

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Ольги Володимирівни Несмелової «Нелінійні крайові задачі не розв'язані відносно похідної», подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння

**Актуальність теми.** Математичні моделі, що описують складні процеси в області механіки, фізики, електромеханіки часто приводять до дослідження різних типів крайових задач.

Динамічна поведінка фізичних процесів зазвичай моделюється за допомогою диференціальних рівнянь. Але якщо на фізичну систему якимось чином накладені додаткові обмеження, як, наприклад закони Кірхгофа в електричних мережах або обмеження на рух точок маси на поверхні, то математична модель також містить алгебраїчні рівняння для опису обмежень. Такі системи називаються диференціально-алгебраїчними системами або системами неявних диференціальних рівнянь.

Завдяки наявності специфічних властивостей розв'язків такі рівняння стали об'єктом дослідження багатьох математиків. У 1787 році Ж. Лагранж у своїй відомій праці «Аналітична механіка» одержав рівняння, що зараз носять назву рівняння Ейлера-Лагранжа і є першими диференціально-алгебраїчними рівняннями. Г. Кірхгоф, досліджуючи електродинамічні процеси в 1847 році, вперше одержав матричне диференціально-алгебраїчне рівняння.

При моделюванні біологічних та екологічних процесів, дослідженні динаміки ядерних реакторів, у напівпровідникових системах із зворотнім зв'язком та інших явищах виникають диференціально-алгебраїчні рівняння у вигляді систем з виродженими або прямокутними матрицями перед старшими похідними шуканої вектор-функції.

Аналізуючи сучасний стан дослідження теорії та алгоритмів неструктурованих проблем спостереження, вивчення руху мобільних роботів, моделювання електромагнітних полів за допомогою рівнянь Максвелла бачимо природні способи виникнення диференціально-алгебраїчних рівнянь (Campbell S., Ilchmann A., Mehrmann V., Reis T. Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks, 2019).

У задачах хімічної інженерії, теорії управління, динаміці рідин, біологічних та екологічних процесах виникають крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

В сучасній математичній літературі існує велика кількість робіт, в яких досить детально вивчено ряд важливих питань теорії диференціально-алгебраїчних рівнянь. Різним аспектам дослідження таких рівнянь присвячені праці світових математиків Ф.Р. Гантмахера, А.М. Тихонова, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, S.L. Campbell, L.R. Petzold, C.W. Gear та інших.

Природно, що найбільш дослідженими є лінійні системи. Для них достатньо добре розроблено методи розв'язування, що ґрунтуються на можливості зведення вироджених систем до інтегровних систем (Ю.Є. Бояринцев, В.Ф. Чистяков, S.L. Campbell, L.R. Petzold, R. März, R. Riaza), або до систем меншої розмірності (В.О. Єременко, Ю.Д. Шлапак). У працях S.L. Campbell та L.R. Petzold введено поняття центральної канонічної форми (ЦКФ) виродженої лінійної системи і наведено підстановки, за допомогою яких задана система зводилась до ЦКФ.

Загальні достатні умови звідності виродженої лінійної системи до ЦКФ були отримані А.М. Самойленком і В.П. Яковцем. Це дало змогу описати структуру загального розв'язку виродженої лінійної системи, розробити теорію асимптотичного інтегрування вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь. Необхідною умовою перерахованих вище результатів є умова сталості рангу матриці при похідних.

У дисертаційній роботі Несмєлової О.В. «Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної» досліджено проблеми існування розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних систем без використання центральної канонічної форми з урахуванням залежності від довільних функцій. Такий підхід суттєво урізноманітнює та ускладнює класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних випадках. Наявність складних і цікавих теоретичних проблем, пов'язаних із вивченням розглянутих в роботі задач, пояснює інтерес до їх дослідження і, в силу цього, тема дисертаційної роботи є важливою і актуальною.

**Основні результати роботи.** Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку умовних позначень та предметного покажчика, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано мету, задачі й методи дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, їх апробацію тощо.

У першому розділі дисертації наведений достатньо детальний огляд результатів інших авторів, які є близькими до теми дисертаційної роботи, головна увага приділяється роботам [3, 6, 21, 28, 115, 278], результати яких істотно використовуються у дисертаційній роботі. Окрема увага приділяється критичним випадкам, для яких характерна нерозв'язність відповідних диференціально-алгебраїчних крайових задач для довільних неоднорідностей у правій частині.

Основні самостійні наукові результати дисертаційної роботи наведено в другому, третьому та четвертому розділах.

У другому розділі побудовано вдосконалену класифікацію нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Наведено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач, зокрема, у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

У третьому розділі знайдені необхідні та достатні умови розв'язності, а також схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу в припущенні, що лінійна частина крайової задачі являє собою нетерову крайову задачу. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку кратних розв'язків рівняння для породжуючих констант. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку кратних розв'язків рівняння для породжуючих констант.

У четвертому розділі доведено теорему про факторизацію розв'язків напівлінійних рівнянь дивергентного виду з вимірними коефіцієнтами у вигляді композиції слабкого розв'язку квазілінійного рівняння Пуассона і узгодженого квазіконформного відображення. Отримано умови існування неперервних розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного рівняння Пуассона з



довільними неперервними граничними даними. Отримано умови існування розв'язків задачі Діріхле для напівлінійних рівнянь дивергентного типу з вимірними коефіцієнтами при неперервних крайових умовах в довільних областях з неvierодженими граничними компонентами. Розглянуто застосування одержаних результатів до ряду прикладних математичних моделей.

Відзначимо наявність в роботі великої кількості ілюстративних нетривіальних прикладів, на яких продемонстровано можливість перевірити умови доведених теорем та конструктивно знайти кілька послідовних наближень розв'язку і оцінити їх точність.

**Наукова новизна, оцінка обґрунтованості наукових положень дисертації та їх достовірності.** Дослідження, які виконані автором в даній дисертаційній роботі, спрямовані на постановку та розв'язання нових наукових задач, які є важливими для розвитку загальної теорії нелінійних крайових задач.

Ідеї та підходи, які використані для досліджень, є результативними. Можна стверджувати, що дисертація Ольги Володимирівни Несмелової «Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної» є завершеним науковим дослідженням, в якому отримано нові наукові результати. Усі одержані результати є строго математично обґрунтованими, що підтверджується наведеними в роботі прикладами та забезпечується узгодженістю з відомими раніше результатами.

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.** Дисертація у першу чергу є теоретичним дослідженням. Доведені в ній теореми суттєво доповнюють створену на цей час теорію конструктивних методів дослідження розв'язків нелінійних крайових задач. Результати, одержані в дисертаційній роботі, можуть знайти практичне застосування при розв'язуванні різноманітних крайових задач математичної та теоретичної фізики, при моделюванні електромагнітних полів, транспортних мереж, проблем логістики тощо.

**Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях.** Основні результати дисертації викладені в 30 наукових публікаціях, опублікованих у таких журналах як Journal of Mathematical Sciences, Ukrainian Mathematical Journal, Complex Variables and Elliptic Equations, Analysis and Mathematical Physics, Нелінійні коливання та інших, а також у 24

тезах міжнародних наукових конференцій. Серед них 8 статей опубліковано у виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus чи Web of Science, 2 статті опубліковано в українських виданнях з категорії «А».

Результати дисертаційного дослідження доповідалися на: Об'єднаному семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань, відділу математичних проблем механіки та теорії керування і відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України, спільних семінарах Інституту прикладної математики і механіки НАН України та кафедри математики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»; 25 міжнародних конференціях, конгресах, семінарах як за кордоном, так і в Україні.

Дисертація Ольги Володимирівни Несмелової відповідає всім вимогам за кількістю публікацій за темою дисертації у провідних наукових журналах та фахових виданнях, а також вимогам щодо об'єму та оформлення роботи. Дисертація відповідає паспорту спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння.

#### **Зауваження та побажання**

1. В огляді літератури доцільно було б звернути увагу на дослідження, пов'язані із числовими методами знаходження розв'язків початкових та крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь в роботах: С.W. Gear Differential Algebraic Equations, Indices, and Integral Algebraic Equations, 1990 ; E. Hairer, G. Wanner Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems, 1996; U.M. Ascher, L.R. Petzold «Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations», 1998 та інші.

2. На ст. 54, 283, 289 та ін. дисертації наводяться твердження: частина із наукових джерел, а частина доводиться, які чомусь називаються «Пропозиція».

3. У тексті роботи наводиться величезне число ілюстративних прикладів значна частина яких є складними в технічному плані, зокрема приклади 2.16, 2.18 та інші потребують проведення обчислень з числами, що містять 20 цифр і більше. Доцільно було б описати яке ПЗ використовувалось для проведення цих обчислень.

4. Для перевірки умов леми 2.3.1 розглядається приклад 2.3, в якому узагальненим методом Ньютона знаходиться положення рівноваги для

нелінійної диференціально-алгебраїчної системи. Для другого наближення констатується, що нев'язка має порядок  $10^{-9}$  та стверджується, що вона достатньо велика і тому шукається третє наближення, у якого нев'язка  $\approx 0$ . Не зрозуміло якою має бути нев'язка щоб вже зупинити обчислення.

5. Не зрозуміло яку роль відіграє запізнення в системі (2.97). Які розв'язки там шукаються і які в них якісні властивості. Наведений без технічних викладок приклад 2.3.3 не вносить ясність у процес дослідження задачі (2.97).

6. Дослідження розв'язності автономної системи диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу (3.22)-(3.23) зводиться до операторної системи (3.29) для розв'язання якої використовується метод простої ітерації (теорема 3.2.1), а також пропонується метод Ньютона (ст.196). Доцільно було б навести порівняння їх реалізації та навести рекомендації у яких випадках їх доцільно використовувати.

7. Недостатньо чітко у роботі відслідковуються граничні значення величини малого параметра  $\varepsilon$  для яких сформульовані твердження мають місце. Як правило, наводиться стандартне твердження, що ці значення можуть бути оцінені за допомогою мажоруючих рівнянь, або безпосередньо з умови стискання відповідного оператора.

8. У роботі є деякі описки та мовні неточності: наприклад, автор пише «по аналогії» замість «за аналогією» (ст. 30), «задовольняє вимоги леми 1.1.1» замість «задовольняє умови леми 1.1.1» (ст. 58), «оскільки умова (1.2) виконана, остільки система (2.7) невироджена» замість «так як умова (1.2) виконана то система (2.7) невироджена» (ст. 133) та інші.

Зазначимо, що зроблені зауваження та побажання не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

**Висновок.** Оцінюючи дисертаційну роботу в цілому, є всі підстави стверджувати, що за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень і науковою цінністю одержаних в ній результатів, дисертаційна робота Ольги Володимирівни Несмелової «Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної» відповідає вимогам п. 9, 10, 12, 13, 14 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 зі змінами) та вимогам щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 –

диференціальні рівняння, а її автор Ольга Володимирівна Несмелова заслуговує присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Офіційний опонент

завідувач кафедри математичного моделювання


Чернівецького національного університету

імені Юрія Федьковича,

доктор фізико-математичних наук,

професор

І.М. Черевко

  
Підпис Черевко І.М. засвідчую  
Начальник відділу кадрів Чернівецького  
національного університету  
імені Юрія Федьковича  
І.М. Черевко  
" 02 " 11 2008 р.

