon^2 + \frac{13}{80} \varepsilon^4 - \frac{223}{10080} \varepsilon^6 + \frac{1151}{725} \frac{\varepsilon^8}{760} - \frac{1877}{26611200} \varepsilon^{10} \quad 0 \right), \end{aligned}$$

отже, згідно доведеної теореми, періодична задача для рівняння (3.50) має принаймі один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + \frac{1}{24} (2 \cos t - \cos 5t),$$

для знаходження якого може бути використана ітераційна схема (3.2.3). Перше наближення до розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння

(3.50) $x_1(t, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cdot \cos t + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$, визначає функція

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon g \left[Y(y_0(s, c_0), \mu_0, s, \varepsilon) \right](t) = & \frac{37\,603}{12\,386\,304} \varepsilon \cos t + \\ & + \frac{35}{13\,824} \varepsilon^3 \cos t - \frac{91}{92\,160} \varepsilon^5 \cos t + \frac{223}{1\,658\,880} \varepsilon^7 \cos t - \\ & - \frac{1\,151}{119\,439\,360} \varepsilon^9 \cos t + \frac{1\,877}{4\,379\,443\,200} \varepsilon^{11} \cos t - \frac{1}{384} \varepsilon \cos 3t - \\ & - \frac{5}{2\,304} \varepsilon^3 \cos 3t + \frac{13}{15\,360} \varepsilon^5 \cos 3t - \frac{223}{1\,935\,360} \varepsilon^7 \cos 3t + \\ & + \frac{1\,151}{139\,345\,920} \varepsilon^9 \cos 3t - \frac{1\,877}{5\,109\,350\,400} \varepsilon^{11} \cos 3t + \frac{1}{442\,368} \varepsilon \cos 5t - \\ & - \frac{1}{2\,304} \varepsilon \cos 7t - \frac{5}{13\,824} \varepsilon^3 \cos 7t + \frac{13}{92\,160} \varepsilon^5 \cos 7t - \frac{223}{11\,612\,160} \varepsilon^7 \cos 7t + \\ & + \frac{1\,151}{836\,075\,520} \varepsilon^9 \cos 7t - \frac{1\,877}{30\,656\,102\,400} \varepsilon^{11} \cos 7t + \frac{1}{12\,386\,304} \varepsilon \cos 15t. \end{aligned}$$

Перше наближення до функції $\nu_1(\varepsilon)$ і до власної функції

$$\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

згідно ітераційної схеми (3.2.3) визначає вектор

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_1^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \nu_1(\varepsilon) = & -\frac{989\,021\,\varepsilon}{2\,365\,784\,064} - \frac{182\,435\,\varepsilon^3}{504\,313\,344} + \frac{1\,982\,627\,\varepsilon^5}{14\,048\,027\,121} + \frac{625\,\varepsilon^6}{1\,520\,861\,184} - \\ & - \frac{938\,797\,\varepsilon^7}{4\,310\,048\,393} - \frac{81\,044\,\varepsilon^8}{121\,908\,342\,003} + \frac{390\,280\,\varepsilon^9}{1\,603\,922\,499} + \frac{66\,643\,\varepsilon^{10}}{83\,585\,932\,263}; \end{aligned}$$

крім того $\zeta_1(\varepsilon) = 0$. Друге наближення до функції $\nu_2(\varepsilon)$ і до власної функції $\mu_2(\varepsilon)$ згідно ітераційної схеми (3.2.3) визначає вектор

$$\begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_2^{(1)}(s, \varepsilon) + \right.$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \Big] \cos s \, ds,$$

де

$$\begin{aligned} \nu_2(\varepsilon) = & -\frac{989\,021\,\varepsilon}{2\,365\,784\,064} - \frac{596\,789\,\varepsilon^2}{8\,990\,605\,292} - \frac{1\,290\,714\,\varepsilon^3}{3\,568\,595\,861} - \frac{814\,481\,\varepsilon^4}{7\,382\,682\,406} + \\ & + \frac{1\,094\,962\,\varepsilon^5}{7\,752\,680\,109} - \frac{1\,055\,403\,\varepsilon^6}{372\,069\,527\,548} - \frac{212\,363\,\varepsilon^7}{11\,027\,126\,545} - \frac{55\,169\,\varepsilon^8}{113\,465\,964\,455} + \\ & + \frac{126\,807\,\varepsilon^9}{88\,877\,006\,657} + \frac{109\,466\,\varepsilon^{10}}{193\,938\,180\,265} - \frac{95\,653\,\varepsilon^{11}}{614\,250\,962\,130} - \frac{71\,4736\,\varepsilon^{12}}{1\,290\,619\,820\,509}; \end{aligned}$$

крім того $\zeta_2(\varepsilon) = 0$. Знайдені три наближення до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.50) і його власної функції $\mu(\varepsilon)$ характеризують нев'язки [317].

$$\begin{aligned} \Delta_k(\varepsilon) = & \left\| y_k''(t, \varepsilon) + \left(h_k(\varepsilon) + (1 + \varepsilon \sin \varepsilon) \cos 2t \sin \varepsilon \right) \cdot y_k(t, \varepsilon) - \cos 5t - \right. \\ & \left. - y_k^3(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Тут $h_k(\varepsilon) := 1 - \varepsilon \mu_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$. Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо:

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,00\,419\,402, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,0000\,270\,803,$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 2,09\,137 \times 10^{-7}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ нев'язки зменшуються:

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,000\,415\,978, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 2,66\,437 \times 10^{-7},$$

$$\Delta_2(0, 01) \approx 2,04\,107 \times 10^{-10}.$$

Для знаходження наближень до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.50) і його власної функції $h(\varepsilon)$ більш ефективно використання техніки найменших квадратів (3.2.1). Умови доведеного наслідку при цьому виконані. Покладемо наприклад

$$\varphi(\tau) = \left[\cos t \cos 3t \cos 5t \cos 7t \cos 9t \cos 11t \cos 13t \cos 15t \right].$$

Матриця Грама при цьому невироджена

$$\begin{aligned} \det \left[\Gamma \left(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon) \right) \right] \approx & 26\,022\,275\,212\,528\,839\,872\,196\,116\,480\,\varepsilon^2 + \\ & + 3\,302\,289\,754\,263\,641\,387\,782\,111\,232\,\varepsilon^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +43\,618\,482\,736\,669\,361\,856\,808\,222\,720\,\varepsilon^4 + \\
& +8\,236\,807\,154\,318\,936\,664\,333\,877\,248\,\varepsilon^5 + \\
& +1\,324\,293\,262\,901\,376\,257\,521\,352\,704\,\varepsilon^6 + \\
& +3\,617\,130\,537\,076\,922\,636\,923\,043\,840\,\varepsilon^7 - \\
& -11\,875\,352\,165\,949\,350\,567\,741\,489\,152\,\varepsilon^8 + \dots + \neq 0.
\end{aligned}$$

Схема (3.2.1) визначає перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (3.50)

$$x_1(t, \varepsilon) \approx \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^8, \quad \gamma_1(0) = 0,$$

де [317].

$$\gamma_1(\varepsilon) := \left(\gamma_1^a(\varepsilon) \ \gamma_1^b(\varepsilon) \ \gamma_1^c(\varepsilon) \ \gamma_1^d(\varepsilon) \ \gamma_1^e(\varepsilon) \ \gamma_1^f(\varepsilon) \ \gamma_1^g(\varepsilon) \ \gamma_1^h(\varepsilon) \right)^* \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0];$$

тут

$$\begin{aligned}
\gamma_1^a(\varepsilon) & \approx \frac{9\,673\,458\,724\,382\,\varepsilon}{3\,695\,261\,232\,713\,925} - \frac{1\,071\,874\,\varepsilon^2}{6\,474\,950\,609} + \frac{11\,364\,749\,\varepsilon^3}{5\,202\,423\,530} - \\
& - \frac{946\,126\,\varepsilon^4}{3\,444\,254\,885} - \frac{17\,287\,344\,\varepsilon^5}{21\,332\,723\,177} - \frac{70\,6339\,\varepsilon^6}{70\,107\,040\,820} + \\
& + \frac{955\,191\,\varepsilon^7}{7\,281\,062\,761} + \frac{996\,986\varepsilon^8}{14\,156\,525\,283}, \\
\gamma_1^b(\varepsilon) & \approx -\frac{\varepsilon}{384} + \frac{4\,372\,621\,\varepsilon^2}{26\,553\,485\,683} - \frac{2\,675\,795\,\varepsilon^3}{1\,224\,903\,309} + \frac{555\,308\,\varepsilon^4}{2\,026\,828\,761} + \\
& + \frac{2\,199\,152\varepsilon^5}{2\,713\,110\,537} + \frac{207\,843\varepsilon^6}{20\,104\,291\,900} - \frac{1\,133\,731\,\varepsilon^7}{8\,636\,776\,121} - \frac{334\,104\,\varepsilon^8}{4\,741\,074\,857}, \\
\gamma_1^c(\varepsilon) & \approx \frac{\varepsilon}{442\,368} - \frac{564\,697\,\varepsilon^2}{8\,921\,514\,755} + \frac{62\,785\,\varepsilon^3}{18\,233\,295\,074} - \frac{714\,703\,\varepsilon^4}{6\,754\,784\,180} + \\
& + \frac{39\,885\,\varepsilon^5}{4\,643\,811\,926} - \frac{52\,278\,\varepsilon^6}{13\,552\,434\,187} + \frac{152\,491\,\varepsilon^7}{39\,496\,582\,712} + \frac{204\,651\,\varepsilon^8}{7\,365\,925\,948}, \\
\gamma_1^d(\varepsilon) & \approx -\frac{\varepsilon}{2\,304} + \frac{5\,\varepsilon^2}{42\,467\,328} - \frac{4\,077\,499\varepsilon^3}{11\,251\,925\,763} + \frac{79\,907\,\varepsilon^4}{594\,345\,010\,584} + \\
& + \frac{765\,755\varepsilon^5}{5\,496\,037\,604} + \frac{46\,489\,\varepsilon^6}{565\,234\,777\,339} - \frac{398\,161\,\varepsilon^7}{19\,927\,789\,809} + \frac{20\,635\,\varepsilon^8}{189\,567\,101\,034}, \\
\gamma_1^f(\varepsilon) & \approx -\frac{\varepsilon}{62\,276\,269\,956\,662\,022\,667\,941} - \frac{\varepsilon^2}{35\,205\,120} - \frac{6\,350\,\varepsilon^3}{661\,569\,973\,411} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{10\,397\,\varepsilon^4}{438\,784\,682\,647} - \frac{33\,071\,\varepsilon^5}{1\,299\,549\,868\,549} + \frac{3\,107\,\varepsilon^6}{352\,462\,806\,362} - \\
& -\frac{12\,746\,\varepsilon^7}{1\,019\,653\,767\,395} - \frac{1\,852\,\varepsilon^8}{1\,314\,091\,331\,241}, \\
\gamma_1^g(\varepsilon) \approx & \frac{85\,\varepsilon^2}{4\,161\,798\,144} - \frac{2\,564\,\varepsilon^3}{1\,883\,648\,250\,323} + \frac{14\,423\,\varepsilon^4}{843\,261\,025\,790} - \\
& -\frac{2\,558\,\varepsilon^5}{1\,129\,454\,832\,849} - \frac{5\,308\,\varepsilon^6}{822\,079\,475\,925} - \frac{2\,213\,\varepsilon^7}{25\,944\,330\,408\,267} + \\
& + \frac{1\,837\,\varepsilon^8}{1\,957\,633\,061\,731}, \\
\gamma_1^h(\varepsilon) \approx & \frac{\varepsilon}{12\,386\,304} - \frac{5\,\varepsilon^2}{355\,140\,108\,288} + \frac{2\,706\,\varepsilon^3}{6\,543\,799\,671\,187} - \\
& -\frac{341\,\varepsilon^4}{14\,787\,916\,001\,055} + \frac{1\,575\varepsilon^5}{2\,278\,608\,054\,533} - \frac{363\varepsilon^6}{6\,310\,709\,366\,485} + \\
& + \frac{3\,827\,\varepsilon^7}{153\,019\,619\,704\,307} - \frac{186\,\varepsilon^8}{7\,192\,922\,493\,965},
\end{aligned}$$

при цьому

$$\begin{aligned}
\xi_1(t, \varepsilon) \approx & \frac{9\,673\,458\,724\,382}{3\,695\,261\,232\,713\,925} \varepsilon \cos t - \frac{930\,537}{5\,621\,165\,468} \varepsilon^2 \cos t + \\
& + \frac{11\,364\,749}{5\,202\,423\,530} \varepsilon^3 \cos t - \frac{946\,126}{3\,444\,254\,885} \varepsilon^4 \cos t - \frac{17\,287\,344}{21\,332\,723\,177} \varepsilon^5 \cos t - \\
& - \frac{706\,339}{70\,107\,040\,820} \varepsilon^6 \cos t + \frac{955\,191}{7\,281\,062\,761} \varepsilon^7 \cos t + \frac{996\,986}{14\,156\,525\,283} \varepsilon^8 \cos t - \\
& - \frac{1}{384} \varepsilon \cos 3t + \frac{4\,372\,621}{26\,553\,485\,683} \varepsilon^2 \cos 3t - \frac{2\,675\,795}{1\,224\,903\,309} \varepsilon^3 \cos 3t + \\
& + \frac{555\,308}{2\,026\,828\,761} \varepsilon^4 \cos 3t + \frac{2\,199\,152}{2\,713\,110\,537} \varepsilon^5 \cos 3t + \\
& + \frac{207\,843}{20\,104\,291\,900} \varepsilon^6 \cos 3t - \frac{1\,133\,731}{8\,636\,776\,121} \varepsilon^7 \cos 3t - \\
& - \frac{334\,104}{4\,741\,074\,857} \varepsilon^8 \cos 3t + \frac{1}{442\,368} \varepsilon \cos 5t - \frac{564\,697}{8\,921\,514\,755} \varepsilon^2 \cos 5t + \\
& + \frac{62\,785}{18\,233\,295\,074} \varepsilon^3 \cos 5t - \frac{714\,703}{6\,754\,784\,180} \varepsilon^4 \cos 5t + \\
& + \frac{39\,885}{4\,643\,811\,926} \varepsilon^5 \cos 5t - \frac{52\,278}{13\,552\,434\,187} \varepsilon^6 \cos 5t +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{152\,491}{39\,496\,582\,712} \varepsilon^7 \cos 5t + \frac{204\,651}{7\,365\,925\,948} \varepsilon^8 \cos 5t - \frac{1}{2\,304} \varepsilon \cos 7t + \\
& \quad + \frac{5}{42\,467\,328} \varepsilon^2 \cos 7t - \frac{4\,077\,499}{11\,251\,925\,763} \varepsilon^3 \cos 7t + \\
& \quad + \frac{79\,907}{594\,345\,010\,584} \varepsilon^4 \cos 7t + \frac{765\,755}{5\,496\,037\,604} \varepsilon^5 \cos 7t + \\
& \quad + \frac{46\,489}{565\,234\,777\,339} \varepsilon^6 \cos 7t - \frac{398\,161}{19\,927\,789\,809} \varepsilon^7 \cos 7t + \\
& + \frac{20\,635}{189\,567\,101\,034} \varepsilon^8 \cos 7t - \frac{1}{41\,517\,513\,304\,441\,353\,510\,804} \varepsilon \cos 9t - \\
& \quad - \frac{97}{35\,205\,120} \varepsilon^2 \cos 9t + \frac{4\,912}{1\,469\,610\,714\,209} \varepsilon^3 \cos 9t - \\
& \quad - \frac{442\,843}{97\,091\,992\,479} \varepsilon^4 \cos 9t + \frac{5\,486}{949\,641\,923\,803} \varepsilon^5 \cos 9t - \\
& \quad - \frac{3\,070}{25\,162\,867\,673} \varepsilon^6 \cos 9t + \frac{63\,365}{55\,953\,243\,577\,746} \varepsilon^7 \cos 9t + \\
& + \frac{83\,213}{68\,514\,512\,221} \varepsilon^8 \cos 9t - \frac{1}{62\,276\,269\,956\,662\,022\,667\,941} \varepsilon \cos 11t - \\
& \quad - \frac{1}{35\,205\,120} \varepsilon^2 \cos 11t - \frac{6\,350}{661\,569\,973\,411} \varepsilon^3 \cos 11t - \\
& \quad - \frac{10\,397}{438\,784\,682\,647} \varepsilon^4 \cos 11t - \frac{33\,071}{1\,299\,549\,868\,549} \varepsilon^5 \cos 11t + \\
& \quad + \frac{3\,107}{352\,462\,806\,362} \varepsilon^6 \cos 11t - \frac{12\,746}{1\,019\,653\,767\,395} \varepsilon^7 \cos 11t - \\
& \quad - \frac{1\,852}{1\,314\,091\,331\,241} \varepsilon^8 \cos 11t + \frac{85}{4\,161\,798\,144} \varepsilon^2 \cos 13t - \\
& \quad - \frac{2\,564}{1\,883\,648\,250\,323} \varepsilon^3 \cos 13t + \frac{14\,423}{843\,261\,025\,790} \varepsilon^4 \cos 13t - \\
& \quad - \frac{2\,558}{1\,129\,454\,832\,849} \varepsilon^5 \cos 13t - \frac{5\,308}{822\,079\,475\,925} \varepsilon^6 \cos 13t - \\
& \quad - \frac{2\,213}{25\,944\,330\,408\,267} \varepsilon^7 \cos 13t + \frac{1\,837}{1\,957\,633\,061\,731} \varepsilon^8 \cos 13t + \\
& \quad + \frac{1}{12\,386\,304} \varepsilon \cos 15t - \frac{5}{355\,140\,108\,288} \varepsilon^2 \cos 15t + \\
& \quad + \frac{2\,706}{6\,543\,799\,671\,187} \varepsilon^3 \cos 15t - \frac{341}{14\,787\,916\,001\,055} \varepsilon^4 \cos 15t + \\
& \quad + \frac{1\,575}{2\,278\,608\,054\,533} \varepsilon^5 \cos 15t - \frac{363}{6\,310\,709\,366\,485} \varepsilon^6 \cos 15t +
\end{aligned}$$

$$+\frac{3\,827}{153\,019\,619\,704\,307}\varepsilon^7\cos 15t-\frac{186}{7\,192\,922\,493\,965}\varepsilon^8\cos 15t.$$

Перше наближення до функції $\nu_1(\varepsilon)$ і до власної функції

$$\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

згідно ітераційної схеми (3.2.1) визначає вектор

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) \xi_1(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R} \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon \right) \right] \cos s \, ds, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \nu_1(\varepsilon) = & \frac{80\,551\,\varepsilon^2}{187\,418\,427\,555} + \frac{69\,299\,\varepsilon^3}{1\,870\,957\,842\,498} + \frac{40\,230\,\varepsilon^4}{116\,368\,131\,083} + \\ & + \frac{30\,061\,\varepsilon^5}{474\,827\,389\,059} - \frac{92\,518\,\varepsilon^6}{591\,537\,465\,595} + \frac{1\,049\varepsilon^7}{173\,462\,596\,370} + \\ & + \frac{10\,604\,\varepsilon^8}{1\,074\,292\,473\,059} + \frac{28\,293\,\varepsilon^9}{176\,181\,572\,288} + \frac{52\,279\varepsilon^{10}}{323\,583\,527\,845}; \end{aligned}$$

крім того $\zeta_1(\varepsilon) = 0$. Знайдені наближення до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.50) і його власної функції $\mu(\varepsilon)$ характеризують нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1$. Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо:

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,00\,419\,402, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 7,24\,231 \times 10^{-9}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ нев'язки зменшуються:

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,000\,415\,978, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 6,09\,988 \times 10^{-11}.$$

На закінчення відмітимо, що частинним випадком неавтономної періодичної задачі у випадку параметричного резонансу, в тому числі й неавтономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла, є автономна періодична задача, яка після заміни незалежної змінної приведена до неавтономної періодичної задачі, що містить додаткову невідому, яка відповідає за поправку на період шуканого розв'язку [225, 288].

3.2.5. Періодична задача для рівняння Мат'є. Умови доведеного наслідку виконуються у випадку задачі про знаходження періодич-

них розв'язків і власної функції рівняння Мат'є [1, 2, 13, 62, 63, 68, 79, 120, 121, 131, 142, 143, 160, 161, 162, 174, 192, 193, 223, 263].

Приклад 3.2.4. Умови доведеного наслідку виконуються у випадку задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

а також власної функції

$$h(\varepsilon) : h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(0) = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

рівняння Мат'є

$$y'' + (h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y = 0. \quad (3.51)$$

Покладемо

$$k := 1, \quad h(\varepsilon) := 1 - \varepsilon \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0].$$

Породжуюча 2π -періодична задача для рівняння

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0 \quad (3.52)$$

при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної має загальний вигляд $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$. Рівняння для породжуючих амплітуд (3.41) у випадку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.51)

$$F(c_0, \mu_0) := \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) ds = 0$$

істотним чином перетворюється до вигляду

$$F_1(c_0, \mu_0) := \frac{\pi c_0}{2} (2\mu_0 - 1) = 0.$$

Останнє рівняння має єдиний корінь $c_0 = 1$, $\mu_0 = 0, 5$, якому відповідає нетривіальний розв'язок, не нульова матриця

$$D_0(c_0, \mu_0) = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, згідно доведеного наслідку періодична задача для рівняння (3.51) має принаймі один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y_0(t, c_0)$, для знаходження якого може бути використана ітераційна схема (3.2.3). Перше наближення до розв'язку 2π -періодичної

задачі для рівняння (3.51)

$$x_1(t, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cdot \cos t + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$$

визначає функція

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon g \left[Y(y_0(s, c_0), \mu_0, s, \varepsilon) \right] (t) = \frac{\varepsilon}{16} \left(-\cos t + \cos 3t \right).$$

Перше наближення до функції $\nu_1(\varepsilon)$ і до власної функції

$$\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

згідно ітераційної схеми (3.2.3) визначає вектор

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_1^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds, \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) = 0.$$

Таким чином $\nu_1(\varepsilon) = 0$; крім того

$$\zeta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32}.$$

Друге наближення до частинного розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.51)

$$x_2^{(1)}(t, \varepsilon) := x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + x_2^{(2)}(t, \varepsilon)$$

визначає функція

$$x_2^{(2)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{768} \left(5\varepsilon^2 \cos t - 6\varepsilon^2 \cos 3t + \varepsilon^2 \cos 5t \right).$$

Друге наближення до функції $\nu_2(\varepsilon)$ і до власної функції $\mu_2(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_2(\varepsilon)$ згідно ітераційної схеми (3.2.3) визначає вектор

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_2^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds, \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_1(\varepsilon), s, \varepsilon) = \zeta_1(\varepsilon) x_2^{(1)}(s, \varepsilon).$$

Таким чином $\nu_2(\varepsilon) = 0$; крім того

$$\zeta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32} - \frac{\varepsilon^2}{512}.$$

Третє наближення до частинного розв'язку 2π -періодичної задачі для рівняння (3.51)

$$x_3^{(1)}(t, \varepsilon) := x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + x_2^{(3)}(t, \varepsilon)$$

визначає функція

$$x_3^{(2)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{73 \cdot 728} \left(480 \varepsilon^2 \cos t - 41 \varepsilon^3 \cos t - 576 \varepsilon^2 \cos 3t + \right. \\ \left. + 54 \varepsilon^3 \cos 3t + \varepsilon^2 \cos 5t - 14 \varepsilon^3 \cos 5t + \varepsilon^3 \cos 7t \right).$$

Третє наближення до функції $\nu_3(\varepsilon)$ і до власної функції $\mu_3(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_3(\varepsilon)$ згідно ітераційної схеми (3.2.3) визначає вектор

$$\begin{bmatrix} \nu_3(\varepsilon) \\ \zeta_3(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+ \left(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) \right) \int_0^{2\pi} \left[\mathcal{A}_1 \left(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon) \right) x_3^{(1)}(s, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_3^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_2(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] \cos s \, ds,$$

де

$$\mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_3^{(1)}(s, \varepsilon), \mu_2(\varepsilon), s, \varepsilon) = \zeta_2(\varepsilon) x_2(s, \varepsilon).$$

Таким чином $\nu_3(\varepsilon) = 0$; крім того

$$\zeta_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32} - \frac{\varepsilon^2}{512} + \frac{\varepsilon^3}{24 \cdot 576} + \frac{71 \varepsilon^4}{2 \cdot 359 \cdot 296} - \frac{41 \varepsilon^5}{37 \cdot 748 \cdot 736}.$$

Знайдено три наближення до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.51) і його власної функції $\mu(\varepsilon)$ характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\| y_k''(t, \varepsilon) + \left(h_k(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_k(t, \varepsilon) \right\|_{C[0; 2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тут

$$h_k(\varepsilon) := 1 - \varepsilon \mu_k(\varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0, 1$ маємо:

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0, 05, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0, 000\,869\,305,$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 0, 0000\,100\,332, \quad \Delta_3(0, 1) \approx 8, 18\,660 \times 10^{-8}.$$

При $\varepsilon = 0, 01$ нев'язки зменшуються:

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0, 005, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 8, 66\,973 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0, 01) \approx 9, 99\,071 \times 10^{-9}, \quad \Delta_3(0, 01) \approx 8, 14\,765 \times 10^{-12}.$$

Відмітимо, що нев'язки перших трьох наближень до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.51) і його власної функції $\mu(\varepsilon)$, знайдені за допомогою ітераційної схеми (3.2.3), на кожному кроці практично співпадають з нев'язками відповідних наближень, знайдених за допомогою методу Пуанкаре. Для побудови більш точних наближень до розв'язків рівняння Мат'є і його власних функцій нами запропонована модифікована двокрокова ітераційна техніка [312, 319]. А саме: запропонована ітераційна схема, яка визначає послідовні наближення до функцій Мат'є, які є 2π -періодичними розв'язками

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння Мат'є [176, 263]

$$y'' + \left(h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\right) \cdot y = 0 \tag{3.53}$$

і його власних функцій $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$, $h(0) = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Розв'язки 2π -періодичної задачі для рівняння (3.53) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0. \tag{3.54}$$

Слідуючи запропонованій в монографії [176] схемі побудови 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53), починаючи з третьої ітерації приходимо до появи в наближеннях до розв'язку секулярних членів вигляду $t \sin \nu t$, $t \cos \nu t$, $\nu \in \mathbb{N}$. Традиційна [207, 263] схема побудови функцій Мат'є передбачає одночасне знаходження наближень до його власних функцій. Нами запропонована двокрокова ітераційна техніка, побудована за схемою методу найменших квадратів [40], при фіксованому $k \in \mathbb{N}$, яка визначає послідовні наближення до функції $h(\varepsilon)$ і відповід-

ної функції Мат'є. Для знаходження початкового наближення $h_0(\varepsilon)$ до невідомої функції $h(\varepsilon)$ зафіксуємо один із розв'язків $y_0(t, k) = \cos kt$, або $y_0(t, k) = \sin kt$, $k \in \mathbb{N}$ породжуючої задачі (3.54). Із умови розв'язності

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_0(t, k) dt = 0$$

2π —періодичної задачі для нульового наближення до рівняння (3.53)

$$y_0''(t, k) + (h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y_0(t, k) = 0$$

знаходимо для $y_0(t, k) = \cos kt$, $k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Аналогічно при $y_0(t, k) = \sin kt$, $k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Нехай $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, ... — система лінійно-незалежних 2π —періодичних двічі неперервно-диференційовних скалярних функцій. Позначимо $(1 \times k_1)$ —матриці

$$\varphi_1(t) = [\varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_{k_1}(t)], \quad \Phi_0(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_1''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_1(t) \right\}.$$

Перше наближення $y_1(t, \varepsilon)$ до періодичного розв'язку рівняння (3.53) шукаємо, як 2π —періодичний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) = 0. \quad (3.55)$$

Наближений розв'язок рівняння (3.55) шукаємо у вигляді

$$y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon), \quad \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) c_1(\varepsilon);$$

вимагатимемо [212]

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \varphi_1''(t) c_1(\varepsilon) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_1(t) c_1(\varepsilon) + \right. \\ \left. + y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t, k) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min.$$

Для фіксованої матриці $\varphi_1(t)$ максимум функції $F(c_1(\varepsilon))$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідна умова мінімізації функції $F(c_1(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t, k) \right\} dt,$$

однозначно розв'язного відносно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ за умови невинудженості $(k_1 \times k_1)$ —матриці Грама [168, 275, 279, 306]

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_0(t, \varepsilon) dt.$$

Таким чином, за умови $\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \neq 0$ знаходимо вектор

$$c_1(\varepsilon) = - \left[\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t, k) \right\} dt,$$

який визначає перше наближення $y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$ до 2π —періодичного розв'язку рівняння (3.53). Наступне наближення до рівняння (3.53) визначимо, як

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) = 0. \quad (3.56)$$

Для знаходження першого наближення $h_1(\varepsilon)$ до невідомої функції $h(\varepsilon)$ використаємо умову розв'язності 2π —періодичної задачі для рівняння (3.56)

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_1(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Позначимо

$$\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_1(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) [k^2 - \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) dt.$$

За умови $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ знаходимо перше наближення

$$h_1(\varepsilon) = \frac{\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

до власної функції $h(\varepsilon)$ рівняння Мат'є, що відповідає першому набли-

женню $y_1(t, \varepsilon)$ до 2π —періодичного розв’язку рівняння (3.53). Позначимо $(1 \times k_2)$ —матриці

$$\varphi_2(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dots \ \varphi_{k_2}(t)], \quad \Phi_1(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_2''(t) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_2(t) \right\}.$$

Друге наближення

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

до періодичного розв’язку рівняння (3.53) шукаємо, як 2π —періодичний розв’язок рівняння

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_2(t, \varepsilon) = 0.$$

Необхідна умова мінімізації функції

$$F(c_2(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \left\{ \varphi_2''(t) c_2(\varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_2(t) c_2(\varepsilon) + \right. \\ \left. + y_1''(t, \varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) \right\}^2 dt$$

приводить до рівняння

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \cdot c_2(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

однозначно розв’язного відносно вектора $c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$ за умови невинудженості $(k_2 \times k_2)$ —матриці Грама [168]

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon) dt.$$

Таким чином, за умови $\det \Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \neq 0$ знаходимо вектор

$$c_2(\varepsilon) = - \left[\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

який визначає друге наближення $y_2(t, \varepsilon)$ до 2π —періодичного розв’язку рівняння (3.53). Наступне наближення до рівняння (3.53) визначимо, як

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_2(t, \varepsilon) = 0. \quad (3.57)$$

Для знаходження другого наближення $h_2(\varepsilon)$ до невідомої функції $h(\varepsilon)$ використаємо умову розв'язності 2π -періодичної задачі для рівняння (3.57)

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_2(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) &= \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_2(t, \varepsilon) dt, \\ \omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) &= \int_0^{2\pi} y_0(t, k) [k^2 - \varepsilon \cos 2t] y_2(t, \varepsilon) dt. \end{aligned}$$

За умови $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ знаходимо друге наближення

$$h_2(\varepsilon) = \frac{\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

до власної функції $h(\varepsilon)$ рівняння Мат'є, яке відповідає другому наближенню $y_2(t, \varepsilon)$ до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53). Продовжуючи міркування, за умови

$$\det \Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) \neq 0, \quad \Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

приходимо до наступної ітераційної процедури

$$y_{j+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t, \varepsilon), \quad (3.58)$$

$$\xi_{j+1}(t, \varepsilon) = \varphi_{j+1}(t) \cdot c_{j+1}(\varepsilon), \quad h_{j+1}(\varepsilon) = \frac{\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)},$$

$$\begin{aligned} c_{j+1}(\varepsilon) &= - \left[\Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \left\{ y_j''(t) + \right. \\ &\quad \left. + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_j(t) \right\} dt, \quad \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тут

$$\Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) = \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon) dt$$

— $(k_j \times k_j)$ — матриця Грама,

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_{j+1}''(t) + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_{j+1}(t) \right\}$$

$-(1 \times k_j)$ — матриця,

$$\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_{j+1}(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) [k^2 - \varepsilon \cos 2t] y_{j+1}(t, \varepsilon) dt.$$

Ітераційна процедура (3.58) задає відображення

$$(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)) \rightarrow (y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)),$$

$$(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)) \rightarrow (y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)),$$

які визначаються оператором

$$\Psi(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)) = (y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо оператор $\Psi(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon))$ є стискаючим, ітераційна процедура (3.58) збігається до шуканого 2π —періодичного розв'язку $y(t, \varepsilon)$ рівняння (3.53), при цьому швидкість збіжності визначається вибором матриці $\varphi(t)$, значенням k і величиною малого параметра.

В якості ілюстрації ефективності ітераційної процедури (3.58) знайдемо наближення до функції Мат'є $se_1(t, h(\varepsilon))$ та його власної функції $h(\varepsilon)$, які відповідають породжуючому розв'язку $y_0(t) = \cos t$ для $k = 1$, при цьому $h_0(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо вектор-рядок

$$\varphi_1(t) = [\cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t].$$

Матриця Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, що відповідає розв'язку $y_0(t, 1) = \cos t$ породжуючої задачі (3.54), при цьому невироджена

$$\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \pi^3 (84\,934\,656 + 15\,925\,248 \varepsilon + 1\,198\,080 \varepsilon^2 + 30\,336 \varepsilon^3 + \\ + 392 \varepsilon^4 + 3,5 \varepsilon^5 + 0,125 \varepsilon^6 + \dots) \neq 0.$$

Перше наближення до 2π —періодичного рівняння (3.53)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 (-3 \cos 3t + \cos 5t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{73 \ 728} \varepsilon^3 (6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t) + \\
& + \frac{1}{2 \ 359 \ 296} \varepsilon^4 (44 \cos 3t + 6 \cos 5t - 3 \cos 7t) + \\
& + \frac{1}{339 \ 738 \ 624} \varepsilon^5 (-1 \ 206 \cos 3t + 189 \cos 5t - 10 \cos 7t) + \\
& + \frac{1}{32 \ 614 \ 907 \ 904} \varepsilon^6 (12 \ 690 \cos 3t - 3 \ 528 \cos 5t + 229 \cos 7t) + \\
& + \frac{1}{1 \ 565 \ 515 \ 579 \ 392} \varepsilon^7 (-46 \ 728 \cos 3t + 18 \ 745 \cos 5t - 2 \ 098 \cos 7t).
\end{aligned}$$

визначає перше наближення до невідомої функції $h(\varepsilon)$ вигляду

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{\varepsilon^4}{24 \ 576} - \frac{11 \ \varepsilon^5}{1 \ 179 \ 648} + \frac{67 \ \varepsilon^6}{37 \ 748 \ 736};$$

тут $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафіксуємо матрицю

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t & \cos 5t & \cos 7t & \dots & \cos 15t & \cos 17t & \cos 19t & \cos 21t \end{bmatrix}.$$

Друге наближення $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53) визначає функція

$$\begin{aligned}
y_2(t, \varepsilon) = & \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 (-3 \cos 3t + \cos 5t) + \\
& + \frac{1}{73 \ 728} \varepsilon^3 (6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t) + \\
& + 111 \ 796 \ 480 \ \varepsilon^4 (220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t) + \\
& + \frac{1}{2 \ 831 \ 155 \ 200} \varepsilon^5 (-7 \ 350 \cos 3t + 1 \ 575 \cos 5t + 90 \cos 7t - 24 \cos 9t + \\
& + \cos 11t) + \frac{1}{951 \ 268 \ 147 \ 200} \varepsilon^6 (86 \ 625 \cos 3t - 75 \ 495 \cos 5t + \\
& + 6 \ 426 \cos 7t + 210 \cos 9t - 35 \cos 11t + \cos 13t) + \\
& + \frac{1}{426 \ 168 \ 129 \ 945 \ 600} \varepsilon^7 (7 \ 808 \ 640 \cos 3t + 1 \ 215 \ 396 \cos 5t - \\
& - 417 \ 088 \cos 7t + 19 \ 600 \cos 9t + 420 \cos 11t - 48 \cos 13t + \cos 15t) + \\
& + \frac{1}{17 \ 674 \ 044 \ 685 \ 1039 \ 236 \ 401} \varepsilon^9 (23 \ 909 \ 044 \ 320 \cos 3t -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -17\,084\,975\,040 \cos 5t + 1\,215\,539\,640 \cos 7t + 43\,912\,800 \cos 9t - \\
& -5\,278\,500 \cos 11t + 110\,565 \cos 13t + 1\,260 \cos 15t - \\
& -80 \cos 17t + \cos 19t) + \varepsilon^{11} \left(-\frac{\cos 3t}{221\,494\,310\,486} + \frac{\cos 5t}{1\,386\,042\,922\,077} + \right. \\
& + \frac{\cos 7t}{18\,897\,813\,770\,212} - \frac{\cos 9t}{120\,864\,620\,611\,896} + \frac{\cos 11t}{4\,778\,357\,920\,324\,647} + \\
& + \frac{\cos 13t}{287\,806\,335\,927\,056\,754} - \frac{\cos 15t}{4\,670\,267\,794\,577\,419\,066} + \\
& + \frac{\cos 17t}{392\,756\,548\,557\,864\,934\,965} \left. \right) + \varepsilon^{12} \left(\frac{\cos 3t}{4\,163\,185\,355\,710} - \right. \\
& - \frac{\cos 5t}{7\,168\,129\,136\,407} + \frac{\cos 7t}{112\,255\,716\,704\,568} + \frac{\cos 9t}{2\,719\,118\,682\,885\,733} - \\
& - \frac{\cos 11t}{27\,185\,810\,469\,627\,548} + \frac{\cos 13t}{1\,538\,356\,519\,807\,981\,673} + \\
& + \frac{\cos 15t}{124\,221\,344\,542\,507\,662\,191} \left. \right) + \varepsilon^{13} \left(\frac{\cos 3t}{34\,826\,074\,411\,875} + \right. \\
& + \frac{\cos 5t}{133\,719\,435\,564\,370} - \frac{\cos 7t}{577\,455\,475\,386\,849} + \frac{\cos 9t}{16\,303\,946\,419\,048\,722} + \\
& + \frac{\cos 11t}{608\,660\,631\,734\,911\,763} - \frac{\cos 13t}{8\,726\,756\,537\,037\,151\,087} + \\
& + \frac{\cos 15t}{667\,757\,870\,754\,864\,675\,146} \left. \right) + \varepsilon^{14} \left(-\frac{\cos 3t}{153\,644\,022\,587\,330} + \right. \\
& + \frac{\cos 5t}{1\,133\,441\,404\,469\,142} + \frac{\cos 7t}{10\,716\,858\,169\,308\,095} - \\
& - \frac{\cos 9t}{83\,548\,123\,492\,477\,362} + \frac{\cos 11t}{367\,523\,086\,865\,9653\,039} + \\
& + \frac{\cos 13t}{194\,656\,335\,464\,434\,256\,497} \left. \right) + \varepsilon^{15} \left(\frac{\cos 3t}{2\,402\,102\,230\,796\,824} - \right. \\
& - \frac{\cos 5t}{4\,968\,397\,697\,113\,046} + \frac{\cos 7t}{91\,677\,206\,898\,593\,050} + \\
& + \frac{\cos 9t}{1\,544\,771\,237\,150\,623\,087} + \frac{\cos 11t}{18\,779\,091\,722\,693\,218\,628} \left. \right).
\end{aligned}$$

При цьому $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$h_2(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} -$$

$$-\frac{55 \varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \frac{83 \varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} + \frac{128\,288\,664 \varepsilon^9}{81\,824\,280\,949\,555\,195} - \\ - \frac{442\,760\,080 \varepsilon^{10}}{6\,545\,942\,475\,964\,416\,163} + \frac{\varepsilon^{12}}{442\,988\,620\,972}.$$

Для перевірки точності знайденого другого наближення до періодичного розв'язку рівняння Мат'є і його власної функції знайдемо нев'язки цього наближення в самому рівнянні Мат'є

$$\Delta_2(\varepsilon) = \left\| y_2''(t, \varepsilon) + \left(h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_2''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}$$

порівняємо ці нев'язки з відхиленнями

$$\Delta_r(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + \left(h_r(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_r''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_h(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + \left(h_h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_h''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

відповідними функціям [193, с. 235], [263, с. 17]

$$h_h(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576},$$

$$h_r(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11 \varepsilon^4}{1\,179\,648}$$

і наближеннями до розв'язку рівняння Мат'є

$$y_r(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \\ + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \\ + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 \left(220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t \right),$$

отриманими в монографіях [161, 193, 263]. Друге наближення $y_2(t, \varepsilon)$ до періодичного розв'язку рівняння Мат'є $se_1(t, h(\varepsilon))$ і його власної функції значно перевершують по точності раніше відомі наближення

$$\Delta_2(0, 1) \approx 2,59\,341 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_h(0, 1) \approx 3,53\,263 \cdot 10^{-10},$$

$$\Delta_r(0, 1) \approx 3,14\,899 \cdot 10^{-10};$$

$$\Delta_2(0, 5) \approx 2,78\,286 \cdot 10^{-13}, \quad \Delta_h(0, 5) \approx 1,10\,346 \cdot 10^{-6},$$

$$\begin{aligned}\Delta_r(0, 5) &\approx 9,89\,857 \cdot 10^{-7}; \\ \Delta_2(1, 0) &\approx 2,78\,034 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_h(1, 0) \approx 3,52\,821 \cdot 10^{-5}, \\ \Delta_r(1, 0) &\approx 3,18\,803 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

Далі знайдемо наближення до функції Мат'є $se_1(t, h(\varepsilon))$ і його власної функції $h(\varepsilon)$, які відповідають породжуючому розв'язку $y_0(t) = \sin t$ для $k = 1$, при цьому $h_0(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо вектор-рядок

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t & \sin 5t & \sin 7t \end{bmatrix}.$$

Матриця Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, що відповідає розв'язку $y_0(t, k) = \sin t$ породжуючої задачі (3.54), при цьому невироджена

$$\begin{aligned}\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) &= \pi^3 \left(84\,934\,656 - 15\,925\,248\,\varepsilon + 1\,198\,080\,\varepsilon^2 - 30\,336\,\varepsilon^3 + \right. \\ &\quad \left. + 392\,\varepsilon^4 - 3,5\,\varepsilon^5 + 0,125\,\varepsilon^6 + \dots \right) \neq 0.\end{aligned}$$

Перше наближення до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53)

$$\begin{aligned}y_1(t, \varepsilon) &= \sin t + \frac{1}{16}\,\varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2 \left(3 \sin 3t + \sin 5t \right) + \\ &\quad + \frac{1}{73\,728}\,\varepsilon^3 \left(6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2\,359\,296}\,\varepsilon^4 \left(-44 \sin 3t + 6 \sin 5t + 3 \sin 7t \right) + \\ &\quad + \frac{1}{339\,738\,624}\,\varepsilon^5 \left(-1\,206 \sin 3t - 189 \sin 5t + 10 \sin 7t \right) + \\ &\quad + \frac{1}{32\,614\,907\,904}\,\varepsilon^6 \left(-12\,690 \sin 3t - 3\,528 \sin 5t - 229 \sin 7t \right) + \\ &\quad + \frac{1}{1\,565\,515\,579\,392}\,\varepsilon^7 \left(-46\,728 \sin 3t - 18\,745 \sin 5t - 2\,098 \sin 7t \right).\end{aligned}$$

визначає перше наближення до невідомої функції $h(\varepsilon)$ вигляду

$$h_1(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{67\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} + \frac{235\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552};$$

тут $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафіксуємо матрицю

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t & \sin 5t & \sin 7t & \dots & \sin 15t & \sin 17t & \sin 19t & \sin 21t \end{bmatrix}.$$

Друге наближення $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53) визначає функція

$$\begin{aligned} y_2(t, \varepsilon) = & \sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(3 \sin 3t + \sin 5t \right) + \\ & + \frac{1}{73 \cdot 728} \varepsilon^3 \left(6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t \right) + \\ & + \frac{1}{11 \cdot 796 \cdot 480} \varepsilon^4 \left(-220 \sin 3t + 30 \sin 5t + 15 \sin 7t + \sin 9t \right) + \\ & + \frac{1}{2 \cdot 831 \cdot 155 \cdot 200} \varepsilon^5 \left(-7 \cdot 350 \sin 3t - 1 \cdot 575 \sin 5t + 90 \sin 7t + 24 \sin 9t + \right. \\ & \left. + \sin 11t \right) + \frac{1}{951 \cdot 268 \cdot 147 \cdot 200} \varepsilon^6 \left(-86 \cdot 625 \sin 3t - 75 \cdot 495 \sin 5t - \right. \\ & \left. - 6 \cdot 426 \sin 7t + 210 \sin 9t + 35 \sin 11t + \sin 13t \right) + \\ & + \frac{1}{426 \cdot 168 \cdot 129 \cdot 945 \cdot 599} \varepsilon^7 \left(7 \cdot 808 \cdot 640 \sin 3t - 1 \cdot 215 \cdot 396 \sin 5t - 417 \cdot 088 \sin 7t - \right. \\ & \left. - 19 \cdot 600 \sin 9t + 420 \sin 11t + 48 \sin 13t + \sin 15t \right) + \\ & + \frac{1}{81 \cdot 824 \cdot 280 \cdot 949 \cdot 555 \cdot 195} \varepsilon^8 \left(256 \cdot 577 \cdot 328 \sin 3t + 45 \cdot 723 \cdot 664 \sin 5t - \right. \\ & \left. - 2 \cdot 922 \cdot 752 \sin 7t - 551 \cdot 040 \sin 9t - 16 \cdot 560 \sin 11t + 252 \sin 13t + 21 \sin 15t \right) + \\ & + \frac{1}{192 \cdot 450 \cdot 708 \cdot 793 \cdot 353 \cdot 820 \cdot 407} \varepsilon^9 \left(26 \cdot 345 \cdot 462 \cdot 304 \sin 3t + \right. \\ & \left. + 18 \cdot 603 \cdot 639 \cdot 488 \sin 5t + 1 \cdot 323 \cdot 587 \cdot 608 \sin 7t - 47 \cdot 816 \cdot 160 \sin 9t - \right. \\ & \left. - 5 \cdot 747 \cdot 700 \sin 11t - 120 \cdot 393 \sin 13t + 1 \cdot 368 \sin 15t \right) + \\ & + \varepsilon^{11} \left(-\frac{\sin 3t}{214 \cdot 989 \cdot 035 \cdot 628} - \frac{\sin 5t}{1 \cdot 361 \cdot 614 \cdot 710 \cdot 949} + \frac{\sin 7t}{18 \cdot 687 \cdot 840 \cdot 891 \cdot 109} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin 9t}{120 \cdot 864 \cdot 620 \cdot 611 \cdot 896} + \frac{\sin 11t}{4 \cdot 778 \cdot 357 \cdot 936 \cdot 802 \cdot 680} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin 13t}{287 \cdot 805 \cdot 286 \cdot 716 \cdot 556 \cdot 383} + \frac{\sin 15t}{4 \cdot 668 \cdot 789 \cdot 321 \cdot 617 \cdot 042 \cdot 696} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^{12} \left(-\frac{\sin 3t}{4\,257\,026\,768\,778} - \frac{\sin 5t}{6\,958\,775\,948\,805} - \right. \\
& -\frac{\sin 7t}{11\,0318\,181\,324\,043} + \frac{\sin 9t}{2\,689\,378\,806\,293\,442} + \\
& +\frac{\sin 11t}{27\,185\,810\,534\,608\,284} + \frac{\sin 13t}{1\,538\,357\,407\,774\,944\,487} - \\
& \left. -\frac{\sin 15t}{124\,428\,038\,411\,659\,803\,874} \right) + \varepsilon^{13} \left(\frac{\sin 3t}{29\,341\,783\,122\,818} - \right. \\
& -\frac{\sin 5t}{136\,370\,563\,430\,900} - \frac{\sin 7t}{560\,650\,728\,450\,561} - \\
& -\frac{\sin 9t}{16\,026\,343\,102\,716\,968} + \frac{\sin 11t}{602\,078\,785\,284\,169\,998} + \\
& +\frac{\sin 13t}{8\,726\,751\,035\,739\,910\,022} - \frac{\sin 15t}{666\,860\,317\,684\,142\,057\,790} \left. \right) + \\
& +\varepsilon^{14} \left(\frac{\sin 3t}{138\,003\,850\,482\,347} - \frac{\sin 5t}{955\,466\,147\,098\,902} - \right. \\
& -\frac{\sin 7t}{10\,912\,296\,234\,493\,995} - \frac{\sin 9t}{81\,122\,800\,588\,097\,448} - \\
& -\frac{\sin 11t}{3\,613\,247\,413\,839\,029\,442} + \frac{\sin 13t}{192\,568\,995\,246\,041\,079\,400} \left. \right).
\end{aligned}$$

При цьому $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
h_2(\varepsilon) = & 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} + \\
& + \frac{55\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \frac{83\,\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} - \frac{76\,\varepsilon^9}{48\,473\,849\,195} - \frac{\varepsilon^{10}}{14\,609\,780\,354} + \\
& + \frac{\varepsilon^{12}}{429\,978\,071\,256} + \frac{\varepsilon^{13}}{8\,514\,053\,537\,556} - \frac{\varepsilon^{14}}{58\,683\,566\,245\,636}.
\end{aligned}$$

Точність другого наближення $y_2(t, \varepsilon)$ до періодичного розв'язку рівняння Мат'є $se_1(t, h(\varepsilon))$ і його власної функції характеризують нев'язки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,50\,704 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 4,04\,218 \cdot 10^{-16},$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 2,57\,572 \cdot 10^{-14}.$$

Знайдемо наближення до функції Мат'є $se_3(t, h(\varepsilon))$ і його власної функції $h(\varepsilon)$, які відповідають породжуючому розв'язку $y_0(t, 3) = \cos 3t$

для $k = 3$, при цьому $h_0(\varepsilon) = 9$. Зафіксуємо вектор-рядок

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \cos 5t & \cos 7t \end{bmatrix}.$$

Матриця Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, що відповідає розв'язку $y_0(t, k) = \cos 3t$ породжуючої задачі (3.54), при цьому не вироджена. Перше наближення до 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53)

$$\begin{aligned} y_1(t, \varepsilon) = & \cos 3t + \frac{1}{32} \varepsilon \left(-2 \cos t + \cos 5t \right) + \frac{1}{2 \cdot 560} \varepsilon^2 \left(10 \cos t + \cos 7t \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{8 \cdot 192} \cos t + \frac{7}{163 \cdot 840} \cos 5t \right) + \\ & + \frac{1}{65 \cdot 535 \cdot 999} \varepsilon^4 \left(-1 \cdot 000 \cos t - 250 \cos 5t + 41 \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{4 \cdot 194 \cdot 303 \cdot 999} \varepsilon^5 \left(11 \cdot 300 \cos t + 437 \cos 5t - 280 \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 677 \cdot 721 \cdot 599 \cdot 999} \varepsilon^6 \left(-340 \cdot 000 \cos t + 25 \cdot 250 \cos 5t + 2 \cdot 731 \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{107 \cdot 374 \cdot 182 \cdot 399 \cdot 999} \varepsilon^7 \left(416 \cdot 300 \cos t - 285 \cdot 233 \cos 5t + 30 \cdot 520 \cos 7t \right). \end{aligned}$$

визначає перше наближення до невідомої функції $h(\varepsilon)$ вигляду

$$\begin{aligned} h_1(\varepsilon) = & 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13 \varepsilon^4}{327 \cdot 680} + \frac{625 \varepsilon^5}{65 \cdot 535 \cdot 999} - \\ & - \frac{11 \cdot 737 \varepsilon^6}{8 \cdot 388 \cdot 607 \cdot 998} + \frac{157 \cdot 375 \varepsilon^7}{1 \cdot 677 \cdot 721 \cdot 599 \cdot 999}; \end{aligned}$$

тут $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафіксуємо матрицю

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \cos 5t & \cos 7t & \dots & \cos 15t & \cos 17t & \cos 19t & \cos 21t \end{bmatrix}.$$

Друге наближення $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ к 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.53) визначає функція

$$\begin{aligned} y_2(t, \varepsilon) = & \cos 3t + \frac{1}{32} \varepsilon \left(-2 \cos t + \cos 5t \right) + \frac{1}{2 \cdot 560} \varepsilon^2 \left(10 \cos t + \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 474 \cdot 560} \varepsilon^3 \left(-180 \cos t + 63 \cos 5t + 4 \cos 9t \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{165 \ 150 \ 720} \varepsilon^4 \left(-2 \ 520 \cos t - 630 \cos 5t + 119 \cos 7t + 2 \cos 11t \right) + \\
& + \frac{1}{26 \ 424 \ 115 \ 200} \varepsilon^5 \left(64 \ 890 \cos t + 3 \ 745 \cos 5t - 1 \ 764 \cos 7t + \right. \\
& + 150 \cos 9t + \cos 13t \left. \right) + \frac{1}{114 \ 152 \ 177 \ 664 \ 000} \varepsilon^6 \left(-11 \ 226 \ 600 \cos t + \right. \\
& + 867 \ 510 \cos 5t + 286 \ 686 \cos 7t - \\
& - 61 \ 320 \cos 9t + 3 \ 105 \cos 11t + 10 \cos 15t \left. \right) + \varepsilon^{11} \left(\frac{\cos t}{217 \ 250 \ 831 \ 925} + \right. \\
& + \frac{\cos 5t}{7 \ 926 \ 267 \ 486 \ 314} - \frac{\cos 7t}{27 \ 475 \ 728 \ 297 \ 925} + \frac{\cos 9t}{906 \ 670 \ 078 \ 875 \ 865} \left. \right) + \\
& + \varepsilon^{12} \left(-\frac{\cos t}{3 \ 479 \ 074 \ 425 \ 161} + \frac{\cos 5t}{67 \ 993 \ 663 \ 370 \ 104} + \right. \\
& + \frac{\cos 7t}{462 \ 632 \ 235 \ 720 \ 062} \left. \right) + \varepsilon^{13} \left(-\frac{\cos t}{41 \ 231 \ 698 \ 007 \ 087} - \right. \\
& - \frac{\cos 5t}{275 \ 876 \ 679 \ 795 \ 012} \left. \right) + \varepsilon^{14} \frac{\cos t}{147 \ 622 \ 725 \ 974 \ 376}.
\end{aligned}$$

При цьому $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
h_2(\varepsilon) = & 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13 \ \varepsilon^4}{327 \ 680} + \frac{5 \ \varepsilon^5}{524 \ 288} - \frac{31 \ \varepsilon^6}{23 \ 869 \ 675} + \frac{\varepsilon^7}{22 \ 039 \ 036} \\
& - \frac{\varepsilon^{12}}{422 \ 910 \ 132 \ 492} + \frac{\varepsilon^{13}}{7 \ 333 \ 380 \ 532 \ 140} + \frac{\varepsilon^{14}}{71 \ 741 \ 175 \ 855 \ 054} - \\
& - \frac{\varepsilon^{15}}{295 \ 245 \ 451 \ 948 \ 752}.
\end{aligned}$$

Точність другого наближення $y_2(t, \varepsilon)$ до періодичного розв'язку рівняння Матьє $se_3(t, h(\varepsilon))$ і його власної функції характеризують нев'язки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,35 \ 563 \cdot 10^{-14}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 1,00 \ 277 \cdot 10^{-9},$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 1,21 \ 392 \cdot 10^{-7}.$$

Слід відмітити актуальність вивчення різних крайових задач для рівняння Матьє, свідченням чого є публікації [164, 192, 216, 223], в томо числі й наведені в цих статтях огляди літератури.

3.3. Автономні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономної крайової задачі [16, 302, 151, 302]

$$z' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (3.59)$$

Розв'язки крайової задачі (3.59) шукаємо в околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b^*], \quad b(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad b^* := b(0)$$

нетерової ($m \neq n$) породжуючої задачі

$$z'_0 = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m$$

та його похідної. Тут $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$, $Z(z, z', \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за невідомою z в малому околі розв'язку $z_0(t)$ породжуючої задачі та його похідної, а також неперервно-диференційовна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $(\ell z)(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали: $\ell z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомими z, z' та по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. В критичному випадку $(P_{Q^*}) \neq 0$, за умови

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell(Kf)(\cdot) \right\} = 0$$

породжуюча задача має сім'ю розв'язків [16, 302, 302]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – стала матриця, $\text{rank } Q := n_1$, $r := n - n_1$, $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – ортопроектор: $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$, $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини породжуючої системи, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, матриця P_{Q_r} утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$,

$$G[f; \alpha](t) := X(t)Q^+ [\alpha - \ell K[f](\cdot)] + K[f](t)$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої задачі, Q^+ — псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу, $K[f](t)$ — оператор Гріна задачі Коші породжуючої системи.

В критичному випадку правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$ невідомий [16, 302, 151, 302]. Заміна

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) := b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta^*$$

приводить крайову задачу (3.59) до вигляду

$$z' = Az + f + \varepsilon \tilde{Z}(z, z', \beta, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon). \quad (3.60)$$

Тут

$$\tilde{Z}(z, z', \beta(\varepsilon), \varepsilon) := \beta(\varepsilon)A(z + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z\left(z, \frac{z'}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))}, \beta(\varepsilon), \varepsilon\right).$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \varphi_0(c^*) &:= \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0), \\ f_0(s, c_0^*) &:= \beta^*[Az_0(s, c_r^*) + f] + Z(z_0(s, c_r^*), z'_0(s, c_r^*), 0). \end{aligned}$$

Таким чином доведено теорему [302].

Лема 3.3.1. *Якщо крайова задача (3.59) в критичному ($P_{Q^*} \neq 0$) випадку має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, при $\varepsilon = 0$ який перетворюється на породжуючий $z_0(t, c_r^*)$, $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, то вектор $c_0^* := \text{col}(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ задовольняє рівнянню*

$$F(c_0^*) := P_{Q^*} \left\{ \varphi(c_0^*) - \ell K[f_0(s, c_0^*)](\cdot) \right\} = 0. \quad (3.61)$$

Для побудови розв'язків крайової задачі (3.59) для кожного простого кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (3.61) нами отримані достатні умови існування розв'язків автономної крайової задачі, а також ітераційна схема, побудована з використанням техніки найменших квадратів [315].

3.3.1. Періодична задача для рівняння типу Льєнара, не розв'язаного відносно похідної. Досліджуємо задачу про знаходження умов існування і побудову $T_1(\varepsilon)$ — періодичних розв'язків [225, 179]

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad T_1(0) = 2\pi, \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння типу Льєнара, не розв'язаного відносно похідної [199, с. 174]

$$\frac{d^2 y(t, \varepsilon)}{dt^2} + y(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), \varepsilon). \quad (3.62)$$

Періодичні розв'язки рівняння типу Льєнара (3.62) шукаємо в малому околі нетривіального розв'язку породжуючого рівняння

$$y_0''(t) + y_0(t) = 0.$$

Тут $Y(y, y', y'', \varepsilon)$ — нелінійна скалярна функція, неперервно-диференційовна за невідомою y та її похідними y' і y'' в малому околі розв'язку породжуючої задачі та його похідних y_0' і y_0'' , а також неперервно-диференційовна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлена задача є продовженням дослідження автономних крайових задач [179, 225, 284, 288, 310, 315, ?], а також крайових задач, не розв'язаних відносно похідної [228, 318]. Істотною відмінністю автономної періодичної задачі для рівняння (3.62) від аналогічної неавтономної періодичної задачі є той факт, що довільний періодичний розв'язок $z(t, \varepsilon)$ рівняння (3.62) існує поряд із серією періодичних розв'язків $z(t + h, \varepsilon)$, що відрізняються від вихідного зсувом за незалежною змінною. Цей факт дозволяє зафіксувати початок відліку незалежної змінної таким чином, щоб розв'язок породжуючої задачі став однопараметричним, наприклад $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$, при цьому періодичний розв'язок рівняння (3.62), який відповідає синусам в породжуючому розв'язку може бути отриманий простим зміщенням початкового моменту часу [225, с. 148].

Відповідно до традиційної класифікації періодичних крайових задач поставлена задача є критичною [21, 193, 225]. Для довільної функції $f(t)$ задача про знаходження 2π – періодичних розв'язків рівняння

$$\frac{d^2 y_0(t, c)}{dt^2} + y_0(t, c) = f(t), \quad f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi] \quad (3.63)$$

розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{2\pi} H(s) f(s) ds = 0, \quad H(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix};$$

в цьому випадку при відповідній фіксації початку відліку незалежної змінної загальний розв'язок 2π – періодичної задачі для рівняння (3.63)

має вигляд

$$y_0(t, c) = c \cdot \cos t + g[f(s)](t), \quad g[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s)f(s) ds, \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

Здійснюючи в рівнянні (3.62) заміну незалежної змінної [225]

$$t = \tau \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right), \quad T_1(\varepsilon) = 2\pi \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta_0,$$

приходимо до задачі про знаходження 2π – періодичних розв’язків

$$y(\tau, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння

$$\frac{d^2 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \quad (3.64)$$

За умови $1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \neq 0$ функція

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := & -(2 + \varepsilon \beta(\varepsilon))\beta(\varepsilon) y(\tau, \varepsilon) + \\ & + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon))^2 Y \left(y(\tau, \varepsilon), \frac{y'(\tau, \varepsilon)}{(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon))}, \frac{y''(\tau, \varepsilon)}{(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon))^2}, \varepsilon \right) \end{aligned}$$

неперервно-диференційовна за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідними $y'(\tau, \varepsilon)$ і $y''(\tau, \varepsilon)$ в малому околі розв’язку породжуючої задачі та його похідних $y'_0(\tau, c_0)$ і $y''_0(\tau, c_0)$, неперервно-диференційовна за функцією $\beta(\varepsilon)$ в малому околі точки β_0 , а також неперервно-диференційовна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$.

Необхідна і достатня умова існування 2π – періодичних розв’язків рівняння (3.64):

$$\int_0^{2\pi} H(s) \mathcal{Y}(y(s, \varepsilon), y'(s, \varepsilon), y''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) ds = 0 \quad (3.65)$$

приводить до рівняння для породжуючих амплітуд

$$F(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H(s) \mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y'_0(s, c_0), y''_0(s, c_0), \beta_0, 0) ds = 0. \quad (3.66)$$

Лема 3.3.2. Якщо періодична задача для рівняння типу Льєнара (3.62)

має розв'язок

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad T_1(0) = 2\pi, \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad 1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0,$$

що при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$, то вектор $\check{c}_0$ задовольняє рівнянню

$$F(\check{c}_0) = 0, \quad \check{c}_0 = \text{col} \begin{pmatrix} c_0, & \beta_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд (3.66) має дійсні корені. Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ рівняння (3.66), приходимо до задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння типу Льєнара (3.62) $y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0) = c_0 \cdot \cos \tau$. Позначимо (2×2) -вимірну матрицю

$$B_0 = \left. \frac{\partial F(\check{c})}{\partial \check{c}} \right|_{\substack{c = c_0, \\ \beta = \beta_0}}.$$

У випадку простих ($\det B_0 \neq 0$) коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66) рівняння (3.62) має єдиний періодичний розв'язок [179, 225, 288], який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$. Даний критичний випадок називається критичним випадком першого порядку [179, 225, 288]. Менш вивченим є випадок [23, 289] кратних коренів ($\det B_0 = 0$) рівняння (3.66); при цьому згідно традиційної класифікації періодичних крайових задач поставлена задача для рівняння (3.62) не може бути віднесена до критичного випадку другого чи більш високого порядку, а також до особливого критичного випадку, оскільки рівняння для породжуючих амплітуд не перетворюється на тотожність [36, 277].

За наявності кратних коренів рівняння для породжуючих амплітуд, залишаючи тільки один лінійно-незалежний рядок рівняння (3.66), отримуємо еквівалентну умову розв'язності періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62)

$$F_\rho(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y'_0(s, c_0), y''_0(s, c_0), \beta_0, 0) ds = 0; \quad (3.67)$$

тут $H_\rho(t) = \cos t$, або $H_\rho(t) = \sin t$, у залежності від нелінійності

$Y(y, y', y'', \varepsilon)$ рівняння (3.62). Предметом дослідження є випадок кратних ($\det B_0 = 0$) коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66) за умови, що матриця B_0 має ненульові елементи: $B_0 \neq 0$; назовемо цей випадок частинним критичним випадком [23, 289, 319].

Приклад 3.3.1. *Частинний критичний випадок має місце в задачі про знаходження періодичного розв'язку*

$$z(t, \varepsilon) := (z^{(a)}(t, \varepsilon) \ z^{(b)}(t, \varepsilon))^*, \quad z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння Лотки-Вольтерри

$$z'(t, \varepsilon) = Az(t, \varepsilon) + Z(z(t, \varepsilon)), \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

де

$$Z(z(t, \varepsilon)) := \begin{pmatrix} -z^{(a)}(t, \varepsilon)z^{(b)}(t, \varepsilon) \\ z^{(a)}(t, \varepsilon)z^{(b)}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Дійсно, в околі положення рівноваги $z^{(a)}(t, \varepsilon) \equiv 1$, $z^{(b)}(t, \varepsilon) \equiv 1$ рівняння (3.68) за допомогою заміни

$$z^{(a)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon u(t, \varepsilon), \quad z^{(b)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon y(t, \varepsilon)$$

приводиться до вигляду

$$(1 + \varepsilon y(t, \varepsilon))y''(t, \varepsilon) = \varepsilon(y'(t, \varepsilon))^2 - y(t, \varepsilon)(1 + \varepsilon y(t, \varepsilon))(1 + \varepsilon y(t, \varepsilon) + \varepsilon y'(t, \varepsilon)). \quad (3.69)$$

В свою чергу, рівняння (3.69) приводиться до вигляду (3.62) за допомогою функції

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := & (y'(\tau, \varepsilon))^2 - \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 y^3(\tau, \varepsilon) - \\ & -(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))y^2(\tau, \varepsilon)(2 + 2\varepsilon\beta(\varepsilon) - y(\tau, \varepsilon)(\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) + \\ & + \varepsilon y'(\tau, \varepsilon)) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))y'(\tau, \varepsilon) + y''(\tau, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Рівняння для породжуючих амплітуд (3.67) у випадку задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.69) приймає вигляд

$$F_\rho(c_0, \beta_0) = -2\pi c_0 \beta_0 = 0.$$

Корінь $c_0 = 0$ відповідає тривіальному породжуючому розв'язку $y_0(\tau, c_0) \equiv 0$, в малому околі якого розташовано лише положення рівнова-

ги рівняння Лотки-Вольтерри (3.69). Серія коренів $\beta_0 = 0$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$ визначає вироджену ($\det B_0 = 0$) матрицю B_0 . Покладемо $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0, 1$; матриця B_0 при цьому має ненульові елементи

$$B_0 = -\frac{\pi}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0;$$

Таким чином, задача про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.68) представляє частинний критичний випадок. Відмітимо, що для кореня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ має місце нерівність $1 + \varepsilon\beta_0 \equiv 1 \neq 0$.

Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ рівняння (3.67), приходимо до задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння типу Ляна-ра (3.62) $y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0) = c_0 \cdot \cos \tau$. Для знаходження збурення $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi]$, $x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ отримуємо задачу про знаходження періодичних розв'язків рівняння

$$\frac{d^2 x(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \quad (3.70)$$

Розв'язок

$$x(\tau, \varepsilon) = \nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma(\varepsilon)$$

періодичної задачі для рівняння (3.82) залежить від вибору кореня $\check{c}_0$; тут

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) := \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'(s, \varepsilon), y''_0(s, c_0) + x''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau).$$

Припустимо, що породжуючий розв'язок $y_0(\tau, c_0)$ не є шуканим періодичним розв'язком рівняння (3.62). Позначимо похідні

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) &:= \\ &= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y} \bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y'_0(\tau, c_0), \\ y''(\tau, \varepsilon) = y''_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2\left(y_0(\tau, c_0), \beta_0\right) &:= \\
&= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y'} \bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y'_0(\tau, c_0), \\ y''(\tau, \varepsilon) = y''_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0,}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3\left(y_0(\tau, c_0), \beta_0\right) &:= \\
&= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y''} \bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y'_0(\tau, c_0), \\ y''(\tau, \varepsilon) = y''_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0,}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\beta\left(y_0(\tau, c_0), \beta_0\right) &:= \\
&= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta} \bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y'_0(\tau, c_0), \\ y''(\tau, \varepsilon) = y''_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0,}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\varepsilon\left(y_0(\tau, c_0), \beta_0\right) &:= \\
&= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y'_0(\tau, c_0), \\ y''(\tau, \varepsilon) = y''_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0.}}
\end{aligned}$$

Використовуючи непервну диференційовність за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідним $y'(\tau, \varepsilon)$ і $y''(\tau, \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі і його похідних $y'_0(\tau, c_0)$ і $y''_0(\tau, c_0)$, а також непервну диференційовність по $\beta(\varepsilon)$ в околі точки β_0 і по ε в малому додатньому околі нуля, розвинемо цю функцію в околі точок $y_0(\tau, c_0)$, $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, β_0 і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) = \\ & = \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x(\tau, \varepsilon) + \\ & + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x'(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x''(\tau, \varepsilon) + \\ & + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\gamma(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ & + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Тут $\mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ — залишок останнього розвинення, більш високого порядку малості по $x(\tau, \varepsilon)$, $x'(\tau, \varepsilon)$, $x''(\tau, \varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ і ε в околі точок $y_0(\tau, c_0)$, $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, β_0 і $\varepsilon = 0$, ніж попередні доданки. Залишаючи тільки один лінійно-незалежний рядок в умові (3.65) розв'язності задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.82), з урахуванням рівності (3.67), отримуємо еквівалентну умову розв'язності вихідної задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) [\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)] + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\gamma(\varepsilon) + \right. \\ & + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) [\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)]'_\tau + \\ & + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) [\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)]''_{\tau^2} + \\ & \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau = 0, \end{aligned}$$

рівнозначну рівнянню

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cdot \begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix} = - \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)[x^{(1)}(\tau, \varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)[x^{(1)}(\tau, \varepsilon)]''_{\tau^2} + \end{aligned} \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$+\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \Big\} d\tau,$$

де

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) := & \left\{ \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left[\mathcal{A}_1(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cos \tau - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{A}_2(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \sin \tau - \mathcal{A}_3(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cos \tau \right] d\tau - \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \mathcal{A}_\beta(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) d\tau \right\} \end{aligned}$$

— стала (1×2) — матриця. За умови

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \neq 0$$

рівняння (3.71) має принаймі один розв'язок

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix} = & -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]'_{\tau} + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]''_{\tau^2} + \\ & \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Дійсно, позначимо

$$P_{\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0))$$

і

$$P_{\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot, c_0), \beta_0))$$

— отопроектори матриць $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)$ і $\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)$. За умови $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \neq 0$ має місце рівність $\text{rank } \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) = 1$, отже $P_{\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)} = 0$, при цьому рівняння (3.71) розв'язне. В силу рівності $\text{rank } P_{\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)} = 1$ рівняння (3.71) розв'язне не однозначно. Таким чином, для довільного із кратних коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66), за умови $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \neq 0$, принаймі один періодичний розв'язок рівняння (3.62) визначає операторна система

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \quad x(\tau, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad (3.72)$$

$$\beta(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma(\varepsilon), \quad x^{(1)}(\tau, \varepsilon) :=$$

$$= \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'(s, \varepsilon), y''_0(s, c_0) + x''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau),$$

$$\begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix} = -\mathfrak{B}_0^+ \left(y_0(\cdot, c_0), \beta_0 \right) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \mathcal{A}_2 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]'_{\tau} + \mathcal{A}_3 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]''_{\tau^2} + \right. \\ \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau.$$

Для побудови розв'язків операторної системи (3.83) може бути використаний метод простих ітерацій [179, 225, 288].

Теорема 3.3.1. *За наявності кратних ($\det B_0 = 0$) коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66), за умови $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \neq 0$ задача про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_0)$, за умови $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ представлений операторною системою (3.83). Для побудови періодичних розв'язків рівняння (3.62) може бути використана ітераційна схема*

$$\begin{aligned} y_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon) \cos \tau + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_k(s, \varepsilon), y'_k(s, \varepsilon), y''_k(s, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right](\tau), \quad (3.73) \\ \begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix} &= -\mathfrak{B}_0^+ \left(y_0(\cdot, c_0), \beta_0 \right) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ &+ \mathcal{A}_2 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) \left[x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]'_{\tau} + \mathcal{A}_3 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) \left[x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]''_{\tau^2} + \\ &+ \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y'_k(\tau, \varepsilon), y''_k(s, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \left. \right\} d\tau, \\ \beta_{k+1}(\varepsilon) &= \beta_0 + \gamma_{k+1}(\varepsilon), \quad \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Приклад 3.3.2. *Досліджуємо задачу про побудову періодичного розв'язку*

$$y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння Лотки-Вольтерри в формі (3.69).

Вище було встановлено, що рівняння для породжуючих амплітуд (3.67) для рівняння Лотки-Вольтерри в формі (3.69) має корінь $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0, 1$. Матриця B_0 при цьому має ненульові елементи, отже згідно доведеної теореми задача про побудову періодичного розв'язку

рівняння Лотки-Вольтерри (3.68) в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ має принаймі один розв'язок. На першому кроці ітераційної схеми (3.84)

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y_0'(s, c_0), y_0''(s, c_0), \beta_0, 0) \right](\tau) = \\ &= \frac{\varepsilon}{600} \left[-\cos \tau + 2 \cos 2\tau + 2 \sin \tau - \sin 2\tau \right]. \end{aligned}$$

Далі обчислюємо похідні

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &= \frac{1}{10} (\sin \tau - 3 \cos \tau), \\ \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &= -\frac{1}{10} (2 \sin \tau + \cos \tau), \\ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &= -\frac{\cos \tau}{10}, \quad \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) = -\frac{\cos \tau}{5}, \\ \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &= \frac{1}{4000} (\sin \tau + \sin 3\tau - 3 \cos \tau - \cos 3\tau) \end{aligned}$$

і матрицю

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) = \frac{\pi}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, на першому кроці ітераційної схеми (3.84) знаходимо функції

$$\nu_1(\varepsilon) \approx 0, \quad \gamma_1(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{1200} + \frac{\varepsilon^2}{7200} - \frac{7\varepsilon^3}{988\,000} + \frac{\varepsilon^4}{2\,400\,000} + \dots,$$

які визначають перші наближення до розв'язку рівняння (3.69)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

а перші наближення до періоду $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$, $\beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon)$ цього розв'язку, і, в свою чергу, перше наближення до розв'язку рівняння (3.68):

$$z_1^{(a)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon u_1(t, \varepsilon), \quad z_1^{(b)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon y_1(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon) := \frac{y_1'(t, \varepsilon)}{1 + \varepsilon y_1(t, \varepsilon)}.$$

Відмітимо, що для першого наближення до розв'язку рівняння (3.68) має місце нерівність $1 + \varepsilon\beta_1 \geq 0$. Для оцінки точності знайдених наближень до

періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| \begin{pmatrix} \delta_k^{(a)}(\varepsilon) \\ \delta_k^{(b)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \right\|_{C[0;2\pi]}$$

нульового і першого наближень до розв'язку рівняння (3.68); тут

$$\delta_k^{(a)}(\varepsilon) := (z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon))'' - (1 + \varepsilon \beta_k(\varepsilon)) z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon) (1 - z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon)),$$

$$\delta_k^{(b)}(\varepsilon) := (z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon))'' + (1 + \varepsilon \beta_k(\varepsilon)) z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon) (1 - z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon)), \quad k = 0, 1.$$

Поклавши $\varepsilon = 0, 1$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,000\,111\,335, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 2,13\,834 \cdot 10^{-6}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ нев'язки мають вигляд

$$\Delta_0(0, 01) \approx 1,11\,756 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 2,12\,820 \cdot 10^{-9}.$$

Метод простих ітерацій відрізняють простота і чисельна стійкість, проте побудова наближених розв'язків із застосуванням методу простих ітерацій пов'язана з швидко зростаючою від ітерації до ітерації складністю обчислень. Для побудови розв'язків операторної системи (3.83) використаємо також метод найменших квадратів [40, 168, 315, 319].

Для використання методу найменших квадратів введемо систему лінійно-незалежних двічі неперервно-диференційовних 2π -періодичних скалярних функцій $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, ..., $\varphi_\mu(\tau)$, Перше наближення до періодичного розв'язку рівняння (3.64)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon)$$

визначимо, як 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \Big\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1'(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \Big\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Перше наближення до періодичного розв'язку рівняння (3.74) шукаємо

у вигляді

$$x_1(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) := \varphi_1(\tau) c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}.$$

Вимагатимемо

$$\begin{aligned} \Theta(c_1(\varepsilon)) := & \left\| \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \xi_1(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1'(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \xi_1''(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) - \\ & \left. - \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

при фіксованій матриці

$$\varphi_1(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_2(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_{\mu_1}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Позначимо $(1 \times \mu_1)$ - матрицю

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\tau, \varepsilon) := & \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi_1(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \varphi_1'(\tau, \varepsilon) + \\ & + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi_1''(\tau). \end{aligned}$$

Необхідна умова мінімізації функції $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) c_1(\varepsilon) = & \varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon) \left[\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] d\tau, \end{aligned}$$

однозначно розв'язного відносно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ за умови невинудженості $(\mu_1 \times \mu_1)$ - матриці Грама [168]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon) \mathcal{F}_1(\tau, \varepsilon) d\tau.$$

Таким чином, за умови $\det \left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) \right] \neq 0$ знаходимо вектор

$$\begin{aligned} c_1(\varepsilon) = & \varepsilon \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon) \left[\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] d\tau, \end{aligned}$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_1(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) = \varphi_1(\tau) c_1(\varepsilon)$$

до періодичного розв'язку рівняння (3.74). Перше наближення $\beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon)$ до функції $\beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$ визначимо із умови існування 2π -періодичного розв'язку $x_1(\tau, \varepsilon) := \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon)$ рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \Big\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_1(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_1(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_1(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) \Big\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

За умови

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \neq 0 \quad (3.76)$$

в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ і в околі точки β_0 рівняння

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cdot \begin{pmatrix} \nu_1(\varepsilon) & \gamma_1(\varepsilon) \end{pmatrix}^* = \\ = - \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \Big\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi'_1(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi''_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_1(\tau, \varepsilon), \beta_0) \Big\} d\tau \end{aligned}$$

має принаймі один розв'язок

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_1(\varepsilon) & \gamma_1(\varepsilon) \end{pmatrix}^* = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \times \\ \times \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \Big\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi'_1(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi''_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_1(\tau, \varepsilon), \beta_0) \Big\} d\tau. \end{aligned}$$

Функція $\beta_1(\varepsilon)$ визначає заміну незалежної змінної

$$t_1 = \tau \left(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \right),$$

що здійснює відображення

$$\tau \in [0, 2\pi] \rightarrow \left[0, 2\pi \left(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \right) \right] \ni t_1.$$

Таким чином, на першому кроці ітераційної процедури знайдено перше наближення

$$y_1(t, \varepsilon) : y_1(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2 \left[0, 2\pi \left(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \right) \right], \quad y_1(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62). Припустимо, що перше наближення $y_1(\tau, \varepsilon)$ належить області визначення функції $\mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ і не є шуканим розв'язком періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62). Друге наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62)

$$y_2(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_2(\tau, \varepsilon), \quad x_2(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi_2(\tau, \varepsilon) := \varphi_2(\tau) c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$$

шукаємо, як 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + y_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \Big\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_2(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_2(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_2(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''_1(\tau, \varepsilon), \beta_1, \varepsilon) \Big\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Позначимо $(1 \times \mu_2)$ -матриці

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\tau, \varepsilon) := \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi_2(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \varphi'_2(\tau, \varepsilon) + \\ + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi''_2(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = \left[\varphi_1(\tau) \quad \varphi_2(\tau) \quad \dots \quad \varphi_{\mu_2}(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Необхідна умова мінімізації нев'язки

$$\begin{aligned} \Theta(c_2(\varepsilon)) := & \left\| \xi_1''(\tau, \varepsilon) + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \xi_2(\tau, \varepsilon) - \right. \\ & - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_2'(\tau, \varepsilon) + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \xi_2''(\tau, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1(\tau, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1'(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1''(\tau, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \gamma_1(\varepsilon) - \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) - \\ & \left. - \varepsilon \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + x_1'(\tau, \varepsilon), y_0''(\tau, c_0) + x_1''(\tau, \varepsilon), \beta_1, \varepsilon) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2. \end{aligned}$$

в розв'язку задачі другого наближення до періодичної задачі для рівняння типу Льєнара приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) c_2(\varepsilon) = & \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon) \left\{ \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ & + \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1'(\tau, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \gamma_1(\varepsilon) + \\ & + \varepsilon \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + x_1'(\tau, \varepsilon), y_0''(\tau, c_0) + x_1''(\tau, \varepsilon), \beta_1, \varepsilon) - \\ & \left. + \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) - \xi_1''(\tau, \varepsilon) - \xi_1(\tau, \varepsilon) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

однозначно розв'язного відносно вектора $c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ за умови невинудженості $(\mu_2 \times \mu_2)$ – матриці Грама [168]

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon) \mathcal{F}_2(\tau, \varepsilon) d\tau.$$

Таким чином, за умови

$$\det \left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \right] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_2(\varepsilon) = - \left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon) \left\{ \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_1(\tau, \varepsilon) + \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \gamma_1(\varepsilon) + \\
& + \varepsilon \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''_1(\tau, \varepsilon), \beta_1, \varepsilon) + \\
& \left. + \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) - \xi''_1(\tau, \varepsilon) - \xi_1(\tau, \varepsilon) \right\} d\tau,
\end{aligned}$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) 2π -періодичне наближення до розв'язку рівняння (3.77)

$$y_2(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon), \quad \xi_2(\tau, \varepsilon) := \varphi_2(\tau) c_2(\varepsilon).$$

Друге наближення $\beta_2(\varepsilon) := \beta_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$ до функції $\beta(\varepsilon)$ визначимо із умови існування 2π -періодичного розв'язку

$$x_2(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \nu_2(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon)$$

рівняння

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x_2(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x_2(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\
& + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_2(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_2(\tau, \varepsilon) + \\
& + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_2(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \times \\
& \times (\gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon)) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\
& \left. + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''_1(\tau, \varepsilon), \beta_1, \varepsilon) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

За умови (3.76) в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ і в околі точки β_0 рівняння

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cdot \left(\nu_2(\varepsilon) \gamma_2(\varepsilon) \right)^* = - \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \times \\
& \times \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon)) \right. \\
& \left. + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\xi'_1(\tau, \varepsilon) + \xi'_2(\tau, \varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) \sin \tau) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(\xi_1''(\tau, \varepsilon) + \xi_2''(\tau, \varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) \cos \tau) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\gamma_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + \xi_1'(\tau, \varepsilon), \beta_0)\} d\tau$$

має принаймі один розв'язок

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \nu_2(\varepsilon) \\ \gamma_2(\varepsilon) \end{array} \right)^* &= -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \times \\ &\times \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(\nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon)) \right. \\ &+ \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(\xi_1'(\tau, \varepsilon) + \xi_2'(\tau, \varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) \sin \tau) + \\ &+ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(\xi_1''(\tau, \varepsilon) + \xi_2''(\tau, \varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) \cos \tau) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ &+ \left. \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\gamma_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + \xi_1'(\tau, \varepsilon), \beta_0)\right\} d\tau. \end{aligned}$$

Функція $\beta_2(\varepsilon)$ визначає заміну незалежної змінної $t_2 = \tau(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon))$, яка здійснює відображення

$$\tau \in [0, 2\pi] \rightarrow \left[0, 2\pi(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon))\right] \ni t_2.$$

Таким чином, на другому кроці ітераційної процедури знайдено друге наближення

$$y_2(t, \varepsilon) : y_2(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2 \left[0, 2\pi(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon))\right], y_2(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Лъєнара (3.62). Продовжуючи міркування, припустимо, що знайдене наближення

$$\begin{aligned} y_k(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), \quad x_k(\tau, \varepsilon) \approx \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \dots + \nu_k(\varepsilon) \cos \tau + \\ &\xi_1(\tau, \varepsilon) + \dots + \xi_k(\tau, \varepsilon), \quad \xi_k(\tau, \varepsilon) := \varphi_k(\tau)c_k(\varepsilon), \\ c_k(\varepsilon) &\in \mathbb{R}^{\mu_k}, \quad \varphi_k(\tau) := \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_{\mu_k}(\tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Лъєнара (3.62) і наближення $\beta_k(\varepsilon)$ до функції $\beta(\varepsilon)$. Припустимо, що знайдене наближення $y_k(\tau, \varepsilon)$ належить області визначення функції

$$\mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$$

і не є шуканим розв'язком періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62). Наступне найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62)

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau, \varepsilon) \approx \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \dots + \nu_k(\varepsilon) \cos \tau + \\ + \xi_1(\tau, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau) c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+1}}$$

шукаємо, як 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2 y_{k+1}(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_k(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \\ \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y'_k(\tau, \varepsilon), y''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) \right\}. \quad (3.79)$$

Позначимо $(1 \times \mu_{k+1})$ - матриці

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau, \varepsilon) := \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi_{k+1}(\tau, \varepsilon) - \\ - \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \varphi'_{k+1}(\tau, \varepsilon) + \left[1 - \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \right] \varphi''_{k+1}(\tau), \\ \varphi_{k+1}(\tau) := \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_{\mu_1}(\tau) \end{bmatrix}.$$

За умови

$$\det \left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon)) \right] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau, \varepsilon) \cdot \mathcal{F}_{k+1}(\tau, \varepsilon) d\tau$$

знаходимо вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = - \left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon) \left\{ \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ + \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_k(\tau, \varepsilon) + \\ \left. + \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \right.$$

$$+ \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) - \\ + \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) - x''_k(\tau, \varepsilon) - x_k(\tau, \varepsilon) \} d\tau,$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення $y_{k+1}(\tau, \varepsilon)$ до розв'язку періодичної задачі для рівняння (3.79). Наступне наближення

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) := \beta_k(\varepsilon) + \gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$$

до функції $\beta(\varepsilon)$ визначимо із умови існування 2π -періодичного розв'язку $x_{k+1}(\tau, \varepsilon)$ рівняння

$$\frac{d^2 x_{k+1}(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x'_k(\tau, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x''_k(\tau, \varepsilon) \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + + \\ + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \\ \left. + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + x'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + x''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) \right\}. \quad (3.80)$$

За умови (3.76) в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ і в околі точки β_0 рівняння

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cdot \begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) & \gamma_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix}^* = - \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \times \\ \times \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \right. \\ + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x'_k(\tau, \varepsilon) + \xi'_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x''_k(\tau, \varepsilon) + \xi''_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \\ \left. + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y'_k(\tau, \varepsilon), y''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) \right\} d\tau$$

має принаймі один розв'язок

$$\begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) & \gamma_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix}^* = -\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \mathcal{A}_1 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) (x_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \right. \\
& + \mathcal{A}_2 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) (x'_k(\tau, \varepsilon) + \xi'_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \\
& + \mathcal{A}_3 \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) (x''_k(\tau, \varepsilon) + \xi''_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) + \\
& + \mathcal{A}_\beta \left(y_0(\tau, c_0), \beta_0 \right) \left(\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon) \right) + \\
& \left. + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y'_k(\tau, \varepsilon), y''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) d\tau. \right.
\end{aligned}$$

Функція $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ визначає заміну незалежної змінної

$$t_{k+1} = \tau \left(1 + \varepsilon \beta_{k+1}(\varepsilon) \right),$$

яка здійснює відображення

$$\tau \in [0, 2\pi] \rightarrow \left[0, 2\pi \left(1 + \varepsilon \beta_{k+1}(\varepsilon) \right) \right] \ni t_{k+1}.$$

Таким чином, знайдене наступне наближення

$$y_{k+1}(t, \varepsilon) : y_{k+1}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2 \left[0, 2\pi \left(1 + \varepsilon \beta_{k+1}(\varepsilon) \right) \right], y_{k+1}(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (3.62). Продовжуючи міркування, приходимо до наступного твердження.

Наслідок 3.3.1. *За наявності кратних ($\det B_0 = 0$) коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66), за умови (3.76) задача про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_0)$, що за умови $1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \neq 0$ може бути представлений операторною системою (3.83). Для побудови періодичних розв'язків рівняння (3.62) у випадку*

$$\det \left[\Gamma \left(\mathcal{F}_k(\cdot, \varepsilon) \right) \right] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_*] \in [0, \varepsilon_0]$$

може бути використана ітераційна схема

$$\begin{aligned}
y_1(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), \quad x_1(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon), \\
\xi_1(\tau, \varepsilon) &= \varphi_1(\tau) c_1(\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon), \\
c_1(\varepsilon) &= \varepsilon \Gamma \left(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon) \right)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon) \left[\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \Big] d\tau, \\
& \left(\nu_1(\varepsilon) \ \gamma_1(\varepsilon) \right)^* = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \times \\
& \times \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1(\tau, \varepsilon) + \right. \\
& + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1'(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \xi_1''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\
& \left. + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + \xi_1'(\tau, \varepsilon), \beta_0) \right\} d\tau, \dots, \\
& y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \ \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_{k+1}(\varepsilon), \quad (3.81) \\
& x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k+1} \nu_j(\varepsilon) \cos \tau + \sum_{j=1}^{k+1} \xi_j(\tau, \varepsilon), \ \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau) c_{k+1}(\varepsilon), \\
& c_{k+1}(\varepsilon) = - \left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon)) \right]^{-1} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon) \left\{ \varepsilon \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \right. \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k'(\tau, \varepsilon) + \\
& + \varepsilon^2 \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \varepsilon \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k''(\tau, \varepsilon) + \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \\
& + \mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + x_k'(\tau, \varepsilon), y_0''(\tau, c_0) + x_k''(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) - \\
& \left. - x_k''(\tau, \varepsilon) - x_k(\tau, \varepsilon) \right\} d\tau, \left(\nu_{k+1}(\varepsilon) \ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \right)^* = -\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \times \\
& \times \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \right. \\
& + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x_k'(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}'(\tau, \varepsilon)) + \\
& + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) (x_k''(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}''(\tau, \varepsilon)) + \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \times \\
& \times (\gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon)) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y_k'(\tau, \varepsilon), y_k''(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) d\tau, \dots, \ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути використана ітерацій-

на схема (3.81), можна оцінити, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [193], так і безпосередньо із умови стискання оператора, який визначається останньою системою аналогічно [284].

Приклад 3.3.3. Досліджуємо задачу про побудову періодичного розв'язку

$$y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння Лотки-Вольтерри (3.68).

Вище було встановлено, що рівняння Лотки-Вольтерри (3.68) в малому околі положення рівноваги $u = 1$, $v = 1$ приводиться до вигляду (3.69), при цьому рівняння для породжуючих амплітуд (3.67) має серію коренів $\beta_0 = 0$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$, яка визначає вироджену ($\det B_0 = 0$) матрицю B_0 . Покладемо $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0, 1$. Матриця B_0 при цьому має ненульові елементи, таким чином, задача про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.68) представляє частинний критичний випадок, отже згідно доведеної теореми задача про побудову періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри (3.68) в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ має принаймі один розв'язок. Для першого кроку ітераційної схеми (3.81) покладемо

$$\varphi_1(\tau) = \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \cos 3\tau & \cos 4\tau & \cos 5\tau & \cos 6\tau \\ \sin \tau & \sin 2\tau & \sin 3\tau & \sin 4\tau & \sin 5\tau & \sin 6\tau \end{bmatrix}.$$

Матриця Грама, яка відповідає породжуючому розв'язку $y_0(\tau, c_0)$

$$\begin{aligned} \det \left[\Gamma \left(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon) \right) \right] &\approx 8\,362\,327\,021\,977\,600\,000\,000\,\pi^{10} - \\ &- 351\,210\,150\,045\,941\,760\,000\,\pi^{10}\,\varepsilon^2 + \\ &+ 7\,817\,305\,854\,954\,553\,344\,\pi^{10}\,\varepsilon^4 + \dots \neq 0 \end{aligned}$$

невироджена, при цьому $\xi_1(\tau, \varepsilon) \approx \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon)$, де

$$c_1(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{300} - \frac{61\varepsilon^3}{1728000} - \frac{356143\varepsilon^5}{1244160000000} - \frac{127690979\varepsilon^7}{44789760000000000} \\ -\frac{\varepsilon^2}{48000} + \frac{22147\varepsilon^4}{6912000000} + \frac{5083973\varepsilon^6}{248832000000000} + \frac{15918508987\varepsilon^8}{35831808000000000000} \\ -\frac{14400000}{6912000000} - \frac{1036800000000}{8709120000000000} - \frac{17418240000000000}{20483850240000000000000} \\ \frac{347\varepsilon^4}{6912000000} + \frac{17976863\varepsilon^6}{8709120000000000} + \frac{8608838448359\varepsilon^8}{20483850240000000000000} \\ -\frac{4838400000000}{17669\varepsilon^5} - \frac{21337344000000000000}{37705522657\varepsilon^7} \\ -\frac{\varepsilon}{600} + \frac{4320000}{221\varepsilon^3} - \frac{541381\varepsilon^5}{1244160000000} - \frac{56045599\varepsilon^7}{223948800000000000} \\ -\frac{\varepsilon^2}{12000} - \frac{10547\varepsilon^4}{6912000000} + \frac{27161\varepsilon^6}{1555200000000} + \frac{42620255851\varepsilon^8}{250822656000000000000} \\ \frac{360000}{\varepsilon^3} + \frac{129600000000}{14989\varepsilon^5} - \frac{870912000000000}{1905251\varepsilon^7} \\ -\frac{161\varepsilon^4}{1382400000} - \frac{2356021\varepsilon^6}{2177280000000000} - \frac{1734086406113\varepsilon^8}{20483850240000000000000} \\ \frac{27703\varepsilon^5}{4838400000000} + \frac{10464097717\varepsilon^7}{106686720000000000000} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, в малому околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$ і в околі точки β_0 знаходимо $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$ – періодичне перше наближення до розв'язку рівняння (3.69)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), \quad x_1(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon), \quad \xi_1(\tau, \varepsilon) = \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon),$$

яке визначає перше наближення до розв'язку рівняння (3.68); тут

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{1\,200} + \frac{\varepsilon^2}{7\,200} - \frac{7\varepsilon^3}{288\,000} + \frac{\varepsilon^4}{2\,400\,000} + \dots$$

Відмітимо, що на першому кроці ітераційної схеми (3.81) умова

$$1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon) > 1 \neq 0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_*] \in [0, \varepsilon_0]$$

виконана. Для оцінки точності знайденого першого наближення до періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри визначимо нев'язки до розв'язку рівняння (3.68):

$$\Delta_1(0, 1) \approx 8,02\,356 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 7,97\,290 \cdot 10^{-10}.$$

Таким чином, нев'язки першого наближення, знайденого на першому кроці ітераційної схеми (3.81) значно менше нев'язок першого наближення, знайденого за допомогою ітераційної схеми (3.84).

Фіксуємо один із розв'язків $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ рівняння (3.66), одержуємо задачу про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62)

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon)$$

в околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0) = c_0 \cdot \cos \tau$. Для знаходження збурення $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi]$, $x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ отримуємо задачу про знаходження періодичних розв'язків рівняння

$$x''(\tau, \varepsilon) + x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \quad (3.82)$$

Розв'язок

$$x(\tau, \varepsilon) = \nu \cdot \cos \tau + \xi(\tau, \varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta(\varepsilon)$$

періодичної задачі для рівняння (3.82) залежить від кореня $\check{c}_0$; тут

$$\xi(\tau, \varepsilon) := \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'(s, \varepsilon), y''_0(s, c_0) + x''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right](\tau).$$

Припустимо, що породжуючий розв'язок $y_0(\tau, c_0)$ не є шуканим періодичним розв'язком рівняння (3.62). Позначимо похідні

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &:= \mathcal{Y}'_y(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0), \\ \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &:= \mathcal{Y}'_{y'}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0), \\ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &:= \mathcal{Y}'_{y''}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0), \\ \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &:= \mathcal{Y}'_\beta(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0), \\ \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) &:= \mathcal{Y}'_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0). \end{aligned}$$

Використовуючи неперервну диференційовність за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідними $y'(\tau, \varepsilon)$ та $y''(\tau, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі та його похідних $y'_0(\tau, c_0)$ та $y''_0(\tau, c_0)$, а також неперервну диференційовність по $\beta(\varepsilon)$ в околі точки β_0 та по ε у малому околі нуля, знаходимо розвинення цієї функції в околі точок $y_0(\tau, c_0)$, $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, β_0 та $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) &= \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y'_0(\tau, c_0), y''_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\ &+ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x'(\tau, \varepsilon) + \\ &+ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)x''(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\zeta(\varepsilon) + \end{aligned}$$

$$+\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon).$$

Тут $\mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ — залишок останнього розвинення, більш високого порядку малості по $x(\tau, \varepsilon)$, $x'(\tau, \varepsilon)$, $x''(\tau, \varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ і ε в околі точок $y_0(\tau, c_0)$, $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, β_0 та $\varepsilon = 0$, ніж попередні доданки. Наслідуючи традиційній схемі дослідження автономних крайових задач [16, 225, 284, 288, 310], враховуючи рівність (3.66), отримуємо умову розв'язності вихідної задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62), еквівалентну умові (3.65):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right] + \right. \\ & + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \zeta(\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]'_{\tau} + \\ & + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[\nu \cdot \cos \tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]''_{\tau^2} + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\ & \left. + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau = 0, \end{aligned}$$

в свою чергу рівнозначну рівнянню

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cdot \begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} &= - \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]'_{\tau} + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) \left[x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right]''_{\tau^2} + \\ & \left. + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) &:= \left\{ \int_0^{2\pi} H(\tau) \left[\mathcal{A}_1(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cos \tau - \right. \right. \\ & - \mathcal{A}_2(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \sin \tau - \mathcal{A}_3(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \cos \tau \left. \right] d\tau; \\ & \left. \int_0^{2\pi} H(\tau) \mathcal{A}_\beta(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) d\tau \right\} \end{aligned}$$

— стала (2×2) – матриця. За наявності кратних коренів рівняння (3.66) має місце рівність $\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) = 0$, при цьому розв'язання останнього рівняння по аналогії з традиційною схемою [16, 225, 284, 288, 310] не можливе. Для побудови періодичних розв'язків рівняння типу Льєна-

ра (3.62) за наявності кратних коренів рівняння (3.66) позначимо похідні [55, 322].

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) := \\
& \mathcal{Y}'_y(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon), \\
& \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) := \\
& \mathcal{Y}'_{y'}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon), \\
& \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) := \\
& \mathcal{Y}'_{y''}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon), \\
& \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) := \\
& \mathcal{Y}'_\beta(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon), \\
& \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) := \\
& \mathcal{Y}'_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Використовуючи неперервну диференційовність за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідними $y'(\tau, \varepsilon)$ та $y''(\tau, \varepsilon)$ у малому околі функції $y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon)$ та її похідних $y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon)$ та $y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon)$, а також неперервну диференційовність за $\beta(\varepsilon)$ в околі точки β_0 та по ε , здійснюємо розвинення цієї функції в околі точок

$$y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon),$$

та β_0 :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \\
& + \xi'(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \cos \tau - \\
& - \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \sin \tau - \\
& - \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \cos \tau + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \zeta(\varepsilon) + \\
& + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned}$$

Тут $\mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ — залишок останнього розвинення, більш високого порядку малості по $x(\tau, \varepsilon)$, $x'(\tau, \varepsilon)$, $x''(\tau, \varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ та ε

в околі точок $y_0(\tau, c_0)$, $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, β_0 та $\varepsilon = 0$, аніж попередні доданки. Таким чином, отримуємо умову розв'язності вихідної задачі знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62), еквівалентну умові (3.65):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), \right. \\ & y''_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \cos \tau - \\ & - \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \sin \tau - \\ & - \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \nu(\varepsilon) \cos \tau + \\ & + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cdot \zeta(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) + \\ & \left. + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau = 0, \end{aligned}$$

в свою чергу, рівнозначну рівнянню

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \cdot \begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} = \\ & = - \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), \right. \\ & y''_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) + \\ & \left. + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) := \\ & = \left\{ \int_0^{2\pi} H(\tau) \left[\mathcal{A}_1(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cos \tau - \right. \right. \\ & - \mathcal{A}_2(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \sin \tau - \mathcal{A}_3(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) \cos \tau \left. \right] d\tau; \\ & \left. \int_0^{2\pi} H(\tau) \mathcal{A}_\beta(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0) d\tau \right\} \end{aligned}$$

— стала (2×2) – вимірна матриця. За умови

$$\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \neq 0, \quad \mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \in \mathbb{C}_{2 \times 2}[0, 2\pi]$$

єдиний періодичний розв'язок рівняння (3.62) визначає операторна система

$$\begin{aligned}
 y(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta(\varepsilon), \\
 \xi(\tau, \varepsilon) &:= \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'(s, \varepsilon); \right. \\
 &\quad \left. y''_0(s, c_0) + x''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau), \quad x(\tau, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cos \tau + \xi(\tau, \varepsilon), \\
 \begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} &= -\mathfrak{B}_0^{-1} \left(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0 \right) \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'(\tau, \varepsilon), \right. \\
 &\quad \left. y''_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0) + \xi(\tau, \varepsilon), \beta_0 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{R}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

Позначимо похідні

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) &:= \\
 \mathcal{Y}'_y(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon), \\
 \mathcal{A}_2 \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) &:= \\
 \mathcal{Y}'_{y'}(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon), \\
 \mathcal{A}_3 \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) &:= \\
 \mathcal{Y}'_{y''}(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon), \\
 \mathcal{A}_\beta \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) &:= \\
 \mathcal{Y}'_\beta(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon), \\
 \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) &:= \\
 \mathcal{Y}'_\varepsilon(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0) + \xi''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Для побудови розв'язків операторної системи (3.83) може бути використаний метод простих ітерацій [225, 288, 16, 322, 55].

Теорема 3.3.2. *При наявності кратних ($\det B_0 = 0$) коренів рівняння*

для породжуючих амплітуд (3.66), за умови

$$\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \neq 0,$$

$$\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \in \mathbb{C}_{2 \times 2}[0, 2\pi]$$

задача про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62) має єдиний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_0)$, що за умови $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ може бути представлено операторною системою (3.83). Для побудови періодичних розв'язків рівняння (3.62) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad (3.84)$$

$$\xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) := \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x_k(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'_k(s, \varepsilon); \right.$$

$$\left. y''_0(s, c_0) + x''_k(s, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau),$$

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon) \cos \tau + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon),$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix} = -\mathfrak{B}_0^{-1} \left(y_0(\cdot, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} H(\tau) \left\{ \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0) + \xi'_k(\tau, \varepsilon), \right.$$

$$\left. y''_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon \left(y_0(\tau, c_0) + \xi_k(\tau, \varepsilon), \beta_k \right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y'_k(\tau, \varepsilon), y''_k(\tau, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right\} d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Приклад 3.3.4. Теорема 3.3.2 може бути використана для розв'язання задачі про знаходження періодичного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad T_1(0) = 2\pi$$

рівняння Лотки-Вольтерри (3.68).

Дійсно, рівняння для породжуючих амплітуд у випадку задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.68) має кратний корінь $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0, 1$; матриця B_0 при цьому вироджена

$$B_0 = \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) = -\frac{\pi}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На першому кроці ітераційної схеми (3.84)

$$\begin{aligned}\xi_1(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon g\left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y_0'(s, c_0), y_0''(s, c_0), \beta_0, 0)\right](\tau) = \\ &= \frac{\varepsilon}{600} \left[2 \cos 2\tau - 2 \cos \tau + 2 \sin \tau - \sin 2\tau \right].\end{aligned}$$

Далі обчислюємо матрицю

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\mathfrak{B}_0\left(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon), \beta_0\right) &= \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi\varepsilon(1920-192\varepsilon+7\varepsilon^2)}{144\,000} \\ -\frac{\pi\varepsilon(720-144\varepsilon+5\varepsilon^2)}{14\,400} \\ \frac{\pi(-2\,880\,000+\varepsilon(96\,000+\varepsilon(-39\,600+\varepsilon(3040+\varepsilon(-148+3\varepsilon)))))}{14\,400\,000} \\ \frac{\pi\varepsilon(480\,000+\varepsilon(-78\,000+\varepsilon(4400+\varepsilon(-370+21\varepsilon))))}{72\,000\,000} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

На відміну від матриці B_0 , матриця

$$\mathfrak{B}_0\left(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon), \beta_0\right), \quad 0 < \varepsilon < \frac{192\,987\,178}{28\,252\,251}$$

невироджена:

$$\begin{aligned}\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon), \beta_0) &= -\frac{\pi^2\varepsilon}{1000} + \frac{13\pi^2\varepsilon^2}{90\,000} - \frac{29\pi^2\varepsilon^3}{7\,200\,000} + \frac{157\pi^2\varepsilon^4}{108\,000\,000} - \\ &- \frac{671\pi^2\varepsilon^5}{4\,320\,000\,000} + \frac{\pi^2\varepsilon^6}{202\,500\,000} + \frac{127\pi^2\varepsilon^7}{1\,728\,000\,000\,000} - \frac{\pi^2\varepsilon^8}{144\,000\,000\,000} \neq 0.\end{aligned}$$

З іншого боку, має місце рівність

$$\mathfrak{B}_0\left(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, 0), \beta_0\right) = B_0.$$

Покладемо $\varepsilon = 0, 1$; на першому кроці ітераційної схеми (3.84) знаходимо

$$\nu_1(\varepsilon) \approx \frac{2\,988\,119}{1\,489\,193\,999}, \quad \zeta_1(\varepsilon) \approx \frac{215\,648}{3\,093\,558\,117},$$

які визначають перше наближення до розв'язку рівняння (3.69)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon),$$

перше наближення до періоду $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$, $\beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon)$.

і, в свою чергу, перше наближення до розв'язку рівняння (3.68):

$$z_1^{(a)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon u_1(t, \varepsilon), \quad z_1^{(b)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon y_1(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon) := \frac{y_1'(t, \varepsilon)}{1 + \varepsilon y_1(t, \varepsilon)}.$$

Відмітимо, що розв'язок $\nu_1(\varepsilon)$, $\zeta_1(\varepsilon)$ лінеаризованої умови розв'язності вихідної задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.69) є наближеним, тому на другому кроці ітераційної схеми (3.84) отримуємо функцію

$$\begin{aligned} \xi_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \left[\frac{12\,041}{805\,353\,873\,410} - \frac{4\,288\,994 \cos \tau}{1\,238\,235\,125} - \right. \\ \left. - \frac{16\,043 \tau \cos \tau}{128\,858\,231\,724} + \frac{2\,411\,854 \cos 2\tau}{697\,621\,749} + \frac{193\,319 \cos 3\tau}{29\,625\,829\,657} + \right. \\ \left. + \frac{12\,715 \cos 4\tau}{3\,102\,423\,852\,741} + \frac{7\,702\,061 \sin \tau}{2\,239\,196\,741} + \frac{13\,557 \tau \sin \tau}{1\,184\,526\,761\,707} - \right. \\ \left. - \frac{4\,178\,497 \sin 2\tau}{2\,457\,195\,713} - \frac{266\,881 \sin 3\tau}{20\,892\,764\,240} - \frac{63\,651 \sin 4\tau}{1\,429\,973\,632\,411} \right], \end{aligned}$$

що містить вікові доданки. Відмітимо, що для першого наближення до розв'язку рівняння (3.68) має місце нерівність $1 + \varepsilon\beta_1 \geq 0$. Для оцінки точності знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| \begin{pmatrix} \delta_k^{(a)}(\varepsilon) \\ \delta_k^{(b)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1$$

нульового і першого наближень до розв'язку рівняння (3.68); тут

$$\delta_k^{(a)}(\varepsilon) := (z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon))'' - (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon)(1 - z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon)),$$

$$\delta_k^{(b)}(\varepsilon) := (z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon))'' + (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))z_k^{(b)}(\tau, \varepsilon)(1 - z_k^{(a)}(\tau, \varepsilon)).$$

Поклавши $\varepsilon = 0, 1$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,000\,111\,335, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 4,74\,113 \cdot 10^{-6}.$$

Для знаходження наближень до періодичних розв'язків рівняння Лотки-Вольтерри (3.68), що не містять вікових доданків, потрібно знаходження можливо більш точних розв'язків умови розв'язності вихідної задачі про

знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.69); скористаємось для цього методом Ньютона [206].

Перше наближення до розв'язку $y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon)$,

$$x_1(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cdot \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

періодичної задачі для рівняння (3.82) визначає вектор

$$\check{c}_1(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{pmatrix};$$

тут

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) := \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y_0'(s, c_0), y_0''(s, c_0), \beta_0, \varepsilon) \right](\tau).$$

Для його знаходження використаємо умову розв'язності (3.65) вихідної задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.69):

$$F_1(\check{c}_1(\varepsilon)) = 0; \quad (3.85)$$

тут

$$F_1(\check{c}_1(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} H(s) \mathcal{Y}(y_1(s, \varepsilon), y_1'(s, \varepsilon), y_1''(s, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \varepsilon) ds.$$

В свою чергу, для розв'язку рівняння (3.85) використаємо метод Ньютона-Канторовича [206, с. 680, 682]. Вектор-функція $F(\check{c}_1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ визначена в малому околі нуля $0 \in \mathbb{R}^2$ і двічі неперервно-диференційовна в цьому околі. Оскільки

$$F'_{\check{c}_1}(0) = \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \beta_0),$$

остільки для задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння типу Лъенара (3.62) в частковому критичному випадку має місце нерівність

$$\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \neq 0,$$

необхідна для початку ітераційної схеми (2.113). Припустимо, також що в малому околі нуля мають місце нерівності

$$\left\| [F'(0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| F(0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| F''(\check{c}_{1_k}) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді згідно до леми 2.3.3 рівняння (3.85) в малому околі нуля має єдиний розв'язок $\check{c}_1(\varepsilon) := F^{-1}(0) \in \mathbb{R}^2$, до якого збігається ітераційна схема

$$\check{c}_{1_{k+1}}(\varepsilon) = \check{c}_{1_k}(\varepsilon) - [F'_1(\check{c}_{1_k}(\varepsilon))]^{-1} F(\check{c}_{1_k}(\varepsilon)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.86)$$

Продовжуючи міркування, приходимо до наступного твердження.

Теорема 3.3.3. *За наявності кратних ($\det B_0 = 0$) коренів рівняння для породжуючих амплітуд (3.66), за умови*

$$\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \neq 0,$$

$$\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0) + \xi(\cdot, \varepsilon), \beta_0) \in \mathbb{C}_{2 \times 2}[0, 2\pi]$$

задача про знаходження періодичних розв'язків рівняння (3.62) має єдиний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_0)$, який за умови $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ може бути представлений операторною системою (3.83). Для побудови періодичних розв'язків рівняння (3.62) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad (3.87)$$

$$\xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) := \varepsilon g \left[\mathcal{Y}(y_0(s, c_0) + x_k(s, \varepsilon), y'_0(s, c_0) + x'_k(s, \varepsilon); \right.$$

$$\left. y''_0(s, c_0) + x''_k(s, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon) \cos \tau + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon),$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad F_{k+1}(\check{c}_{k+1}(\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} H(s) \times$$

$$\times \mathcal{Y}(y_{k+1}(s, \varepsilon), y'_{k+1}(s, \varepsilon), y''_{k+1}(s, \varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon), \varepsilon) ds,$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = F_{k+1}^{-1}(0), \quad \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Приклад 3.3.5. *Теорема 3.3.3 може бути використана для розв'язання задачі про знаходження періодичного розв'язку*

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad T_1(0) = 2\pi$$

рівняння Лотки-Вольтерри (3.68).

Дійсно, у прикладі 3.3.4 показано, що рівняння для породжуючих амплітуд у випадку задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.68) має кратний корінь $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0,1$; матриця B_0 при цьому вироджена. На першому кроці ітераційної схеми (3.87) знаходимо функцію

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{600} \left[2 \cos 2\tau - 2 \cos \tau + 2 \sin \tau - \sin 2\tau \right],$$

яка визначає не вироджену матрицю $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon), \beta_0)$, отже задача про знаходження періодичних розв'язків рівняння Лотки-Вольтерри (3.68) приведена до критичного випадку першого порядку. Для розв'язання рівняння (3.85) у випадку задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (3.68) скористаємось методом Ньютона-Канторовича. Вектор-функція $F_1(\check{c}_1)$ визначена в малому околі нуля і двічі неперервно-диференційовна в цьому околі. Покладемо $\check{c}_{1_0} := 0$ і $\varepsilon := 0,1$, при цьому $\det [F'_1(\check{c}_{1_0})] \approx -0,000\,972\,743 \neq 0$, крім того

$$\left\| [F'_1(\check{c}_{1_0})]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 645,978, \quad \left\| F_1(\check{c}_{1_0}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 0,0000\,532\,173$$

$$\left\| F''(\check{c}_{1_0}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_3(1) \approx 12,7\,736.$$

Оскільки

$$\theta = 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(1) \approx 0,878\,238 < 1,$$

остільки ітераційна схема (3.86) може бути використана для розв'язання рівняння (3.85), принаймі, для першого кроку, при цьому

$$\check{c}_{1_1} \approx \begin{pmatrix} 0,00156\,661 \\ 0,0000\,745\,964 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \check{c}_{1_5} \approx \begin{pmatrix} 0,00152\,930 \\ 0,0000\,734\,514 \end{pmatrix}.$$

Для п'ятої ітерації знаходимо величини

$$\left\| [F'_1(\check{c}_{1_5})]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 616,507, \quad \left\| F_1(\check{c}_{1_5}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 2,11\,758 \times 10^{-22},$$

$$\left\| F''(\check{c}_{1_5}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_3(1) \approx 12,7\,769.$$

Оскільки

$$\theta = 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(5) \approx 3,33\,605 \times 10^{-18} \ll 1,$$

остільки ітераційна схема (3.86) може бути використана для розв'язання

рівняння (3.85), принаймі, для п'ятого кроку. В наслідок рівності

$$\left\| F(\check{c}_{1_5}) \right\|_{\infty} \approx 2,11\,758 \times 10^{-22}$$

для розв'язання рівняння (3.85) обмежимося п'ятою ітерацією, при цьому знаходимо величини

$$\nu_1(\varepsilon) \approx \frac{2\,493\,415}{1\,630\,424\,432}, \quad \zeta_1(\varepsilon) \approx \frac{2\,100\,633}{28\,598\,940\,707}.$$

які визначають перше наближення до розв'язку рівняння (3.69)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon),$$

перше наближення до періоду $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$, $\beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon)$. і, в свою чергу, перше наближення до розв'язку рівняння (3.68):

$$z_1^{(a)}(t, \varepsilon), \quad z_1^{(b)}(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon).$$

На другому кроці ітераційної схеми (3.87) знаходимо функцію

$$\begin{aligned} \xi_2(\tau, \varepsilon) = & \frac{4\,581}{4\,145\,153\,370\,523} - \frac{1\,130\,359 \cos \tau}{3\,294\,155\,069} + \frac{3\,717\,403 \cos 2\tau}{10\,853\,956\,995} + \\ & + \frac{51\,651 \cos 3\tau}{79\,904\,259\,781} + \frac{2\,299 \cos 4\tau}{5\,685\,445\,504\,080} + \frac{7\,445\,382 \sin \tau}{21\,851\,940\,515} - \\ & - \frac{763\,977 \sin 2\tau}{4\,535\,377\,709} - \frac{56\,888 \sin 3\tau}{44\,852\,387\,857} - \frac{5\,074 \sin 4\tau}{1\,147\,538\,493\,169}. \end{aligned}$$

Перевагою ітераційної схеми (3.87) є періодичність функції $\xi_2(\tau, \varepsilon)$. Таким чином, знаходимо невироджену

$$\det \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_2(\cdot, \varepsilon), \beta_1) = -0,00103\,662$$

матрицю

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_2(\cdot, \varepsilon), \beta_1) = \begin{pmatrix} -0,00\,482\,954 & -0,636\,156 \\ -0,00\,161\,351 & 0,00\,210\,582 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\check{c}_{2_0} := \check{c}_1$ и $\varepsilon := 0,1$, при цьому

$$\det [F'_2(\check{c}_{2_0})] \approx -0,00103\,662 \neq 0,$$

крім того

$$\left\| [F'_2(\check{c}_{2_0})]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 616,646, \quad \left\| F_2(\check{c}_{2_0}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 7,61\,089 \times 10^{-6},$$

$$\left\| F''_2(\check{c}_{2_0}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_3(0) \approx 12,7769.$$

Оскільки

$$\theta = 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(0) \approx 0,119\,929 < 1,$$

остільки ітераційна схема (3.86) може бути використана для розв'язання рівняння

$$F_2(\check{c}_2(\varepsilon)) = 0, \quad (3.88)$$

принаймі, для першого кроку, при цьому

$$\check{c}_{2_1} \approx \begin{pmatrix} 0,00\,157\,542 \\ 0,0000\,850\,763 \end{pmatrix}, \quad \check{c}_{2_3} \approx \begin{pmatrix} 0,00\,157\,538 \\ 0,0000\,850\,711 \end{pmatrix}.$$

Для третьої ітерації знаходимо величини

$$\left\| [F'_2(\check{c}_{2_3})]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 615,717, \quad \left\| F_2(\check{c}_{2_3}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 6,77\,626 \times 10^{-21},$$

$$\left\| F''_2(\check{c}_{2_3}) \right\|_{\infty} \leq \gamma_3(3) \approx 12,7770.$$

Оскільки

$$\theta = 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(3) \approx 2,66\,544 \times 10^{-17} \ll 1,$$

остільки ітераційна схема (3.86) може бути використана для розв'язання рівняння (3.88), принаймі, для третього кроку. В силу рівності

$$\left\| F(\check{c}_{1_3}) \right\|_{\infty} \approx 6,77\,626 \times 10^{-21},$$

для розв'язання рівняння (3.88) обмежимося третьою ітерацією, при цьому знаходимо величини

$$\nu_2(\varepsilon) \approx \frac{3\,506\,096}{2\,225\,559\,065}, \quad \zeta_2(\varepsilon) \approx \frac{1\,040\,651}{12\,232\,725\,789},$$

які визначають друге наближення до розв'язку рівняння (3.69)

$$y_2(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + \nu_2(\varepsilon) \cos \tau + \xi_2(\tau, \varepsilon),$$

друге наближення до періоду

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)), \quad \beta_2(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_2(\varepsilon).$$

і, в свою чергу, друге наближення до розв'язку рівняння (3.68):

$$z_2^{(a)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon u_2(t, \varepsilon), \quad z_2^{(b)}(t, \varepsilon) := 1 + \varepsilon y_2(t, \varepsilon), \quad u_2(t, \varepsilon) := \frac{y_2'(t, \varepsilon)}{1 + \varepsilon y_2(t, \varepsilon)}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$, нульового і перших двох наближень до розв'язку рівняння (3.68). Поклавши $\varepsilon = 0, 1$, маємо

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,000\,111\,335, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 3,7684 \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,49\,817 \cdot 10^{-7}.$$

Вімітимо, що точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (3.87) наближень до періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри вище точності відповідних наближень, знайдених за допомогою ітераційної схеми (3.84). Крім того, перевагою ітераційної схеми (3.87) є періодичність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння Лотки-Вольтерри. Область збіжності ітераційних схем (3.84) і (3.87) до періодичного розв'язку рівняння типу Льєнара (3.62) може бути оцінена аналогічно [284]. Швидкість збіжності ітераційних схем (3.84) і (3.87) до періодичного розв'язку рівняння типу Льєнара (3.62) істотно залежить від величини ε і c_0 .

Доведені теореми 3.3.2 і 3.3.3 переносять результати [55, 322] на випадок автономних періодичних задач для рівняння типу Льєнара (3.62) за наявності кратних коренів рівняння (3.66) для породжуючих амплітуд. З іншого боку, результати теорем 3.3.2 і 3.3.3 можуть бути перенесені на випадок автономних нетерових крайових задач за наявності кратних коренів рівняння (3.66) для породжуючих констант [16] та на зчисленні системи.

Аналогічні результати у випадку автономних періодичних задач для рівняння типу Льєнара (3.62) за наявності кратних коренів рівняння (3.66) для породжуючих амплітуд можуть бути отримані з використанням явища параметричного резонансу.

Висновки до третього розділу

1. Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу.
2. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми, знайдені наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для автономного рівняння типу Хілла та типу Дюффінга з параметричним збуренням.
3. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаної відносно похідної. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми, знайдені наближення до розв'язків періодичної задачі для рівняння типу Релея, періодичної крайової задачі для автономного рівняння Льєнара, рівняння типу Дюффінга та Лотки–Вольтерри.

Розділ 4

Напівлінійні еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині

4.1. Квазіконформні відображення та напівлінійні еліптичні диференціальні рівняння на площині

Добре відомо, що кожному додатньо визначену квадратичну форму

$$ds^2 = a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2,$$

визначену в плоскій області Ω , за допомогою відповідного квазіконформного перетворення змінних, можна привести до канонічної форми

$$ds^2 = \Lambda(du^2 + dv^2), \quad \Lambda \neq 0 \text{ м.в. в } \Omega, \quad (4.1)$$

за умови, що $ac - b^2 \geq \Delta_0 > 0$, $a > 0$, м.в. в Ω [26, с. 10–12]. Цей ключовий результат може бути поширений на будь-який лінійний дивергентний оператор вигляду $\operatorname{div} [A(z)\nabla u(z)]$, $z = x + iy$, для матричної функції $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$. А саме, дана така матрична функція A і квазіконформне відображення $\omega : \Omega \rightarrow G$, $\omega \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ узгоджене з A , що якщо функція T і елементи A достатньо гладкі, то [83, 91]

$$\operatorname{div} [A(z)\nabla(T(\omega(z)))] = J_\omega(z)\Delta T(\omega(z)), \quad z \in \Omega. \quad (4.2)$$

Тут, $J_\omega(z)$ є позначенням для якобіана відображення $\omega(z)$, наприклад, $J_\omega(z) = \det D_\omega(z)$, де $D_\omega(z)$ є якобіаном матриці відображення ω в точці $z \in \Omega$. Використання стандартної процедури, а саме вимога регулярності в рівності (4.2), може бути істотно послаблена. Рівність (4.3), яка представлена нижче, буде застосовуватися до вивчення слабких розв'язків

деяких напівлінійних рівнянь в частинних похідних, що можна розглядати як слабкий аналог рівності (4.2).

Пропозиція 4.1.1. *Нехай Ω є областю в $\mathbb{C}$, $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$, і нехай $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформним відображенням, узгодженим з A . Тоді рівність*

$$\int_{\Omega} \langle A(z) \nabla(T(\omega(z))), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z = \int_{\Omega} \langle D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle J_{\omega}(z) dm_z \quad (4.3)$$

виконується для довільного $T \in W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$ і для довільної $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Доведення. За умови, що $T \in W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$ і $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформним відображенням, узгодженим з $A(z)$. Згідно пропозиції 1.3.1, можна побачити, що $u := T \circ \omega \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$. Осільки

$$\nabla u(z) = D_{\omega}^t(z) \nabla T(\omega(z)),$$

де $D_{\omega}^t(z)$ – позначає транспоновану матрицю $D_{\omega}(z)$, і ω задовольняє рівнянню Бельтрамі (1.38), яке може бути записано в матричній формі

$$A(z) D_{\omega}^t(z) = D_{\omega}^{-1}(z) J_{\omega}(z).$$

Таким чином, ми послідовно приходимо до необхідної рівності (4.3):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle A(z) \nabla(T(\omega(z))), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z &= \int_{\Omega} \langle A(z) D_{\omega}^t(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z \\ &= \int_{\Omega} \langle D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle J_{\omega}(z) dm_z. \end{aligned}$$

□

Зауваження 4.1.1. *Легко побачити, що якщо T і A гладкі, і якщо (4.3) виконується, тоді (4.2) також виконується. Використовуючи вказану вище формулу Гріна у зворотньому напрямку, можна показати, що*

$$\int_{\Omega} \{ \operatorname{div} [A(z) \nabla(T(\omega(z)))] - J_{\omega}(z) \Delta T(\omega(z)) \} \varphi(z) dm_z = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Дійсно, за формулою Гріна маємо

$$\int_{\Omega} \langle A(z) \nabla(T(\omega(z))), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z = - \int_{\Omega} \operatorname{div} [A(z) \nabla(T(\omega(z)))] \varphi(z) dm_z.$$

З іншого боку, знову застосувавши формулу Гріна після заміни змінної $w = \omega(z)$, отримуємо

$$\int_{\Omega} J_{\omega}(z) \Delta T(\omega(z)) \varphi(z) dm_z = - \int_{\Omega} \langle \nabla T(\omega(z)), [D_{\omega}^t]^{-1}(z) \nabla \varphi(z) \rangle J_{\omega}(z) dm_z. \quad (4.5)$$

З лінійної алгебри випливає, що

$$\langle \nabla T(\omega(z)), J_{\omega}(z) [D_{\omega}^t]^{-1}(z) \nabla \varphi(z) \rangle = \langle J_{\omega}(z) D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle. \quad (4.6)$$

Дійсно, нехай $\omega(z) = a(z) + ib(z)$, $z = x + iy$. Тоді

$$D_{\omega} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}, \quad D_{\omega}^t = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}, \quad D_{\omega}^{-1} J_{\omega} = \begin{pmatrix} b_y & -a_y \\ -b_x & a_x \end{pmatrix}$$

і

$$[D_{\omega}^t]^{-1} J_{\omega} = \begin{pmatrix} b_y & -b_x \\ -a_y & a_x \end{pmatrix}.$$

Позначивши $\nabla T = (u, v)$ і $\nabla \varphi = (\xi, \eta)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle \nabla T, J_{\omega} [D_{\omega}^t]^{-1} \nabla \varphi \rangle &= \langle (u, v), (b_y \xi - b_x \eta, -a_y \xi + a_x \eta) \rangle = \\ &= u(b_y \xi - b_x \eta) + v(a_x \eta - a_y \xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J_{\omega} D_{\omega}^{-1} \nabla T, \nabla \varphi \rangle &= \langle (b_y u - a_y v, -b_x u + a_x v), (\xi, \eta) \rangle = \\ &= u(b_y \xi - b_x \eta) + v(a_x \eta - a_y \xi), \end{aligned}$$

і приходимо до формули (4.6).

Таким чином, виконується рівність

$$\int_{\Omega} J_{\omega}(z) \Delta T(\omega(z)) \varphi(z) dm_z = - \int_{\Omega} \langle D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle J_{\omega}(z) dm_z.$$

Нарешті, оскільки $C_0^1(\Omega)$ щільне в $W_0^{1,2}(\Omega)$, приходимо до рівності (4.2) майже для всіх точок в Ω . Однак, оскільки всі функції гладкі, рівняння виконується для будь-якої точки.

4.1.1. Теорема факторизації та її наслідки. Нехай Ω є областю в $\mathbb{C}$, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. У цьому розділі ми

будемо досліджувати модельне напівлінійне рівняння

$$\operatorname{div} [A(z)\nabla u(z)] = f(u(z)), \quad z \in \Omega, \quad (4.7)$$

а також його аналог Лапласа:

$$\Delta T(w) = J(w)f(T(w)), \quad w \in G = \omega(\Omega), \quad (4.8)$$

де $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформним відображенням узгодженим з $A(z)$, і $J(w)$ позначає якобіан оберненого відображення $\omega^{-1} : G \rightarrow \Omega$.

Під слабким розв'язком рівняння (4.7), ми розуміємо функцію $u \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ таку, що

$$\int_{\Omega} \langle A(z)\nabla u(z), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z + \int_{\Omega} f(u(z))\varphi(z) dm_z = 0 \quad \forall \varphi \in C \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Рівняння (4.8) містить вагову функцію $J(w) \in L_{\text{loc}}^1(G)$. Незважаючи на це, ми можемо визначити поняття слабого розв'язку рівняння (4.8) наступним чином.

Будемо казати, що T є *слабким розв'язком рівняння* (4.8), якщо $T \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$ і

$$\int_G \langle \nabla T(w), \nabla \psi(w) \rangle dm_w + \int_G J(w)f(T(w))\psi(w) dm_w = 0, \quad \forall \psi \in C \cap W_0^{1,2}(G). \quad (4.9)$$

Оскільки $J(w)$ є якобіаном відображення $\omega^{-1}(w)$, то легко перевірити, виконавши перетворення змінної за формулою $w = \omega(z)$, що другий інтеграл в (4.9) добре визначений. Тут ми знову використали той факт, що композиція відображення $u(z) = T(\omega(z))$ знаходиться в $C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, якщо $T \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$ і ω є квазіконформним.

Існування слабких розв'язків рівнянь (4.7) і (4.8) при визначених умовах на праву частину, а також інформацію про основні властивості розв'язків можна знайти [110, 112].

Наступна теорема факторизації є основним результатом цього підрозділу.

Теорема 4.1.1 (Теорема факторизації). *Нехай Ω є областю в $\mathbb{C}$, $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді довільний*

слабкий розв'язок *u* напівлінійного рівняння

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u(z)), \quad z \in \Omega, \quad (4.10)$$

може бути представлено у вигляді композиції

$$u(z) = T(\omega(z)), \quad (4.11)$$

де $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформним відображенням, узгодженим з A , і T є слабким розв'язком рівняння Пуассона

$$\Delta T(w) = J(w) f(T(w)), \quad w \in G. \quad (4.12)$$

Тут, $J(w)$ є якобіаном оберненого відображення $\omega^{-1}(w)$.

Доведення. Нехай u слабкий розв'язок напівлінійного рівняння (4.10) і $T = u \circ \omega^{-1}$. тоді, згідно пропозиції 1.3.1, $T \in C \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(G)$, і ми маємо

$$\int_{\Omega} \langle A(z) \nabla(T(\omega(z))), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z + \int_{\Omega} f(T(\omega(z))) \varphi(z) dm_z = 0 \quad (4.13)$$

для всіх $\varphi \in C \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Далі, згідно пропозиції 4.1.1,

$$\int_{\Omega} \langle A(z) \nabla(T(\omega(z))), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z = \int_{\Omega} \langle D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle J_{\omega}(z) dm_z, \quad (4.14)$$

і, отже,

$$\int_{\Omega} \langle J_{\omega}(z) D_{\omega}^{-1}(z) \nabla T(\omega(z)), \nabla \varphi(z) \rangle dm_z + \int_{\Omega} f(T(\omega(z))) \varphi(z) dm_z = 0 \quad (4.15)$$

для всіх $\varphi \in C \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Для довільної функції $\psi(w) \in C \cap W_0^{1,2}(G)$, ми можемо встановити $\varphi(z) = \psi(\omega(z))$ в (4.13) і (4.14), оскільки $\varphi \in C \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, тоді згідно пропозиції 1.3.1, виконавши заміну змінної в (4.15), тоді згідно формули $z = \omega^{-1}(w)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_G \langle J_{\omega}(\omega^{-1}(w)) D_{\omega}^{-1}(\omega^{-1}(w)) \nabla T(w), D_{\omega}^t(\omega^{-1}(w)) \nabla \psi(w) \rangle J(w) dm_w + \\ + \int_G J(w) f(T(w)) \psi(w) dm_w = 0. \end{aligned}$$

Спираючись на елементарні алгебраїчні міркування маємо

$$\begin{aligned} \langle J_\omega(\omega^{-1}(w))D_\omega^{-1}(\omega^{-1}(w))\nabla T(w), D_\omega^t(\omega^{-1}(w))\nabla\psi(w) \rangle = \\ = J_\omega(\omega^{-1}(w))\langle \nabla T(w), \nabla\psi(w) \rangle, \end{aligned}$$

і

$$J_\omega(\omega^{-1}(w)) = 1/J(w).$$

Отже, тотожність

$$\int_G \langle \nabla T(w), \nabla\psi(w) \rangle dm_w + \int_G J(w)f(T(w))\psi(w) dm_w = 0 \quad (4.16)$$

виконується для всіх $\psi \in C \cap W_0^{1,2}(G)$. Таким чином, T є слабким розв'язком рівняння (4.12). $\square$

Зауваження 4.1.2. *Оскільки наведені вище твердження обернені, можна побачити, що якщо T є слабким розв'язком рівняння (4.12), то функція $u(z) = T(\omega(z))$ є слабким розв'язком напівлінійного рівняння (4.10).*

Припускаючи, що функція f невід'ємна, ми приходимо до наступного твердження.

Наслідок 4.1.1. *Нехай Ω є областю в $\mathbb{C}$, $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція. Якщо $f(u) \geq 0$, тоді кожний слабкий розв'язок u напівлінійного рівняння*

$$\operatorname{div} [A(z)\nabla u(z)] = f(u(z)), \quad z \in \Omega,$$

може бути представлено у вигляді композиції

$$u(z) = T(\omega(z)),$$

де $\omega : \Omega \rightarrow G$ є квазіконформне відображення узгоджене з A , і T субгармонічна функція, яка є слабким розв'язком рівняння

$$\Delta T = J(w)f(T(w)) \quad \text{в } G.$$

Тут, $J(w)$ є якобіаном оберненого відображення $\omega^{-1}(w)$.

Серед квазіконформних відображень $\omega : \Omega \rightarrow G$, існує різноманітність відображень, які називаються такими, що зберігають об'єм і для

яких $J_\omega(z) \equiv 1$, $z \in \Omega$. Більшість прикладів таких відображень будуть дані в наступному розділі, отже запропоновані далі твердження можуть викликати незалежний інтерес.

Наслідок 4.1.2. *Нехай $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$ матрична функція, що породжує квазіконформне відображення, яке зберігає об'єм $\omega : \Omega \rightarrow G$. Тоді кожний слабкий розв'язок u напівлінійного рівняння*

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u(z)), \quad z \in \Omega,$$

може бути представлено у вигляді композиції

$$u(z) = T(\omega(z)),$$

де T є слабким розв'язком рівняння

$$\Delta T = f(T(w)), \quad \text{м.в. в } G.$$

Зауваження 4.1.3. *Згідно з теоремою Рімана про вимірні відображення [3, Теорема V.B.3] і [115, Теорема V.1.3], якщо $\mu(z)$, $z \in \Omega$ – узгоджене з матричною функцією $A \in M^{2 \times 2}(\Omega)$, то існує квазіконформне відображення $\omega : \Omega \rightarrow G$ з комплексною ділатацією μ заданої за формулою (1.39). Тут, якщо Ω кінечнозв'язна, тоді G є або канонічною круговою областю, або комплексною площиною [78, Теорема V.6.2]. Це дозволяє нам вибрати одну із вказаних раніше канонічних областей, як G в теоремі факторизації 4.1.1. Якщо Ω однозв'язна з невикривленою границею, тоді можна стверджувати, що $G = \mathbb{D}$.*

4.1.2. Розв'язки, що вибухають ("blow-up") на границі напівлінійних еліптичних рівнянь. Пропонуємо декілька прикладів застосування теореми 4.1.1 до вивчення розв'язків, що вибухають ("blow-up") на границі деяких класичних моделей напівлінійних еліптичних рівнянь.

Нехай Ω є областю в $\mathbb{C}$, і нехай $\partial\Omega$ позначає її границю. В цьому розділі ми будемо досліджувати задачу

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u(z)), \quad (4.17)$$

$$u(z) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad d(z) := \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

а також її аналог Лапласа:

$$\Delta u(z) = f(u(z)), \quad (4.19)$$

$$u(z) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad d(z) := \text{dist}(z, \partial\Omega) \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Розв'язки цих задач називаються розв'язками, що вибухають на границі або великими розв'язками.

Існування великого розв'язку (4.19) пов'язане з існуванням максимального розв'язку $\tilde{u}$ для (4.19) в Ω , який, в свою чергу, залежить від так званої умови Келлера–Осермана [107, 127]. Наприклад, проста верхня оцінка була отримана для будь-якого розв'язку з будь-яким числом змінних напівлінійного рівняння (4.19) в [107]. Оцінка залежить від функції f , яка повинна бути додатньою і задовольняти відомій умові Келлера–Осермана. Висновок про те, що функція $f \in C(\mathbb{R}_+)$ задовольняє умові Келлера–Осермана, можна зробити, якщо існує додатня неспадна функція h така, що

$$f(t) \geq h(t), \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ and } \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \int_0^t h(s) ds \right\}^{-1/2} dt < \infty \text{ для всіх } t_0 > 0. \quad (4.21)$$

Добре відомо, що якщо f неспадна і задовольняє умові Келлера–Осермана, то існує великий розв'язок в будь-якій обмеженій гладкій області. Існування єдиного розв'язку в гладких областях було визначено при деяких додаткових умовах на f [8]. Легко перевірити, що функції $f(t) = e^t$ і $f(t) = t^p$, $p > 1$, задовольняють (4.21).

Наприклад розглянемо, напівлінійне рівняння Ліувілля–Бібербаха

$$\Delta u = e^u, \quad (4.22)$$

яке, наскільки нам відомо, вперше почав досліджувати Л. Бібербах у своїй новаторській роботі [14], що пов'язана з вивченням автоморфних функцій на площині. Ця робота послужила початком для численних досліджень в області напівлінійних диференціальних рівнянь в R^n , $n \geq 1$, і рівняння (4.22) продовжує відігравати роль одного з фундаментальних модельних рівнянь теорії. Варто відзначити, що в однозв'язних плоских областях Ω , великі розв'язки рівняння (4.22) можна представити явно за

допомогою конформного відображення $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$:

$$u(z) = \log \frac{8|\omega'(z)|^2}{(1 - |\omega(z)|^2)^2}. \quad (4.23)$$

Відзначимо, що для довільної аналітичної функції $\omega(z)$ в Ω , формула (4.23) визначає розв'язок, взагалі кажучи, з особливостями, рівняння (4.22).

Для модельного випадку рівняння

$$\Delta u = e^{au}, \quad a > 0, \quad (4.24)$$

має місце наступний результат [118, Теорема 5.3.7].

Теорема 4.1.2. *Нехай Ω є обмеженою областю в $\mathbb{C}$ такою, що $\Omega = \text{Int } \bar{\Omega}$. Тоді існує один і тільки один розв'язок (4.24).*

Хочемо звернути увагу, що рівняння з'являється також в якості модельного в задачах диференціальної геометрії відносно існування поверхонь з від'ємною гаусовою кривизною [153], а також при вивченні рівноваги зарядженого газу.

У загальному випадку для $|\mu(z)| \leq k < 1$, розв'язок рівняння Бельтрамі можна записати у вигляді нескінченних рядів сингулярних інтегральних перетворень типу Гільберта–Коші для комплексної дилатації [26, с. 33]. Тут ми даємо явні розв'язки рівняння Бельтрамі в тих випадках, коли комплексна дилатація є вимірною функцією, яка залежить від єдиної дійсної змінної $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$, $\arg z$ або $|z|$ [26, §5.10], [96]. Ми використовуємо відповідні явні формули для запису ряду явних розв'язків для аналога (4.17) рівняння Ліувілля–Бібербаха в одиничному колі і верхній півплощині. Почнемо з наступного твердження [26, с. 82].

Пропозиція 4.1.2. *Нехай комплексна дилатація $\mu(z)$ має вигляд*

$$\mu(z) = k(|z|) \frac{z}{\bar{z}}, \quad (4.25)$$

де $k(\tau) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ вимірна функція, $\|k\|_\infty < 1$. Тоді формула

$$\omega(z) = \frac{z}{|z|} \exp \left\{ - \int_{|z|}^1 \frac{1 + k(\tau)}{1 - k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} \right\} \quad (4.26)$$

представляє єдине квазіконформне відображення одиничного круга на себе за допомогою комплексної дилатації μ і нормалізації $\omega(0) = 0$ і $\omega(1) = 1$.

Аналізуючи формулу (4.26), ми приходимо до наступного твердження.

Наслідок 4.1.3. Нехай $\mathbb{D}$ є одиничним кругом в комплексній площині $\mathbb{C}$ з центром на початку координат, і матрична функція $A(z)$ породжена коефіцієнтом Бельтрамі

$$\mu(z) = k(|z|) \frac{z}{\bar{z}} \quad (4.27)$$

у відповідності з формулою (1.41), де

$$k(t) = \nu^2(t) \pm i \nu(t) \sqrt{1 - \nu^2(t)} \quad (4.28)$$

і $\nu(t)$, $0 \leq t < 1$, визначено для довільної вимірної дійсної функції такої, що $|\nu(t)| \leq q < 1$. Тоді існує одна і тільки одна границя вибухового розв'язку напівлінійного рівняння

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u] = e^u, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.29)$$

яка записується явно за формулою Ліувілья–Бібербаха

$$u(z) = \log \frac{8}{(1 - |z|^2)^2}. \quad (4.30)$$

Доведення. Нехай $A(z)$ є матричною функцією, породженою комплексним коефіцієнтом Бельтрамі (4.27), який задовольняє (4.28). За допомогою Теорема Рімана про вимірні відображення [3] і [115, Теорема V.1.3], існує єдиний нормований квазіконформний гомеоморфізм ω одиничного круга $\mathbb{D}$ з коефіцієнтом Бельтрамі $\mu(z) = k(|z|)z/\bar{z}$, і цей гомеоморфізм, згідно пропозиції 4.1.2, може бути записаний явно, у вигляді

$$\omega(z) = \frac{z}{|z|} \exp \left\{ - \int_{|z|}^1 \frac{1 + k(t)}{1 - k(t)} \frac{dt}{t} \right\}. \quad (4.31)$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega} = \frac{k}{1 - k} \frac{1}{\bar{z}}, \quad \frac{\omega_z}{\omega} = \frac{1}{1 - k} \frac{1}{z}.$$

Тому для якобіана $J_\omega(z) = |\omega_z|^2 - |\omega_{\bar{z}}|^2$, маємо

$$J_\omega(z) = \frac{1 - |k|^2}{|1 - k|^2} \frac{|\omega|^2}{|z|^2}. \quad (4.32)$$

Зокрема, для того щоб застосувати наслідок 4.1.2, необхідно переконатися, що $J_\omega(z) \equiv 1$ і $|\omega(z)| = |z|$ для $z \in \mathbb{D}$. Дійсно, відмічаючи, що $\operatorname{Re} k = |k|^2$ і підставляючи $k(t)$, що задана формулою (4.28) в (4.31), бачимо, що $|\omega(z)| = |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Це означає, що $J_\omega(z) \equiv 1$.

Використовуючи наслідок 4.1.2, ми бачимо, що $u(z) = T(\omega(z))$, і T задовольняє рівнянню Ліувіля–Бібербаха

$$\Delta T = e^T \quad \text{в } \mathbb{D}. \quad (4.33)$$

Вищезгаданий результат Л. Бібербаха, а також [118, Теорема 5.3.7], дає можливість побачити, що унікальний крайовий вибуховий розв'язок рівняння (4.33) в одиничному крузі $\mathbb{D}$ представляється формулою в явному вигляді

$$T(w) = \log \frac{8}{(1 - |w|^2)^2}.$$

оскільки $|\omega(z)| = |z|$ для $z \in \mathbb{D}$, то необхідний розв'язок рівняння (4.29) також має явне представлення

$$u(z) = \log \frac{8}{(1 - |z|^2)^2}. \quad (4.34)$$

□

Таким чином, існує нескінченна множина матричних функцій $A(z)$ таких, що відповідні анізотропні напівлінійні рівняння вигляду (4.29) мають розв'язок, заданий явно формулою (4.30).

Наведемо нетривіальний приклад на основі відомого логарифмічного спіралеподібного квазіконформного відображення

$$\omega(z) = ze^{2i \log |z|},$$

яке відіграє важливу роль у вивченні різних задач сучасного аналізу [26, §13.2], [81, 82]. Функція ω відображає одиничний круг $\mathbb{D}$ на себе і перетворює радіальні лінії в спіралі нескінченно обмотані навколо джерела, що є простим збереженням об'єму. Відображення ω задовольняє рівнянню

Бельтрамі з

$$\mu(z) = \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega_z} = \frac{1}{2}(1+i)\frac{z}{\bar{z}}$$

і якобіаном $J_\omega(z) = |\omega_z(z)|^2 - |\omega_{\bar{z}}(z)| \equiv 1$. Ми бачимо, що μ відповідає (4.28) з $\nu(t) \equiv 1/\sqrt{2}$. Оскільки

$$\operatorname{Re} \mu(z) = \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)}, \quad \operatorname{Im} \mu(z) = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)}, \quad z = x + iy,$$

зрозуміло, що μ породжує, по формулі (1.41), матричну функцію $A_{sp}(x, y)$ з наступними вимірними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} a_{11} = \alpha &= \frac{|1 - \mu|^2}{1 - |\mu|^2} = 3 - 2\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)}, \\ a_{22} = \delta &= \frac{|1 + \mu|^2}{1 - |\mu|^2} = 3 + 2\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)}, \\ a_{12} = a_{21} = \beta &= \frac{-2\operatorname{Im} \mu}{1 - |\mu|^2} = -2\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Відповідно до наслідку 4.1.3 напівлінійне рівняння

$$\operatorname{div} [A_{sp}(x, y)\nabla u] = e^u, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.35)$$

повинном мати функцію

$$u(x, y) = -2\log(1 - x^2 - y^2) + \log 8$$

в якості вибухового розв'язку в крузі $\mathbb{D}$. Перевіримо цей висновок за допомогою прямого обчислення.

Отримуємо, що

$$u_x = \frac{4x}{1 - x^2 - y^2}, \quad u_y = \frac{4y}{1 - x^2 - y^2}$$

і тому

$$\alpha u_x + \beta u_y = 4\frac{x + 2y}{1 - x^2 - y^2}, \quad \beta u_x + \delta u_y = 4\frac{y - 2x}{1 - x^2 - y^2}.$$

Тоді

$$\operatorname{div} (A_{sp}(x, y)\nabla u) = 4(\alpha u_x + \beta u_y)'_x + 4(\beta u_x + \delta u_y)'_y = \frac{8}{(1 - x^2 - y^2)^2} = e^u.$$

Таким чином, ми успішно завершили перевірку.

Відзначимо також, що матрична функція A_{sp} в полярних координатах $z = re^{i\varphi}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{2} \cos(2\varphi + \pi/4) & -2\sqrt{2} \sin(2\varphi + \pi/4) \\ -2\sqrt{2} \sin(2\varphi + \pi/4) & 3 + 2\sqrt{2} \cos(2\varphi + \pi/4) \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Наслідок 4.1.4. Нехай Ω є кільцем $r < |z| < 1$ в комплексній площині $\mathbb{C}$, і нехай матрична функція $A(z)$, породжена коефіцієнтом Бельтрамі

$$\mu(z) = k(|z|) \frac{z}{\bar{z}} \quad (4.37)$$

у відповідності з формулою (1.41), де

$$k(t) = \nu^2(t) \pm i \nu(t) \sqrt{1 - \nu^2(t)}, \quad (4.38)$$

і $\nu(t)$, $0 \leq t < 1$ позначає довільну вимірну функцію. Якщо $|\nu(t)| \leq q < 1$, тобто існує один і тільки один розв'язок, що вибухає на границі класичного модельного напівлінійного рівняння

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u] = e^u, \quad \text{в кільці } r < |z| < 1, \quad (4.39)$$

який представляється явно за формулою

$$u(z) = \log \frac{2\pi^2}{|z|^2 (\log^2 r) \cdot \sin^2(\frac{\pi}{\log r} \log |z|)}. \quad (4.40)$$

Доведення. Розмірковуючи так само, як в доведенні наслідку 4.1.3, ми можемо побачити, що $u(z) = T(\omega(z))$, $r < |z| < 1$, де квазіконформний самогомеоморфізм $\omega(z)$ кільця відомий із (4.31), [зверніть увагу, що за умови (4.38), $|\omega(z)| = |z|$], і T є єдиним розв'язком, що вибухає на границі напівлінійного рівняння

$$\Delta T = e^T \quad (4.41)$$

в кільці $r < |w| < 1$. Згідно з результатами Бібербаха, єдиний розв'язок рівняння (4.41), що вибухає на границі визначається за формулою

$$T(\omega) = \log \frac{8|F'(\omega)|^2}{(1 - |F(\omega)|^2)^2}$$

де $F(\omega)$ позначає конформне відображення кільця $r < |\omega| < 1$ на одиничний круг. Залишилося знайти відповідне конформне відображення F .

Ми бачимо, що:

- 1) $w = \log \omega$ відображає кільце на смугу $\log r < \operatorname{Re} w < 0$;
- 2) $\zeta = -ie^{\frac{\pi}{\log r} i w}$ відображає смугу на праву напівплощину;
- 3) $t = (\zeta - 1)/(\zeta + 1)$ відображає праву напівплощину на одиничний круг. Об'єднавши наведені вище відображення, ми отримаємо необхідну формулу

$$F(\omega) = \frac{ie^{\frac{\pi}{\log r} i \log \omega} + 1}{ie^{\frac{\pi}{\log r} i \log \omega} - 1}.$$

Далі, якщо ми встановимо $\tau(\omega) = ie^{\frac{\pi}{\log r} i \log \omega}$, тоді отримаємо

$$(1 - |F(\omega)|^2)^2 = \frac{16 \operatorname{Re}^2 \tau(\omega)}{|\tau - 1|^4},$$

де

$$\operatorname{Re} \tau(\omega) = -|\tau| \sin \left(\frac{\pi}{\log r} \log |\omega| \right).$$

З іншого боку,

$$|F'(\omega)|^2 = \frac{4}{|\tau - 1|^4} |\tau'(\omega)|^2 = \frac{4}{|\tau - 1|^4} |\tau|^2 \frac{\pi^2}{\log^2 r} \frac{1}{|\omega|^2}.$$

Таким чином,

$$T(\omega) = \log \frac{2\pi^2}{|\omega|^2 (\log^2 r) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{\log r} \log |\omega| \right)}. \quad (4.42)$$

Оскільки $|\omega(z)| = |z|$, доведення наслідку 4.1.4 завершено. $\square$

Використовуючи границю в (4.40) при $r \rightarrow 0$, отримуємо наступний результат, який може представляти самостійний інтерес.

Наслідок 4.1.5. *Напівлінійне рівняння*

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u] = e^u$$

для кожної матричної функції A з Наслідку 4.1.4, а також рівняння Ліувілля–Бібербаха

$$\Delta u = e^u,$$

допускає існування наступного розв'язку, що вибухає на границі, в про-

колотому одиничному крузі $0 < |z| < 1$, вигляду

$$u(z) = \log \frac{2}{|z|^2 \log^2 |z|}. \quad (4.43)$$

Зауваження 4.1.4. Наведений вище підхід до побудови розв'язків, що вибухають на границі рівняння Ліувілля–Бібербаха в одиничному крузі $\mathbb{D}$ з особливістю на початку координат, може бути поширений на випадок скінченного числа особливих точок z_k , $|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Дійсно, нехай $r > 0$ таке, що всі круги $d_k = \{z : |z - z_k| \leq r\}$ належать $\mathbb{D}$ і не перетинаються один з іншим. Позначимо через $F_r(z)$, конформне відображення кругової багатозв'язої області $\mathbb{D} \setminus \cup_{k=1}^n d_k$ на одиничний круг $\mathbb{D}$ [78, Теорема VI.1]. Тоді необхідний розв'язок з покладеною описаною в точках z_k задається формулою

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \log \frac{8|F'_r(z)|^2}{(1 - |F_r(z)|^2)^2}. \quad (4.44)$$

Для того, щоб навести більше прикладів застосування теореми факторизації 4.1.1 та її наслідків, нагадаємо наступне твердження, яке дає нам явні розв'язки рівняння Бельтрамі для випадку, коли комплексна дилатація μ є вимірною функцією, яка залежить від однієї дійсної змінної $x = \operatorname{Re} z$ або $y = \operatorname{Im} z$ [26, С. 78], [96].

Пропозиція 4.1.3. Нехай $\mu : C \rightarrow \mathbb{D}$ є довільною вимірною функцією з $\|\mu\|_\infty \leq q < 1$, яка залежить тільки від $x = \operatorname{Re} z$ і нехай

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \mu(t)}{1 - \mu(t)} dt. \quad (4.45)$$

Тоді формула

$$\omega(z) = \varphi(x) + iy \quad (4.46)$$

представляє собою єдине квазіконформне відображення $\overline{C}$ на себе з комплексною дилатацією μ і нормалізацією:

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(i) = i, \quad \omega(\infty) = \infty. \quad (4.47)$$

Дійсно, формули (4.45) и (4.46) приводять до нерівності

$$K^{-1}|x_1 - x_2| \leq |\omega(z_1) - \omega(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|. \quad (4.48)$$

Таким чином, ω є ліпшіцевим гомеоморфізмом площини і, отже, ACL. Нормалізація (4.47) очевидна. Більш того,

$$\omega_x = \varphi'(x) = \frac{1 + \mu(x)}{1 - \mu(x)}, \quad \omega_y = i. \quad (4.49)$$

Отже,

$$\omega_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\omega_x + i\omega_y) = \frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)}, \quad \omega_z = \frac{1}{2}(\omega_x - i\omega_y) = \frac{1}{1 - \mu(x)}, \quad (4.50)$$

і, значить, ω задовольняє рівнянню Бельтрамі

$$\omega_{\bar{z}} = \mu(x)\omega_z. \quad (4.51)$$

тут якобіан ω

$$J_\omega(z) = \frac{1 - |\mu(x)|^2}{|1 - \mu(x)|^2} \geq K^{-1} > 0 \quad (4.52)$$

додатний, тобто, ω таке, що зберігає орієнтацію. Отже пропозицію 4.1.3 доведено.

Зауваження 4.1.5. *Из рівностей*

$$u = \operatorname{Re} \omega(z) = \operatorname{Re} \varphi(x), \quad v = \operatorname{Im} \omega(z) = y + \operatorname{Im} \varphi(x),$$

ми робимо висновок, що ω відображає вертикальні лінії на вертикальні без стискання або спотворення, і уявна вісь тотожно відображається на себе, оскільки $\varphi(0) = 0$. Легко показати, що ці геометричні властивості характеризують клас квазіконформних відображень, про які йде мова, оскільки

$$\mu(z) = \frac{\varphi'(x) - 1}{\varphi'(x) + 1} \quad (4.53)$$

залежить тільки від x .

Наслідок 4.1.6. *Припустимо, що комплексна дилатація $\nu(z)$ квазіконформного відображення $g(z)$ розширеної комплексної площині, яка зберігає точки $0, 1, \infty$, залежить тільки від $y = \operatorname{Im} z$. Тоді*

$$g(z) = x + i\psi(y), \quad (4.54)$$

де

$$\psi(y) = \int_0^y \frac{1 - \nu(it)}{1 + \nu(it)} dt. \quad (4.55)$$

Дійсно, нехай

$$\omega = \mathcal{A} \circ g \circ \mathcal{A}^{-1}, \quad (4.56)$$

де

$$\mathcal{A}(\zeta) = e^{i\frac{\pi}{2}}\zeta = i\zeta \quad (4.57)$$

поворот проти годинникової стрілки на кут $\pi/2$. Тоді $\omega(0) = 0$, $\omega(i) = i$, при $\omega(\infty) = \infty$, і комплексна дилатація ω ,

$$\mu(z) = -\nu(-iz), \quad (4.58)$$

залежить тільки від $x = \operatorname{Re} z$. Таким чином, із (4.45), (4.46), і (4.56), ми отримуємо (4.54) і (4.55).

Повернемося до вивчення вибухових розв'язків для рівняння типу Ліувілля–Бібербаха, визначеного в правій півплощині.

Наслідок 4.1.7. *Нехай H^+ права напівплощина $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ в комплексній площині $\mathbf{C}$, і нехай матрична функція $A(z)$, що породжена формулою (1.41), з коефіцієнтом Бельтрамі*

$$\mu(x) = \nu^2(x) \pm i\nu(x)\sqrt{1 - \nu^2(x)}, \quad (4.59)$$

де $\nu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – позначає довільну вимірну дійсну функцію таку, що $|\nu(x)| \leq q < 1$. Тоді існують розв'язки, що вибухають на границі напівлінійного рівняння

$$\operatorname{div} [A(z)\nabla u] = e^u, \quad z \in H^+, \quad (4.60)$$

і які можуть бути записані явно у вигляді

$$u(z) = \log \frac{2}{x^2}, \quad z = x + iy, \quad (4.61)$$

$$u(z) = \log 8\lambda^2 - 2\lambda x - 2\log(1 - e^{-2\lambda x}), \quad \lambda > 0. \quad (4.62)$$

Доведення. Тут тільки доведемо, що функція $u(z)$, що задана формулою (4.61), дозволяє розв'язати рівняння (4.60). Нехай $A(z)$ є матричною функцією, породженою комплексним коефіцієнтом Бельтрамі μ , що

задовольняє (4.59). Оскільки μ залежить тільки від x , формули (4.45) і (4.46) представляють собою унікальне квазіконформне відображення $w = \omega(z)$ правої напівплощини H^+ на себе з комплексною дилатацією μ нормованою по $\omega(0) = 0$, $\omega(i) = i$, $\omega(\infty) = \infty$.

Для того, щоб застосувати наслідок 4.1.2, перш за все ми повинні переконатися, що $J_\omega(z) \equiv 1$. Дійсно, в нашому випадку, $\operatorname{Re} \mu = |\mu|^2$, і формула (4.52) має на увазі, що $J_\omega(z) \equiv 1$. Крім того, $\operatorname{Re} \omega(z) = \operatorname{Re} \varphi(x) = x$. Тоді згідно наслідку 4.1.2, слабкий розв'язок u напівлінійного рівняння

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = e^u, \quad z \in H^+, \quad (4.63)$$

може бути представлений у вигляді композиції

$$u(z) = T(\omega(z)), \quad (4.64)$$

де T є слабким розв'язком рівняння

$$\Delta T(w) = e^{T(w)}, \quad \text{in } H^+. \quad (4.65)$$

Оскільки функція

$$F(w) = \frac{w-1}{w+1}$$

є конформним відображенням H^+ на одиничний круг $\mathbb{D}$, ми бачимо, що функція

$$T(w) = \log \frac{8|F'(w)|^2}{(1-|F(w)|^2)^2} = -2 \log \operatorname{Re} w + \log 2$$

дає нам вибухові розв'язки рівняння (4.65) в H^+ . Тепер за формулою (4.64), маємо перший необхідний розв'язок, який приймає вигляд

$$u(z) = T(\omega) = -2 \log \operatorname{Re} \omega(z) + \log 2 = -2 \log \operatorname{Re} x + \log 2.$$

Щоб отримати другий розв'язок, відмітимо, що функція

$$F(w) = e^{-\lambda w}, \quad \lambda > 0,$$

також є конформним відображенням H^+ на проколотий одиничний круг $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Повторюючи наведені вище міркування, з урахуванням, що $\operatorname{Re} \omega(z) = x$, ми приходимо до розв'язку (4.62)

$$u(z) = T(\omega) = \log \frac{8\lambda^2 |e^{-\lambda \omega(z)}|^2}{(1-|e^{-\lambda \omega(z)}|^2)^2} = \log 8\lambda^2 - 2\lambda x - 2 \log(1 - e^{-2\lambda x}).$$

□

В якості прикладу можемо взяти матричну функцію A з сталими елементами $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 5$. Тоді $\mu(z) = (1 + i)/2$, і $\omega(z) = x + i(y + 2x)$. Легко перевірити простим обчисленням, що функції (4.61) і (4.62) є розв'язками рівняння (4.60). У загальному випадку, якщо допустимі матриці в наслідку 4.1.5 мають вихідні дані: $a_{11} = 1$, $a_{12} = \pm 2\nu(x)/\sqrt{1 - \nu^2(x)}$, $a_{22} = (1 + 3\nu^2(x))/(1 - \nu^2(x))$, розглянутий вище окремий випадок відповідає функції $\nu(x) = 1/\sqrt{2}$.

Аналогічні результати можна отримати для верхньої півплощини на підставі наслідку 4.1.6.

4.1.3. Задача з вільною границею. Дуже важливе значення має ефект «мертвої зони» для розв'язання деяких рівнянь в частинних похідних [64], коли розв'язок відповідного диференціального рівняння перетворюється на нуль в деякій непорожній відкритій власній підмножині області його визначення. Наприклад, добре відомо, що розв'язок напівлінійного рівняння

$$\Delta u = u^q$$

може мати «мертву зону» тільки тоді, коли $0 < q < 1$ [64, с. 15].

Ми обмежимося лише одним результатом в цьому відношенні, який є простим наслідком пропозиції 4.1.3 і наслідку 4.1.2.

Теорема 4.1.3. *Нехай C є комплексною площиною, і нехай матрична функція $A(z)$, $z = x + iy$, що породжена коефіцієнтом Бельтрамі*

$$\mu(x) = \nu^2(x) \pm i \nu(x) \sqrt{1 - \nu^2(x)}, \quad (4.66)$$

тобто,

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & \mp \frac{2\nu(x)}{\sqrt{1 - \nu^2(x)}} \\ \mp \frac{2\nu(x)}{\sqrt{1 - \nu^2(x)}} & \frac{1 + 3\nu^2(x)}{1 - \nu^2(x)} \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

де $\nu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – позначає довільну вимірну дійсну функцію таку, що $|\nu(x)| \leq k < 1$. Тоді напівлінійне рівняння

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u] = u^q, \quad 0 < q < 1, \quad z \in C, \quad (4.68)$$

має наступний розв'язок з «мертвою зоною» в комплексній площині:

$$u(x, y) = \begin{cases} \gamma \left(y \pm \int_0^x \frac{2\nu(t)}{\sqrt{1-\nu^2(t)}} dt \right)^{\frac{2}{1-q}}, & \text{if } y > \varphi_{\pm}(x), x \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{if } x \leq \varphi_{\pm}(x). \end{cases} \quad (4.69)$$

Тут,

$$\gamma = \left(\frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{\frac{1}{1-q}},$$

і

$$y = \varphi_{\pm}(x) = \pm \int_0^x \frac{2\nu(t)dt}{\sqrt{1-\nu^2(t)}}, \quad \infty < x < +\infty,$$

позначає відповідну параметризацію вільної границі.

Доведення. Нехай $A(z)$ є матричною функцією, що породжена комплексним коефіцієнтом Бельтрамі μ , і який задовольняє (4.66). Оскільки μ залежить тільки від x , тоді формули (4.45) і (4.46) представляють собою одне квазіконформне відображення

$$\omega(z) = x + i \left(y \pm \int_0^x \frac{2\nu(t)}{\sqrt{1-\nu^2(t)}} dt \right) \quad (4.70)$$

комплексної площини $\mathbf{C}$ на себе, з комплексною дилатацією μ , нормованою наступним чином $\omega(0) = 0$, $\omega(i) = i$, $\omega(\infty) = \infty$.

Оскільки $J_{\omega}(z) \equiv 1$, можна застосувати наслідок 4.1.2 для представлення розв'язку рівняння (4.68) у вигляді

$$u(z) = T(\omega(z)),$$

де $T(w)$ задовольняє рівнянню

$$\Delta T(w) = T^q(w), \quad w = \xi + i\eta.$$

Отже, ми бачимо, що функція

$$T(w) = \gamma \eta^{\frac{2}{1-q}}, \quad \text{якщо } \eta > 0$$

і $T(w) = 0$, якщо $\eta \leq 0$ задовольняє наведеним вище рівнянням. Таким

чином, ми приходимо до необхідного розв'язку рівняння (4.68):

$$u(x, y) = \gamma \left(y \pm \int_0^x \frac{2\nu(t)}{\sqrt{1-\nu^2(t)}} dt \right)^{\frac{2}{1-q}}, \quad \text{якщо } y > \varphi_{\pm}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

і $u(z) = 0$, якщо $x \leq \varphi_{\pm}(x)$, де

$$\gamma = \left(\frac{(1-q)^2}{2(1+q)} \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad \varphi_{\pm}(x) = \pm \int_0^x \frac{2\nu(t)dt}{\sqrt{1-\nu^2(t)}}.$$

□

Перевіримо цей розв'язок прямим обчисленням. Оскільки

$$u(x, y) = \gamma \left(y - \int_0^x a_{12}(t)dt \right)^{\frac{2}{1-q}},$$

ми можемо побачити, що

$$u_x = -a_{12}\gamma \frac{2}{1-q} (y - \varphi_+(x))^{\frac{1+q}{1-q}}, \quad \text{і } u_y = \gamma \frac{2}{1-q} (y - \varphi_+(x))^{\frac{1+q}{1-q}}.$$

Це дає

$$\begin{aligned} a_{11}u_x + a_{12}u_y &= -a_{12}\gamma \frac{2}{1-q} (y - \varphi_+(x))^{\frac{1+q}{1-q}} + \\ &\quad + a_{12}\gamma \frac{2}{1-q} (y - \varphi_+(x))^{\frac{1+q}{1-q}} = 0. \end{aligned}$$

З іншого боку, оскільки $a_{22} - a_{12}^2 = 1$, ми отримаємо

$$a_{12}u_x + a_{22}u_y = \gamma \frac{2}{1-q} (y - \varphi_+(x))^{\frac{1+q}{1-q}}.$$

Таким чином,

$$\operatorname{div} (A(z)\nabla u) = (a_{12}u_x + a_{22}u_y)'_y = \gamma^q (y - \varphi_+(x))^{\frac{2q}{1-q}} = u^q,$$

що дає можливість закінчити перевірку.

4.2. Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона

Як було показано в попередньому підрозділі, дослідження розв'язків напівлінійного дивергентного рівняння вигляду $\operatorname{div} [A(z)\nabla u(z)] = f(u)$ зводиться, зокрема, до дослідження квазілінійного рівняння Пуассона $\Delta U(\omega) = J(\omega) \cdot f(U(\omega))$. В даному підрозділі ми будемо досліджувати більш загальну задачу, а саме існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона

$$\Delta U(z) = h(z) \cdot f(U(z)) \quad (4.71)$$

в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексної площини $\mathbb{C}$ з неперервними граничними даними, де функція $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ належить простору $L^p(\mathbb{D})$ при деяких $p > 1$, і неперервна функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0, \quad (4.72)$$

без припущень про знак і нулі правої частини в (4.71). Проаналізуємо, наскільки ступінь регулярності розв'язку залежить від ступеня інтегрованості множника h .

З одного боку, інтерес до цієї теми добре відомий як з чисто теоретичної точки зору, через його глибокі зв'язки з лінійним і нелінійним гармонічним аналізом, а також численні застосування рівнянь цього типу в різних областях фізики, диференціальної геометрії, логістичних задач і т.ін. [27, 64, 75, 111, 113, 118]. Зокрема, в монографії М. Маркуса і Л. Верона [118] можна знайти вичерпний аналіз задачі Діріхле для рівняння

$$\Delta U(z) = f(z, U(z)) \quad (4.73)$$

в гладкій (C^2) області D із $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, з граничними даними в L^1 . Тут $t \rightarrow f(\cdot, t)$ є неперервним відображенням із $\mathbb{R}$ в ваговий простір Лебега $L^1(D, \rho)$, де $\rho(z) = \operatorname{dist}(z, \partial D)$ і $z \rightarrow f(z, \cdot)$ є неспадною функцією для довільного $z \in D$, $f(z, 0) \equiv 0$, і такою, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(z, t)}{t} = \infty \quad (4.74)$$

рівномірний по параметру z в компактних підмножинах D .

З іншої сторони, рівняння (4.71) природно виникають при вивченні

деяких напівлінійних рівнянь в дивергентній формі. Дійсно, в [86] встановлений факт, що в довільних однозв'язних областях $D \subset \mathbf{C}$, розв'язки напівлінійних рівнянь

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = f(u(z)), z \in D \quad (4.75)$$

з відповідними матричними функціями $A(z)$ можна представити у вигляді композиції $u = U \circ \omega$, де ω є квазіконформним відображенням D на $\mathbb{D}$ узгодженим з A і u розв'язок рівняння (4.71) з $h = J$. Тут J позначає якобіан оберненого відображення ω^{-1} . Отже результати про регулярні розв'язки для рівнянь (4.71) представлені в цьому розділі і всебічно досліджені теорією квазіконформних відображень на площині [3, 26, 98, 115, 119], є гарною основою для подальшого вивчення рівняння (4.75). Останнє відкриває можливість використання нового підходу до вивчення низки напівлінійних рівнянь математичної фізики в анізотропних і неоднорідних середовищах.

4.2.1. Потенціали та рівняння Пуассона. Нехай $\mathbb{D}$ є одиничним кругом в комплексній площині $\mathbf{C}$. Для z і $w \in \mathbb{D}$ з $z \neq w$, встановлено

$$G(z, w) := \log \left| \frac{1 - z\bar{w}}{z - w} \right| \quad \text{і} \quad P(z, e^{it}) := \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2}, \quad (4.76)$$

де $G(z, w)$ – функція Гріна і $P(z, e^{it})$ – ядро Пуассона в $\mathbb{D}$. Якщо $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$ і $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$, тоді розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta f(z) = g(z), \quad (4.77)$$

що задовольняє граничну умову $f|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, відомо за формулою

$$f(z) = \mathcal{P}_\varphi(z) - \mathcal{G}_g(z) \quad (4.78)$$

де [102, с.118-120],

$$\mathcal{P}_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) \varphi(e^{-it}) dt, \quad \mathcal{G}_g(z) = \int_{\mathbb{D}} G(z, w) g(w) dm(w). \quad (4.79)$$

Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ є оператором Лапласа і $dm(w)$ відповідає мірі Лебега в $\mathbf{C}$.

У цьому підрозділі ми пропонуємо представлення розв'язків рівнян-

ня Пуассона у вигляді потенціалу Ньютона, більш зручного для нашого дослідження, і на цій основі доведемо існування, представлення і твердження про регулярність розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона при відповідних умовах інтегрованості джерела g .

Згідно Визначення 3.1.1 в [132], задана скінчена борелевська міра ν на $\mathbf{C}$ з компактним носієм, її потенціал є функцією $p_\nu : \mathbf{C} \rightarrow [-\infty, \infty)$, визначеною за формулою

$$p_\nu(z) = \int_{\mathbf{C}} \ln |z - w| d\nu(w). \quad (4.80)$$

Зауваження 4.2.1. Функція p_ν є субгармонічною [132, Теорема 3.1.2] і, отже, вона локально інтегровна в $\mathbf{C}$ [132, Теорема 2.5.1]. Більш того, p_ν є гармонічним зовні носія ν .

Це визначення можна поширити на кінцеві заряди ν з компактним носієм, тобто дійсні сигма-адитивні функції на борелевських множинах в $\mathbf{C}$, оскільки $\nu = \nu^+ - \nu^-$, де ν^+ і ν^- борелевські міри згідно відомого розкладу Джордана [114, Теорема 0.1].

Одним із ключових фактів в цього підрозділу є наступне твердження, яке випливає з теореми в [132].

Пропозиція 4.2.1. Нехай ν є скінченим зарядом з компактним носієм в $\mathbf{C}$. Тоді

$$\Delta p_\nu = 2\pi \cdot \nu \quad (4.81)$$

в сенсі розподілу, тобто

$$\int_{\mathbf{C}} p_\nu(z) \Delta \psi(z) d m(z) = 2\pi \int_{\mathbf{C}} \psi(z) d \nu(z) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{C}). \quad (4.82)$$

Як зазвичай, $C_0^\infty(\mathbf{C})$ позначає клас всіх нескінченно диференційовних функцій $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм в $\mathbf{C}$.

Якщо $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою функцією з компактним носієм і

$$\nu(B) := \int_B g(z) d m(z) \quad (4.83)$$

для будь-якої борелевської множини B із $\mathbf{C}$, тоді g називається щільністю

заряду ν і потенціал Ньютона g є функцією

$$N_g(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln |z - w| g(w) dm(w). \quad (4.84)$$

Наслідок 4.2.1. Якщо $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною функцією з компактим носієм, то

$$\Delta N_g = g \quad (4.85)$$

в сенсі теорії розподілу, тобто,

$$\int_{\mathbb{C}} N_g(z) \Delta \psi(z) dm(z) = \int_{\mathbb{C}} \psi(z) g(z) dm(z) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}). \quad (4.86)$$

Тепер, зсув множини $E \subset \mathbb{C}$ на комплексний вектор $\Delta z \in \mathbb{C}$ це множина

$$E + \Delta z := \{ \xi \in \mathbb{C} : \xi = z + \Delta z, z \in E \}.$$

Наступне твердження про неперервність в середньому функцій $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ в $L^q(\mathbb{C})$, $q \in [1, \infty)$, відносно зсуву, корисне для вивчення потенціалу Ньютона. Його доведення аналогічно доведенню його одновимірною аналога в [135, Теорема 9.5]. Зважаючи на важливість ми повторимо його тут з відповідною модифікацією.

Лема 4.2.1. Нехай $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ в просторі $L^q(\mathbb{C})$, $q \in [1, \infty)$. Тоді

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}} |\psi(z + \Delta z) - \psi(z)|^q dm(z) = 0. \quad (4.87)$$

Доведення. Для цієї мети ми встановимо $\psi_\zeta(z) = \psi(z - \zeta)$ для всіх ζ и $z \in \mathbb{C}$ і доведемо, що представлення $\zeta \mapsto \psi_\zeta$ є рівномірно неперервним відображенням $\mathbb{C}$ на $L^q(\mathbb{C})$ для $\psi \in L^q(\mathbb{C})$.

Дійсно, зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді існує неперервна функція $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ з її компактом в закритому крузі $\mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ така, що [135, Теорема 3.14]

$$\|\psi - \varphi\|_q < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу рівномірної неперервності φ , існує $\delta > 0$ таке, що

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi_*)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot (2\pi R^2)^{-\frac{1}{q}},$$

якщо $|\xi - \xi_*| < \delta$. Тоді ми маємо, що

$$\|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_*}\|_q < \frac{\varepsilon}{3},$$

якщо $|\xi - \xi_*| < \delta$. Нарешті, за нерівністю трикутника та інваріантністю L^q – норми відносно зсуву в $\mathbf{C}$ ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} \|\psi_\xi - \psi_{\xi_*}\|_q &\leq \|\psi_\xi - \varphi_\xi\|_q + \|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_*}\|_q + \|\varphi_{\xi_*} - \psi_{\xi_*}\|_q = \\ &= \|(\psi - \varphi)_\xi\|_q + \|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_*}\|_q + \|(\varphi - \psi)_{\xi_*}\|_q = \|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_*}\|_q + 2\|\varphi - \psi\|_q < \varepsilon, \end{aligned}$$

якщо $|\xi - \xi_*| < \delta$. Таким чином, приходимо до необхідного висновку. $\square$

Теорема 4.2.1. *Нехай $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ із $L^p(\mathbf{C})$, $p > 1$, з компактним носієм. Тоді N_g є неперервним. Сукупність $\{N_g\}$ рівноступенєво неперервна на компактах в $\mathbf{C}$, якщо сукупність $\{g\}$ обмежена нормою в $L^p(\mathbf{C})$ з носієм на фіксованому крузі K . Крім того, згідно останньої гіпотези, на кожній компактній множині S в $\mathbf{C}$*

$$\|N_g\|_C \leq M \cdot \|g\|_p, \quad (4.88)$$

де M – стала, що залежить від K , S і p .

Доведення. Згідно нерівності Гьольдера $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ ми маємо, що

$$\begin{aligned} |N_g(z) - N_g(\zeta)| &\leq \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_K |\ln|z - w| - \ln|\zeta - w||^q dm(w) \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_{\mathbf{C}} |\psi_\zeta(\xi + \Delta z) - \psi_\zeta(\xi)|^q dm(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

де $\xi = \zeta - w$, $\Delta z = z - \zeta$, $\psi_\zeta(\xi) := \chi_{K+\zeta}(\xi) \ln|\xi|$. Отже, перші 2 висновки випливають із леми 4.2.1 оскільки функція $\ln|\xi|$ належить до класу $L^q_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для всіх $q \in [1, \infty)$.

Третій висновок, аналогічно, випливає з прямої оцінки

$$|N_g(\zeta)| \leq \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_K |\ln|\zeta - w||^q dm(w) \right]^{\frac{1}{q}} = \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_{\mathbf{C}} |\psi_\zeta(\xi)|^q dm(\xi) \right]^{\frac{1}{q}},$$

оскільки останній інтеграл є неперервним в $\zeta \in \mathbf{C}$. Дійсно, за нерівністю

трикутника для норми в $L^q(\mathbf{C})$ ми бачимо, що

$$|\|\psi_\zeta\|_q - \|\psi_{\zeta_*}\|_q| \leq \|\psi_\zeta - \psi_{\zeta_*}\|_q = \left\{ \int_{\Delta} |\ln |\xi||^q dm(\xi) \right\}^{\frac{1}{q}}$$

де Δ — позначає симетричну різницю кругів $K + \zeta$ і $K + \zeta_*$. Таким чином, твердження випливає з абсолютної неперервності невизначеного інтегралу $\int_{\mathcal{E}} |\ln |\xi||^q dm(\xi)$ вздовж вимірних множин $\mathcal{E}$ із $\mathbf{C}$. $\square$

Відповідне твердження про неперервність інтегралів потенціального типу в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, може бути знайдено в [147, Теорема 1.6.1].

Пропозиція 4.2.2. *Існують функції $g \in L^1(\mathbf{C})$ з компактним носієм, чий потенціал N_g не є неперервними, більш того, $N_g \notin L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{C})$.*

Доведення. Дійсно, розглянемо функцію

$$g(z) = \omega(|z|), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad g(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

де

$$\omega(t) = 1/t^2(1 - \ln t)^\alpha, \quad t \in (0, 1], \quad \alpha \in (1, 2), \quad \omega(0) = \infty.$$

Поклавши $\Omega(t) = t \cdot \omega(t)$, ми бачимо, що, по-перше,

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |g(w)| dm(w) = 2\pi \int_0^1 \Omega(t) dt = 2\pi \int_0^1 \frac{d \ln t}{(1 - \ln t)^\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha - 1}$$

і, по-друге,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &:= N_g(0) = \int_0^1 \Omega(t) \ln t dt = \\ &= \left[\ln t \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left(\left[\frac{\ln t}{(1 - \ln t)^{\alpha-1}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{t(1 - \ln t)^{\alpha-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left[(1 - \ln t)^{1-\alpha} - \frac{3-\alpha}{2-\alpha} \cdot (1 - \ln t)^{2-\alpha} \right]_0^1 = -\infty. \end{aligned}$$

□

Наступна теорема про потенціали Ньютона є важливою при дослідженні регулярності розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Теорема 4.2.2. *Нехай $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ має обмежений носій. Якщо $g \in L^1(\mathbf{C})$, тоді $N_g \in L^r_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для всіх $r \in [1, \infty)$, $N_g \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для всіх $q \in [1, 2)$ і існують узагальнені похідні по Соболеву $\frac{\partial^2 N_g}{\partial z \partial \bar{z}}$ і $\frac{\partial^2 N_g}{\partial \bar{z} \partial z}$ такі, що задовольняють рівностям*

$$4 \cdot \frac{\partial^2 N_g}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta N_g = 4 \cdot \frac{\partial^2 N_g}{\partial \bar{z} \partial z} = g \quad \text{м.в. в } \mathbf{C}. \quad (4.89)$$

Якщо $g \in L^p(\mathbf{C})$, $p > 1$, тоді $N_g \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbf{C})$, $\Delta N_g = g$ м.в. і, більш того, $N_g \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для $q > 2$, отже, N_g локально неперервно по Гольдеру. Якщо $g \in L^p(\mathbf{C})$, $p > 2$, тоді $N_g \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для $\alpha := (p-2)/p$, і для всіх $\alpha \in (0, 1)$ при $p = \infty$.

Доведення. Відмітимо, що N_g згортка $\psi * g$, де $\psi(\zeta) = \ln |\zeta|$, і тому $N_g \in L^r_{\text{loc}}(\mathbf{C})$ для всіх $r \in [1, \infty)$ [103, Наслідок 4.5.2]. Більш того, як відомо $\frac{\partial \psi * g}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} * g$ і $\frac{\partial \psi * g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} * g$ [103], і на додаток ми отримуємо за допомогою елементарних обчислень, що

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln |z - w| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - w}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln |z - w| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

Отже,

$$\frac{\partial N_g(z)}{\partial z} = \frac{1}{4} \cdot Tg(z), \quad \frac{\partial N_g(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \cdot \bar{T}g(z),$$

де Tg і $\bar{T}g$ є загальновідомими інтегральними операторами

$$Tg(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} g(w) \frac{dw}{z - w}, \quad \bar{T}g(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} g(w) \frac{dw}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

У зв'язку з цим нагадаємо визначення формальних комплексних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad z = x + iy.$$

Прості алгебраїчні обчислення показують, що Лапласіан

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$$

Таким чином, всі інші висновки для $g \in L^1(\mathbf{C})$ випливають з Теорем 1.13–1.14 в [152]. Якщо $g \in L^p(\mathbf{C})$, $p > 1$, тоді $N_g \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbf{C})$, $q > 2$, згідно Теорем 1.27, (6.27) в [152], отже, N_g локально неперервна по Гьольдеру [75, Теорема 8.22], і $N_g \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbf{C})$ [152, Теорема 1.36–1.37]. Якщо $g \in L^p(\mathbf{C})$, $p > 2$, тоді $N_g \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbf{C})$ з $\alpha = \frac{p-2}{p}$ [152, Теорема 1.19]. $\square$

Пропозиція 4.2.3. *Нехай функція $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна по Гьольдеру порядку $\alpha \in (0, 1)$. Тоді інтеграл типу Коші*

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt, \quad z \in \overline{\mathbb{D}},$$

також неперервний по Гьольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$ того ж самого порядку з $\Phi|_{\partial\mathbb{D}} \equiv \varphi$.

Згідно теореми 4.2.2, пропозиції 4.2.3 і знаючи формулу Пуассона [109, I.D.2], ми приходимо до наступного наслідку про існування, регулярність та представлення розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона в одиничному крузі $\mathbb{D}$, де ми припускаємо, що щільність заряду g буде розповсюджена до нуля зовні $\mathbb{D}$.

Зауваження 4.2.2. *Взагалі кажучи $N_g \notin W_{\text{loc}}^{2,1}$ для випадку $g \in L^1(\mathbf{C})$ [74, приклад 7.5, С.141]. Відмітимо також, що відповідні потенціали Ньютонa N_g в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, також належать $W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbf{C})$, якщо $g \in L^p(\mathbf{C})$ для $p > 1$ з компактним носієм, див. наприклад [75, Теорема 9.9].*

За теоремою 4.2.2 і відомою формулою Пуассона [109, I.D.2], ми приходимо до наступних висновків про існування, регулярність та представлення розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона в одиничному крузі $\mathbb{D}$, де ми припускаємо, що g повинна бути продовжена до 0 зовні $\mathbb{D}$.

Наслідок 4.2.2. *Нехай $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією і $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ належить класу $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$. Тоді функція $U := N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi$, $N_g^* := N_g|_{\partial\mathbb{D}}$ неперервна в $\overline{\mathbb{D}}$ з $U|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, належить класу $W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{D})$ і $\Delta U = g$ м.в. в $\mathbb{D}$. Більш того, $U \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{D})$ для деяких $q > 2$ і U локально неперервна по Гьольдеру. Якщо, до того ж, φ неперервна по Гьольдеру, тоді U неперервна по Гьольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$. Якщо $g \in L^p(\mathbb{D})$, $p > 2$, тоді $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ де $\alpha = (p-2)/p$.*

Зауваження 4.2.3. Неперервність по Гольдеру U для неперервної по Гольдеру φ випливає з відповідного результату для інтегралу типу Коші по одиничному колу в [152, Теорема 1.10], оскільки ядро Пуассона $P(z, e^{it}) = \operatorname{Re} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$. До того ж, слід врахувати, що узагальнений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона в класі $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{D})$ єдиний [75, Теорема 8.30]. Для початку, можна показати, що інтегральні оператори в теоремі 4.2.2 і наслідку 4.2.2 повністю неперервні (це випливає з відповідних теорем в [152], згаданих при доведенні теореми 4.2.2) [105, 106]. Але для нашої мети не достатньо того, щоб оператор Ньютона був повністю неперервним за Теоремою 4.2.1 для $p > 1$.

4.2.2. Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона в одиничному колі. Доведення теореми існування розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона спирається на відому Теорему Лере-Шаудера. Для повноти викладу приведемо необхідну для нас версію Теореми.

Теорема (Лере-Шаудера, [117]).

Нехай B є банаховим простором, і $F(\cdot, \tau) : B \rightarrow B$ є сім'єю операторів з параметром $\tau \in [0, 1]$. Припустимо, що виконані наступні умови:

(Н1) $F(\cdot, \tau)$ цілком неперервний на B для всіх $\tau \in [0, 1]$ і рівномірно неперервний відносно параметра $\tau \in [0, 1]$ на довільній обмеженій множині в B ;

(Н2) оператор $F := F(\cdot, 0)$ має скінченний набір нерухомих точок, сумарний індекс яких не дорівнює нулю;

(Н3) набір всіх нерухомих точок операторів $F(\cdot, \tau)$, $\tau \in [0, 1]$ обмежений в B .

Тоді, для розглянутого нами випадку, оператор $F(\cdot, 1)$ містить щонайменше одну нерухому точку.

При доведення наступної теореми почтаковий оператор $F(\cdot) := F(\cdot, 0) \equiv 0$. Отже F має тільки одну нерухому точку (на початку координат), а її індекс дорівнює 1 і, таким чином, гіпотеза (Н2) буде автоматично виконана.

Теорема 4.2.3. Нехай $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією класу $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією

такою, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (4.90)$$

Тоді існує неперервна функція $U : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $U|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, $U|_{\mathbb{D}} \in W_{\text{loc}}^{2,p}$, яка задовольняє рівнянню

$$\Delta U(z) = h(z) \cdot f(U(z)) \quad \text{для м.в. } z \in \mathbb{D}. \quad (4.91)$$

Більш того, $U \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{D})$ для деяких $q > 2$ і U – локально неперервна по Гольдеру в $\mathbb{D}$. Якщо φ неперервна по Гольдеру, тоді U неперервна по Гольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$. Більш того, якщо $p > 2$, тоді $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ де $\alpha = (p-2)/p$.

Зокрема, $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ для всіх $\alpha \in (0,1)$, якщо $h \in L^\infty(\mathbb{D})$. Якщо φ неперервна по Гольдеру на $\partial\mathbb{D}$ з деяким показником $\beta \in (0,1)$, тоді U неперервна по Гольдеру $\overline{\mathbb{D}}$ з тим же показником.

Доведення. Якщо $\|h\|_p = 0$ або $\|f\|_C = 0$, тоді інтеграл Пуассона $\mathcal{P}_\varphi$ дає необхідний розв'язок задачі Діріхле для рівняння (4.91) в [109, I.D.2]. Отже, ми можемо припустити, що $\|h\|_p \neq 0$ і $\|f\|_C \neq 0$.

Покладемо $f_*(s) = \max_{|t| \leq s} |f(t)|$, $s \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Тоді функція $f_* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ є неперервною і неспадною, більш того, $f_*(s)/s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ згідно (4.90).

Відповідно до відомого принципу максимуму Ліндельофа для гармонічної функції [81, Лема 1.1], ми отримуємо, що $\|\mathcal{P}_\varphi\|_C \leq \|\varphi\|_C$. Отже, згідно теореми 4.2.1, ми отримуємо сім'ю операторів $F(g; \tau) : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^p(\mathbb{D})$, $\tau \in [0, 1]$:

$$F(g; \tau) := \tau h \cdot f(N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi), \quad N_g^* := N_g|_{\partial\mathbb{D}}, \quad \forall \tau \in [0, 1] \quad (4.92)$$

яка задовольняє всім групам гіпотез Н1-Н3 теореми 1 в [117]. Дійсно:

Н1). Перш за все, $F(g; \tau) \in L^p(\mathbb{D})$ для всіх $\tau \in [0, 1]$ і $g \in L^p(\mathbb{D})$, оскільки, відповідно до теореми 4.2.1, $f(N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi)$ є неперервною функцією і, більш того, згідно (4.88)

$$\|F(g; \tau)\|_p \leq \|h\|_p |f_*(2M\|g\|_p + \|\varphi\|_C)| < \infty \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

Таким чином, згідно теореми 4.2.1 у комбінації з теоремою Арцела–Асколі [65, Теорема IV.6.7], оператори $F(g; \tau)$ цілком неперервні для кожного $\tau \in [0, 1]$ і рівномірно неперервні по відношенню до параметра $\tau \in [0, 1]$.

Н2). Показник оператора $F(g; 0)$ очевидно рівний 1.

Н3). Відповідно до рівності (4.88) і згаданого принципу максимуму, ми маємо оцінку розв'язків $g \in L^p(\mathbb{D})$ рівняння $g = F(g; \tau)$:

$$\|g\|_p \leq \|h\|_p |f_*(2M \|g\|_p + \|\varphi\|_C)| \leq \|h\|_p |f_*(3M \|g\|_p)|$$

для всіх $\|g\|_p \geq \|\varphi\|_C/M$, тобто тоді повинна виконуватись нерівність

$$\frac{|f_*(3M \|g\|_p)|}{3M \|g\|_p} \geq \frac{1}{3M \|h\|_p}, \quad (4.93)$$

і тому $\|g\|_p$ повинний бути обмеженим з урахуваннями умов (4.90).

Таким чином, відповідно до теореми 1 в [117] існує функція $g \in L^p(\mathbb{D})$ така, що $g = F(g; 1)$ і, відповідно до наслідку 4.2.2, функція $U := N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi$ дає необхідний розв'язок задачі для квазілінійного рівняння Пуассона (4.91). $\square$

4.2.3. Задача Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона в довільних гладких областях. Випадок довільних гладких областей можна звести до випадку одиничного кола на основі фундаментальних результатів комплексного аналізу для граничної поведінки конформних відображень.

Теорема 4.2.4. *Нехай D є гладкою жордановою областю в $\mathbb{C}$, $\Phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією в класі $L^p(D)$, $p > 1$, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, що задовольняє умову (4.90).*

Тоді існує неперервна функція $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ з $u|_{\partial D} = \Phi$, $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$,

$$\Delta u(\zeta) = H(\zeta) \cdot f(u(\zeta)) \quad (4.94)$$

для практично всіх $\zeta \in D$. Більш того, $u \in W_{\text{loc}}^{1,q}(D)$ для деяких $q > 2$ та u є локально неперервною по Гьольдеру в D . Якщо додатково Φ неперервна по Гьольдеру, тоді u неперервна по Гьольдеру в $\overline{D}$. Більш того, якщо $p > 2$, тоді $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ де $\alpha = (p - 2)/p$.

Зокрема, $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ для всіх $\alpha \in (0, 1)$, якщо $h \in L^\infty(D)$. Якщо додатково Φ неперервна по Гьольдеру на ∂D з деяким порядком $\beta \in (0, 1)$, тоді u неперервна по Гьольдеру в $\overline{D}$ того ж порядку.

Доведення. Нехай ω є конформним відображенням D на $\mathbb{D}$. Згідно теореми Каратеодорі-Осгуда-Тейлора, ω може бути продовжена до гомеоморфізму $\tilde{\omega}$ для $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{D}}$ [32, 126, 5] і [61, Теорема 3.3.2]. Тоді, представляючи

$\varphi = \Phi \circ \tilde{\omega}^{-1}|_{\partial\mathbb{D}}$, ми можемо побачити, що функція $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна. Нехай $h = J \cdot H \circ \Omega$, де Ω обернене відображення $\omega^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D$ і J його якобіан $J = |\Omega'|^2$. Згідно відомого результату Варшавського [159, Теорема 2], його похідна Ω' продовжується неперервно на $\overline{\mathbb{D}}$. Отже, якобіан J обмежений і функція h із того ж класу в $\mathbb{D}$, що і H в D . Нехай U є розв'язком задачі Діріхле, відповідно до теореми 4.2.3, для рівняння (4.91) з заданими φ і h . Звернемо увагу, що представлення $\omega' = 1/\Omega' \circ \omega$ може бути також продовжено неперервно на $\overline{D}$, оскільки $\Omega' \neq 0$ на $\partial\mathbb{D}$ [159]. Таким чином, $u = U \circ \omega$ — шуканий розв'язок задачі Діріхле для рівняння (4.94). $\square$

4.3. Задача Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь

4.3.1. Задача Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь в анізотропних та неоднорідних середовищах. За доведеною вище теоремою факторизації 4.1.1 [86], вивчення напівлінійних рівнянь (4.75) в жордановій області D за допомогою відповідної квазіконформної заміни змінних приводиться до вивчення відповідного квазілінійного рівняння Пуассона (1.42) в одиничному крузі $\mathbb{D}$.

Теорема 4.3.1. *Нехай D є жордановою областю в $\mathbb{C}$, що задовольняє квазігіперболичній граничній умові, $A \in M_K^{2 \times 2}(D)$, $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, і нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією такою, що*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (4.95)$$

Тоді існує слабкий розв'язок $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння (4.75), який локально неперервний по Гьольдеру в D і неперервний в $\overline{D}$ з $u|_{\partial D} = \varphi$. Якщо, зокрема φ неперервна по Гьольдеру, тоді u неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$.

Доведення. Згідно Теорема 4.1.1, якщо u є слабким розв'язком (4.75), тоді $u = U \circ \omega$, де ω є квазіконформним відображенням D на одиничний круг $\mathbb{D}$ узгодженим з A і U є слабким розв'язком рівняння (4.91) з $h = J$, де J визначається, як якобіан оберненого відображення ω^{-1} . Також легко побачити, що якщо U є слабким розв'язком (4.91) з $h = J$, тоді $u = U \circ \omega$ є слабким розв'язком рівняння Пуассона (4.75). Це дозволяє нам привести задачу Діріхле до рівняння (4.75) з неперервною граничною функцією φ в однозв'язній жордановій області D до задачі Діріхле для рівняння (4.91) в одиничному крузі $\mathbb{D}$ з неперервними граничними функціями $\psi = \varphi \circ \omega^{-1}$. Насправді, ω поширюється на гомеоморфізм $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{D}}$ [115, Теорема I.8.2]. Таким чином, функція ψ коректно визначена і дійсно неперервна на одиничному крузі.

Добре відомо, що квазіконформне відображення ω локально неперервне по Гьольдеру в D [24, Теорема 3.5]. Беручи до уваги той факт, що D є жордановою областю в $\mathbb{C}$, що задовольняє квазігіперболичній граничній умові, ми можемо показати, що обидва відображення ω і ω^{-1} неперервні по Гьольдеру в $\overline{D}$ і $\overline{\mathbb{D}}$, відповідно. Насправді, $\omega = H \circ \Omega$, де Ω є конформним (рімановим) відображенням D на $\mathbb{D}$ і H є квазікон-

формним відображенням $\mathbb{D}$ на себе. Відображення Ω і Ω^{-1} неперервне по Гьольдеру в $\overline{D}$ і в $\overline{\mathbb{D}}$, відповідно теореми 4.2.1 та її наслідків. Використовуючи, принцип відображення H можна поширити на квазіконформні відображення S на себе [115, I.8.4], і, отже, H і H^{-1} є також неперервними по Гьольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$ [24, Теорема 3.5]. Звідки випливає неперервність по Гьольдеру ω і ω^{-1} в закритих областях.

Наприкінці, легко побачити, що якщо φ неперервна по Гьольдеру, тоді ψ така ж сама, і всі висновки теореми 4.3.1 випливають із теореми 4.2.3. $\square$

Наслідок 4.3.1. *Зокрема, у випадку виконання умов теореми 4.3.1 для D , φ і f , існує слабкий розв'язок U квазілінійного рівняння Пуассона*

$$\Delta U(z) = f(U(z)) \quad \text{для м.в. } z \in \mathbb{D}, \quad (4.96)$$

який локально неперервний по Гьольдеру в D і неперервний в $\overline{D}$ з $U|_{\partial D} = \varphi$. Якщо, зокрема, φ неперервна по Гьольдеру, тоді U – неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$.

Нагадаємо, що область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, називається такою, що задовольняє (A)–умові, якщо

$$\text{mes } D \cap B(\zeta, \rho) \leq \Theta_0 \cdot \text{mes } B(\zeta, \rho) \quad \forall \zeta \in \partial D, \rho \leq \rho_0 \quad (4.97)$$

для деяких Θ_0 і $\rho_0 \in (0, 1)$ [112, 1.1.3]. Нагадаємо також, що область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задовольняє умові зовнішнього конуса, якщо кожної точки ∂D , можна торкнутися вершиною конуса. Відзначимо, що область, яка задовольняє умові зовнішнього конуса, задовольняє (A)–умові.

Зауваження 4.3.1. *Відмітимо, що квазідиски D задовольняють (A)–умові, оскільки для них справедлива нерівність [7, Теорему 2.4]*

$$\text{mes } D \cap B(\zeta, \rho) \geq \Theta_* \cdot \text{mes } B(\zeta, \rho) \quad \forall \zeta \in \partial D, \rho \leq \text{diam } D. \quad (4.98)$$

Мають, перший приклад однозв'язної плоскої області D з квазігіперболічною граничною умовою, яка не є квазідиском, був побудований в [11, Теорема 2]. Тим не менш, ця область задовольняла (A)–умові. Можливо, одним з найпростіших прикладів області D з квазігіперболічною граничною умовою і без (A)–умови, є об'єднання 3 відкритих кругів з радіусом 1 і центрами в точках 0 і $1 \pm i$. Зрозуміло, що область має нульовий внутрішній кут в своїй граничній точці 1 і згідно зауваження 4.3.1 вона не є квазідиском.

4.3.2. Деякі наслідки, пов'язані з застосуваннями. Нагадаємо, що математичне моделювання деяких задач реакції дифузії призводить до вивчення відповідної задачі Діріхле для рівняння (4.71) з заданою правою частиною.

Розглядаючи [4], можна отримати нелінійну систему для щільності u і температури T реагента. Позбуваючись T система може бути приведена до скалярної задачі для визначення концентрації

$$\Delta u = \lambda \cdot f(u) \quad (4.99)$$

де λ означає додатну константу. Виявляється, що щільність реагенту u може бути нульовою в замкненій внутрішній частині області D_0 і називається *мертвим ядром*. Якщо, наприклад, $f(u) = u^q$, $q > 0$, то конкретизація результатів [64, Глава 1] показує, що мертве ядро може існувати тоді і тільки тоді, коли $0 < q < 1$ і λ достатньо великі.

Отже, згідно теореми 4.3.1 ми отримуємо наступне:

Теорема 4.3.2. *Нехай D є жордановою областю в $\mathbb{C}$, що задовольняє квазігіперболічній граничній умові, $A \in M_K^{2 \times 2}(D)$, $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді існує слабкий розв'язок $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ напівлінійного рівняння*

$$\operatorname{div} [A(z) \nabla u(z)] = u^q(z), \quad 0 < q < 1,$$

локально неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$ з $u|_{\partial D} = \varphi$. Зокрема, якщо φ неперервна по Гьольдеру, тоді u неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$.

Також ми отримали наступний наслідок із теореми 4.2.4.

Наслідок 4.3.2. *Нехай D є гладкою жордановою областю в $\mathbb{C}$ і $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді існує слабкий розв'язок U квазілінійного рівняння Пуассона*

$$\Delta U(z) = U^q(z), \quad 0 < q < 1,$$

який неперервний в $\overline{D}$ з $U|_{\partial D} = \varphi$ і $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ для всіх $\alpha \in (0, 1)$. Якщо, зокрема, φ неперервна по Гьольдеру з деяким порядком $\beta \in (0, 1)$, тоді розв'язок U також неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$ з тим же порядком.

Нагадаємо також, що деякі математичні моделі нагрітої плазми описуються нелінійними рівняннями вигляду (4.99). Дійсно відомо, що деякі з них мають вигляд $\Delta \psi(u) = f(u)$ з $\psi'(0) = +\infty$ і $\psi'(u) > 0$, якщо $u \neq 0$

(наприклад, $\psi(u) = |u|^{q-1}u$ при $0 < q < 1$) [10], [64, с. 4]. Після заміни функції $U = \psi(u) = |u|^q \cdot \text{sign } u$, ми маємо, що $u = |U|^Q \cdot \text{sign } U$, $Q = 1/q$, і, з вибором $f(u) = |u|^{q^2} \cdot \text{sign } u$, ми приходимо до рівняння $\Delta U = |U|^q \cdot \text{sign } U = \psi(U)$.

Наслідок 4.3.3. *Нехай D є гладкою областю в $\mathbf{C}$ і $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді існує слабкий розв'язок U квазілінійного рівняння Пуассона*

$$\Delta U(z) = |U(z)|^{q-1}U(z), \quad 0 < q < 1,$$

який неперервний в $\overline{D}$ з $U|_{\partial D} = \varphi$ і $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ для довільного $\alpha \in (0,1)$. Якщо, зокрема, φ неперервна по Гьольдеру з деяким порядком $\beta \in (0,1)$, тоді розв'язок U також неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$ з тим же порядком.

В теорії горіння наведено наступне модельне рівняння

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \cdot \Delta u + e^u, \quad t \geq 0, \quad z \in D, \quad (4.100)$$

яке займає особливе місце [9], [130] і посилання в них. Тут $u \geq 0$ – це температура середоща і δ є визначеним додатним параметром. Обмежимося стаціонарними розв'язками (4.100) і узагальненням для анізотропних і неоднородних середовищ, хоча наш підхід дозволяє також розглядати параболічний випадок. А саме, згідно теореми 4.3.1 маємо:

Теорема 4.3.3. *Нехай D є жордановою областю в $\mathbf{C}$, що задовольняє квазігіперболічній граничній умові, $A \in M_K^{2 \times 2}(D)$, $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді існує слабкий розв'язок $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ напівлінійного рівняння*

$$\text{div} [A(z) \nabla U(z)] = \delta \cdot e^{-U(z)}, \quad \delta > 0,$$

неперервний по Гьольдеру в D і неперервний в $\overline{D}$ з $u|_{\partial D} = \varphi$. Якщо, зокрема, φ неперервна по Гьольдеру, тоді розв'язок u неперервний по Гьольдеру в $\overline{D}$.

Наприкінці, можна отримати також наступний наслідок із теореми 4.2.4.

Наслідок 4.3.4. *Нехай D є гладкою жордановою областю в $\mathbf{C}$ і $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Тоді існує слабкий розв'язок U квазілінійного рівняння Пуассона*

$$\Delta U(z) = \delta \cdot e^{U(z)}, \quad \delta > 0,$$

який неперервний в $\overline{D}$ з $U|_{\partial D} = \varphi$ і $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ для всіх $\alpha \in (0, 1)$. Якщо, зокрема, φ неперервна по Гольдеру з деяким порядком $\beta \in (0, 1)$, тоді розв'язок U також неперервний по Гольдеру в $\overline{D}$ з тим же порядком.

Висновки до четвертого розділу

1. Доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення.
2. Для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними.
3. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з не виродженими граничними компонентами.
4. Дано застосування отриманих результатів до математичних моделей теорії горіння, стану плазми та процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах.

Загальні висновки

1. Побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу.
2. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.
3. Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.
4. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаної відносно похідної.
5. Доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення.
6. Для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з невідродженими граничними компонентами.

Предметний покажчик

Квазілінійне рівняння Пуассона	с. 296
Матриця Грама	с. 222
Напівлінійне еліптичне рівняння дивергентного виду	с. 278
Рівняння Бельтрамі	с. 50
Рівняння для породжуючих констант	с. 44
Рівняння Мат'є	с. 218
Рівняння руху супутника	с. 181
Рівняння типу Дюффінга	с. 97
у випадку параметричного резонансу	
Рівняння типу Дюффінга	с. 198
з параметричним збуренням	
Рівняння типу Льєнара	с. 237
Рівняння типу Релея	с. 178
Рівняння типу Рікатті	с. 120
Рівняння типу Хілла	с. 200
Якобіан перетворення	с. 95

Бібліографія

- [1] Abraham G.T., Chatterjee A. Approximate asymptotics for a nonlinear Mathieu equation using harmonic balance based averaging. *Nonlinear Dynam.* 2003. V. 31, No. 4. P. 347–365.
- [2] Adams F.C., Bloch A.M. Hill's equation with random forcing terms. *SIAM J. Appl. Math.* 2008. V. 68, No. 4. P. 947–980.
- [3] Ahlfors L.V. Lectures on quasiconformal mappings. *Van Nostrand Mathematical Studies*. 1966. V. 10. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London.
- [4] Aris R. The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Volumes I and II. Clarendon Press: Oxford, 1975.
- [5] Arsove M.G. The Osgood-Taylor-Caratheodory theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1968. V. 19. P. 38–44.
- [6] Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. *Princeton Mathematical Series*. 2009. V. 48. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [7] Astala K., Koskela P. Quasiconformal mappings and global integrability of the derivative. *J. Anal. Math.* 1991. V. 57. P. 203–220.
- [8] Bandle C. and Marcus M. Asymptotic behavior of solutions and their derivative for semilinear elliptic problems with blow-up on the boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 1995. V. 12, No. 2. P. 155–171.
- [9] Barenblatt G.I., Zel'dovic Ja.B., Librovich V.B., Mahviladze G.M. The mathematical theory of combustion and explosions. New York : Consult. Bureau, 1985.
- [10] Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York : Elsevier, 1972.

- [11] Becker J., Pommerenke Ch. Hölder continuity of conformal mappings and nonquasiconformal Jordan curves. *Comment. Math. Helv.* 1982. V. 57, No. 2. P. 221–225.
- [12] Belov A. A., Kalitkin N. N., Kuzmina L. V. Chemical kinetics simulation in gases. *Math. Models Comput. Simul.* 2017. V. 9, No.1. P. 24–39.
- [13] Blanch G. Expansion for the Odd Periodic Mathieu Functions *Trans. Amer. Math. Soc.* 1960. V. 97. P. 357–366.
- [14] Bieberbach L. $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen. *Math. Ann.* 1916. V. 7. P. 173–212.
- [15] Boichuk A.A. Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1998. V. 50, No. 2. P. 186–195.
- [16] Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Differential Equations.* 1992. No. 10. P. 1353–1358.
- [17] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equations.* 2001. V. 37, No. 4. P. 464–471.
- [18] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1998. V. 50, No. 8. P. 1162–1169.
- [19] Boichuk A.A., Panasenko E.V. Boundary-value problems for differential equations in a Banach space. *Nonlinear Oscillations.* 2009. V. 12, No. 1. P. 15–18.
- [20] Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of Perturbation Theory to the Solvability Analysis of Differential Algebraic Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2013. V. 53, No.6. P. 777–788.
- [21] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin; Boston : De Gruyter. 2016. 298 p.

- [22] Boichuk A.A., Shehda L.M. Degenerate nonlinear boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. V. 61, No.9. P. 1387–1403.
- [23] Boichuk I.A., Starkova O.V., Chuiko S.M. Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case. *Studies of the University of Žilina. Math. series*. 2009. V. 23, No.1. P. 1–8.
- [24] Bojarski B.V. Generalized solutions of a system of differential equations of the first order and elliptic type with discontinuous coefficients. *Report Dept. Math. Stat. Univ. of Jyväskylä, Jyväskylä*. 2009. V. 118; transl. from *Mat. Sb. (N.S.)*. 1957. V. 43(85). P. 451–503.
- [25] Bojarski B.V. Homeomorphic solutions of Beltrami systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*. 1955. V. 102. P. 661–664 (in Russian).
- [26] Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-lipschitz mappings in the plane. *EMS Tracts in Mathematics*. V. 19. Zürich : European Mathematical Society. 2013.
- [27] Borsuk M., Kondratiev V. Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains. *North-Holland Mathematical Library*. V. 69. Amsterdam : Elsevier Science. 2006.
- [28] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. San Francisco–London–Melbourne : Pitman Advanced Publishing Program. 1980. 178 p.
- [29] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations II. San Francisco–London–Melbourne : Pitman Advanced Publishing Program. 1982. 236 p.
- [30] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. London : Pitman Publishing Limited. 1979. 272 p.
- [31] Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. *SIAM J. Alg. Descrete Methods*. 1983. No.4. P. 517–521.
- [32] Caratheodory C. Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Ann.* 1913. V. 73. P. 305–320.

- [33] Caratheodory C. Über die Begrenzung der einfachzusammenhängender Gebiete *Math. Ann.* 1913. V. 73. P. 323–370.
- [34] Chuiko S.M. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations.* 2001. V. 37, No. 8. P. 1189–1193.
- [35] Chuiko S.M. A generalized matrix differential-algebraic equation *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.).* 2015. V. 210, No. 1. P. 9–21.
- [36] Chuiko S.M. A weakly nonlinear boundary value problem in a particular critical case. *Ukr. Math. Zh.* 2009. V. 61, No. 4. P. 548–562.
- [37] Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics.* 2016. V. 60, No. 8. P. 64–73.
- [38] Chuiko S.M. Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2017. V. 38, No. 2. P. 236–244.
- [39] Chuiko S.M. Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.).* 2015. V. 205, No. 6, P. 859–870.
- [40] Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* 2008. V. 11, No. 4. P. 585–604.
- [41] Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. V. 235, No 1. P. 2–14.
- [42] Chuiko S.M. On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. V. 220, No 5. P. 591–602.
- [43] Chuiko S.M. On the solvability of a matrix boundary-value problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory".* 2017. V. 132. P. 139–143.
- [44] Chuiko S.M. Solvability of linear matrix boundary-value problem. *Russian Mathematics.* 2018. V. 62, No. 4. P. 74–85.

- [45] Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Mathematical Journal*. 2015. V. 56, No. 4. P. 752–760.
- [46] Chuiko S.M. The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. V. 242, No. 3. P. 381–392.
- [47] Chuiko S.M. To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied Mathematics and mechanics*. 2017. V. 85, No. 1. P. 62–68.
- [48] Chuiko S.M. To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. V. 227, No. 1. P. 13–25.
- [49] Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes*. 2016. V. 17, No. 1. P. 139–150.
- [50] Chuiko S.M., Boichuk I.A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*. 2009. V. 12, No. 3. P. 405–416.
- [51] Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. V. 189, No. 5. P. 867–881.
- [52] Chuiko S.M., Chuiko A.S. On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*. 2012. V. 14, No. 3. P. 445–460.
- [53] Chuiko S.M., Chuiko A.S., Sysoev D.V. Weakly Nonlinear Matrix Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance. *Journ. of Math. Sciences*. 2016. V. 19, No. 2. P. 276–288.
- [54] Chuiko S.M., Chuiko A.S., Sysoev D.V. Weakly Nonlinear Matrix Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance. *Journ. of Math. Sciences*. 2017. V. 223, No. 3. P. 337–350.
- [55] Chuiko S.M., Chuiko E.V., Boichuk I.A. On the reduction of a Noetherian boundary-value problem to a first-order critical case *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.)*. 2015. V. 208, No. 5. P. 607–619.

- [56] Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Autonomous Noether boundary value problems not solved with respect to the derivative. *Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications* : abstracts of intern. conf. (Bishkek, Kyrgyzstan, June 17 - 23, 2018). Bishkek, Kyrgyzstan, 2018. P. 52–53.
- [57] Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Equilibrium positions of nonlinear differential algebraic systems. *Morse theory and its applications* : abstracts of Intern. Conf. dedicated to the memory and 70-th anniversary of Volodymyr Sharko. (Kyiv, September 25–28, 2019). Kyiv, 2019. P. 5.
- [58] Chuiko S., Nesmelova O., Dzuba M. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares methods. *Differential equations and control theory* : abstracts of 3-rd intern. scient. conf. (Kharkiv, September 25–27, 2018). Kharkiv, 2018. P. 18.
- [59] Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. V. 191, No. 3. P. 449–464.
- [60] Chuiko S.M., Starkova O.V. Periodic boundary value problem of Lenard type, unresolved with respect to derivative. *Intern. conf. on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : Book of abstracts. (Lviv, 20–24 September 2016). Lviv, Ukraine. P. 40.
- [61] Collingwood E.F., Lohwator A.J. The Theory of Cluster Sets. *Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*. V. 56. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1966.
- [62] Cretu N. Some computational studies of the solutions of Mathieu equation. *Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. B (N.S.)*. 2002. V. 9, No. 44. P. 101–106.
- [63] De Malafosse B. An application of the infinite matrix theory to Mathieu equation. *Comput. Math. Appl.* 2006. V. 52, No. 10-11. P. 1439–1452.
- [64] Diaz J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. *Volume I Elliptic equations, Research Notes in Mathematics*. V. 106. Boston : Pitman, 1985.
- [65] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. I. General Theory. *Pure and Applied Mathematics*. V. 7. New York, London : Interscience

- Publishers, 1958; transl. as *Lineinye operatory. Chast' I: Obshchaya teoriya*. Moscow : Inostran. Lit., 1962.
- [66] Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. N.Y. : Marcel Dekker Inc., 1999.
- [67] Federer H. *Geometric Measure Theory*. Berlin : Springer-Verlag, 1969; transl. as *Geometricheskaya teoriya mery*. Moscow : Nauka, 1987.
- [68] Frenkel D., Portugal T. Algebraic methods to compute Mathieu functions. *Laboratório Nacional de Computação Científica*. Brazil: Petrópolis. 2002. P. 1–14.
- [69] Garnett J.B., Marshall D.E. *Harmonic Measure*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2005.
- [70] Gehring F.W. Characteristic properties of quasidisks. *Seminaire de Mathématiques Supérieures*. V. 84. Montreal, Que. : Presses de l'Université de Montréal, 1982.
- [71] Gehring F.W., Hag K. The ubiquitous quasidisk. *Mathematical Surveys and Monographs*. V. 184. Providence, RI : American Mathematical Society, 2012.
- [72] Gehring F.W., Martio O. Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 1985. V. 10, P. 203–219.
- [73] Gehring F.W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Analyse Math.* 1985. V. 45. P. 181–206.
- [74] Giaquinta M., Martinazzi L. An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. *Second edition. Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]*. V. 11. Pisa : Edizioni della Normale, 2012.
- [75] Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. V. 224. Berlin : Springer-Verlag, 1983; transl. as *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka*. Moscow : Nauka, 1989.
- [76] Gol'dshtein V., Gurov L., Romanov A. Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces. *Israel J. Math.* 1995. V. 91, No. 1–3. P. 31–60.

- [77] Gol'dshtein V., Ukhlov A. About homeomorphisms that induce composition operators on Sobolev spaces. *Complex Var. Elliptic Equ.* 2010. V.55, No. 8–10, P. 833–845.
- [78] Goluzin G.M. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Providence, RI : AMS, 1969.
- [79] Gómez C.N. Periodic solutions of the Mathieu equation *Miscelánea Mat.* 1995. V. 22. P. 65–68.
- [80] Gómez C.N., Marcote G.M. High-order analytical solutions of Hill's equations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2006. V. 94. P. 197–211.
- [81] Gutlyanskii V.Ya., Martio O. Conformality of a quasiconformal mapping at a point. *J. Anal. Math.* 2003. V. 91, P. 179–192.
- [82] Gutlyanskii V., Martio O. Rotation estimates and spirals, *Conform. Geom. Dyn.* 2001. V. 5, P. 6–20.
- [83] Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a Model Semilinear Elliptic Equation in the Plane. *Український математичний вісник.* 2016. Т. 13, №. 1. С. 91-105; transl. in *Journal of Mathematical Sciences (USA)*. 2017. V. 220, No. 5. P. 603–614.
- [84] Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a quasilinear Poisson equation in the plane. *Analysis and Mathematical Physics.* 2020. V.10, No. 1. Article number: 6.
- [85] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On blow-up solutions and dead zones in semilinear equations. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. № 4. С. 9–15.
- [86] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. *Український математичний вісник.* 2017. Т. 14, №. 2. С. 161-191; transl. in *Journal of Mathematical Sciences (USA)*. 2018. V. 229, No. 1. P. 7–29.
- [87] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On semilinear equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України.* 2019. № 7. С. 9–16.

- [88] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the quasilinear Poisson equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 1. С. 3–12.
- [89] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 10. С. 9–17.
- [90] Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. Semi-linear equations and quasiconformal mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020. V. 65, No. 5. P. 823–843.
- [91] Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. Semilinear equations in the plane and quasiconformal mappings. *Доповіді НАН України* 2017. №. 1. С. 10–16.
- [92] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in the plane with measurable data. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 2. С. 12–18.
- [93] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 5. С. 10–16.
- [94] Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. To the theory of semi-linear equations in the plane. *Український математичний вісник*. 2019. Т. 16, №. 1. С. 105–140; transl. in *J. Math. Sci. (USA)*. 2019. V. 242, No. 6, P. 833–859.
- [95] Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. On asymptotically conformal curves. *Complex Variables Theory Appl.* 1994. V. 25, No. 4. P. 357–366.
- [96] Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. On the theory of the local behavior of quasiconformal mappings. *Izv. Math.* 1995. V. 59, No. 3. P. 471–498.
- [97] Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. The Geometric and Topological Theory of Functions and Mappings. Kiev : Naukova Dumka, 2011 [in Russian].
- [98] Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach. *Developments in Mathematics*. V. 26. New York etc. : Springer, 2012.

- [99] Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E. The Beltrami equations and prime ends. *Ukr. Mat. Visn.* 2015. V. 12, No. 1, P. 27–66; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 2015. V. 210, No. 1. P. 22–51.
- [100] Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. V. 214. P. 200–219.
- [101] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford, New York, Tokyo : Clarendon Press, 1993.
- [102] Hörmander L. Notions of convexity. *Progress in Mathematics*. V. 127. Boston : Birkhäuser Boston Inc, 1994.
- [103] Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. V. I. *Distribution theory and Fourier analysis*. V. 256. Berlin : Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1983; transl. as Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1, Moscow : Mir, 1986.
- [104] Ismayilova G.G The problem of the optimal control with a lower coefficient for weakly nonlinear wave equation in the mixed problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2020. Vol. 13, No. 2 P. 314–322.
- [105] Kalaj D. On some integral operators related to the Poisson equation. *Integral Equations Operator Theory*. 2012. V. 72, No. 4. P. 563–575.
- [106] Kalaj D., Vujadinovich D. The solution operator of the inhomogeneous Dirichlet problem in the unit ball. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2016. V. 144., No. 2. P. 623–635.
- [107] Keller J.B. On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Comm. Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. P. 503–510.
- [108] Kondratiev V.A. and Landis E.M. Semilinear equations of the second order with non-negative characteristic form. *Mat. Zam.* 1988. V. 44, No. 4, P. 457–468.
- [109] Koosis P. Introduction to H^p spaces. V. 115. *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998.

- [110] Kovalevskii A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E. Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations. Berlin : De Gruyter, 2016.
- [111] Kuzin I., Pohozaev S. Entire solutions of semilinear elliptic equations. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. V. 33. Basel : Birkhäuser Verlag, 1997.
- [112] Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasilinear elliptic equations. New York-London : Academic Press, 1968; transl. from Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa. Moscow : Nauka, 1964.
- [113] Landis E.M. Second order equations of elliptic and parabolic type. *Translations of Mathematical Monographs*. V. 171. Providence, RI : American Mathematical Society, 1998.
- [114] Landkof N.S. Foundations of modern potential theory. Nauka: Moscow, 1966; transl. in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. V. 180. New York–Heidelberg : Springer-Verlag, 1972.
- [115] Lehto O., Virtanen K.I. Quasiconformal mappings in the plane, 2-nd Edition. Berlin, Heidelberg, New York : Springer–Verlag, 1973.
- [116] Leontief W.W. The Structure of American Economy 1919–1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis. Oxford University Press Inc., 1951; 2nd edition enlarged., 264 p.
- [117] Leray J., Schauder Ju. Topologie et equations fonctionnelles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 1934. V. 51, No. 3. P. 45–78 (in French); transl. as *Topologiya i funktsional'nye uravneniya. Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* 1946. V. 1., No. 3-4(13-14), P. 71–95 (in Russian).
- [118] Marcus M., Veron L. Nonlinear second order elliptic equations involving measures. *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. V. 21. Berlin : De Gruyter, 2014.
- [119] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. *Springer Monographs in Mathematics*. New York : Springer, 2009.
- [120] Mathieu É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique *J. Math. pure Appl.* 1868. V. 13. P. 137–203.

- [121] Nakajima F. Nonlinear Mathieu equations. *Sapporo: Nonlinear waves*. 1995. P. 353–359.
- [122] Nashed M.Z. Generalized Inverses and Applications. New York : Academic Press, 1976. 1054 p.
- [123] Nasyrov R.M., Nasyrov S.R. Convergence of S. A. Khristianovich's approximate method for solving the Dirichlet problem for an elliptic equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1986. V. 291, No. 2. P. 294–298.
- [124] Neklyudov A.V. Behavior of solutions to Gauss–Bieberbach–Rademacher equation on plane. *Ufa Math. J.* 2014. V. 6, No. 3. P. 85–94.
- [125] Oleinik O.A. The equation $\Delta u + k(x)e^u = 0$. *Uspekhi Mat. Nauk*. 1978. V. 3, No. 2. P. 203–204.
- [126] Osgood W., Taylor E. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1913. V. 14. P. 277–298.
- [127] Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific J. Math.* 1957. V. 7. P. 1641–1647.
- [128] Perestyuk N.A., Vlasenko L.A. On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*. 2005. V. 57, No. 4. P. 458–468.
- [129] Perestyuk M.O., Cherevko I.M. Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations. *Nonlinear Oscillations*. 2001. V. 4, No. 3. P. 345–353.
- [130] Pokhozhaev S.I. On an equation of combustion theory. *Mat. Zametki*. 2010. V. 88, No. 1. P. 53–62; transl. in *Math. Notes*. 2010. V. 88, No. 1-2. P. 48–56.
- [131] Rand R., Barcilon A., Morrison T. Parametric Resonance of Hopf Bifurcation. *Nonlinear Dynamics*. 2005. V. 35. P. 411–421.
- [132] Ransford T. Potential theory in the complex plane. *London Mathematical Society Student Texts*. V. 28. Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
- [133] Reimann H.M., Rychener T. Funktionen Beschränkter mittlerer Oszillation. Berlin : Springer, 1975.

- [134] Reshetnyak Yu. G. Space Mappings with Bounded Distortion. Providence, RI : AMS, 1989.
- [135] Rudin W. Real and complex analysis. New York : McGraw-Hill Book Co., 1987.
- [136] Rutkas A.G. The Cauchy problem for the equation $Ax'(t) - Bx(t) = f(t)$. *Differ. Uravn.* 1975. V. 11, No. 11. P. 1996–2010.
- [137] Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. *Nonlinear Analysis. TMA.* 2003. V. 55, No.1–2. P. 125–139.
- [138] Saks S. Theory of the integral. Warsaw, 1937; New York : Dover Publications Inc., 1964; transl. as *Teoria integrala*. Moscow : Inostran. Lit., 1949.
- [139] Samoilenko A., Boichuk A., Chuiko S. Hybrid difference differential boundary-value problem. *Miskolc Mathematical Notes.* 2017. V. 18, No. 2. P. 1015–1031.
- [140] Samoilenko A.M., Teplinsky Yu.V. Elements of Mathematical Theory of Evolutionary Equations in Banach Spaces. Singapore : World Scientific. Series A, V. 86. 2013. 408 p.
- [141] Samoilenko A.M., Teplinskii Yu.V. Countable Systems of Differential Equations. Utrecht-Boston : VSP, 2003. 287 p.
- [142] Shadman D., Mehri B. A non-homogeneous Hill's equation. *Appl. Math. Comput.* 2005. V. 167. P. 68–75.
- [143] Shehata S.A. On the solution of Mathieu's equation with a sum of step functions. *A J. Indian Acad. Math.* 1994. V. 16, No. 2. P. 213–219.
- [144] Showalter R.E. Nonlinear Degenerate Evolution Equations and Partial Differential Equations of Mixed Type *SIAM Journal of Mathematical Analysis.* 1975. No. 6. P. 25–42.
- [145] Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics.* 2016. V. 215, No. 1. P. 163–179.
- [146] Sobolev S.L. On some transformation groups of an n -dimensional space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1941. V. 32, No. 6, P. 380–382.

- [147] Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics. *Transl. Math. Mon.* V. 90. Providence, RI : AMS, 1991.
- [148] Stanimirovic P.S., Tasic M.B. On the Leverrier-Faddeev algorithm for computing the Moore-Penrose inverse. *J. Appl. Math. Comput.* 2011. Vol. 35, No. 1–2. P. 135–141.
- [149] Torres P.J. Non-trivial periodic solutions of a non-linear Hill’s equation with positively homogeneous term. *Nonlinear Analysis.* 2006. V. 65. P. 841–844.
- [150] Ukhlov A. Mappings that generate embeddings of Sobolev spaces. *Siberian Math. J.* 1993. V. 34, No. 1. P. 165–171.
- [151] Vejvoda O. On perturbed nonlinear boundary-value problems. *Czech. Math. J.* 1961. No. 11. P. 323–364.
- [152] Vekua I.N. Generalized analytic functions. London-Paris-Frankfurt : Pergamon Press; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 1962; transl. from Obobshchennye analiticheskie funktsii. Moscow : Fiz.-Mat. Lit., 1959.
- [153] Vekua I.N. Some properties of solutions of the Gauss equation. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 1961. V. 64, P. 5–8.
- [154] Veron L. Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. Quasilinear elliptic singular problems. Hackensack, NJ : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2017.
- [155] Vodop’yanov S.K. On the regularity of mappings inverse to the Sobolev mapping. *bornik: Math.* 2012. V. 203, No. 9–10. P. 1383–1410.
- [156] Vodop’yanov S.K., Evseev N.A. Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasi-isometric mappings. *Siberian Math. J.* 2014. V. 55, No. 5. P. 817–848.
- [157] Vodop’janov S.K., Gol’dshstein V.M. Lattice isomorphisms of the spaces W_n^1 and quasiconformal mappings. *Sibirsk. Mat. Zh.* 1975. V. 16. P. 224–246.
- [158] Vodopyanov S.K., Ukhlov A. Sobolev spaces and (P, Q) –quasiconformal mappings of Carnot groups. *Siberian Math. J.* 1998. V. 39, No. 4. P. 665–682.

- [159] Warschawski S.E. On differentiability at the boundary in conformal mapping. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1961. V. 12. P. 614–620.
- [160] Whittaker E.T. On the General Solution of Mathieu's Equation. *Edinburgh Math. Soc.* 1914. V. 32. P. 75–80.
- [161] Whittaker E.T., Watson G.N. A Course in Modern Analysis, 4th ed. England, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [162] Zounes R.S., Rand R.H. Subharmonic resonance in the non-linear Mathieu equation. *Intern. J. Non-Lin. Mech.* 2002. V. 37, No. 1. P. 43–73.
- [163] Zuyev A. Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems *Automatica*. 2005. V. 41, No. 1. P. 1–10.
- [164] Абрамов А.А., Курочкин С.В. Вычисление решений уравнения Маттье и связанных с ними величин. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47, № 7. С. 414–423.
- [165] Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1991. 277 с.
- [166] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М. : Наука. 1977. 224 с.
- [167] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. М. : Изд. МЦНМО, 2009. 672 с.
- [168] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М. : Наука. 1965. 408 с.
- [169] Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Параметрические усилители и генераторы света. *УФН*. 1966. Т. 88, Вып. 3. С. 439–460.
- [170] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 367 с.
- [171] Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М. : Физматлит, 2015.
- [172] Белов А.А., Вальяников О.В., Калиткин Н.Н. Численное решение задач Коши с сингулярностями. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2019. Т. 121. 16 с.

- [173] Белов А.А., Калиткин Н.Н., Топор О.И., Федоров И.А. Уточненные аппроксимации сечений и скоростей реакций, существенных для управляемого термоядерного синтеза. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2019. Т. 122. 28 стр.
- [174] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : 1955. 448 с.
- [175] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев : Наук. думка. 1969. 248 с.
- [176] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Киев : Ин-т математики НАН Украины. 1995. 318 с.
- [177] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Нормально-разрешимые краевые задачи. Киев : Наук. думка. 2019. 628 с.
- [178] Бойчук А.А., Покутний А.А., Чистяков В.Ф. О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53, № 6. С. 958–969.
- [179] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные слабонелинейные краевые задачи. *Дифференц. уравнения*. 1992. Т. 28, № 10. С. 1668–1674.
- [180] Бойчук А.А., Шегда Л.М. Вироджені нетерові крайові задачі. *Нелінійні коливання*. 2007. Т. 10, № 3. С. 303–312.
- [181] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М. : Гостехиздат, 1956. 600 с.
- [182] Бояринцев Ю.Е., Орлова И.Ф. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск : Наука, 2006. 124 с.
- [183] Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск : Наука, 1998. 224 с.
- [184] Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М. : Связьиздат, 1935. 42 с.

- [185] Власенко Л.А., Лысенко Ю.Г., Руткас А.Г. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. *Экономическая кибернетика*. 2011. № 1–3(67–69). С. 4–9.
- [186] Власенко Л.А., Руткас А.Г. Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения. *Матем. заметки*. 1996. Т. 68, № 4. С. 597–601.
- [187] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984. 318 с.
- [188] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. : Наука, 1976.
- [189] Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Методы обчислен. Ч. II. К. : Вища школа, 1995. 432 с.
- [190] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с.
- [191] Гликлик, Ю.Е., Машков Е.Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2016. Т. 9, № 3. С. 31–40.
- [192] Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А. Введение в резонансную аналитическую механику. М. : Янус, 1999. 302 с.
- [193] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. : Наука, 1979. 432 с.
- [194] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М. : Ижевск, 2002. 560 с.
- [195] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно производной. Новосиб. : Научная книга. 1998.
- [196] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967. 472 с.
- [197] Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М. : Мир, 1988. 440 с.
- [198] Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли. *Известия вузов. Математика*. 2008. № 2. Р. 14–23.

- [199] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Факториал. 1997. 512 с
- [200] Зубова С.П. Исследование решения задачи Коши для одного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения. *Известия вузов. Математика*. 2000. № 8(459). С. 76–80.
- [201] Зубова С.П. Решение задачи Коши для двух дифференциально-алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором. *Дифференц. уравнения*. 2005. Т. 41, № 10. С. 1410–1412.
- [202] Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами. *Матем. заметки*. 2010. Т. 88, Вып. 6. С. 884–895.
- [203] Зубова С.П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной. *Докл. РАН*. 2009. Т. 428, № 4. С. 444–446.
- [204] Иванов А.П., Наджафов Т.И. Итерационный метод построения периодических решений систем с малым параметром. Проблемы механики. М. : Наука, 2003. С. 406–417.
- [205] Калмыков А.М., Коцаренко Н.Я., Кулиш В.В. Возможность параметрической генерации и усиления электромагнитных волн с частотами выше частоты волны накачки в электронных потоках. *Изв. ВУЗов, Сер. Радиоэлектроника*. 1977. Т. 20. С. 76–78.
- [206] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 744 с.
- [207] Каудерер Г. Нелинейная механика. М. : Изд.-во иностр. лит., 1961. 778 с.
- [208] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М. : Наука, 1981.
- [209] Крейн С.Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Новосибирск : ИМ, 1979, 18 с. (Препринт АН СССР. Сиб. отд-ние, Ин-т математики).

- [210] Копелев Ю.Ф. Параметрические колебания станков. *Металлорежущие станки: респ. межвед. науч.-техн. сб.* 1984. Вып. 12. С. 3–8.
- [211] Кравчук М. Вибрані математичні праці. Київ; Нью-Йорк : Задруга, 2002. 792 с.
- [212] Красносельский М.А., Крейн С.Г. Итерационный процесс с минимальными невязками. *Матем. сб.* 1952. Т. 31(73), №2, С. 315–334.
- [213] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1971. 104 с.
- [214] Кублановская В.И. О вычислении обобщенной обратной матрицы и проектора. *ЖВММФ*. 1966. Т. 6, №2. С. 326–332.
- [215] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1. М. : Высшая школа, 1988. 712 с.
- [216] Курин А.Ф. Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48, № 4. С. 633–650.
- [217] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1972.
- [218] Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука. 1978. 280 с.
- [219] Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев : Штиница, 1974. 292 с.
- [220] Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. *Автоматика и телемеханика*. 1940. № 5. С. 4–66.
- [221] Лшссел У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М. : Иностранная литература, 1963. 351 с.
- [222] Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях. *Укр. мат. журн.* 1988. Т. 40, № 1. С. 62–69.
- [223] Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях. *Укр. мат. журн.* 1988. Т. 40, № 1. С. 62–69.

- [224] Люлько Н.А. Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов. Новосибирск. 2012. 33 с. (Препринт РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281).
- [225] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М. : Гостехиздат. 1956. 491 с.
- [226] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.; Л. : ГИТТЛ, 1952. 432 с.
- [227] Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. *Журн. техн. физики*. 1934. № 3. С. 5–29.
- [228] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Высшая школа. 1963. 546 с.
- [229] Машков Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа с перемещенными матрицами, заданными в терминах текущих скоростей решения *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика"*. 2016. Т. 8, № 4. С. 26–32.
- [230] Несмелова О.В. Матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, №1. С. 49–65; transl. in *Journal of Mathematical Sciences (USA)*. 2020. V. 248, No. 2. P. 175–187.
- [231] Несмелова О.В. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2018. Т. 32. С. 78–91.
- [232] Несмелова О.В. Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. 2019. Т. 89. С. 10–20.
- [233] Панасенко Е.В., Покутный А.А. Краевые задачи для уравнения Ляпунова в банаховом пространстве. *Нелінійні коливання*. 2016. Т. 19, № 2. С. 240–246.
- [234] Перепелица М.А., Покутный А.А. Исследование разрешимости слабо-нелинейных дифференциально-алгебраических систем. *Вест-*

ник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Матем. моделирование и программирование". 2013. Т. 6, №4. С.55–62.

- [235] Перестюк М.О., Король І.І. Ще разпро чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М. Самойленка. Український математичний журнал. 2006. Т. 58, № 4. С. 472–488.
- [236] Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. *Труды ИСА РАН*. 2006. Т. 28. С. 48–66.
- [237] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 10 изд. М. : ГИФМЛ. 1960.
- [238] Руткас А.Г., Власенко Л.А. Існування розв’язків вироджених нелінійних диференціально-операторних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2001. Т. 4, № 2. С. 252–263.
- [239] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. К. : Наук. думка, 1986. 224 с.
- [240] Самойленко А.М., Чуйко С.М., Несмєлова О.В. Нелінійні крайові задачі, не розв’язані відносно похідної. *Український математичний журнал*. 2020. Т. 72, № 8. С. 1106–1118.
- [241] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. К. : Вища школа, 2000. 296 с.
- [242] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М. : Наука, 1967.
- [243] Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной. *Дифференц. уравнения*. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
- [244] Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М. : Наука, 1973. 287 с.
- [245] Сипаров С.В. Возникновение динамической анизотропии газа в условиях оптико-механического параметрического резонанса. *ЖТФ*. 2002. Т. 72. С. 125–128.
- [246] Слюсарчук В.Ю. Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв’язків. *Укр. мат. журн.* 2019. Т. 71, № 5. С. 677–691.

- [247] Слюсарчук В.Ю. Математична модель сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації. *Нелінійні коливання*. 2018. Т. 21, № 2. С. 238–261.
- [248] Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке* : сб. материалов 18-го междунар. молодежного форума. Т. 7. (г. Харьков, 2014 г.). Харьков, 2014. С. 154.
- [249] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 19 – 21 квіт. 2012 р.). Київ, 2012. С. 440.
- [250] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономні нетерові крайові задачі в частинному критичному випадку. *Міжн. наукова конференція присвячена 70-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка*. : тези доп. (Кам'янець–Подільський, 6–8 черв. 2012 р.). Кам'янець–Подільський, 2012. С. 51.
- [251] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Crimea international Mathematical Conference* : тез. докл. (г. Судак, 22 сент. – 4 окт. 2013 г.). Судак, 2013. С. 16–17.
- [252] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи в частном критическом случае. *Боголюбовські читання DIF — 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф., присв. ювілею акад. НАН України А.М. Самойленка. (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.). Севастополь, 2013. С. 172–173.
- [253] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф. з нагоди 75-річчя акад. А.М. Самойленка. (м. Слов'янськ, 12–14 черв. 2013 р.). Слов'янськ, 2013. С. 31.
- [254] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Метод функций Ляпунова и его приложения* : тез. докл. X-й Крымской междунар. матем. школы (г. Алушта, 13–18 сент. 2010 г.). Симферополь, 2010. С. 132.

- [255] Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Наукові здобутки молодих учених: на шляху до інновацій* : Збірник тез Молодіжного наукового форуму (м. Донецьк, 2010 р.). Донецьк, 2010. С. 13–14.
- [256] Сысоев Д.В. Условия единственности положения равновесия задачи Коши для линейных матричных дифференциально алгебраических уравнений. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика та механіка*. 2017. Т. 86. С. 10–17.
- [257] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1986. 288 с.
- [258] Торжевский А.П. Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите. *Космические исследования*. 1964. Т. 2, № 5. С. 667–678.
- [259] Турбин А.Ф. Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матриц. *ЖВММФ*. 1974. Т.14, № 3. С. 772–776.
- [260] Фалалеев М.В., Гражданцева Е.Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах. *Сиб. мат. журн.* 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
- [261] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 686 с.
- [262] Хапланов М.Г. Теория функции комплексного переменного. (Краткий курс). 3 изд. М. : Просвещение, 1965.
- [263] Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М. : Иностр. лит., 1957. 204 с.
- [264] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984. 424 с.
- [265] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968.

- [266] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
- [267] Хусаинов Д.Я., Шуклин Г.В. Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием. *Прикл. механика*. 2005. Т. 41, № 2. С. 118–130.
- [268] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск : Наука, 1996. 280 с.
- [269] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск : Наука, 2003. 317 с.
- [270] Чуйко А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи. *Нелінійні коливання*. 2005. Т. 8, № 2. С. 278–288.
- [271] Чуйко С.М. Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения / О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете. *Дифференц. уравнения*. 2016. Т. 52, № 11. С. 1578–1579.
- [272] Чуйко С.М. Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы. *Spectral and Evolution Problems*. 2013. Т. 23. С. 148–157.
- [273] Чуйко С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем. *Комп. исследов. и моделирование*. 2013. Т. 5, № 5. С. 769–783.
- [274] Чуйко С.М. Метод наименьших квадратов в теорії некоректно поставлених крайових задач. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка*. 2007. № 7. С. 51–53.
- [275] Чуйко С.М. Метод наименьших квадратов в теории нетеровых дифференциально-алгебраических краевых задач. *Український математичний вісник*. 2018. Т. 15, № 4. С. 478–492.
- [276] Чуйко С.М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса. *Нелінійні коливання*. 2014. Т. 17, № 1. С. 137–148.
- [277] Чуйко С.М. Нетерова краевая задача в особом критическом случае. *Доп. НАН України*. 2007. № 2. С. 26–30.

- [278] Чуйко С.М. О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе. *Укр. мат. вестник*. 2018. Т. 15, № 1. С. 1–17.
- [279] Чуйко С.М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов. *Нелінійні коливання*. 2008. Т. 11, № 4. С. 554–573.
- [280] Чуйко С.М. О решении линейных матричных уравнений. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна матем. і механіка*. 2015. Т. 29. С. 27–33.
- [281] Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Ляпунова. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика и математика*. 2015. № 3. С. 176–185.
- [282] Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра. *Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика*. 2014. Т. 19, Вып. 1(21). С. 49–57.
- [283] Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. 2014. № 1120. С. 85–94.
- [284] Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи. *Нелінійні коливання*. 2006. Т. 9, № 3. С. 416–432.
- [285] Чуйко С.М. Обобщенное матричное дифференциально алгебраическое уравнение. *Український математичний вісник*. 2015. Т. 12, № 1. С. 11–26.
- [286] Чуйко С.М. Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. *Сибирский математический журнал*. 2015. Т. 56, № 4. С. 942–951.
- [287] Чуйко С.М. Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича у банаховому просторі. *Доп. НАН України*. 2018. № 6. С. 22–31.
- [288] Чуйко С.М., Бойчук И.А. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае. *Нелінійні коливання*. 2009. Т. 12, № 3. С. 405–416.
- [289] Чуйко С.М., Бойчук И.А. Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае. *Нелінійні коливання*. 2010. Т. 13, № 1. С. 115–132.

- [290] Чуйко С.М., Кулиш П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса. *Труды ИПММ НАН Украины*. 2012. Т. 24. С. 243–252.
- [291] Чуйко С.М., Кулиш П.В., Белущенко А.В. Слабонелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика*. 2013. Т. 24, № 1. С. 185–194.
- [292] Чуйко С.М., Курильченко И.Ю. О положении равновесия автономной периодической задачи. *Динамические сист.* 2007. Т. 23. С. 31–37.
- [293] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла. *Теорія наближення функцій та її застосування* : тези доп. міжнар. конф., присвяченої 75-річчю з дня народження чл.-кор. НАН України О.І. Степанця. (м. Слов'янськ, 28 трав. – 3 черв. 2017 р.). Слов'янськ, 2017. С. 96.
- [294] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона-Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса. *Доповіді НАН України*. 2019. №12. С. 3–12.
- [295] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Нелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 313–324.
- [296] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. 2019. Т. 90. С. 60–72.
- [297] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про положення рівноваги узагальненої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 218–231.
- [298] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про розв'язання лінійних матричних крайових задач методом найменших квадратів. *Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського* : тези доп. (м. Київ, 7–10 червня 2017 р.). Київ, 2017. С. 110.

- [299] Чуйко С.М., Несмелова О.В., Дзюба М.В. Метод наименьших квадратов у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 2. С. 280–292; transl. in *Ukr. Math. J.* 2018. V. 70, No. 2. P. 319–333.
- [300] Чуйко С.М., Несмелова О.В., Чуйко О.С. Автономна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу. *Нелінійні коливання.* 2020. Т. 23, № 1. С. 134–144.
- [301] Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае. *Труды ИПММ НАН Украины.* 2017. Т. 31. С. 140–150.
- [302] Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Автономные нётеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры».* 2017. Т. 132. С. 144–148; transl. in *J. Math. Sci.* 2018. V. 230, No. 5. P. 799–803.)
- [303] Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. О решении автономных краевых задач, не разрешенных относительно производной, методом наименьших квадратов. *Математика и глобальные вызовы XXI века : материалы симпозиума, посвященного столетию ПГНИУ.* (г. Пермь, 16–21 мая 2016 г.). Пермь, Россия, 2016. С. 161–163.
- [304] Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Лъенара в случае параметрического резонанса. *Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation : тез. доп. XXVII междунар. конф.* (г. Киев, 27–29 мая 2015 г.). Киев, 2015. С. 61.
- [305] Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая задача для уравнения Лъенара, не разрешенного относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование. : тез. докл. XXIII междунар. науч. конф.* (г. Дубна, 25–30 янв. 2016 г.). Дубна, Россия, 2016. С. 162.
- [306] Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В., Дзюба М.В. Про наближене розв’язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів. *Нелінійні коливання.* 2019. Т. 22, № 3. С. 423–436.

- [307] Чуйко С.М., Пирус О.Е. О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом Ньютона. *Нелінійні коливання*. 2012. Т. 15, № 3. С. 407–421.
- [308] Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная краевая задача в частном критическом случае. *XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 13–15 трав. 2010 р.). Київ, 2010. С. 439.
- [309] Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование* : тез. докл. XVIII междунар. науч. конф. (г. Пущино, 24–29 янв. 2011 г.). Пущино, Россия, 2011. С. 147.
- [310] Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономные краевые задачи в частном критическом случае. *Динамические системы*. 2009. Т. 27. С. 127–142.
- [311] Чуйко С.М., Старкова О.В. Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. мат. і інф.* 2011. Т. 22, № 1. С. 157–172.
- [312] Чуйко С.М., Старкова О.В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Комп. исслед. и моделирование*. 2012. Т. 4, №1. С. 31–43.
- [313] Чуйко С.М., Старкова О.В. Неавтономная нетерова краевая задача в критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование*. : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 30 янв. – 4 фев. 2012 г.). Дубна, Россия, 2012. С. 123.
- [314] Чуйко С.М., Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование*. : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 28 янв. – 2 февр. 2013 г.). Пущино, Россия, 2013. С. 122.
- [315] Чуйко С.М., Старкова О.В. О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов. *Нелінійні коливання*. 2009. Т. 12, № 4. С. 556–573.
- [316] Чуйко С.М., Старкова О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Математика. Компьютер. Образование*. : тез. докл. XXI междунар. науч. конф. (г. Дубна, 3–7 фев. 2014 г.). Дубна, Россия, 2014. С. 81.

- [317] Чуйко С.М., Старкова О.В., Кулиш П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Комп. исследов. и модел.* 2014. Т. 6, №1. С. 27–43.
- [318] Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е. Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Динамические системы.* 2012. Т. 30, №1–2. С. 169–186.
- [319] Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Комп. исследов. и моделирование.* 2011. Т. 3, №4. С. 337–357.
- [320] Чуйко С.М., Чистяков В.Ф. О положениях равновесия вырожденной дифференциально-алгебраической системы. *Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф. з нагоди 60 – річчя В.І.Рукасова. (м. Слов'янськ, 21–24 черв. 2014 р.). Слов'янськ, 2014. С. 79.
- [321] Чуйко С.М., Чуйко А.С., Старкова О.В. Периодическая задача для уравнения Лъенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики.* 2015. Т. 29. С. 157–171.
- [322] Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Бойчук И.А. О приведении нетеровой краевой задачи к критическому случаю первого порядка. *Нелінійні коливання.* 2014. Т. 17, № 2. С. 281–292.
- [323] Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Кулиш П.В. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. *Динамические системы.* 2013. Т. 3(31), №1-2. С. 151–158.
- [324] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М. : Наука, 1969.
- [325] Шлапак Ю.Д. О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной. *Укр. мат. журнал.* 1974. Т. 26, №6. С.850–854.
- [326] Шлапак Ю.Д. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей. *Укр. мат. журнал.* 1975. Т. 27, №1. С.137–140.
- [327] Шмидт Г. Параметрические колебания. М. : Мир, 1978. 336 с.

- [328] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука. 1971. 296с.
- [329] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М. : Наука, 1972. 720 с.
- [330] Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М. : Наука, 1987. 328 с.

Додаток

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

**Статті, в яких опубліковані основні наукові результати
дисертації**

1. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Український математичний вісник*. 2016. Т. 13, № 1. С. 91–105. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. V. 220, No. 5. P. 603–614.) DOI: 10.1007/s10958-016-3203-5.
2. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Автономные неётеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. 2017. Т. 132. С. 144–148. (Chuiko S.M., Nesmelova (Starkova) O.V. Autonomous noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. V. 230, No. 5. P. 799–803.) DOI: 10.1007/s10958-018-3793-1.
3. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. *Український математичний вісник*. 2017. Т. 14, № 2. С. 161–191. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. V. 229, No. 1. P. 7–29.) DOI: 10.1007/s10958-018-3659-6.
4. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Дзюба М.В. Метод наименьших квадратов в теории матричных дифференциально-алгебраических крайових задач. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 2. С. 280–292. (Chuiko S.M.,

- Nesmelova O.V., Dzyuba M.V. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. V. 70, No. 2. P. 319–333.)
DOI: 10.1007/s11253-018-1502-3.
5. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To the theory of semi-linear equation in the plane. *Український математичний вісник*. 2019. Т. 16, № 1. С. 105–140. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To the theory of semi-linear equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. V. 242, No. 6. P. 833–859.)
DOI: 10.1007/s10958-019-04519-z.
 6. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. Semi-linear equations and quasiconformal mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020. V. 65, No. 5. P. 823–843.
DOI: 10.1080/17476933.2019.1631288.
 7. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a quasilinear Poisson equation in the plane. *Analysis and Mathematical Physics*. 2020. V.10, No. 1. Article number: 6. DOI: 10.1007/s13324-019-00345-3.
 8. Несмелова О.В. Матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з Р-Лапласіаном. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 1. С. 49– 65. (Nesmelova O. Matrix boundary-value problems for differential equations with P-Laplacian. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. V. 248, No. 2. P. 175–187.)
DOI: 10.1007/s10958-020-04867-1.
 9. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В., Дзюба М.В. Про наближене розв’язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів. *Нелінійні коливання*. 2019. Т. 22, № 3. С. 423–436.
 10. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Чуйко О.С. Автономна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу. *Нелінійні коливання*. 2020. Т. 23, № 1. С. 134–144.
 11. Чуйко С.М., Старкова О.В. Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матъе. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика*. 2011. Т. 22, № 1. С. 157–172.

12. Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е. Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Динамические системы*. 2012. Т. (2)30, № 1–2. С. 169–186.
13. Несмелова О.В. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2018. Т. 32. С. 78–91. DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-9.
14. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On blow-up solutions and dead zones in semilinear equations. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 4. С. 9–15. DOI: 10.15407/dopovidi2018.04.009.
15. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 10. С. 9–17. DOI: 10.15407/dopovidi2018.10.009.
16. Несмелова О.В. Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. 2019. Т. 89. С. 10–20. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-02.
17. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про положення рівноваги узагальненої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 218–231. DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-17.
18. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On semilinear equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2019. № 7. С. 9–16. DOI: 10.15407/dopovidi2019.07.009.
19. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. 2019. Т. 90. С. 60–72. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-90-04.
20. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона-Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического

- резонанса. *Доповіді Національної академії наук України*. 2019. №12. С. 3–12. DOI: 10.15407/dopovidi2019.12.003.
21. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the quasilinear Poisson equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 1. С. 3–12. DOI: 10.15407/dopovidi2020.01.003.
 22. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 5. С. 10–16. DOI: 10.15407/dopovidi2020.05.003.
 23. Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Комп. исследов. и моделирование*. 2011. Т. 3, №4. С. 337–357.
 24. Чуйко С.М., Старкова О.В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Комп. исследов. и моделирование*. 2012. Т. 4, №1. С. 31–43.
 25. Чуйко С.М., Старкова О.В., Кулиш П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Комп. исследов. и модел.* 2014. Т. 6, №1. С. 27–43.
 26. Чуйко С.М., Чуйко А.С., Старкова О.В. Периодическая задача для уравнения Льенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики*. 2015. Т. 29. С. 157–171.
 27. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Автономная периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2016. Т. 30. С. 133–142.
 28. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2017. Т. 31. С. 140–150.
 29. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in a plane and quasiconformal mappings. *Доповіді Національної ака-*

демій наук України. 2017. № 1. С. 10–16.

DOI: 10.15407/dopovidi2017.01.010.

30. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in the plane with measurable data. *Доповіди Національної академії наук України*. 2018. № 2. С. 12–18. DOI: 10.15407/dopovidi2018.02.012.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная краевая задача в частном критическом случае. *XII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 13–15 трав. 2010 р.). Київ, 2010. С. 439.
2. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Метод функций Ляпунова и его приложения* : тез. докл. X-й Крымской междунар. матем. школы (г. Алушта, 13–18 сент. 2010 г.). Симферополь, 2010. С. 132.
3. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Наукові здобутки молодих учених: на шляху до інновацій* : Збірник тез Молодіжного наукового форуму (м. Донецьк, 2010 р.). Донецьк, 2010. С. 13–14.
4. Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование* : тез. докл. XVIII междунар. науч. конф. (г. Пущино, 24–29 янв. 2011 г.). Пущино, Россия, 2011. С. 147.
5. Чуйко С.М., Старкова О.В. Неавтономная нетерова краевая задача в критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование* : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 30 янв. – 4 фев. 2012 г.). Дубна, Россия, 2012. С. 123.
6. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 19 – 21 квіт. 2012 р.). Київ, 2012. С. 440.
7. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономні нетерові крайові задачі в частинному критичному випадку. *Міжнародна наукова конференція присвячена 70-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка* . :

- тези доп. (Кам'янець–Подільський, 6–8 черв. 2012 р.). Кам'янець–Подільський, 2012. С. 51.
8. Чуйко С.М., Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 28 янв. – 2 февр. 2013 г.). Пущино, Россия, 2013. С. 122.
 9. Чуйко С.М., Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для невырожденных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. *Образование и наука в третьем тысячелетии* : материалы к Седьмой Междунар. науч.-теор. конф. Ч. 1. Барнаул, Россия, 2013. С. 30–32.
 10. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Crimea international Mathematical Conference* : тез. докл. (г. Судак, 22 сент. – 4 окт. 2013 г.). Судак, 2013. С. 16–17.
 11. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи в частном критическом случае. *Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф., присв. ювілею акад. НАН України А.М. Самойленка. (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.). Севастополь, 2013. С. 172–173.
 12. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф. з нагоди 75-річчя акад. А.М. Самойленка. (м. Слов'янськ, 12–14 черв. 2013 р.). Слов'янськ, 2013. С. 31.
 13. Чуйко С.М., Старкова О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XXI междунар. науч. конф. (г. Дубна, 3–7 февр. 2014 г.). Дубна, Россия, 2014. С. 81.
 14. Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке* : сб. материалов 18-го междунар. молодежного форума. Т. 7. (г. Харьков, 2014 г.). Харьков, 2014. С. 154.

15. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Лъенара в случае параметрического резонанса. *Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation* : тез. доп. XXVII междунар. конф. (г. Киев, 27–29 мая 2015 г.). Киев, 2015. С. 61.
16. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая задача для уравнения Лъенара, не разрешенного относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XXIII междунар. науч. конф. (г. Дубна, 25–30 янв. 2016 г.). Дубна, Россия, 2016. С. 162.
17. Chuiko S.M., Starkova O.V. Periodic boundary value problem of Lenard type, unresolved with respect to derivative. *Intern. conf. on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : Book of abstracts. (Lviv, 20–24 September 2016). Lviv, Ukraine. P. 40.
18. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. О решении автономных краевых задач, не разрешенных относительно производной, методом наименьших квадратов. *Математика и глобальные вызовы XXI века* : материалы симпозиума, посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета. (г. Пермь, 16–21 мая 2016 г.). Пермь, Россия, 2016. С. 161–163.
19. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла. *Теорія наближення функцій та її застосування* : тези доп. міжнар. конф., присвяченої 75-річчю з дня народження чл.-кор. НАН України О.І. Степанця. (м. Слов'янськ, 28 трав. – 3 черв. 2017 р.). Слов'янськ, 2017. С. 96.
20. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про розв'язання лінійних матричних крайових задач методом найменших квадратів. *Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського* : тези доп. (м. Київ, 7–10 червня 2017 р.). Київ, 2017. С. 110.
21. Chuiko S., Nesmelova O., Dzuba M. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares methods. *Differential equations and control theory* : abstracts of 3-rd intern. scient. conf. (Kharkiv, September 25–27, 2018). Kharkiv, 2018. P. 18.

22. Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Autonomous Noether boundary value problems not solved with respect to the derivative. *Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications* : abstracts of intern. conf. (Bishkek, Kyrgyzstan, June 17 - 23, 2018). Bishkek, Kyrgyzstan, 2018. P. 52–53.
23. Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Equilibrium positions of nonlinear differential algebraic systems. *Morse theory and its applications* : abstracts of Intern. Conf. dedicated to the memory and 70-th anniversary of Volodymyr Sharko. (Kyiv, September 25–28, 2019). Kyiv, 2019. P. 5.
24. Несмелова О.В. Нелинейная краевая задача для дифференциально-алгебраической системы. *Dynamical System Modelling and Stability Investigation* : Abstracts of XIX Intern. Conf. (Kiyv, May 22-24, 2019). Kiyv, 2019. P. 109.