НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЄСМЄЛОВА Ольга Володимирівна

УДК 517.9

НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України та ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
САМОЙЛЕНКО Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, професор кафедри математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри математичного моделювання;

доктор фізико-математичних наук, доцент
КОРОЛЬ Ігор Іванович,
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
проректор з науково-педагогічної роботи.

Захист відбудеться 24 листопада 2020 р. о 14:00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України (01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3).

Автореферат розісланий 15 жовтня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Василик В.Б.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Математичний опис численних явищ у багатьох галузях електроніки, теорії нелінійних коливань, механіки, біології та радіотехніки приводить до необхідності дослідження нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. У частковому випадку останнє рівняння приводить до нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, лінеаризація яких, в свою чергу, приводить до лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь. Дослідженню лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, а також численні роботи закордонних авторів S. Campbell, J.R. Magnus, В.Ф. Чистякова. У статтях С.М. Чуйка запропонована серія достатніх умов розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна задачі Коші для лінійної диференціально-алгебраїчної системи без використання центральної каноничної форми і досконалих пар і трійок матриць. У статтях О.А. Бойчука та О.О. Покутного запропоновані умови розв'язності для нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з використанням узагальненої центральної канонічної форми, при цьому основним припущенням відносно лінійної частини диференціально-алгебраїчної системи є можливість приведення її до деякого канонічного виду, введеного в роботах В.Ф. Чистякова.

Актуальність вивчення нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, пов'язана також з тим фактом, що дослідження традиційної задачі, розв'язаної відносно похідної, іноді ускладнюється, наприклад, у випадку отримання нелінійностей, не інтегровних в елементарних функціях. Прикладом подібної ситуації може бути автономна крайова задача, не розв'язана відносно похідної, зокрема, періодична задача для рівняння Лотки–Вольтерри.

Дослідження нелінійних крайових задач тісно пов'язане з явищем параметричного резонансу, актуального у механіці, теорії стійкості руху, біології та радіотехніці, теорії нелінійних коливань, фізиці, хімії та машинобудуванні. Подібна залежність задачі від невідомої функції, як відомо, є характерною відмінністю автономних крайових задач. Таким чином, особливістю даної дисертації є побудова розв'язків нелінійних крайових задач, в тому числі, у випадку параметричного резонансу, в залежності від власної функції крайової задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота здійснювалась згідно з планами наукової роботи Донбаського державного педагогічного університету та Інституту прикладної математики і механіки НАН України та пов'язана з тематичними планами фундаментальних науково-дослідних робіт«Конструктивні методи аналізу нетерових крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень» (р/н 0115U003182), 2015–2017 рр. та «Конструктивні методи аналізу матричних крайових задач для систем диференціальних, диференціально-алгебраїчних та функціонально-диференціальних рівнянь і теорії наближень» (р/н 0118U003390), 2018 -2020 рр., які фінансуються Міністерством освіти і науки України й виконуються в ДДПУ.

Також дисертаційна робота виконувалась за фінансової підтримки Грантів Президента України для докторів наук «Задачі синтезу керування для нелінійних систем з багатомасштабною динамікою» (р/н 0117U006155), 2017 р.; «Класифікаційні методи теорії наближень, теорії крайових задач та їх застосування для керування складними механічними системам» (р/н 0118U00531), 2018 р. та «Стабілізація траєкторій динамічних систем з гібридними керуваннями та проблеми апроксимації розв'язків граничних задач» (р/н 0119U103214), 2019 р.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, зокрема, нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, а також ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є конструктивні умови існування алгоритми знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернених (за Муром-Пенроузом) матриць та проекторів, конструкції узагальнених операторів Гріна, побудованих в роботах А.М. Самойленка й О.А. Бойчука, метод найменших квадратів, розвинений для лінійних крайових задач у роботах М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, М.П. Кравчука та Н.І. Ахієзера. При розв'язанні проблем регуляризації некоректно поставлених лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєво використовується метод регуляризації некоректно поставлених крайових задач, розвинутий у роботах С.Г. Крейна, А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна та школою професора М.В. Азбелева. Різним аспектам теорії крайових задач присвячені роботи А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, І.Т. Кігурадзе, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука, М.Й. Ронто, В.П. Яковця та багатьох інших вчених. Серед іноземних вчених теорії крайових задач присвячені роботи таких науковців як G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, D. Bainov, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, O. Veivoda, S. Schwabik, T. Vogel, D. Wexler, зокрема, теорії крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь: S.L. Campbell, Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

1. Побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

2. Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу.

3. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схеми побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаної відносно похідної.

4. Досліджено напівлінійні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині. Доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення.

5. Для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Також отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з невиродженими граничними компонентами.

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів, пропозиції щодо використання наукових результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Крім того, отримані результати успішно використовуються в навчальному процесі в Донбаському державному педагогічному університеті. Отримані результати можуть бути використані в навчальних курсах з теорії диференціально-алгебраїчних крайових задач для студентів класичних, педагогічних і технічних університетів.

Особистий внесок здобувача. Результати, включені до дисертації отримані автором особисто. Постановка задач у різних розділах проводилась спільно з А.М. Самойленком, В.Я. Гутлянським, С.М. Чуйком та В.І. Рязановим. Із результатів, надрукованих у сумісних статтях, в основну частину дисертації ввійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком результатів четвертого розділу, де вклад співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на: XII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 13–15 травня 2010 р.); X Крымской Международной математической школе «Метод функций Ляпунова и его приложения» (г. Алушта, 13–18 сентября 2010 р.); Молодіжному науковому форумі «Наукові здобутки молодих учених: на шляху до інновацій» (Донецьк, 2010 р.); XVIII Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Пущино, Россия, 24–29 января 2011 г.); XIX Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Дубна, Россия, 30 января – 4 февраля 2012 г.); XIV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 19 – 21 квітня 2012 р.); Міжнародній науковій конференції, присвяченій 70-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка (м. Кам'янець-Подільський, 6–8 червня 2012 р.); XIX Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Пущино, Россия, 28 января – 2 февраля 2013 г.); Міжнародній науковій конференції «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75 - річчя акад. А.М. Самойленка (м. Слов'янськ, 12–14 червня 2013 р.); Міжнародній науковій конференції «Боголюбовські читання DIF - 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», присвяченій ювілею акад. НАН України А.М. Самойленка (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.); Crimea Iternational Mathematical Conference (Sudak, Crimea, September 22 – October 4, 2013); Седьмой Международной научно-теоретической конференции «Образование и наука в третьем тысячелетии» (г. Барнаул, Россия, 2013 г.); XXI Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (г. Дубна, Россия, 3–7 февраля 2014 г.); XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 15–17 травня 2014 р.); 18-й Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (г. Харьков, 2014 г.); XVII International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation» (Kiyv, May 27 – 29, 2015); Международном симпозиуме «Математика и глобальные вызовы XXI века» (г. Пермь, Россия, 16–21 мая 2016 г.); International conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, September 20–24, 2016); Семінарі «50 років теорії імпульсних крайових задач» відділу прикладної механіки ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'-янськ, 4 травня 2017 р.); Міжнародній конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України О.І. Степанця (м. Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.); Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (м. Київ, 7–10 червня 2017 р.); Семінарі до 100-річчя С.Г. Крейна ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'янськ, 10 серпня 2017 р.); International Conference «Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications» (Bishkek, Kyrgyzstan, June 17–23, 2018); The Seventh International Workshop–2018 «Consructive Methods for Non–linear Boundary Value Problems» dedicated to Professor Miklos Ronto on the ocassion of his 75th birthday (Miskolc, Hungary, July 5–8, 2018); 3-rd International Scientific Conference «Differential equations and control theory» (Kharkiv, September 25–27, 2018); Серії математичних семінарів до 80-річчя академіка НАН України А.М. Самойленка ІПММ НАН України та кафедри математики ДДПУ (м. Слов'янськ, 5 березня – 26 грудня 2018 р.); Серії математичних семінарів до 110 річчя академіка М.М. Боголюбова ІПММ НАН України та ДДПУ, (м. Слов'янськ, 20 березня, 22 квітня, 30 квітня 2019 р.); International Conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70-th anniversary of V. Sharko (Kyiv, September 25–28, 2019); XIX International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Kiyv, May 22-24, 2019); Серії математичних семінарів, присвячених року математики в Україні, ІПММ НАН України та ДДПУ (м. Слов'янськ, 27 грудня 2019 р., 3-4 березня 2020 р.); Об'єднананому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань, відділу математичних проблем механіки та теорії керування і відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України (м. Київ, 13 липня 2020 року).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 30 робіт, з них роботи [1–22] відповідають вимогам до публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях за напрямом дослідження. Серед них, 8 статей [1-8] надруковано у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus чи Web of Science та 2 [9, 10] – в українських фахових виданнях категорії «А». Відповідно до класифікації SCImago Journal & Country Rank наукові публікації [6, 7] надруковано у виданнях, які відносяться до другого квартиля Q2, а статті [1, 2, 3, 4, 5, 8] — у виданнях, що відносяться до третього квартиля Q3. Апробацію матеріалів дисертації засвідчують 24 тези доповідей на Міжнародних наукових конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку виконаних джерел, що містить 330 найменувань та одного додатку. Повний обсяг роботи становить 353 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми, формулюється мета дослідження, дається короткий аналіз сучасного стану проблем, які досліджуються в дисертації, охарактеризовано наукову новизну та наведено анотацію одержаних результатів.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць із теорії лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь і диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також наведено необхідні відомості з теорії нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу та основні результати теорії квазіконформних відображень, показано їх зв'язок з лінійними еліптичними диференціальними рівняннями в дивергентній формі. Доведено необхідність вдосконалення класифікації нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Доведено актуальність дослідження нелінійних автономних крайових задач із урахуванням явища параметричного резонансу та побудови ітераційних схем з прискореною збіжністю для знаходження розв'язків нелінійних автономних крайових задач.

У **другому розділі** досліджено задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon): \ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \qquad (2)$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ породжуючої нетерової $(n \neq k)$ задачі

$$A(t)z_0'(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^k. \qquad (3)$$

Тут $A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервний вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно-диференційовна за невідомою $z(t,\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a,b]$ і неперервна по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний та $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : \mathbb{C}[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^k$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою $z(t,\varepsilon)$ і неперервний по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0,\varepsilon_0]$.

Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює численні постановки нелінійних крайових задач, досліджених у роботах А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, І.Т. Кігурадзе, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука, М.Й. Ронто та багатьох інших вчених. За умов

$$P_{A^*(t)} \equiv 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{4}$$

система

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t); \tag{5}$$

розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \tag{6}$$

тут rank $A(t) := \sigma_0 = m \le n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (по Муру – Пенроузу) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матрицяортопроектор: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n\times\rho_0)$– матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$– матриці-ортопроектора $P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t))$. За умови $\rho_0 \ne 0$ система (6), розв'язна відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \ X_0(a) = I_n$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (6).

Лема 1.1.1. *За умови (4) система (5) має розв'язок вигляду*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K[f(s), \nu_0(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K[f(s), \nu_0(s)](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (5).

Випадок (4) будемо називати невиродженим.

Досліджено також задачу про побудову розв'язків $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{7}$$

тут $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений функціонал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k$. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \ \gamma \in \mathbb{R}^w; \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0\times w}[a,b]$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (7) може бути представлений у вигляді

$$K\big[f(s), \nu_0(s)\big](t) = K\big[A^+(s)f(s)\big](t) + K\big[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s)\big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \left[\ Q\ ;\ \ell K\big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\big](\cdot)\ \right] \in \mathbb{R}^{k\times(\rho_0+w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t,c_{\rho_0}) = X_0(t)c_{\rho_0} + K\big[A^+(s)f(s)\big](t) + K\big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\gamma\big](t), \quad c_{\rho_0}\in\mathbb{R}^{\rho_0}$$

задачі Коші в крайову умову (7), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння, розв'язного тоді і тільки тоді, коли [17]

$$P_{\mathcal{D}_d^*}\big\{\alpha - \ell K\big[A^+(s)f(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{8}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$; матриця $P_{\mathcal{D}_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$, $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p+w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$.

Теорема 2.1.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (7) задовольняє вимогам леми 1.1.1. За умови (8) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (7)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s);\psi(s);\alpha](t), \quad c_r\in\mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[f(s);\psi(s);\alpha](t) := K[A^+(s)f(s)](t) +$$

$$+\{X_0(t); K[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)](t)\}\mathcal{D}^+\{\alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot)\}.$$

Матриця $X_r(t)$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\big\{X_0(t); K\big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\big](t)\big\}P_{\mathcal{D}}.$$

За умови $P_{\mathcal{D}^*}\neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (7) представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*}\neq 0,\ P_{\mathcal{D}^*}=0$ будемо казати, що крайову задачу (7) приведено до некритичного випадку.

Припустимо, що породжуюча крайова задача (3) невироджена і некритична ($P_{Q^*}=0$), при цьому породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α. Загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ має вигляд

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s);\nu_0(s);\alpha\big](t), \quad c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$. Фіксуючи одну з констант $c_r\in\mathbb{R}^r$, для знаходження вектора

$$x(t,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ \ x(t,\cdot)\in\mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0],\ \ x(t,0)\equiv 0$$

приходимо до задачі

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon\, A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{9}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{10}$$

У некритичному випадку задача (9), (10) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок крайової задачі (9), (10) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G\big[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\big].$$

Теорема 2.1.3. *У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей диференціально-алгебраїчної системи та крайової умови (3) і має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \nu_0(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За додаткової умови

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b],\ \ A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[||z - z_0|| < q] \tag{11}$$

для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\,,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \tag{12}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\big[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \nu_0(s); J(z_0(\cdot) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\big](t).$$

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$, розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a, b]$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (3) задовольняє вимогам леми 1.1.1. У випадку, коли $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ задача (9) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \varepsilon\, G\big[A^+(s)Z(z, s, \varepsilon); \psi(s); J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\big](t).$$

Теорема 2.1.4. *У випадку ($P_{\mathcal{D}^*} = 0$) породжуюча задача (3) розв'язна при довільних неоднорідностях крайової задачі (3) і має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За додаткової умови (11) для побудови розв'язків крайової задачі (1), (2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x_{k+1}(t,\varepsilon),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots ,$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon), \tag{13}$$

$$x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \psi(s); J(z_0(\cdot, c_r) + x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](t).$$

Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний випадок. Породжуюча задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову

$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K\big[f(s), \nu_0(s)\big](\cdot)\big\} = 0 \tag{14}$$

і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має r лінійно-незалежних розв'язків

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \nu_0(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Теорема 2.1.5. *У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (14) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \nu_0(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що крайова задача (1), (2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. За умови (11) для існування розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) необхідно виконується умова

$$F(c_r^*) := P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0), \nu_0(s)\big](\cdot)\right\} = 0. \tag{15}$$

По аналогії з нетеровими крайовими задачами рівняння (15) будемо називати рівнянням для породжуючих констант. Припустимо далі необхідну умову розв'язності нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) виконаною. Фіксуючи один із розв'язків c_r^* рівняння (15), розв'язок $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) шукаємо в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\big[f(s); \nu_0(s); \alpha\big](t).$$

Таким чином, приходимо до задачі

$$x'(t,\varepsilon) = A^+(t)B(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\, A^+(t)Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{16}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{17}$$

Позначимо сталу $(d \times r)$ – матрицю $B_0 := F_0'(c_r^*)$ та $P_{B_0^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*)$. За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ принаймі один розв'язок крайової задачі (16), (17) визначає операторна система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0\, c_r(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\},$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\nu_0(s);J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний метод простих ітерацій; таким чином отримуємо ітераційну схему

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^+\, P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\big[A_1(s)x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z_0(s,c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot), \tag{18}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\nu_0(s);J(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Теорема 2.1.6. *У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконано умову (14) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має r лінійно-незалежних розв'язків $z_0(t,c_r)$. За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжуючих констант (15), у випадку (11), нелінійна крайова задача (1), (2) має принаймі один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. Для побудови розв'язків диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) може бути використана збіжна при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ ітераційна схема (18).*

Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$, розв'язність крайової задачі (1), (2) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a,b]$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Відповідно до теореми 2.1.2 породжуюча задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (8); і в цьому випадку має розв'язок

$$z_0(t,c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w} + G\big[f(s);\psi(s);\alpha\big](t),$$

де

$$X_{\rho_0+w}(t) := \big\{X_0(t);K\big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\big](t)\big\}P_{\mathcal{D}},\ c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

У малому околі розв'язку породжуючої задачі крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_d^*}\left\{J(z_0(\cdot, c_{\rho_0+w}) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\big[Z(z_0(s, c_{\rho_0+w}) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\big](\cdot)\right\} = 0. \tag{19}$$

Необхідну умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) в критичному випадку визначає наступна теорема.

Теорема 2.1.7. *У критичному випадку* ($P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$) *породжуюча задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (8); в цьому випадку вона має розв'язок*

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w} + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t),\ \ c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

Припустимо також, що крайова задача (1), (2) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжуючий* $z_0(t, c^*_{\rho_0+w})$*. За додаткової вимоги (11) необхідно виконується умова*

$$F(c^*_{\rho_0+w}) := P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot, c^*_{\rho_0+w}), 0) - \ell K\big[Z(z_0(s, c^*_{\rho_0+w}), 0)\big](\cdot)\right\} = 0. \tag{20}$$

Позначимо сталу матрицю $\mathcal{B}_0 := F_0'(c^*_{\rho_0+w})$ та $P_{\mathcal{B}_0^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*)$.

Теорема 2.1.8. *У критичному випадку* ($P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$) *породжуюча задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (8); у цьому випадку вона має розв'язок*

$$z_0(t, c_{\rho_0+w}) = X_{\rho_0+w}(t)c_{\rho_0+w} + G\big[f(s); \nu_0(s); \alpha\big](t),\ \ c_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

За умови $P_{\mathcal{B}_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ *для кожного кореня* $c^*_{\rho_0+w} \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}$ *рівняння (20) у випадку (11) задача (1), (2) має принаймі один розв'язок.*

За умови $P_{A^*(t)} \neq 0$ система (7) не розв'язна відносно похідної. Припустимо, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме:

$$1 \leq \operatorname{rank} A(t) = \sigma_0.$$

Як відомо, довільна $(m \times n)-$матриця $A(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді стандартного розвинення

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t),\ \ J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix},\ \ R_0(t) \in \mathbb{C}_{m\times m}[a, b];$$

тут $R_0(t)$ і $S_0(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a, b]$ — невироджені матриці. Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)z(t)$ приводить систему (7) до вигляду

$$J_{\sigma_0}y'(t) = C_0(t)y(t) + R_0^{-1}(t)f(t); \tag{21}$$

тут

$$C_0(t) := \left(R_0^{-1}(t)B(t) + J_{\sigma_0}S_0'(t)\right)S_0^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(t) & C_{12}^{(0)}(t) \\ C_{21}^{(0)}(t) & C_{22}^{(0)}(t) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{ col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}^1_n[a,b],\ u(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_0}[a,b],\ v(t) \in \mathbb{C}^1_{n-\sigma_0}[a,b]$$

приводить систему (7) до вигляду

$$u'(t) = C^{(0)}_{11}(t)u(t) + C^{(0)}_{12}(t)v(t) + g^{(0)}_1(t), \tag{22}$$

$$C^{(0)}_{21}(t)u(t) + C^{(0)}_{22}(t)v(t) + g^{(0)}_2(t) = 0; \tag{23}$$

тут

$$R^{-1}_0(t)f(t) := \text{ col } \left(g^{(0)}_1(t),\, g^{(0)}_2(t)\right).$$

Крім того $P_{D^*_0}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{D^*_0}(t) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \to \mathbb{N}(D^*_0(t))$. Рівняння (23) розв'язне тоді і тільки тоді, коли $P_{D^*_0}(t)g^{(0)}_2(t) = 0$; при цьому загальний розв'язок рівняння (23)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(t) - D^+_0(t)g^{(0)}_2(t),$$

$$D_0(t) := \left[C^{(0)}_{21}(t); C^{(0)}_{22}(t)\right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0)\times n}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ – матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(t)$ — ортопроектора: $P_{D_0}(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(D_0(t))$. Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t)$ і добутку $D^+_0(t)g^{(0)}_2(t)$

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{ col } (P^{(0)}_1(t),\ P^{(0)}_2(t)), D^+_0(t)g^{(0)}_2(t) = -\text{ col } \left(f^{(1)}_1(t), f^{(1)}_2(t)\right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a,b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\varphi'(t) = B_1(t)\varphi(t) + f_1(t),\ \text{rank } A_1(t) := \sigma_1; \tag{24}$$

тут

$$A_1(t) := P^{(0)}_1(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0\times\rho_0}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 \le \rho_0,$$

$$B_1(t) := C^{(0)}_{11}(t)P^{(0)}_1(t) + C^{(0)}_{12}(t)P^{(0)}_2(t) - A'_1(t),$$

$$f_1(t) := C^{(0)}_{11}(t)f^{(1)}_1(t) + C^{(0)}_{12}(t)f^{(1)}_2(t) + g^{(0)}_1(t) - \left(f^{(1)}_1(t)\right)'.$$

Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$U'_1(t) = A^+_1(t)B_1(t)U_1(t), \quad U_1(a) = I_{\rho_1}.$$

Лема 2.2.1. *За умови*

$$P_{A^*} \ne 0,\ P_{A^*_1} \equiv 0,\ P_{D^*_0}f_1(t) \equiv 0, \tag{25}$$

$$A^+_1(t)B_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0\times\sigma_0}[a;b],\ A^+_1(t)f_1(t) \in \mathbb{C}[a;b]$$

лінійна диференціально-алгебраїчна система (7) має розв'язок вигляду

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K\big[f(s), \nu_1(s)\big](t),$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

$$K\big[f(s), \nu_1(s)\big](t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}K\big[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\big](t) - S_0^{-1}(t)D_0^{+}(t)g_2^{(0)}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (7).

Припустимо, що рівняння (7) задовольняє вимогам леми 2.1.1. Покладемо $\nu_1(t) := \Psi(t)\gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}^w,\ \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1 \times w}[a, b]$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (7) представимо у вигляді

$$K\big[f(s), \nu_1(s)\big](t) = K\big[A^{+}(s)f(s)\big](t) + K\big[P_{A_{\rho_1}}(s)\nu_1(s)\big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \big[\ Q\ ;\ \ell K\big[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)\big](\cdot)\ \big] \in \mathbb{R}^{k \times (\rho_1 + w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_p(t)c_{\rho_1} + K\big[A^{+}(s)f(s)\big](t) + K\big[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)\gamma\big](t),\ c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1}$$

задачі Коші для рівняння (7) у крайову умову (7), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння, розв'язного тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*}\big\{\alpha - \ell K\big[A^{+}(s)f(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{26}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*),\ Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times \rho_p}$, крім того, $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p + w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Позначимо матрицю $X_r(t)$, утворену з r лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\big\{X_1(t); K\big[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)\big](t)\big\}P_{\mathcal{D}}.$$

Теорема 2.2.2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (7) задовольняє вимогам леми 2.2.1. За умови (26) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (7)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (7)

$$G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t) := K\big[A^{+}(s)f(s)\big](t) +$$

$$+\big\{X_p(t); K\big[P_{A_{\rho_1}}\Psi(s)\big](t)\big\}\mathcal{D}^{+}\big\{\alpha - \ell K\big[A^{+}(s)f(s)\big](\cdot)\big\}.$$

За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (7) представляє критичний випадок, і навіпаки: за умови $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0,\ P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (7) приведена до некритичного випадку. Останнє визначення є узагальненням критичного ($P_{Q^*} = 0$) випадку для крайової задачі для диференціальної системи, яка отримана із системи (7) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (7) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$.

Припустимо, що породжуюча крайова задача (3) вироджена і некритична ($P_{Q^*} = 0$), тобто, задовольняє вимогам леми 2.1.1, при цьому породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α. Загальний розв'язок породжуючої диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ має вигляд

$$z(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K\big[f(s), \nu_1(s)\big](t),$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Для знаходження вектора $x(t, \varepsilon)$ приходимо до задачі

$$A(t)x'(t, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon\, Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{27}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{28}$$

Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)x(t)$ приводить систему (27) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y'(t) = C_0(t)y(t) + \varepsilon\, R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \tag{29}$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{ col } (u(t), v(t))\,, \quad u(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_0}[a, b], \quad v(t) \in \mathbb{C}^1_{n-\sigma_0}[a, b]$$

приводить систему (29) до вигляду

$$u'(t) = C^{(0)}_{11}(t)u(t) + C^{(0)}_{12}(t)v(t) + \varepsilon\, Z_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{30}$$

$$C^{(0)}_{21}(t)u(t) + C^{(0)}_{22}(t)v(t) + \varepsilon\, Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0; \tag{31}$$

тут

$$R_0^{-1}(t)Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) :=$$
$$= \text{ col } (Z_1(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon),\ Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon))\,.$$

Рівняння (31) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{D_0^*}(t)Z_2(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv 0; \tag{32}$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (31) має вигляд

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\mu(t) - D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Позначивши блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{ col } (P_1^{(0)}(t),\ P_2^{(0)}(t))$ і добутку

$$D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = -\text{col}\left(M(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), N(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\mu(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a,b]$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\mu'(t) = B_1(t)\mu(t) + \varepsilon\, Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon); \tag{33}$$

тут

$$A_1(t) := P_1^{(0)}(t), \quad B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - \left(P_1^{(0)}(t)\right)';$$

крім того

$$Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon) := C_{11}^{(0)}(t)M(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+$$

$$+C_{12}^{(0)}(t)N(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + Z_1(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - M'_y(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\,\mu'(t).$$

За умови $P_{A_1^*}(t) \equiv 0$ система (33), принаймні однозначно розв'язна відносно похідної:

$$\mu' = A_1^+(t)B_1(t)\mu + \varepsilon\, A_1^+(t)Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{34}$$

За умови (25) і (32) система (27) має розв'язок вигляду

$$x(t,c_{\rho_1}(\varepsilon)) = X_1(t)c_{\rho_1}(\varepsilon) + \varepsilon\, K\Big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)\Big](t),$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t), \quad K\Big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)\Big](t) :=$$

$$= S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t)\int_a^t U_1^{-1}(s)\, A_1^+(s)Y(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds-$$

$$-S_0^{-1}(t)D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \quad c_{\rho_1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\rho_1}.$$

Таким чином, за умови (25) і (32) розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної системи (1) має вигляд

$$z(t,c_{\rho_1}) = z_0(t,c_{\rho_1}) + x(t,c_{\rho_1}), z_0(t,c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K[f(s),\nu_1(s)](t).$$

У некритичному випадку задача (1), (2) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі

(27), (28) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_1(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має вигляд

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),\ x^{(1)}(t,\varepsilon) := G\big[Z(z_0+x,s,\varepsilon);\nu_1(s)\big](t).$$

Розв'язки крайової задачі (1), (2) при цьому визначає операторна система

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), \quad x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = G\big[Z(z_0+x,s,\varepsilon);\nu_1(s)\big](t); \quad G\big[Z(z_0+x,s,\varepsilon);\nu_1(s)\big](t) :=$$
$$= K\big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)\big](t) - X(t)Q^+\ell K\big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)\big](\cdot).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи може бути використаний метод простих ітерацій:

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x_{k+1}(t,\varepsilon), x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon), \quad (35)$$

$$x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = G\big[Z(z_0+x_k,s,\varepsilon);\nu_1(s)\big](t),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Теорема 2.2.3. *Припустимо, що рівняння (3) задовольняє вимогам леми 2.2.1. У некритичному випадку породжуюча задача (3) розв'язна для довільних неоднорідностей системи і крайової умови (3) та має r лінійно-незалежних розв'язків $z_0(t,c_r)$. За умови (25), (32) та*

$$A_1^+(\cdot)Y(y,y',\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}[a;b], A_1^+(t)Y(\cdot,y',t,\varepsilon) \in \mathbb{C}[||y-y_0||<q],$$
$$A_1^+(t)Y(y,\cdot,t,\varepsilon) \in \mathbb{C}[||y'-y_0'||<q'\,] \quad (36)$$

для побудови розв'язків крайової задачі (1), (2) може бути використана ітераційна схема (35).

Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми, знайдені наближення до розв'язку диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Ріккаті.

У **третьому розділі** досліджено задачу про знаходження розв'язків

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad b(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономної крайової задачі

$$dz(t,\varepsilon)/dt = Az(t,\varepsilon) + f + \varepsilon\, Z(z(t,\varepsilon),\varepsilon), \quad (37)$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (38)$$

Розв'язки крайової задачі (37), (38) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a,b_0],\ b_0 = b(0)$ породжуючої задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (39)$$

Тут A – стала $(n \times n)$-вимірна матриця, $Z(z, \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, двічі неперервно-диференційовна за невідомою $z(t, \varepsilon)$ та неперервно-диференційовна по малому параметру ε в околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний і $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали $\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал двічі неперервно-диференційовний за невідомою $z(t, \varepsilon)$ і неперервно-диференційовний по малому параметру ε в околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. У критичному випадку $(P_{Q^*} \neq 0)$ за умови

$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\big\} = 0 \tag{40}$$

породжуюча задача (39) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q := \ell X(\cdot)$ – $(m \times n)$-матриця, $\text{rank } Q := n_1, \ n - n_1 = r$, P_{Q^*} – $(m \times m)$-матриця-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$, $X(t)$ – нормальна $(X(a) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (39); P_{Q_r} – $(n \times r)$-матриця, утворена із r лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$-матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; $G[f; \alpha](t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (39); Q^+ – псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу; I_n – одинична $(n \times n)$-матриця; матриця $P_{Q_d^*}$ складена із d лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_{Q^*}. Припустимо, що рівняння для породжуючих констант для автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (37), (38) має кратні корені. Поряд з автономною крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь (37), (38) розглянемо задачу про знаходження розв'язків автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу

$$dz(t, \varepsilon)/dt = Az(t, \varepsilon) + f + \varepsilon\, \mathcal{Z}(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon), \tag{41}$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{42}$$

Розв'язки крайової задачі (41), (42) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \ b_0 = b(0), \ h_0 = h(0) \in \mathbb{R}^q$ породжуючої задачі

$$dz_0(t)/dt = Az_0(t) + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{43}$$

Тут $B(z(t, \varepsilon))$ – нелінійна $(n \times q)$-вимірна матриця, двічі неперервно-диференційовна за невідомою $z(t, \varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, $\mathcal{Z}(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) := Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon) + B(z(t, \varepsilon))\, h(\varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, двічі неперервно-диференційовна за невідомими $z(t, \varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі і неперервно-диференційовна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний і $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали $\ell z(\cdot, \varepsilon), \ J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) :$

$\mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал двічі неперервно-диференційовний за невідомою $z(t,\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (43) і неперервно-диференційовний по малому параметру ε у малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. У критичному випадку задача (41), (42) істотно відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач; на відміну від останніх, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (41), (42), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови розв'язку. Здійснюючи в задачі (41), (42) заміну незалежної змінної

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon\,(b^* - a)\beta(\varepsilon),$$

приходимо до задачі про знаходження розв'язку крайової задачі

$$dz(\tau,\varepsilon)/dt = Az(\tau,\varepsilon) + f + \varepsilon\,\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\beta(\varepsilon)[Az(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)],$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\,J(z(\cdot,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)[\,\alpha + \varepsilon\,J(z(\cdot,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)].$$

Лема 3.4.1. *Припустимо, що крайова задача (41), (42) представляє критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$) і виконується умова розв'язності (40) породжуючої задачі (43). Припустимо також, що в малому околі породжуючого розв'язку*

$$z_0(t, c_r^*) \in \mathbb{C}^1[a, b_0^*], \quad b_0^* = b(0), \quad h_0^* = h(0) \in \mathbb{R}^q$$

слабконелінійна крайова задача (41), (42) має розв'язок

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \;\; z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \;\; b(\varepsilon), \; h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

при цьому в достатньо малому околі вектора h_0^* існує власна функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0^*) = 0. \tag{44}$$

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що виконані умови леми 3.4.1. Тоді для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, $h_0^* \in \mathbb{R}^q$ рівняння для породжуючих констант в околі породжуючого розв'язку $z_0(\varepsilon, c_r^*)$, а також в околі точок h_0^* та β_0^* для знаходження принаймі одного розв'язку задачі (41), (42) у випадку параметричного резонансу, може бути використана ітераційна схема*

$$z_{k+1}(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon), \quad \mathcal{F}(\check{c}_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,,$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \tag{45}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G[Y(z_0(s, c_r^*) + x_k(s,\varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon);$$

$$H(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu_k(\varepsilon), \beta_0^* + \eta_k(\varepsilon), \varepsilon)](\tau).$$

Досліджено також задачу про побудову розв'язків автономної крайової задачі [2]

$$z' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (46)$$

Розв'язки крайової задачі (46) шукаємо в околі розв'язку породжуючої нетерової задачі

$$z_0^{'} = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m$$

та його похідної. Тут $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$, $Z(z, z', \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за невідомою z в малому околі розв'язку $z_0(t)$ породжуючої задачі та його похідної, а також неперервно-диференційовна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали: $\ell z(\cdot, \varepsilon)$, $\varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \to \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомими z, z' і по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$), за умови

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell(Kf)(\cdot)\} = 0$$

породжуюча задача має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – стала матриця, $\operatorname{rank} Q := n_1$, $r := n - n_1$, $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – ортопроектор: $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$, $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини породжуючої системи, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, матриця P_{Q_r} утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$, $G[f; \alpha](t)$ — узагальнений оператор Гріна породжуючої задачі, Q^+ – псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу, $K[f](t)$ — оператор Гріна задачі Коші породжуючої системи. Заміна

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\,\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) := b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon),$$

приводить крайову задачу (46) до вигляду

$$z' = Az + f + \varepsilon\,\tilde{Z}(z, z', \beta, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\,\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon). \qquad (47)$$

Тут

$$\tilde{Z}(z, z', \beta(\varepsilon), \varepsilon) := \beta(\varepsilon)A(z + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\,Z\left(z, \frac{z'}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))}, \beta(\varepsilon), \varepsilon\right).$$

Позначимо

$$\varphi_0(c^*) := \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), z_0^{'}(\cdot, c_r^*), 0),$$

$$f_0(s, c_0^*) := \beta^* \left[Az_0(s, c_r^*) + f\right] + Z(z_0(s, c_r^*), z_0^{'}(s, c_r^*), 0).$$

Лема 3.5.1. *Якщо крайова задача* (46) *в критичному* ($P_{Q^*} \neq 0$) *випадку має розв'язок* $z(t, \varepsilon)$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжуючий* $z_0(t, c_r^*)$, $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, *то вектор* $c_0^*\colon = \operatorname{col}(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *задовольняє рівнянню*

$$F(c_0^*) := P_{Q^*} \{\varphi(c_0^*) - \ell K[f_0(s, c_0^*)](\cdot)\} = 0. \tag{48}$$

Для побудови розв'язків крайової задачі (46) для кожного простого кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (48) нами отримані достатні умови існування розв'язків автономної крайової задачі, а також ітераційна схема, побудована з використанням техніки найменших квадратів [2]. Як приклади застосування отриманих результатів знайдені наближення до розв'язків періодичних задач для рівняння типу Релея, рівняння типу Хілла у випадку параметричного резонансу, а також рівняння Матьє. Також знайдені наближення до розв'язків періодичних задач для автономного рівняння типу Дюффінга та Лотки–Вольтерри та періодичної задачі для рівняння типу Льєнара, не розв'язаного відносно похідної.

У **четвертому розділі** досліджено напівлінійні еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних, вигляду

$$\operatorname{div}\left[A(z)\nabla u(z)\right] = f(u(z)). \tag{49}$$

Тут, $A(z) = \{a_{ij}(z)\}$, $\det A(z) = 1$ — симетрична 2 x 2 матрична функція з вимірними коефіцієнтами, що задовольняє умові рівномірної еліптичності

$$\frac{1}{K}\,|\xi|^2 \;\leq\; \langle A(z)\,\xi, \xi\rangle \;\leq\; K\,|\xi|^2 \;\text{ м.в. в } \Omega$$

для кожного $\xi \in \mathbf{C}$, де $1 \leq K < \infty$, і Ω є областю в комплексній площині $\mathbf{C}$. Зокрема, для рівняння (49) доведена наступна теорема.

Теорема 4.1.1. (Теорема факторизації). *Нехай* Ω *є областю в* $\boldsymbol{C}$, $A \in M^{2\times 2}(\Omega)$, *і нехай* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є неперервною функцією. Тоді довільний слабкий розв'язок* u *напівлінійного рівняння* (49) *може бути представлено у вигляді композиції*

$$u(z) = T(\omega(z)),$$

де $\omega : \Omega \to G$ *є квазіконформним відображенням, узгодженим з* A, *і* T *є слабким розв'язком квазілінійного рівняння Пуассона*

$$\triangle\, T(w) \;=\; J(w)\, f(T(w)), \;\; w \in G, \tag{50}$$

де $J(w)$ *є якобіаном оберненого відображення* $\omega^{-1}(w)$.

Дано застосування теореми 4.1.1 до дослідження розв'язків, що вибухають («blow-up») на границі деяких класичних модельних напівлінійних еліптичних рівнянь, зокрема диврегентного аналога рівняння Ліувілля–Бібербаха, а також до задач з вільною границею.

Отже нами показано, що дослідження розв'язків напівлінійного рівняння вигляду (49) зводиться, зокрема, до дослідження квазілінійного рівняння Пуассона (50). У зв'язку з цим нами досліджено більш загальну задачу, а саме існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона

$$\triangle U(z) = h(z) \cdot f(U(z))$$

в одиничному крузі $\mathbb{D} \subset \mathbf{C}$ з довільними неперервними граничними даними $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Тут $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ є функцією класу $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, і неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є такою, що $f(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Відмітимо, що в якості функцій $f(t)$ можна обрати, наприклад, функції вигляду t^δ при $0 < t < 1$ та e^{-t}. Використовуючи теорію потенціалу та підхід Лере–Шаудера, доведено існування неперервних розв'язків U поставленої задачі в класі Соболєва $W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$.

Теорема 4.2.3. *Нехай $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією, $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ є функцією класу $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, і нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією такою, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \; = \; 0 \; .$$

Тоді існує неперервна функція $U : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ така, що $U|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, $U \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$, яка задовольняє рівнянню

$$\triangle\, U(z) \; = \; h(z) \cdot f(U(z)) \qquad \text{для м.в. } z \in \mathbb{D} \; .$$

Більш того, $U \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ для деяких $q > 2$ і U – локально неперервна по Гьольдеру в $\mathbb{D}$. Якщо φ неперервна по Гьольдеру, тоді U неперервна по Гьольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$. Більш того, якщо $p > 2$, тоді $U \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$, де $\alpha = (p-2)/p$.

Зокрема, $U \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ для всіх $\alpha \in (0,1)$, якщо $h \in L^\infty(\mathbb{D})$. Якщо φ непрервна по Гьольдеру на $\partial\mathbb{D}$ з деяким показником $\beta \in (0,1)$, тоді U неперервна по Гьольдеру в $\overline{\mathbb{D}}$ з тим же показником.

Цей результат поширено на довільні області з гладкою границею.

В якості одного із застосувань теореми 4.2.3 досліджено задачу Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння (49) в однозв'язній області D комплексної площини $\mathbf{C}$ з неперервними граничними даними. Доведено існування слабких розв'язків задачі Діріхле в класі $C \cap W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$, якщо жорданова область D задовольняє квазігіперболічній граничній умові Герінга–Мартіо.

Теорема 4.3.1. *Нехай D є жордановою областю в $\mathbb{C}$, що задовольняє квазігіперболичній граничній умові, $A \in M_K^{2\times 2}(D)$, $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією, і нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є непервною функцією такою, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0 .$$

Тоді існує розв'язок $u : D \to \mathbb{R}$ рівняння (49) класу Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, який локально непрервний по Гьольдеру в D і неперервний в $\overline{D}$ з $u|_{\partial D} = \varphi$. Якщо φ неперервна по Гьольдеру, тоді розв'язок u є також неперервним по Гьольдеру в $\overline{D}$.

Наведено приклад області, яка задовольняє квазігіперболічній граничній умові Герінга–Мартіо і не задовольняє стандартній (A)–умові Ладиженської–Уральцевої, а також умові зовнішнього конуса.

Наприкінці дано деякі застосування отриманих результатів до математичних моделей, які описуються рівняннями вигляду (49), а саме теорії горіння, процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах.

По закінченню кожного розділу сформульовано освновні результати, наприкінці дисертації наведено загальні висновки.

ВИСНОВКИ

1. Побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу.

2. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

3. Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

4. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаної відносно похідної.

5. Доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення.

6. Для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з невиродженими граничними компонентами.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Український математичний вісник.* 2016. Т. 13, № 1. С. 91–105. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a model semilinear elliptic equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. V. 220, No. 5. P. 603–614.) DOI: 10.1007/s10958-016-3203-5.

2. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Автономные нётеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры».* 2017. Т. 132. С. 144–148. (Chuiko S.M., Nesmelova (Starkova) O.V. Autonomous noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. V. 230, No. 5. P. 799–803.) DOI: 10.1007/s10958-018-3793-1.

3. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. *Український математичний вісник.* 2017. Т. 14, № 2. С. 161–191. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. V. 229, No. 1. P. 7–29.) DOI: 10.1007/s10958-018-3659-6.

4. Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В., Дзюба М.В. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 2. С. 280–292. (Chuiko S.M., Nesmelova O.V., Dzyuba M.V. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2018. V. 70, No. 2. P. 319–333.) DOI: 10.1007/s11253-018-1502-3.

5. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To the theory of semi-linear equation in the plane. *Український математичний вісник.* 2019. Т. 16, № 1. С. 105–140. (Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. To the theory of semi-linear equation in the plane. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. V. 242, No. 6. P. 833–859.) DOI: 10.1007/s10958-019-04519-z.

6. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. Semi-linear equations and quasiconformal mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2020.

V. 65, No. 5. P. 823–843. DOI: 10.1080/17476933.2019.1631288.

7. Gutlyanskii V., Nesmelova O., Ryazanov V. On a quasilinear Poisson equation in the plane. *Analysis and Mathematical Physics.* 2020. V.10, No. 1. Article number: 6. DOI: 10.1007/s13324-019-00345-3.

8. Нєсмєлова О.В. Матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з P-Лапласіаном. *Український математичний вісник.* 2020. Т. 17, № 1. С. 49– 65. (Nesmelova O. Matrix boundary-value problems for differential equations with P-Laplacian. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. V. 248, No. 2. P. 175–187.) DOI: 10.1007/s10958-020-04867-1.

9. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В., Дзюба М.В. Про наближене розв'язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів. *Нелінійні коливання.* 2019. Т. 22, №3. С. 423–436.

10. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Чуйко А.С. Автономна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу. *Нелінійні коливання.* 2020. Т. 23, № 1. С. 134–144.

11. Чуйко С.М., Старкова О.В. Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика.* 2011. Т. 22, № 1. С. 157–172.

12. Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е. Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной. *Динамические системы.* 2012. Т. (2)30, №1–2. С. 169–186.

13. Несмелова О.В. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України.* 2018. Т. 32. С. 78–91. DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-9.

14. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On blow-up solutions and dead zones in semilinear equations. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. № 4. С. 9–15.
DOI: 10.15407/dopovidi2018.04.009.

15. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. № 10. С. 9-17.
DOI: 10.15407/dopovidi2018.10.009.

16. Несмелова О.В. Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка.* 2019. Т. 89. С. 10–20.
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-02.

17. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про положення рівноваги узагальненої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. *Праці Ін-*

ституту прикладної математики і механіки НАН України. 2019. Т. 33. С. 218–231. DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-17.

18. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On semilinear equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України.* 2019. № 7. С. 9–16. DOI: 10.15407/dopovidi2019.07.009.

19. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка".* 2019. Т. 90. С. 60–72. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-90-04.

20. Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона-Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса. *Доповіді Національної академії наук України.* 2019. №12. С. 3–12. DOI: 10.15407/dopovidi2019.12.003.

21. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the quasilinear Poisson equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України.* 2020. № 1. С. 3–12. DOI: 10.15407/dopovidi2020.01.003.

22. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України.* 2020. № 5. С. 10–16. DOI: 10.15407/dopovidi2020.05.003.

23. Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Комп. исследов. и моделирование.* 2011. Т. 3, № 4. С. 337–357.

24. Чуйко С.М., Старкова О.В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. *Комп. исследов. и моделирование.* 2012. Т. 4, №1. С. 31–43.

25. Чуйко С.М., Старкова О.В., Кулиш П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Комп. исследов. и модел.* 2014. Т. 6, №1. С. 27–43.

26. Чуйко С.М., Чуйко А.С., Старкова О.В. Периодическая задача для уравнения Льенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики.* 2015. Т. 29. С. 157–171.

27. Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сисоев Д.В. Автономная периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины.* 2016. Т. 30. С. 133–142.

28. Чуйко С.М., Нєсмелова О.В., Сысоев Д.В. Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України.* 2017. Т. 31. С. 140–150.

29. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in a plane and quasiconformal mappings. *Доповіді Національної академії наук України.* 2017. № 1. С. 10–16. DOI: 10.15407/dopovidi2017.01.010.

30. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in the plane with measurable data. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. № 2. С. 12–18. DOI: 10.15407/dopovidi2018.02.012.

31. Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная краевая задача в частном критическом случае. *XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 13–15 трав. 2010 р.). Київ, 2010. С. 439.

32. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Метод функций Ляпунова и его приложения* : тез. докл. X-й Крымской междунар. матем. школы (г. Алушта, 13–18 сент. 2010 г.). Симферополь, 2010. С. 132.

33. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в частном критическом случае. *Наукові здобутки молодих учених: на шляху до інновацій* : Збірник тез Молодіжного наукового форуму (м. Донецьк, 2010 р.). Донецьк, 2010. С. 13–14.

34. Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование* : тез. докл. XVIII междунар. науч. конф. (г. Пущино, 24–29 янв. 2011 г.). Пущино, Россия, 2011. С. 147.

35. Чуйко С.М., Старкова О.В. Неавтономная нетерова краевая задача в критическом случае. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 30 янв. – 4 фев. 2012 г.). Дубна, Россия, 2012. С. 123.

36. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае. *XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* : тези доп. (м. Київ, 19 – 21 квіт. 2012 р.). Київ, 2012. С. 440.

37. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономні нетерові крайові задачі в частинному критичному випадку. *Міжн. наукова конференція присвячена 70-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка.* : тези доп. (Кам'янець–Подільський, 6–8 черв. 2012 р.). Кам'янець-Подільський, 2012. С. 51.

38. Чуйко С.М., Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XIX междунар. науч. конф. (г. Пущино, 28 янв. – 2 февр. 2013 г.). Пущино, Россия, 2013. С. 122.

39. Чуйко С.М., Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для невырожденных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных

относительно производной. *Образование и наука в третьем тысячелетии* : материалы к Седьмой Междунар. науч.-теор. конф. Ч. 1. Барнаул, Россия, 2013. С. 30–32.

40. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Crimea iternational Mathematical Conference* : тез. докл. (г. Судак, 22 сент. – 4 окт. 2013 г.). Судак, 2013. С. 16–17.

41. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи в частном критическом случае. *Боголюбовські читання DIF — 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф., присв. ювілею акад. НАН України А.М. Самойленка. (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.). Севастополь, 2013. С. 172–173.

42. Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае. *Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування* : тези доп. міжнар. наук. конф. з нагоди 75–річчя акад. А.М. Самойленка. (м. Слов'янськ, 12–14 черв. 2013 р.). Слов'янськ, 2013. С. 31.

43. Чуйко С.М., Старкова О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XXI междунар. науч. конф. (г. Дубна, 3–7 фев. 2014 г.). Дубна, Россия, 2014. С. 81.

44. Старкова О.В. Нетеровы краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно производной. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке* : сб. материалов 18-го междунар. молодежного форума. Т. 7. (г. Харьков, 2014 г.). Харьков, 2014. С. 154.

45. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая краевая задача для уравнения Льенара в случае параметрического резонанса. *Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation* : тез. доп. XXVII междунар. конф. (г. Киев, 27–29 мая 2015 г.). Киев, 2015. С. 61.

46. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. Периодическая задача для уравнения Льенара, не разрешенного относительно производной. *Математика. Компьютер. Образование.* : тез. докл. XXIII междунар. науч. конф. (г. Дубна, 25–30 янв. 2016 г.). Дубна, Россия, 2016. С. 162.

47. Chuiko S.M., Starkova O.V. Periodic boundary value problem of Lenard type, unresolved with respect to derivative. *Intern. conf. on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : Book of abstracts. (Lviv, 20–24 September 2016). Lviv, Ukraine. P. 40.

48. Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. О решении автономных краевых задач, не разрешенных относительно производной, методом наименьших квадратов. *Математика и глобальные вызовы XXI века* : материалы симпозиума, посвященного столетию Пермского государствен-

ного национального исследовательского университета. (г. Пермь, 16–21 мая 2016 г.). Пермь, Россия, 2016. С. 161–163.

49. Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В. Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла. *Теорія наближення функцій та її застосування* : тези доп. міжнар. конф., присвяченої 75–річчю з дня народження чл.-кор. НАН України О.І. Степанця. (м. Слов'янськ, 28 трав. – 3 черв. 2017 р.). Слов'янськ, 2017. С. 96.

50. Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В. Про розв'язання лінійних матричних крайових задач методом найменших квадратів. *Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського* : тези доп. (м. Київ, 7–10 червня 2017 р.). Київ, 2017. С. 110.

51. Chuiko S., Nesmelova O., Dzuba M. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares methods. *Differential equations and control theory* : abstracts of 3-rd intern. scient. conf. (Kharkiv, September 25–27, 2018). Kharkiv, 2018. P. 18.

52. Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Autonomous Noether boundary value problems not solved with respect to the derivative. *Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications* : abstracts of intern. conf. (Bishkek, Kyrgyzstan, June 17 - 23, 2018). Bishkek, Kyrgyzstan, 2018. P. 52–53.

53. Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Equilibrium positions of nonlinear differential algebraic systems. *Morse theory and its applications* : abstracts of Intern. Conf. dedicated to the memory and 70-th anniversary of Volodymyr Sharko. (Kyiv, September 25–28, 2019). Kyiv, 2019. P. 5.

54. Несмелова О.В. Нелинейная краевая задача для дифференциально-алгебраической системы. *Dynamical System Modelling and Stability Investigation* : Abstracts of XIX Intern. Conf. (Kiyv, May 22-24, 2019). Kiyv, 2019. P. 109.

АНОТАЦІЇ

Нєсмєлова О.В. Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння». Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена дослідженню проблем знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. За допомогою апарату псевдообернених матриць, методів теорії збурень та теорії нелінійних коливань у дисертації вдосконалено схему дослідження задач про існування та побудову розв'язків нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно

похідної в некритичному та різноманітних критичних випадках. Встановлені необхідні і достатні умови існування та побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків.

В дисертаційній роботі досліджено нелінійні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної та неавтономної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної та нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу.

Також досліджено напівлінійні диференціальні рівняння в частинних похідних на площині. Основним результатом є теорема про факторизацію розв'язків напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції розв'язку асоційованого квазілінійного рівняння Пуассона і належного квазіконформного відображення. Також для задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона отримано умови існування неперервних розв'язків з довільними неперервними граничними даними. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних строго еліптичних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами при неперервних граничних даних в довільних областях з невиродженими граничними компонентами.

Ключові слова: крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, псевдообернені матриці, узагальнений оператор Гріна, критичний випадок, ітераційна схема, напівлінійні еліптичні рівняння, квазілінійне рівняння Пуассона, задача Діріхле, квазіконформні відображення.

Nesmelova O.V. Nonlinear boundary value problems not solved with respect to the derivative. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the doctor of science degree in Physics and Mathematics by speciality 01.01.02 «Differential equations». Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The monographs of A. M. Samoilenko, M.O. Perestiuk, V.P. Yakovets, O.O. Boichuk, as well as numerous works by foreign authors S. Campbell, J.R. Magnus, and V.F. Chistyakov are devoted to the study of linear differential-algebraic equations using the central canonical form and perfect pairs and triples of matrices. In the articles of S.M. Chuiko, a series of sufficient solvability conditions is proposed, as well as the construction of the generalized Green operator of the Cauchy problem for a linear differential-algebraic system without the use of a central canonical form and perfect pairs and triples of matrices. In the articles of O.O. Boichuk and O.O. Pokutnyi, the proposed solvability conditions for a nonlinear differential-algebraic boundary value problem using a generalized central canonical form, at that the main

assumption regarding the linear part of a differential-algebraic system is the possibility of reducing it to a certain canonical form.

A feature of this study is that the finding for constructive conditions for existence and construction of solutions of nonlinear differential-algebraic boundary value problems was carried out without using the central canonical form. This made it possible to investigate the solutions of differential-algebraic boundary value problems, that depend on arbitrary continuous functions. The consequence of this was the modification of classification of differential-algebraic boundary value problems.

The relevance of studying nonlinear boundary value problems, not resolved with respect to derivative, is also associated with the fact that the study of traditional problems, resolved by rather derivative, sometimes complicated, for example, in the case of nonlinearities, not integrable in elementary functions.

The study of nonlinear boundary value problems is closely related to the phenomenon of parametric resonance, which is relevant in mechanics, the theory of stability of motion, biology and radio engineering, the theory of nonlinear vibrations, physics, chemistry and mechanical engineering. Finding constructive conditions for the existence and constructing solutions of nonlinear boundary value problems in the case of parametric resonance is complicated by the dependence of the problem on an unknown function and ensures the solvability of the boundary value problem. This dependence of the problem on an unknown function is known to be a characteristic feature of autonomous boundary value problems. Thus, the feature of this dissertation is construction of solutions of nonlinear boundary value problems, in particular, in the case of parametric resonance depending on the eigenfunction of the boundary value problem.

This the thesis is devoted to the study of the problems of finding constructive conditions for existence and construction of solutions of nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative. With the help of the apparatus of pseudoinverse matrices (by Moore-Penrose), methods of perturbation theory and the theory of nonlinear oscillations, the scheme for studying problems of the existence and construction of solutions of nonlinear boundary value problems not resolved with respect to the derivative in non-critical and various critical cases was improved in the dissertation. Necessary and sufficient conditions for existence were established and iterative procedures were constructed for finding solutions to nonlinear boundary value problems that are not resolved with respect to the derivative.

Nonlinear boundary value problems for systems of ordinary differential equations are investigated. We found the constructive conditions for the solvability and a scheme for constructing solutions of the nonlinear non-autonomous boundary value problem that is not resolved with respect to the derivative and the nonlinear autonomous boundary value problem in the case of parametric resonance.

Semilinear partial differential equations on the plane are investigated. The main result is a theorem on factorization of solutions of semilinear strongly elliptic divergent equations with measurable coefficients in the form of a composition of the solution of the associated quasilinear Poisson equation and a proper quasiconformal mapping. Also, conditions for the existence of continuous solutions with arbitrary continuous boundary data were obtained for the Dirichlet problem for the quasilinear Poisson equation. Conditions for the existence of solutions to the Dirichlet problem for semilinear strongly elliptic divergent equations with measurable coefficients for continuous boundary data in arbitrary regions with non-degenerate boundary components were obtained.

Keywords: boundary value problems not solved with respect to the derivative, pseudo-inverse matrices, generalized Green's operator, critical case, iterative scheme, semilinear elliptic equations, quasilinear Poisson equation, Dirichlet problem, quasiconformal mappings.

Несмелова О.В. Нелинейные краевые задачи, не разрешенные относительно производной. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена исследованию проблем нахождения конструктивных условий существования и построения решений нелинейных краевых задач, не разрешенных относительно производной. С помощью аппарата псевдообратных матриц, методов теории возмущений и методов теории нелинейных колебаний в диссертации усовершенствована схема исследования задач о существовании и построении решений нелинейных краевых задач, не разрешенных относительно производной в некритическом и различных критических случаях. Кроме того, в диссертационной работе с единых позиций классифицированы многочисленные постановки нелинейных дифференциально-алгебраических краевых задач.

В диссертационной работе исследованы нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены конструктивные условия разрешимости и схемы построения решений нелинейной автономной и неавтономной краевой задачи, не разрешенных относительно производной,а также нелинейной автономной краевой задачи в случае параметрического резонанса.

Также исследовано полулинейные дифференциальные уравнения в частных производных на плоскости. Основным результатом является теорема о факторизации решений полулинейных строго эллиптических уравнений дивергентного вида с измеримыми коэффициентами в виде композиции решения ассоциированного квазилинейного уравнения Пуассона и соответствующего квазиконформного отображения. Также для задачи Дирихле для квазилинейного уравнения Пуассона получены условия существования непрерывных решений с произвольными непрерывными граничными данными. Получены условия существования решений задачи Дирихле для полулинейних строго эллиптических уравнений дивергентного вида с измеримыми коэффициентами при непрерывных граничных данных в произвольных областях с невырожденными граничными компонентами.

Ключевые слова: краевые задачи, не разрешенные относительно производной, псевдообратные матрицы, обобщенный оператор Грина, критический случай, итерационная схема, полулинейные эллиптические уравнения, квазилинейное уравнение Пуассона, задача Дирихле, квазиконформные отображения.

Підп. до друку 08.10.2020. Формат 60×84/16. Папір тип. Офс. друк. Фіз друк. арк. 2,06. Ум. друк. арк. 1,91. Тираж 120 пр. Зам. 159.

Інститут математики НАН України
01024, Київ 4, МСП, Терещенківська, 3