Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ОПАНАСЕНКО Станіслав Вікторович

УДК 517.958

Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________ С.В. Опанасенко

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
ПОПОВИЧ Роман Омелянович

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ

Опанасенко С.В. Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 "математична фізика" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено розвитку методів групової класифікації класів диференціальних рівнянь та дослідженню узагальнених груп еквівалентності таких класів.

Проведено групову класифікацію класу загальних (1+1)-вимірних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза довільного фіксованого порядку r, більшого за одиницю,

$$u_t + C(t,x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t,x)u_k + B(t,x),$$

де $A^rC \neq 0$, а $u_k := \partial^k u/\partial x^k$, $k = 0,\dots,r$, включно з $u_0 := u$. Знайдено групоїди еквівалентності цього класу, а також його різних підкласів, виокремлених за допомогою калібрування довільних елементів класу сім'ями його перетворень еквівалентності. Доведено, що цей клас, а також його підклас, виокремлений калібруванням $(C, A^1) = (1, 0)$, нормалізовані в звичайному сенсі, а задачу групової класифікації вихідного класу у такий спосіб зведено до відповідної задачі для максимально відкаліброваного підкласу, яку ефективно розв'язано алгебраїчним методом групової класифікації. Вивчено альтернативні калібрування для коефіцієнтів рівнянь з вихідного класу й показано, що зазначене калібрування $(C, A^1) = (1, 0)$ є найкращим для проведення групової класифікації. Також уперше побудовано класи диференціальних рівнянь із нетривіальними узагальненими групами еквівалентності, у яких групові параметри локально залежать від несталих довільних елементів відповідних класів.

Подібний аналіз проведено для підкласу вихідного класу, який утворюють рівняння із коефіцієнтами, залежними лише від часової змінної:

$$u_t + C(t)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t)u_k + B(t), \quad A^rC \neq 0.$$

Показано, що цей підклас є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі. Строго побудовано його розширену узагальнену групу еквівалентності. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності.

Означення. Будь-яку мінімальну підгрупу узагальненої групи еквівалентності класу диференціальних рівнянь, що породжує той самий підгрупоїд його групоїда еквівалентності, що й уся група, назвемо *ефективною узагальненою групою еквівалентності* цього класу.

Описано групоїд еквівалентності класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза із коефіцієнтами, залежними лише від просторової змінної:

$$u_t + C(x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(x)u_k + B(x), \quad A^rC \neq 0.$$

Цей клас зведено сім'єю перетворень еквівалентності до підкласу із чотиривимірною звичайною групою еквівалентності. Прокласифіковано допустимі перетворення цього підкласу, а також виокремлено його підкласи, що допускають максимальні нетривіальні умовні групи еквівалентності. Показано, що всі вони мають розмірність, більшу за чотири. Зокрема, знайдено декілька нетривіальних випадків класів, нормалізованих в узагальненому сенсі.

Вивчено допустимі перетворення та ліївські симетрії класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами:

$$u_t + C(t,x)uu_x = A^2(t,x)u_{xx}, \quad A^2C \neq 0.$$

Показано, що нетривіальні диференціальні умови

$$\mathcal{L}_0\colon\ \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x = 0, \quad \mathcal{L}_1\colon\ \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x \neq 0$$

на довільні елементи класу призводять до його розбиття на підкласи $\mathcal{L}_0$ і $\mathcal{L}_1$, які можна відобразити у нормалізовані класи сім'ями точкових перетворень, параметризованими довільними елементами вихідних підкласів:

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x} = X(t,x) := \int \frac{\mathrm{d}x}{C(t,x)}, \quad \hat{u} = u.$$

Показано, що один з отриманих у такий спосіб класів є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі, і знайдено його ефективну розширену узагальнену групу еквівалентності. За допомогою відображення між класами та алгебраїчного методу групової класифікації проведено групову класифікацію вихідного класу з точністю до точкової еквівалентності.

Обґрунтовано процедуру калібрування перетвореннями еквівалентності класу довільних елементів підкласів, рівняння з яких допускають розширення ядра алгебр ліївської інваріантності рівнянь класу.

Метод розгалуженого розщеплення формалізовано для загальних класів диференціальних рівнянь. За допомогою його двокрокової версії проведено групову класифікацію класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії:

$$u_t = f(u_x)u_{xx} + g(u), \quad f \neq 0.$$

Для одночасного знаходження груп еквівалентності ненормалізованого класу і кількох його підкласів запропоновано оптимізовану версію прямого методу. Оптимізація містить попереднє вивчення допустимих перетворень всього класу та послідовне розщеплення відповідних визначальних рівнянь за довільними елементами та їхніми похідними залежно від допоміжних обмежень для кожного з підкласів. Уперше побудовано нетривіальний приклад скінченновимірної ефективної узагальненої групи еквівалентності; вона асоційована з підкласом, виокремленим додатковим допоміжним рівнянням $g_u = 0$. Доведено, що будь-яка ефективна узагальнена група еквівалентності цього підкласу не містить його звичайну групу еквівалентності.

Проведено розширений симетрійний аналіз системи $\mathcal{S}$, що моделює ізотермічний дрейфовий потік:

$$
\begin{aligned}
&\rho^1_t + u\rho^1_x + u_x\rho^1 = 0,\\
&\rho^2_t + u\rho^2_x + u_x\rho^2 = 0,\\
&(\rho^1+\rho^2)(u_t+uu_x) + a^2(\rho^1_x+\rho^2_x) = 0.
\end{aligned}
$$

Показано, що цю систему можна записати в діагоналізованій формі:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{r}^1_t + (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2+1)\mathfrak{r}^1_x = 0,\\
&\mathfrak{r}^2_t + (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2-1)\mathfrak{r}^2_x = 0,\\
&\mathfrak{r}^3_t + (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3_x = 0,
\end{aligned}
$$

а також "лінеаризувати" модифікованим перетворенням годографа до напівзачепленої системи з (1+1)-вимірним рівнянням Клейна–Гордона:

$$
\begin{aligned}
&q_{yz} = q,\\
&p = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y-z}(q_z - q),\\
&(q_{zz} - 2q_z + q)s_y = (q_y + q_z - 2q)s_z.
\end{aligned}
$$

Доведено, що максимальна алгебра інваріантності цієї системи є нескінченновимірною. Знайдено її повну групу точкових симетрій за допомогою алгебраїчного методу, що ґрунтується на мегаідеалах. Вищезгадану лінеаризацію використано для побудови загального розв'язку системи $\mathcal{S}$ у неявному вигляді. Серед іншого, стандартним методом знайдено узагальнені симетрії першого порядку системи $\mathcal{S}$ та пов'язано їх із ліївськими симетріями підсистеми із двох перших рівнянь останньої системи. Побудовано гідродинамічні закони збереження та їхні узагальнення.

Через використання нестандартних обчислювальних технік, що ґрунтуються на конусних змінних, знайдено алгебру узагальнених симетрій (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона

$$
u_{xy} = u.
$$

Пораховано простір локальних законів збереження цього рівняння. Показано, що його породжено єдиним законом збереження першого порядку під дією узагальнених симетрій.

Завдяки напівзачепленості системи $\mathcal{S}$ і зведенню її підсистеми до (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона, вичерпно описано узагальнені симетрії, косиметрії та закони збереження системи $\mathcal{S}$. Доведено, що генеруючу множину локальних законів збереження під дією узагальнених симетрій складають два закони збереження нульового порядку:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(\,\mathfrak{r}^3,\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3\,\big),\\
&\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(x-(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)t,(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)(x-(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)t)-t\big).
\end{aligned}$$

Побудовано нескінченну сім'ю гамільтонових структур, параметризовану довільною функцією одного аргументу. Для кожної із побудованих гамільтонових структур отримано відповідну алгебру гамільтонових симетрій.

Ключові слова: груповий аналіз диференціальних рівнянь, ліївська симетрія, узагальнена група еквівалентності, розширена узагальнена група еквівалентності, групоїд еквівалентності, закон збереження, узагальнена симетрія, косиметрія, гамільтонова структура, метод розгалуженого розщеплення, алгебраїчний метод групової класифікації.

ABSTRACT

Opanasenko S. Generalized equivalence groups and extended symmetry analysis of differential equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 “Mathematical Physics” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to generalized equivalence groups and their properties as well as to various techniques of symmetry analysis.

The complete group classification problem for the class of (1+1)-dimensional rth order general variable-coefficient Burgers–Korteweg–de Vries equations is solved for arbitrary values of r greater than or equal to two,

$$u_t + C(t,x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t,x)u_k + B(t,x), \quad A^r C \neq 0, \quad u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}.$$

We find the equivalence groupoids of this class and its various subclasses obtained by gauging equation coefficients with equivalence transformations. Showing that this class and certain gauged subclasses are normalized in the usual sense, we reduce the complete group classification problem for the entire class to that for the selected maximally gauged subclass, and it is the latter problem that is solved efficiently using the algebraic method of group classification. Similar studies are carried out for the subclass of equations with coefficients depending at most on the time variable. Studying alternative gauges for equation coefficients with equivalence transformations allows us not only to justify the choice of the most appropriate gauge for the group classification but also to construct for the first time classes of differential equations with nontrivial generalized equivalence group such that equivalence-transformation components corresponding to equation variables locally depend on nonconstant arbitrary elements of the class. For the subclass of equations with coefficients depending at most on

the time variable, which is normalized in the extended generalized sense, we explicitly construct its extended generalized equivalence group in a rigorous way. The new notion of effective generalized equivalence group is introduced.

Definition. We call any minimal subgroup of a generalized equivalence group of a class of differential equations, that generates the same subgroupoid of the equivalence groupoid of the class as the entire group does, an *effective generalized equivalence group* of this class.

We describe the equivalence groupoid of the class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients,

$$u_t + C(x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(x)u_k + B(x), \quad A^rC \neq 0.$$

This class is shown to reduce by a family of equivalence transformations to a subclass whose usual equivalence group is four-dimensional. We classify admissible transformations of this subclass and single out its subclasses admitting maximal nontrivial conditional equivalence groups. All of these groups turn out to have dimension higher than four. In particular, several more examples of classes of differential equations that are normalized in the generalized sense appeared this way.

We study admissible transformations and Lie symmetries for a class of variable-coefficient Burgers equations,

$$u_t + C(t,x)uu_x = A^2(t,x)u_{xx}, \quad A^2C \neq 0.$$

We combine the advanced methods of splitting into normalized subclasses and of mappings between classes that are generated by families of point transformations parameterized by arbitrary elements of the original class. Nontrivial differential constraints on the arbitrary elements of the class of variable-coefficient Burgers equations,

$$\mathcal{L}_0\colon\ \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x = 0, \quad \mathcal{L}_1\colon\ \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x \neq 0,$$

lead to its partition into two subclasses $\mathcal{L}_0$ and $\mathcal{L}_1$, which are related to normalized classes via families of point transformations parameterized by subclasses' arbitrary elements,

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x} = X(t,x) := \int \frac{\mathrm{d}x}{C(t,x)}, \quad \hat{u} = u.$$

One of the mapped classes is proved to be normalized in the extended generalized sense, and its effective extended generalized equivalence group is found. Using the mappings between classes and the algebraic method of group classification, we carry out the group classification of the initial class with respect to its equivalence groupoid.

The procedure of gauging arbitrary elements of subclasses of equations admitting extensions of the kernel of maximal Lie invariance algebras by equivalence transformations of their superclass is developed for general classes of differential equations.

The method of furcate splitting is formalized for general classes of differential equations as well. Using the two-step version of this method, we carry out the enhanced group classification of a class of (1+1)-dimensional nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusivity,

$$u_t = f(u_x)u_{xx} + g(u), \quad f \neq 0.$$

For simultaneously finding the equivalence groups of an non-normalized class of differential equations and a collection of its subclasses, we suggest an optimized version of the direct method. The optimization includes the preliminary study of admissible transformations within the entire class and the successive splitting of the corresponding determining equations with respect to arbitrary elements and their derivatives depending on auxiliary constraints associated with each of required subclasses. In the course of applying the suggested technique to subclasses of the class under consideration, we construct, for the first time, a nontrivial example of finite-dimensional effective generalized equivalence group.

We perform extended group analysis for a system $\mathcal{S}$ of differential equations modeling an isothermal no-slip drift flux,

$$
\begin{aligned}
&\rho^1_t + u\rho^1_x + u_x\rho^1 = 0,\\
&\rho^2_t + u\rho^2_x + u_x\rho^2 = 0,\\
&(\rho^1 + \rho^2)(u_t + uu_x) + a^2(\rho^1_x + \rho^2_x) = 0.
\end{aligned}
$$

We show that this hydrodynamic-type system can be written in the diagonalized form,

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{r}^1_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1)\mathfrak{r}^1_x = 0,\\
&\mathfrak{r}^2_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1)\mathfrak{r}^2_x = 0,\\
&\mathfrak{r}^3_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3_x = 0.
\end{aligned}
$$

The maximal Lie invariance algebra of this system is proved to be infinite-dimensional. We also find the complete point symmetry group of this system, including discrete symmetries, using the megaideal-based version of the algebraic method. The system be "linearized" by a composition of a fiber-preserving point transformation with a two-dimensional hodograph transformation to a partially coupled system including the Klein–Gordon equation,

$$
\begin{aligned}
&q_{yz} = q,\\
&p = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y-z}(q_z - q),\\
&(q_{zz} - 2q_z + q)s_y = (q_y + q_z - 2q)s_z.
\end{aligned}
$$

We also employ the linearization for constructing the general solution of the entire system under study in an implicit form. We find *inter alia* genuinely first-order generalized symmetries for this system and present the connection between them and the Lie symmetries of the subsystem of the first two equations of the latter system. Hydrodynamic conservation laws and their generalizations are also constructed.

Using advantages of nonstandard computational techniques based on the light-cone variables, we explicitly find the algebra of generalized symmetries of the (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation,

$$u_{xy} = u.$$

This allows us to describe this algebra in terms of the universal enveloping algebra of the essential Lie invariance algebra of the Klein–Gordon equation. Then we compute the space of local conservation laws of this equation, which turns out to be generated, up to the action of generalized symmetries, by a single first-order conservation law.

Using the facts that the system $\mathcal{S}$ is partially coupled and its subsystem reduces to the (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation, we exhaustively describe generalized symmetries, cosymmetries and local conservation laws of $\mathcal{S}$. A generating set of local conservation laws under the action of generalized symmetries is proved to consist of two zeroth-order conservation laws,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(\,\mathfrak{r}^3,\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3\,\big),\\
&\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(x-(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)t, (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)(x-(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)t)-t\big).
\end{aligned}$$

We also construct an infinite family of Hamiltonian structures involving an arbitrary function of a single argument. For each of the constructed Hamiltonian operators, we obtain the associated algebra of Hamiltonian symmetries.

Key words: group analysis of differential equations, Lie symmetry, generalized equivalence group, extended generalized equivalence group, equivalence groupoid, conservation law, generalized symmetry, cosymmetry, Hamiltonian structure, algebraic method of group classification, method of furcate splitting.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Opanasenko S., Boyko V. and Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusivity, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, 30 pp., arXiv:1804.08776.
2. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **402** (2020), 132188, 29 pp., arXiv:1705.09277.
3. Opanasenko S., Equivalence groupoid of a class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, 131–154, arXiv:1909.00036.
4. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 40 pp., arXiv:1703.06932.
5. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Equivalence groupoid and group classification of a class of variable-coefficient Burgers equations, *J. Math. Anal. Appl.* **490** (2020), 124215, 22 pp., arXiv:1910.13500.
6. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian structures of an isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **411** (2020), 132546, 19 pp., arXiv:1908.00034.
7. Opanasenko S., Symmetries and exact solutions of isothermal no-slip drift flux model, International workshop in honour of Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, December 17–20, 2016), `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Opanasenko.pdf`
8. Opanasenko S., Group classification a class of nonlinear reaction–diffusion equations, "International Conference of Young Mathematicians Dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of

Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)" (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 7–10, 2017), https://www.imath.kiev.ua/~young/conf2/index.php?module=4&lang=ua.

9. Opanasenko S., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, International conference "Geometry and Algebra of PDEs – 2017" (UiT the Arctic University of Norway, Tromsø, Norway, June 6–10, 2017), Book of abstracts, p. 4, http://serre.mat-stat.uit.no/pdes2017/Abstracts-GAPDE2017.pdf.

10. Opanasenko S., Algebraic method of finding the complete point symmetry group of a system of differential equations, Workshop "Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017" (Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, Canada, August 28–September 1, 2017), Book of abstracts, p. 12, https://www.mun.ca/aac/Workshops/PastWork/CGAA2017/.

11. Opanasenko S., Effective generalized equivalence groups, International workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018), Book of abstracts, p. 33, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2018 /Opanasenko.html.

12. Opanasenko S., Higher symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation, International conference "Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability" (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italy, October 8–12, 2018), Abstract, https://gdeq.org/Opanasenko_S._Generalized_symmetries_and_conservation_laws_of_(1%2B1)-dimensional_Klein-Gordon_equation_(abstract).

13. Opanasenko S., Symmetry analysis of an isothermal no-slip drift flux model, "Second JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019" (Universidad de Santiago, Santiago, Chile, May 25 – June 6, 2018), Book of abstracts, p. 46, http://www.dmcc.usach.cl/JNMP-Conference-2019/images/Abstracts-Alf-2019.pdf.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathcal{L}$	клас систем диференціальних рівнянь
θ, κ	набір довільних елементів класу
$\mathcal{E}$, $\mathcal{L}_\theta$	система диференціальних рівнянь
$\mathcal{G}^\sim$	групоїд еквівалентності класу
G_θ	повна група точкових симетрій системи
$G^\sim$	звичайна група еквівалентності класу
$\bar{G}^\sim$	узагальнена група еквівалентності
$\hat{G}^\sim$	розширена узагальнена група еквівалентності класу
$\breve{G}^\sim$	ефективна узагальнена група еквівалентності класу
$\mathfrak{g}^\sim$	алгебра Лі групи еквівалентності класу
$\mathfrak{g}^\cap$	алгебра Лі ядра основних груп рівнянь з класу
$\mathcal{T}$	точкове перетворення
D_t, D_x	оператори повного диференціювання за змінними t і x
$\mathrm{J}^r = \mathrm{J}^r(x\vert u)$	простір струменів порядку r
	з незалежними змінними x і залежними змінними u
Q	векторне поле
$Q^{(r)}$	r-те продовження векторного поля Q
$\mathcal{T}_*Q$	підняття векторного поля точковим перетворенням
$\langle \dots \rangle$	лінійна оболонка

Якщо не оговорено інше, за повторюваними індексами йде підсумовування.

Вступ

Актуальність теми. Поставивши перед собою амбітну мету розробити загальний алгоритм інтегрування звичайних диференціальних рівнянь за аналогією з теорією розв'язання алгебраїчних рівнянь, Софус Лі ввів поняття неперервних та інфінітезимальних перетворень. Хоча поставленої мети досягнуто не було, створена теорія розвинулась у важливу самостійну галузь математики — симетрійний аналіз диференціальних рівнянь, що охоплює широке коло проблем, пов'язаних із дослідженням ліївських, точкових і вищих симетрій, законів збереження, гамільтонових структур, операторів редукції, пошуком точних розв'язків диференціальних рівнянь тощо. Від другої половини двадцятого сторіччя в цій галузі працюють науковці по всьому світу. Своя школа симетрійного аналізу, заснована В.І. Фущичем, є і в Україні. Її центром є Інститут математики НАН України.

У багатьох застосуваннях природно розглядати не окремі системи диференціальних рівнянь, а множини таких систем, параметризованих довільними елементами — сталими або функціями, що задовольняють певні, можливо диференціальні, умови. Ці множини називають класами диференціальних рівнянь, а процедуру пошуку ліївських симетрій систем заданого класу залежно від значень довільних елементів — груповою класифікацією. Фізична мотивація дослідження таких класів полягає в тому, що природні процеси часто описують системами диференціальних рівнянь із параметрами, які відповідають незалежним від процесів факторам, як-от топографія дна чи коефіцієнти теплопровідності або дифузії. Крім того, ті самі системи можуть моделювати геть різні фізичні процеси, а тому доцільно вивчати математичну модель незалежно від природи явища. Наприклад, рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами описують різноманітні процеси турбулентності, акустики, статистичної фізики й фізики конденсованих систем, а також теорію заторів.

Задачі симетрійного аналізу постійно ускладнюються, а тому є нагальна потреба в покращенні наявних і створенні нових методів для їхнього розв'язання.

Так, нормалізований клас загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза r-го порядку, який параметризовано $r+2$ функціями двох змінних, $r \geqslant 2$, є надкласом для багатьох класів еволюційних рівнянь, розглянутих у літературі з погляду симетрійного аналізу, і він значно ширший за них, а тому розв'язання задачі його групової класифікації в дисертації суттєво узагальнює багато наявних результатів. За допомогою калібрувань довільних елементів перетвореннями еквівалентності класу цю задачу можна дещо спростити. Проте з урахуванням кількості довільних елементів класу постає питання оптимального калібрування. Критерієм добору калібрувань є збереження властивості нормалізованості, оскільки саме нормалізовані класи найзручніші для застосування алгебраїчного методу групової класифікації. З огляду на неможливість визначення апріорі калібрування, асоційованого з нормалізованим підкласом, у дисертації проаналізовано різні можливості для калібрувань.

Наслідком цього дослідження стали перші приклади узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь із несталими довільними елементами й перша строга побудова розширених узагальнених груп еквівалентності для класів рівнянь з частинними похідними через накриття допоміжних систем на довільні елементи. Останнє особливо актуальне з огляду на сучасний нелокальний тренд у симетрійному аналізі. Поняття узагальненої групи еквівалентності ввів С.В. Мелешко 1994 року як узагальнення класичного поняття звичайної групи еквівалентності. Водночас донедавна всі відомі випадки таких груп були тривіальними, тобто їхні параметри залежали щонайбільше від сталих довільних елементів відповідних класів. У симетрійній спільноті навіть почала циркулювати думка, що нетривіальних узагальнених груп еквівалентності взагалі не існує. Пошук розширеної узагальненої групи еквівалентності підкласу рівнянь із залежними лише від часу коефіцієнтами показав, що узагальнена група еквівалентності може містити власну підгрупу, яка породжує той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності, що й уся група. Мінімальні серед підгруп з описаною властивістю названо (нетривіальними) ефективними узагальненими групами еквівалентності. Наразі ще не знайдено класу з єдиною такою групою.

Метод розгалуженого розщеплення ефективно застосовували до групової класифікації низки класів, довільні елементи яких залежать від одного чи двох аргументів. Водночас, у дисертації вперше формалізовано цей метод для загального класу рівнянь, а також продемонстровано ефективність його багатокрокової версії.

Незважаючи на інтенсивність досліджень, існує небагато прикладів вичерпного опису узагальнених симетрій або законів збереження для систем диференціальних рівнянь, які допускають такі структури як завгодно високого порядку. Вивчені в дисертації система гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік, і рівняння Клейна–Гордона саме цього типу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках теми "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059).

Мета й завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є удосконалення наявних і розробка нових методів й алгоритмів групової класифікації класів диференціальних рівнянь, а також дослідження властивостей узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь.

Основну увагу в дисертації зосереджено на задачах групової класифікації класу рівнянь реакції–дифузії та класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза і його підкласів, а також на задачі вичерпного симетрійного аналізу системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Ці класи диференціальних рівнянь і ця система гідродинамічного типу становлять *об'єкт дослідження* дисертації.

Предметом дослідження є групи, групоїди й алгебри еквівалентності класів диференціальних рівнянь, особливо узагальнені й ефективні узагальнені групи еквівалентності, а також ліївські та вищі симетрії, косиметрії, закони збереження, гамільтонові структури й точні розв'язки диференціальних рівнянь.

Методи дослідження. Алгебраїчний метод групової класифікації, метод розгалуженого розщеплення, розбиття класів на підкласи з кращими трансформаційними властивостями, відображення між класами, породжені сім'ями точкових перетворень, класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова, прямий метод обчислення групоїдів і груп еквівалентності, репараметризація та побудова накриттів класів диференціальних рівнянь, процедура калібрування довільних елементів підкласів, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності перетвореннями еквівалентності всього класу, прямий і алгебраїчний методи знаходження повних груп точкових симетрій, узагальнений метод годографа, метод Керстена–Красильщика–Вербовецького побудови гамільтонових операторів, а також прямий метод і метод характеристик знаходження законів збереження.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Строго побудовано узагальнені й розширені узагальнені групи еквівалентності низки класів диференціальних рівнянь. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності, знайдено приклади таких груп і досліджено їхні основні властивості.

2. Знайдено групоїди еквівалентності класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза і його підкласів рівнянь із коефіцієнтами, залежними лише від просторової або лише від часової змінних. Алгебраїчним методом проведено групову класифікацію загального класу, з якої виокремлено класифікації підкласів.

3. Метод розгалуженого розщеплення формалізовано для загальних класів диференціальних рівнянь. За допомогою його двокрокової версії проведено групову класифікацію певного класу рівнянь реакції–дифузії.

4. Вивчено допустимі перетворення й ліївські симетрії класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Його групову класифікацію проведено комбінацією алгебраїчного методу, методу відображення класів сім'ями точкових перетворень і розбиття класу на нормалізовані підкласи.

5. Обґрунтовано процедуру калібрування перетвореннями еквівалентності класу довільних елементів підкласів, рівняння з яких допускають розширення ядра алгебр інваріантності.

6. Проведено розширений груповий аналіз системи гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Знайдено її максимальну алгебру інваріантності, повну групу точкових симетрій, алгебри вищих симетрій і косиметрій, простір законів збереження й нескінченну сім'ю гамільтонових структур, а також отримано загальний розв'язок у неявному вигляді, параметризований розв'язком рівняння Клейна–Гордона.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати й розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях моделей сучасної математичної й теоретичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, здобувач одержав самостійно. У роботах, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий. У статтях [1,2,4–6] Р.О. Поповичу належать постановка задач і загальний план досліджень, В.М. Бойку й А. Біло — перевірка доведень та одержаних результатів, а А.Г. Сергєєву — ідея розширення дослідження у [2,6] на структури вищих порядків.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародному симпозіумі "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Ларнака, Кіпр, 2018), на міжнародних семінарах "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Київ, 2016) і "Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017" (Сент-Джонс, Канада, 2017), на міжнародних конференціях "Geometry and Algebra of PDEs – 2017" (Тромсе, Норвегія, 2017), "Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability" (Трієст, Італія, 2018), "The Second JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019" (Сантьяго, Чилі, 2019), "International Conference of Young Mathematicians Dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)" (Київ, 2017), на наукових семінарах відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), відділу математичної фізики Центру математичних досліджень Монреальського університету (Канада, 2018), кафедри математики університету Лафборо (Сполучене Королівство, 2019), науковому семінарі "Generalized functions" математичного факультету Віденського університету (Австрія, 2019).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в роботах [1–13]. Статті [1–4] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук і зараховуються як сім фахових публікацій згідно з п. 2 Наказу №1220 МОН

України від 23.09.2019, оскільки статті [1,2,4] опубліковано у виданнях, що належать до квартилів Q1–Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, а тому кожна з них прирівнюється до двох публікацій. Статтю [3] опубліковано без співавторів, а [7–13] — тези конференцій. Статті [1–6] проіндексовано у міжнародних наукометричних базах даних, а саме: [1,2,4] — у Web of Science, [1,2,4,5,6] — у Scopus і MathSciNet, а [1,3,4] — у Zentralblatt MATH.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 119 найменувань, і двох додатків. Повний обсяг дисертації становить 196 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження та коротко викладено результати роботи.

Основну частину роботи складають чотири розділи. На початку кожного розділу, окрім першого, подано огляд літератури, стан проблеми та результати інших авторів, а також стисло описано результати розділу.

Перший розділ дисертації присвячено теорії групового аналізу класів диференціальних рівнянь. У § 1.1 дано означення класу диференціальних рівнянь, його групоїда та різним групам еквівалентності, нормалізованості класів у відповідних сенсах та описано алгебраїчний метод групової класифікації. Зокрема введено строге означення узагальненої, розширеної узагальненої та ефективної узагальненої груп еквівалентності. У § 1.2 описано процедуру калібрування перетвореннями еквівалентності параметрів підкласів, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності. Формалізований опис методу розгалуженого розщеплення групової класифікації міститься у § 1.3. § 1.4 містить опис прямого та алгебраїчного методів знаходження повної групи точкових симетрій диференціального рівняння.

Другий розділ дисертації присвячено груповому аналізу класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза та його різних підкласів. Розділ починається з § 2.1, який служить вступом. Клас загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза розглядається у § 2.2. Спочатку, використовуючи відомі результати про допустимі перетворення класу еволюційних рівнянь, у § 2.2.1 знайдено групоїди еквівалентності класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза та його нормалізованого підкласу, виокремленого умовою $(C, A^1) = (1, 0)$, реалізованою сім'єю перетворень еквівалентності. Те, що цей підклас є найзручнішим з усіх підкласів вихідного класу для групової класифікації, показано у § 2.2.2, де розглянуто альтернативні калібрування і знайдено перший нетривіальний випадок узагальненої групи еквівалентності. Групову класифікацію вихідного класу проведено алгебраїчним методом у §§ 2.2.3, 2.2.4 та 2.2.5, які відповідно містять попередній аналіз ліївських симетрій, властивості придатних підалгебр алгебри еквівалентності класу та безпосередньо результат та його доведення.

Вивчаючи підклас із залежними лише від часової змінної довільними елементами у § 2.3, вперше знайдено клас із нетривіальною розширеною узагальненою групою еквівалентності. Показано, що для строгої побудови таких груп еквівалентності необхідно розглядати накриття відповідного класу. Також знайдено нетривіальну ефективну розширену узагальнену групу еквівалентності згаданого класу.

Аналіз підкласу із залежними лише від просторової змінної довільними елементами проведено у § 2.4. Цей клас не є нормалізованим, але його можна розбити на нормалізовані підкласи, чиї групи еквівалентності збігаються із максимальними умовними групами еквівалентності цього класу. Здебільшого, ці підкласи нормалізовані в узагальненому сенсі зі скінченновимірними групами еквівалентності. Досліджено їхні ефективні узагальнені групи еквівалентності.

У § 2.5.1 вивчено клас $\mathcal{L}$ рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами через вивчення подібного йому класу $\hat{\mathcal{L}}$, який тривіально представляється як диз'юнктивне об'єднання двох нормалізованих підкласів $\hat{\mathcal{L}}_0$ та $\hat{\mathcal{L}}_1$. Клас $\hat{\mathcal{L}}_0$ є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі та зводиться до підкласу класу $\mathcal{L}$ із відомою груповою класифікацією. Клас $\hat{\mathcal{L}}_1$ же є нормалізованим у звичайному сенсі, а його групову класифікацію проведено алгебраїчним методом, яку згодом відображено в групову класифікацію підкласу вихідного класу у § 2.5.2.

Третій розділ присвячено груповому аналізу класу $\mathcal{R}$ рівнянь реакції–дифузії, який для зручності розбито на чотири підкласи. Три з цих підкласів є добре вивченими у літературі, тому увагу здебільшого зосереджено на їхньому доповненні $\mathcal{C}$ у класі $\mathcal{R}$. У § 3.2 одночасно пораховано групи еквівалентності всіх чотирьох підкласів, а у § 3.3 наведено класифікації ліївських симетрій у цих підкласах. Класифікацію класу $\mathcal{C}$ проведено за допомогою двокрокової версії методу розгалуженого розщеплення, а обчислення дано у § 3.4.

Четвертий розділ дисертації присвячено симетрійному аналізу системи гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Спочатку детально розглянуто структури низького порядку, як-от ліївські симетрії у § 4.2.1, точкові симетрії у § 4.2.2, симетрії першого порядку у § 4.2.4 та гідродинамічні закони збереження у § 4.2.5. Водночас, у § 4.2.3 показано, що систему можна лінеаризувати до рівняння Клейна–Гордона і, наприклад, виразити неявно її розв'язок через розв'язок цього рівняння. Або симетрійні структури рівняння Клейна–Гордона можна продовжити до симетрійних структур вихідної системи. Для їх ефективного вивчення спочатку у § 4.3.1 для зручності змінено систему координат. Нова система координат є стандартною для вироджених гідродинамічних систем. За допомогою цих координат у § 4.3.2 локально продовжено всі можливі вищі симетрії рівняння Клейна–Гордона. Водночас, не всі такі симетрії продовжуються локально. Однак, протилежне є правдою для косиметрій та законів збереження, що продемонстровано у §§ 4.3.3 та 4.3.4, де подано детальний опис цих і пов'язаних структур. У § 4.3.5 побудовано нескінченну сім'ю гамільтонових операторів, які використані зокрема для надання простору косиметрій структури алгебри Лі та побудови гамільтонових симетрій вихідної системи.

Рівняння Клейна–Гордона вивчено з погляду симетрійних структур у додатку А. Так, вищі симетрії й закони збереження цього рівняння отримано відповідно у А.1 і А.2. Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку Б.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу, доктору фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику Вячеславу Миколайовичу Бойку, завідувачу відділу математичної фізики, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійну увагу й допомогу в роботі, а також співавторам та співробітникам відділу математичної фізики за плідну співпрацю й підтримку.

РОЗДІЛ 1

Методи групового аналізу

1.1. Групи еквівалентності і задачі групової класифікації

Нехай $\mathcal{L}_\theta$ — система диференціальних рівнянь вигляду

$$L(x, u^{(r)}, \theta(x, u^{(r)})) = 0.$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n незалежних змінних, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — m залежних змінних, а L — набір диференціальних функцій від u. Використаємо стандартне позначення $u^{(r)}$ для набору похідних залежних змінних u^i по x_j до порядку r включно, який також включає $u^1, \ldots u^m$ як похідні порядку нуль. Система $\mathcal{L}_\theta$ параметризована набором функцій $\theta = (\theta^1(x, u^{(r)}), \ldots, \theta^k(x, u^{(r)}))$, які називають довільними елементами та які пробігають множину розв'язків $\mathcal{S}$ допоміжної системи AS диференціальних рівнянь і нерівностей на θ, $S(x, u^{(r)}, \theta^{(q)}(x, u^{(r)})) = 0$ і, наприклад, $\Sigma(x, u^{(r)}, \theta^{(q)}(x, u^{(r)})) \neq 0$. Тут позначення $\theta^{(q)}$ охоплює частинні похідні довільних елементів θ за сукупністю x_j і $u^{(r)}$ до порядку q включно. Отже, *клас (систем) диференціальних рівнянь* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — це параметризована сім'я систем $\mathcal{L}_\theta$, де θ пробігає множину $\mathcal{S}$.

Групова класифікація диференціальних рівнянь ґрунтується на вивченні того, як відображаються одна в одну системи із заданого класу. Це формалізовано в понятті *допустимих перетворень* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, що складають його *групоїд еквівалентності.* Допустиме перетворення — це трійка $(\theta, \varphi, \tilde\theta)$, де $\theta, \tilde\theta \in \mathcal{S}$ — набори довільних елементів, асоційовані з подібними системами $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ з класу $\mathcal{L}_\mathcal{S}$, а φ — точкове перетворення у просторі (x,u), що відображає $\mathcal{L}_\theta$ у $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$.

Спорідненим є поняття *перетворення еквівалентності.* Звичайні перетворення еквівалентності — це точкові перетворення у просторі незалежних змінних, похідних залежних змінних u^i до порядку r включно й довільних елементів, що є проєктовними на простір $(x,u^{(r')})$ для кожного $r'=0,\dots,r$, зберігають контактну структуру простору струменів порядку r, який має координати $(x,u^{(r)})$, і відображають кожну систему з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ у систему з цього ж класу. (Псевдо)групу Лі перетворень еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ називають *звичайною групою еквівалентності* цього класу і позначають $G^\sim$. Якщо його довільні елементи залежать від похідних $u^{(r')}$ до порядку $\hat r<r$, то можна вважати, що перетворення еквівалентності діють у просторі з координатами $(x,u^{(\hat r)},\theta)$ замість простору з координатами $(x,u^{(r)},\theta)$.

Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ породжує підгрупоїд групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$, оскільки кожне перетворення еквівалентності $\mathcal{T}\in G^\sim$ породжує сім'ю допустимих перетворень, параметризованих набором θ:

$$G^\sim\ni\mathcal{T}\to\big\{(\theta,\mathcal{T}\theta,\pi_*\mathcal{T})\mid\theta\in\mathcal{S}\big\}\subset\mathcal{G}^\sim.$$

Тут π позначає проєкцію простору з координатами $(x,u^{(r)},\theta)$ на простір змінних рівняння, $\pi(x,u^{(r)},\theta)=(x,u)$. Підняття $\pi_*\mathcal{T}$ перетворення $\mathcal{T}$ проєкцією π — це обмеження $\mathcal{T}$ на простір із координатами (x,u), якщо таке обмеження можливе.

Звичайна алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — це алгебра, асоційована зі звичайною групою еквівалентності $G^\sim$, яку складають інфінітезимальні генератори однопараметричних груп перетворень еквівалентності. Такі інфінітезимальні генератори є векторними полями в просторі з координатами $(x,u^{(r)},\theta)$, що є проєктовними на простір із координатами $(x,u^{(r')})$ для кожного $r'=0,\dots,r$. Оскільки перетворення еквівалентності зберігають контактну структуру простору струменів порядку r, векторні поля з $\mathfrak{g}^{\sim}$ наслідують цю сумісність, тобто їхні проєкції на простір із координатами $(x, u^{(r)})$ збігаються із продовженням порядку r асоційованих проєкцій на простір із координатами (x, u).

У випадку, коли довільні елементи θ є функціями лише від (x, u), можна вважати, що перетворення еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є точковими перетвореннями змінних (x, u, θ), що відображають будь-яку систему з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у систему з цього ж класу. Властивістю проєктивності для перетворень еквівалентності тут можна знехтувати. Такі перетворення еквівалентності складають (псевдо)групу Лі $\bar{G}^{\sim}$, яку називають *узагальненою групою еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$; див. перше обговорення цього поняття в [6, 63] без жодних наведених прикладів і подальший розвиток у [83, 89]. Часто узагальнена група еквівалентності збігається зі звичайною; таку ситуацію вважають тривіальною. Аналогічно звичайним перетворенням еквівалентності кожен елемент з $\bar{G}^{\sim}$ породжує сім'ю допустимих перетворень, параметризовану набором θ:

$$\bar{G}^{\sim} \ni \mathcal{T} \to \big\{(\theta', \mathcal{T}\theta', \pi_*(\mathcal{T}|_{\theta=\theta'(x,u)})) \mid \theta' \in \mathcal{S}\big\} \subset \mathcal{G}^{\sim},$$

а вся узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}$ породжує підгрупоїд $\bar{\mathcal{H}}$ групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$.

Означення 1.1.1. Будь-яку мінімальну підгрупу групи $\bar{G}^{\sim}$, що породжує той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$, що й уся група $\bar{G}^{\sim}$, назвемо *ефективною узагальненою групою еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Єдиність ефективної узагальненої групи еквівалентності є очевидною, коли вся група $\bar{G}^{\sim}$ сама є ефективною; див. зауваження 2.2.10 нижче. Водночас, існують класи диференціальних рівнянь, де ефективна узагальнена група еквівалентності є власною підгрупою відповідної узагальненої групи еквівалентності, причому ця підгрупа навіть не є нормальною. Такі ефективні узагальнені групи еквівалентності не є єдиними, оскільки всі подібні до них підгрупи є також ефективними узагальненими групами еквівалентності цього ж класу; див. обговорення прикладів у зауваженні 2.3.5 нижче.

Припустимо, що клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ допускає нетотожне звичайне перетворення еквівалентності, а деякі з його довільних елементів — сталі. Тоді цей клас обов'язково допускає суто узагальнені перетворення еквівалентності. Дійсно, усі параметри елементів звичайної групи еквівалентності $G^\sim$ можна покласти залежними від сталих довільних елементів, що дасть сім'ю узагальнених перетворень еквівалентності. Множина $\bar G^\sim_0$ таких перетворень є підгрупою узагальненої групи еквівалентності $\bar G^\sim$. Якщо $\bar G^\sim_0 = \bar G^\sim$, то звичайна група еквівалентності $G^\sim$ є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Узагальнена алгебра еквівалентності $\bar{\mathfrak g}^\sim$ та *ефективна узагальнена алгебра еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — це алгебри, асоційовані відповідно з узагальненою групою еквівалентності $\bar G^\sim$ та з ефективною узагальненою групою еквівалентності цього класу, тобто їх складають інфінітезимальні генератори однопараметричних підгруп цих груп. Ці інфінітезимальні генератори є векторними полями в просторі з координатами (x,u,θ).

Вимогу, щоб перетворення еквівалентності були точковими перетвореннями щодо довільних елементів, також можна послабити. Формально розширимо набір θ довільних елементів класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ віртуальними (нелокальними) довільними елементами, пов'язаними з вихідними довільними елементами через диференціальні рівняння. Інакше кажучи, віртуальні довільні елементи виражаються нелокально через вихідні. Позначимо репараметризований клас як $\hat{\mathcal{L}}|_\mathcal{S}$. Припустимо, що звичайна (відповідно, узагальнена або ефективна узагальнена) група еквівалентності $\hat G^\sim$ класу $\hat{\mathcal{L}}|_\mathcal{S}$ породжує максимальний підгрупоїд групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ серед класів, отриманих із $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ аналогічними репараметризаціями, а розширення набору θ довільних елементів для $\hat{\mathcal{L}}|_\mathcal{S}$ є мінімальним серед параметризованих класів, що дають той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$, що й $\hat{\mathcal{L}}|_{\mathcal{S}}$. Тоді назвемо групу $\hat{G}^{\sim}$ *розширеною групою еквівалентності* (відповідно, *розширеною узагальненою групою еквівалентності*) класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Точковим перетворенням симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$ називають точкове перетворення в просторі з координатами (x,u), яке зберігає множину розв'язків системи $\mathcal{L}_\theta$. Кожне точкове перетворення симетрії φ системи $\mathcal{L}_\theta$ породжує допустиме перетворення (θ,φ,θ) у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Точкові перетворення симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$ складають максимальну групу точкових симетрій G_θ цієї системи. Спільну частину $G^{\cap}$ всіх G_θ називають *ядром* максимальних груп точкових симетрій систем із класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$: $G^{\cap} := \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} G_\theta$.

Інфінітезимальні аналоги максимальної групи точкових симетрій G_θ і ядра $G^{\cap}$ називають *максимальною алгеброю ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\mathcal{L}_\theta$ і *ядром алгебр ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}^{\cap}$ систем із класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відповідно; їх складають векторні поля в просторі з координатами (x,u), що породжують однопараметричні підгрупи груп G_θ і $G^{\cap}$.

Груповий аналіз диференціальних рівнянь стає набагато простішим, якщо працювати з інфінітезимальними аналогами об'єктів, складених точковими перетвореннями. Так, задача пошуку ліївських симетрій системи $\mathcal{L}_\theta$ зводиться до побудови максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$, а тому є лінійною на відміну від аналогічної проблеми пошуку загальних точкових симетрій.

За певних природних умов на систему $\mathcal{L}_\theta$ інфінітезимальний критерій інваріантності стверджує, що векторне поле Q в просторі з координатами (x,u) належить максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ тоді й лише тоді, коли умова $Q^{(r)}L(x,u^{(r)},\theta^{(q)}(x,u^{(r)}))=0$ тотожно задовольняється на многовиді $\mathcal{L}^r_\theta$, визначеному системою $\mathcal{L}_\theta$ і її диференціальними наслідками в просторі струменів J^r. Тут $Q^{(r)}$ — продовження векторного поля Q порядку r; див. [69, 77] і § 2.2.3.

Задача групової класифікації класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ полягає в побудові списку всіх таких $G^{\sim}$-нееквівалентних значень для $\theta \in \mathcal{S}$, що асоційовані системи $\mathcal{L}_\theta$ допускають максимальні алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$, ширші за ядро алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}$. Урахування додаткових точкових еквівалентностей між отриманими випадками, якщо вони існують, призводить до розв'язання задачі групової класифікації відносно $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентності.

Застосування інфінітезимального критерію інваріантності до систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ дає (після розщеплення за параметричними похідними залежних змінних u^i) систему визначальних рівнянь на компоненти генераторів ліївських симетрій цих систем, яка в загальному випадку параметризована набором довільних елементів θ. Досить часто ця система містить підсистему, яка не залежить від набору довільних елементів θ, а тому може бути проінтегрована. Інші визначальні рівняння утворюють так звану систему *класифікуючих рівнянь*.

Таким чином, задача групової класифікації зводиться до вичерпного дослідження класифікуючих рівнянь. Їх безпосереднє інтегрування з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності зазвичай можливе лише для класів із найпростішою структурою, наприклад, коли довільні елементи класу є сталими або функціями одного аргументу; див. приклади в [77]. Оскільки класи, що виникають у застосуваннях, мають більш складну структуру, треба використовувати різні техніки, які щонайменше покращують прямий метод [67, 109, 110].

Найбільш досконалі з них базуються на вивченні алгебр векторних полів, пов'язаної із системами з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, і утворюють *алгебраїчний метод* групової класифікації. Для ефективного застосування цього методу клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ має мати певні властивості, які зручно сформулювати в термінах різних понять нормалізації. Клас диференціальних рівнянь $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є *нормалізованим* у звичайному (узагальненому, розширеному узагальненому) сенсі, якщо підгрупоїд, породжений його звичайною (узагальненою, розширеною узагальненою) групою еквівалентності збігається з усім групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Нормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у звичайному сенсі є еквівалентною таким умовам. Трансформаційна частина φ кожного допустимого перетворення $(\theta', \varphi, \theta'') \in \mathcal{G}^{\sim}$ не залежить від фіксованого вихідного значення θ' набору довільних елементів θ, а отже, є придатною для будь-якого вихідного значення θ. До того ж, продовження φ на простір із координатами $(x, u^{(r)})$ і подальше розширення на довільні елементи згідно зі співвідношенням між θ' і θ'' дає точкове перетворення в просторі з координатами $(x, u^{(r)}, \theta)$. Тоді $G_\theta \leqslant \pi_* G^{\sim}$ і $\mathfrak{g}_\theta \subseteq \pi_* \mathfrak{g}^{\sim}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, а тому групова класифікація класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ зводиться до класифікації певних $G^{\sim}$-нееквівалентних підалгебр алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ або, рівноцінно, до класифікації певних $\pi_* G^{\sim}$-нееквівалентних підалгебр проєкції $\pi_* \mathfrak{g}^{\sim}$.

Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований в узагальненому сенсі, то вираз для трансформаційних частин допустимих перетворень може містити довільні елементи, але лише в досить специфічний спосіб. Зокрема, групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ розбивається на сім'ї допустимих перетворень, параметризовані набором довільних елементів вихідної системи, а трансформаційні частини допустимих перетворень із кожної з цих сімей після розширення на довільні елементи згідно з відношенням між довільними елементами вихідних й кінцевих систем спільно дають точкове перетворення в розширеному просторі (x, u, θ). Тоді $G_{\theta'} \leqslant \pi_*(G^{\sim}|_{\theta=\theta'(x,u)})$ і $\mathfrak{g}_{\theta'} \subseteq \pi_*(\mathfrak{g}^{\sim}|_{\theta=\theta'(x,u)})$ для будь-якого $\theta' \in \mathcal{S}$.

Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *напівнормалізованим* у звичайному сенсі, якщо для будь-якого $(\theta', \varphi, \theta'') \in \mathcal{G}^{\sim}$ існують такі $\mathcal{T} \in G^{\sim}$, $\varphi' \in G_{\theta'}$ і $\varphi'' \in G_{\theta''}$, що $\theta'' = \mathcal{T}\theta'$ і $\varphi = \varphi''(\pi_*\mathcal{T})\varphi'$. Одне з перетворень φ' і φ'' завжди можна вважати тотожним. Напівнормалізованість в узагальненому сенсі визначають аналогічно. Грубо кажучи, клас є напівнормалізованим у певному сенсі, якщо його групоїд еквівалентності породжують відповідна група еквівалентності спільно з групами точкових симетрій систем із цього класу. Кожен нормалізований клас є напівнормалізованим у тому самому сенсі, але зворотнє твердження не є вірним в загальному випадку.

Щоби встановити нормалізаційну властивість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, треба порахувати його групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$, що виконують прямим методом. Суть методу полягає в тому, що зафіксувавши дві довільних системи $\mathcal{L}_\theta$: $L(x, u^{(r)}, \theta(x, u^{(r)})) = 0$ та $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$: $L(\tilde x, \tilde u^{(r)}, \tilde\theta(\tilde x, \tilde u^{(r)})) = 0$ з класу потрібно знайти всі (невироджені) точкові перетворення φ: $\tilde x_i = X^i(x, u)$, $\tilde u^a = U^a(x, u)$, $i = 1, \dots, n$, $a = 1, \dots, m$, що їх поєднують. Для цього перетворимо змінні в системі $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$, підставляючи X^i і U^a замість $\tilde x_i$ і $\tilde u^a$ відповідно, а також виражаючи похідні $\tilde u^{(r)}$ у термінах $u^{(r)}$ і похідних функцій X^i і U^a. Вимога, щоб отриману систему тотожно задовольняли розв'язки системи $\mathcal{L}_\theta$, призводить до системи визначальних рівнянь на компоненти перетворення φ.

У випадку однієї залежної змінної всі наведені вище поняття, що стосуються точкових перетворень, можна прямо поширити на контактні перетворення.

Основні поняття і результати, на яких ґрунтується алгебраїчний метод групової класифікації в його сучасній розвинутій формі, яку буде використано нижче, детально обговорено в [15, 18, 58, 83, 89]. Приклади успішного застосування різних версій алгебраїчного методу до задач групової класифікації можна знайти в [5, 14, 37, 38, 44, 48, 64, 118].

1.2. Калібрування параметрів підкласу перетвореннями еквівалентності

Результатом класифікації алгебраїчним методом випадків розширення ліївських симетрій для класу $\mathcal{L} := \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ систем диференціальних рівнянь є набір підкласів цього класу, асоційований із повним списком нееквівалентних придатних підалгебр алгебри еквівалентності класу $\mathcal{L}$. Більш точно, кожен із цих підкласів складають системи з $\mathcal{L}$, що допускають як свою спільну алгебру ліївської інваріантності проєкцію відповідної підалгебри зі списку на простір зі змінними системи як координатами. Використовуючи перетворення еквівалентності всього класу, можна далі калібрувати параметри систем таких підкласів. Зокрема, цю калібрувальну процедуру використано в доведенні теореми 2.2.18. Тут докладно описано її теоретичне підґрунтя.

Нехай $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$, $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ і $\mathfrak{g}_\theta$ з $\theta \in \mathcal{S}$ — звичайна група еквівалентності та звичайна алгебра еквівалентності класу $\mathcal{L}$ і максимальна алгебра ліївської інваріантності системи $\mathcal{L}_\theta$ відповідно. Група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ діє на своїй алгебрі Лі $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ через підняття векторних полів з $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ перетвореннями з $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$. Ця дія породжує дію групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ на множині підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$. Елементи $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ і $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ можна підняти проєкцією π з простору з координатами $(x, u^{(r)}, \theta)$ на простір із координатами (x, u). Для підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ визначимо підмножину $\mathcal{S}^{\mathfrak{s}} := \{\theta \in \mathcal{S} \mid \pi_*\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}_\theta\}$ множини $\mathcal{S}$ і підклас $\mathcal{L}^{\mathfrak{s}} := \{\mathcal{L}_\theta \mid \theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}\}$ класу $\mathcal{L}$. Нехай $\bar{\mathfrak{s}}$ — максимальна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ серед таких підалгебр $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$, що $\pi_*\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_\theta$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$. (Підалгебра $\bar{\mathfrak{s}}$ насправді існує і збігається з лінійною оболонкою всіх таких підалгебр $\mathfrak{h}$.) Тому $\mathcal{S}^{\mathfrak{s}} = \mathcal{S}^{\bar{\mathfrak{s}}}$ і $\mathcal{L}^{\mathfrak{s}} = \mathcal{L}^{\bar{\mathfrak{s}}}$. Зауважимо, що $\bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}$, якщо $\mathfrak{s}$ є придатною алгеброю $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$, тобто $\pi_*\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_\theta$ для деякого $\theta \in \mathcal{S}$.

Твердження 1.2.1. *$G^{\sim}_{\mathcal{L}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} = \mathrm{St}_{G^{\sim}_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$, де $\mathrm{St}_{G^{\sim}_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$ — стабілізатор (інакше кажучи, підгрупа ізотропії) групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ відносно $\bar{\mathfrak{s}}$.*

Доведення. Доведемо спочатку включення $G^{\sim}_{\mathcal{L}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} \supseteq \mathrm{St}_{G^{\sim}_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$. Припустимо, що $\mathcal{T} \in \mathrm{St}_{G^{\sim}_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$. Тоді $\mathcal{T} \in G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{T}_*\bar{\mathfrak{s}} = \bar{\mathfrak{s}}$. Перша умова означає, що для будь-якого набору $\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}} \subseteq \mathcal{S}$ виконується $\mathcal{T}\theta \in \mathcal{S}$ (де $\mathcal{T}$ діє на θ як на набір функцій) і $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}\theta} = (\pi_*\mathcal{T})_*\mathfrak{g}_\theta$. З іншого боку, $(\pi_*\mathcal{T})_*\mathfrak{g}_\theta \supseteq (\pi_*\mathcal{T})_*(\pi_*\bar{\mathfrak{s}}) = \pi_*(\mathcal{T}_*\bar{\mathfrak{s}}) = \pi_*\bar{\mathfrak{s}}$, звідки випливає, що $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}\theta} \supseteq \pi_*\bar{\mathfrak{s}}$, тобто $\mathcal{T}\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$. Отже, $\mathcal{T} \in G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$.

Доведемо тепер обернене включення $G^{\sim}_{\mathcal{L}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} \subseteq \mathrm{St}_{G^{\sim}_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$. Якщо $\mathcal{T} \in G^{\sim}_{\mathcal{L}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$, то $\mathcal{T}^{-1} \in G^{\sim}_{\mathcal{L}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$ і $\mathcal{T}\mathcal{S}^{\mathfrak{s}} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{S}^{\mathfrak{s}} = \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$. Зафіксуємо набір довільних елементів $\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$. Тоді $\hat\theta := \mathcal{T}^{-1}\theta \in \mathcal{S}^{\mathfrak{s}}$, а тому $\mathfrak{g}_{\hat\theta} \supseteq \pi_*\bar{\mathfrak{s}}$. Отже, $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_{\mathcal{T}\hat\theta} = (\pi_*\mathcal{T})_*\mathfrak{g}_{\hat\theta} \supseteq (\pi_*\mathcal{T})_*\pi_*\bar{\mathfrak{s}} = \pi_*(\mathcal{T}_*\bar{\mathfrak{s}})$. З огляду на зазначену максимальність алгебри $\bar{\mathfrak{s}}$, отримаємо $\mathcal{T}_*\bar{\mathfrak{s}} \subseteq \bar{\mathfrak{s}}$. Аналогічно, $(\mathcal{T}^{-1})_*\bar{\mathfrak{s}} \subseteq \bar{\mathfrak{s}}$, що еквівалентно $\bar{\mathfrak{s}} \subseteq \mathcal{T}_*\bar{\mathfrak{s}}$, звідки й випливає твердження. □

Можна також розглянути алгебри Лі замість груп Лі й навести інфінітезимальну версію твердження 1.2.1. Передусім нагадаємо, що група еквівалентності й алгебра еквівалентності класу диференціальних рівнянь можуть не бути скінченновимірними, а тому насправді правильно говорити про псевдогрупу Лі еквівалентності й асоційований алгеброїд Лі еквівалентності цього класу. Щоб довести наведене нижче твердження, нагадаємо головну властивість псевдогруп Лі та алгеброїдів Лі. А саме, вони визначені як множини локальних розв'язків систем (формально інтегровних) диференціальних рівнянь [81, розд. 5.B]. Для групи еквівалентності й алгебри еквівалентності класу диференціальних рівнянь ці системи є відповідними системами визначальних рівнянь.

Нехай Ψ — диференціальна вектор-функція компонент векторних полів, що визначають алгеброїд Лі $\bar{\mathfrak{s}}$, тобто векторне поле u належить $\bar{\mathfrak{s}}$, $\mathrm{u} \in \bar{\mathfrak{s}}$, тоді й лише тоді, коли $\Psi(\mathrm{u}) = 0$. Функцію Ψ можна ототожнити з набором лінійних диференціальних операторів, що діють на компоненти її аргументу.

Наслідок 1.2.2. $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}} \cap \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} = \mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$, *де* $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\mathfrak{s})$ — *нормалізатор* $\bar{\mathfrak{s}}$ *в* $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}$.

Доведення. Нехай $\mathrm{v} \in \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}} \cap \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$. Тоді $\exp(\varepsilon\mathrm{v}) \in G^\sim_{\mathcal{L}} \cap G^\sim_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$. Згідно з твердженням 1.2.1 для будь-якого $\mathrm{w} \in \bar{\mathfrak{s}}$ маємо $(\exp(\varepsilon\mathrm{v}))_*\mathrm{w} \in \bar{\mathfrak{s}}$. Нагадаємо, що

$$[\mathrm{v},\mathrm{w}] = \mathcal{L}_{\mathrm{v}}\mathrm{w} := \frac{\mathrm{d}\mathrm{w}_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathrm{w}_\varepsilon - \mathrm{w}_0}{\varepsilon},$$

де

$$\mathrm{w}_\varepsilon\big|_p := \big(\exp(-\varepsilon\mathrm{v})_*\mathrm{w}\big)\big|_{\exp(\varepsilon\mathrm{v})(p)}$$

для будь-якої точки p у просторі з координатами $(x, u^{(r)}, \theta)$. Векторне поле $\mathrm{u}_\varepsilon = (\mathrm{w}_\varepsilon - \mathrm{w}_0)/\varepsilon$ очевидно належить $\bar{\mathfrak{s}}$ для будь-якого $\varepsilon \neq 0$. Отже,

$\Psi(\mathrm{u}_\varepsilon) = 0$. Тоді з гладкості компонент u_ε за $(x, u^{(r)}, \theta, \varepsilon)$, і неперервності функції Ψ за компонентами векторних полів випливає, що

$$\Psi([\mathrm{v}, \mathrm{w}]) = \Psi\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{u}_\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi(\mathrm{u}_\varepsilon) = 0,$$

звідки $[\mathrm{v}, \mathrm{w}] \in \bar{\mathfrak{s}}$, а тому $\mathrm{v} \in \mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$.

Навпаки, якщо $\mathrm{v} \in \mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$, то для будь-якого $\mathrm{w} \in \bar{\mathfrak{s}}$ і для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ маємо також $(\mathrm{ad}\,\mathrm{v})^{(n)}(\mathrm{w}) \in \bar{\mathfrak{s}}$. Це означає, що

$$(\exp(\varepsilon \mathrm{v}))_* \mathrm{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n (\mathrm{ad}\,\mathrm{v})^n(\mathrm{w})}{n!} \in \bar{\mathfrak{s}}$$

завдяки наведеному вище аргументу щодо неперервності і збіжності послідовності частинних сум ряду. Тому $\exp(\varepsilon \mathrm{v})$ належить стабілізатору $\bar{\mathfrak{s}}$ в $G^\sim_{\mathcal{L}}$, який збігається з псевдогрупою Лі $G^\sim_{\mathcal{L}} \cap G^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}}$ згідно з твердженням 1.2.1. Отже, векторне поле v належить її алгеброїду Лі $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}} \cap \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}}$. □

Наслідок 1.2.2 аналогічний добре відомому факту з теорії Лі, див. [46, розд. 11].

Наслідок 1.2.3. *Якщо клас $\mathcal{L}$ нормалізований, то $G^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}} = \mathrm{St}_{G^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$, а тому $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}} = \mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$.*

Доведення. Якщо клас $\mathcal{L}$ нормалізований, то $G^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}} \leqslant G^\sim_{\mathcal{L}}$ і $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}} \subseteq \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}$, звідки й випливає твердження. □

Підсумуємо зазначене вище. Щоб відкалібрувати довільні елементи підкласу $\mathcal{L}^\mathfrak{s}$ з точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}}$-еквівалентності, потрібно знати групу $G^\sim_{\mathcal{L}^\mathfrak{s}} \cap G^\sim_{\mathcal{L}}$. Її можна порахувати або як підгрупу групи $G^\sim_{\mathcal{L}}$, що зберігає підклас $\mathcal{L}^\mathfrak{s}$, або як стабілізатор $\mathrm{St}_{G^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$ групи $G^\sim_{\mathcal{L}}$ відносно $\mathfrak{s}$. Компоненту тотожного перетворення в стабілізаторі можна знайти, порахувавши спочатку інфінітезимальні генератори, що утворюють алгебру Лі $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{s}})$, а потім експоненціювавши її, але тоді інші компоненти стабілізатора буде втрачено.

Однак не всі ці перетворення суттєві для процедури калібрування, тому що проєкції деяких з них підняттям π_* можуть бути перетвореннями симетрії для всіх рівнянь у $\mathcal{L}^\mathfrak{s}$, а тому не змінюють їхньої форми.

Справді, ці проєкції складають групу $G^{\cap}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} \cap \pi_* G^{\sim}_{\mathcal{L}}$, яка є нормальною підгрупою групи $\pi_*\big(G^{\sim}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}} \cap G^{\sim}_{\mathcal{L}}\big)$. Тут $G^{\cap}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}}$ позначає ядро груп точкових симетрій систем класу $\mathcal{L}^{\mathfrak{s}}$. Отже, щоб ефективно виконати процедуру калібрування, ці перетворення потрібно виключити через факторизацію.

1.3. Метод розгалуженого розщеплення

Хоча задачам групової класифікації класів (систем) диференціальних рівнянь присвячено багато робіт, значній частині цих результатів взагалі не можна довіряти. Основна проблема полягає в тому, що часто до таких задач застосовують метод "грубої сили". Звичайно, і цей підхід може бути дієвим для деяких простих класів диференціальних рівнянь, але він вимагає дуже ретельного розгляду випадків, коли інтегрують відповідні визначальні рівняння для ліївських симетрій, бо інакше він призводить до пропущених, повторених і/або неправильних класифікаційних випадків. На жаль, ці недоліки мають місце в дуже великій кількості статей із цієї тематики, де для групової класифікації диференціальних рівнянь використано "грубу силу". До того ж, оскільки обчислення в рамках цього підходу є одночасно і тривіальними, і громіздкими, автори таких статей не наводять деталей розв'язання, а тому їхні помилки взагалі неможливо побачити.

Навіть якщо структура класу диференціальних рівнянь не придатна для застосування алгебраїчного методу групової класифікації, уникнути розв'язання задачі його групової класифікації "грубою силою" все ж можливо. Набагато кращим вибором може бути метод *розгалуженого розщеплення*. Його запропоновано і застосовано вперше у [67], але назва з'явилася пізніше в [52]; див. також приклади його застосування в [87, 108, 110, 112]. Загалом, цей метод є покращенням прямого підходу до групової класифікації. На відміну від невпорядкованого інтегрування класифікаційних рівнянь і неалгоритмічного добору випадків розширення ліївської симетрії у рамках прямого методу, метод розгалуженого розщеплення забезпечує алгоритм для систематичного знаходження таких випадків. Варто зауважити, що метод є ефективним лише для класів з довільними елементами небагатьох аргументів. Наразі його застосовано до класів із довільними елементами, залежними щонайбільше від двох аргументів [67]. Це обмеження є зрозумілим з огляду на необхідність перевірки умов сумісності виникаючих рівнянь, що стає дуже складною задачею в разі великої кількості аргументів.

Метод розгалуженого розщеплення легко зрозуміти на прикладах, але навіть опис його стандартної версії для загального класу диференціальних рівнянь не є простим, не кажучи вже про його різноманітні модифікації. Нижче наведено цей опис, а в § 3.4 показано можливі ускладнення для використання методу, коли довільні елементи класу залежать від різних аргументів, як у випадку класу $\mathcal{R}$ рівнянь реакції–дифузії з розділу 3.

Розглянемо клас (систем) диференціальних рівнянь

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{L}_\theta\colon L(x,u^{(r)},\theta(x,u^{(r)}))=0 \mid \theta\in\mathcal{S}\}$$

у позначеннях § 1.1. Позначимо через $\mathfrak{g}_\theta$ максимальну алгебру ліївської інваріантності системи $\mathcal{L}_\theta\in\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Систему визначальних рівнянь $\mathrm{DE}[\theta]$ на компоненти векторних полів з $\mathfrak{g}_\theta$ можна розбити на дві підсистеми. Рівняння першої з цих підсистем — $\mathrm{CE}[\theta]$ — суттєво залежать від довільних елементів і їх називають *класифікуючими рівняннями*, а рівняння з іншої підсистеми — SE — не залежать від θ. Підсистему SE можна проінтегрувати, що дає загальну форму векторних полів ліївської симетрії систем з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Підсистема $\mathrm{CE}[\theta]$ з фіксованими значеннями набору довільних елементів θ — це система рівнянь на компоненти векторних полів з $\mathfrak{g}_\theta$. Множина розв'язків об'єднаної системи $\mathrm{DE}[\theta]$ є лінійним простором, оскільки $\mathrm{DE}[\theta]$ є однорідною лінійною системою диференціальних рівнянь на компоненти векторних полів ліївської симетрії. Навпаки, зафіксувавши векторне поле Q у просторі з координатами (x,u), отримаємо систему диференціальних рівнянь для значень набору довільних елементів θ, для яких відповідні системи $\mathcal{L}_\theta$ допускають Q як ліївську симетрію.

Як правило, система AS включає рівняння, що означають незалежність набору θ від певних незалежних або залежних змінних або, у загальному випадку, від їхніх певних функціональних комбінацій. Зручно замінити координати $(x, u_{(r)})$ простору струменів порядку r на набір координат z, розбитого на два піднабори $\hat{z}$ і $\check{z}$ так, що $\hat{z}$ є максимальним набором координат, які не задіяно у θ, а кожен із наборів $\hat{z}$ і $\check{z}$ додатково розбито на два піднабори, $\hat{z}'$, $\hat{z}''$ і $\check{z}'$, $\check{z}''$, де $\hat{z}'$ і $\check{z}'$ — максимальні піднабори відповідно наборів $\hat{z}$ і $\check{z}$, що виникають в аргументах функцій, які параметризують загальний розв'язок системи SE. Виберемо набір $\breve{z}'$ функцій від (x, u) у такий спосіб, щоб об'єднаний набір $(\hat{z}', \check{z}', \breve{z}')$ задавав нові координати в просторі з координатами (x, u). Під час обчислення методом розгалуженого розщеплення оптимальний вибір координат $\hat{z}'$, $\hat{z}''$, $\check{z}'$, $\check{z}''$ і $\breve{z}'$ здебільшого очевидний; див. § 3.4.

Підставимо вирази для компонент векторних полів ліївської симетрії, визначених системою SE, в CE$[\theta]$ і розщепимо отриману систему по $\hat{z}''$. Це призводить до системи CE$'[\theta]$ на сталі й функції, що параметризують зазначені вирази, і яка має загальний вигляд

$$\sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} \psi^i F^i = 0, \quad s = 1, \dots, |\mathrm{CE}'|,$$

де $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{|\mathrm{CE}'|} = N$ з $N \in \mathbb{N}$, а $|\mathrm{CE}'|$ позначає кількість (незалежних) рівнянь у CE$'[\theta]$. Функції F^i, $i = 1, \dots, N$ — відомі диференціальні функції від θ, причому $\check{z}$ грає роль набору незалежних змінних. Коефіцієнти ψ^i, $i = 1, \dots, N$, можуть залежати від $(\hat{z}', \check{z}', \breve{z}')$ і насправді є параметризованими елементом алгебри $\mathfrak{g}_\theta$.

Припустимо, що алгебра $\mathfrak{g}_\theta$ відома для кожного фіксованого набору θ. Підставляючи значення наведених вище параметрів, що відповідають векторним полям у $\mathfrak{g}_\theta$, і значення змінних $\hat{z}'$ у систему CE$'[\theta]$ та варіюючи векторне поле в $\mathfrak{g}_\theta$ і змінні $\hat{z}'$, отримаємо сім'ю (позначимо її через TFF) систем рівнянь на θ загального вигляду, який назвемо *шаблонним*:

$$\sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} a^i F^i = 0, \quad s = 1, \dots, |\mathrm{CE}'|,$$

де коефіцієнти a^i, $i = 1, \dots, N$, можуть залежати від $(\check{z}', \breve{z}')$. Загалом, ці коефіцієнти не є відомими на цьому кроці, але можуть задовольняти певні відомі зв'язки.

Нехай k — така максимальна кількість систем у TFF, що ранг множини наборів коефіцієнтів $\bar{a}^q = (a^{q1}, \dots, a^{qN})$ цієї системи дорівнює їхній кількості, тобто $\operatorname{rank} A = k$ з $A := (a^{qi})^{i=1,\dots,N}_{q=1,\dots,k}$. Очевидно, що $0 \leqslant k \leqslant N$. Умова сумісності систем у TFF і цих систем з AS додатково обмежує можливі значення k.

Фіксуючи певне значення k у множині його можливих значень, вивчимо сумісність системи TFF. Розгляд можна розбити на випадки, обираючи послідовність $k \times k$ мінорів матриці A у спосіб, сумісний з релевантною еквівалентністю систем у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, і по черзі припускаючи, що деякий мінор не зникає, а усі попередні до нього у послідовності нульові. Деякі з коефіцієнтів a^{qi} можна відкалібрувати за допомогою перетворень еквівалентності з огляду на зроблені припущення або знайдені зв'язки на цьому чи подальших кроках. Для кожного з випадків потрібно:

- із сумісності системи TFF вивести умови на коефіцієнти a^{qi} і додатково відкалібрувати (якщо можливо) ці коефіцієнти перетвореннями еквівалентності;
- розщепити систему $\mathrm{CE}'[\theta]$ на множині розв'язків об'єднаної системи AS і TFF за параметричними похідними довільних елементів набору θ;
- розв'язати отриману систему додаткових визначальних рівнянь на невизначені параметри векторних полів ліївської симетрії;

- вивести точну форму системи TFF для обрахованої алгебри векторних полів і перевірити її сумісність із припущеним значенням величини k, а також з іншими припущеннями;
- якщо сумісність має місце, то розв'язати систему TFF відносно θ.

Значення $k=0$ має місце тоді й лише тоді, коли класифікуючі рівняння тотожно виконуються з огляду на SE, що відповідає загальному випадку без розширення ліївської симетрії.

Значення $k=1$ асоційоване з мінімальним розширенням ліївської симетрії. Для цього значення k другий крок наведеної вище процедури виконують у спеціальний спосіб, оскільки умова $k=1$ означає, що набір $\bar\psi=(\psi^1,\dots,\psi^N)$ пропорційний до $\bar a^1$, $\psi^i=\lambda a^{1i}$. Тут множник λ може залежати від $(\hat z', \check z', \breve z')$ або, рівноцінно, від (x,u), і цю залежність легко уточнити за допомогою вигляду наборів $\bar\psi$ і $\bar a^1$.

1.4. Методи пошуку повної групи точкових симетрій

За допомогою інфінітезимального методу Лі для системи диференціальних рівнянь $\mathcal E$ з наступним отриманням скінченних перетворень можна побудувати групу ліївських симетрій рівняння $\mathcal E$, яку складено з неперервних перетворень симетрії системи $\mathcal E$ і яка є компонентою тотожного перетворення повної групи точкових симетрій цієї системи. Водночас, дискретні перетворення симетрії є також цікавими для застосувань. Якщо група ліївських симетрій рівняння $\mathcal E$ відома, то знаходження її дискретних перетворень симетрії еквівалентно побудові її повної групи точкових симетрій. У літературі існують два основних методи обрахунку повної групи точкових симетрій системи диференціальних рівнянь: прямий [84, 107, 110] і алгебраїчний [16, 17, 49, 50, 86]. Хоча алгебраїчний метод, взагалі кажучи, дає лише частину обмежень на вигляд точкових перетворень симетрії, а тому його треба доповнювати обчисленнями в рамках прямого методу, він зазвичай більш зручний, оскільки порівняно з використанням лише прямого методу призводить до менш громіздких обчислень.

Прямий метод ґрунтується на означенні (скінченних) точкових перетворень симетрії та є найбільш універсальним. Застосування цього методу дає систему так званих визначальних диференціальних рівнянь на компоненти перетворень, яка, у загальному випадку, нелінійна й сильно зачеплена, а тому її досить складно розв'язувати. Для спрощення обчислень у рамках прямого методу розроблено різні техніки.

Алгебраїчний метод знаходження повної групи точкових симетрій системи диференціальних рівнянь, першу версію якого запропоновано П. Гайдоном [49, 50], можна розглядати як одну з таких технік. Його ідея полягає в тому, що кожне точкове перетворення симетрії $\mathcal{T}$ системи диференціальних рівнянь $\mathcal{E}$ породжує автоморфізм максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ цієї системи. Для скінченновимірної алгебра $\mathfrak{g}$ ($\dim\mathfrak{g}=n>0$) це означає, що

$$\mathcal{T}_*e_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i,\quad j=1,\dots,n,$$

де $\mathcal{T}_*$ — підняття векторних полів, породжене перетворенням $\mathcal{T}$, а $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матриця автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$ в її обраному базисі $(e_1,\dots,e_n)$. Обчислюючи групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебри $\mathfrak{g}$, знайдемо обмеження на вигляд матриці $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Наведена вище умова для $\mathcal{T}_*$ за припущення, що $\mathfrak{g}\neq\{0\}$, призводить до зв'язків на перетворення $\mathcal{T}$. Ці зв'язки надалі використовують у рамках прямого методу.

Обчислення повної групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ може бути занадто складним, особливо коли максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ нескінченновимірна. Тому іншу версію алгебраїчного методу, що ґрунтується на понятті мегаідеалу [85] (в іншій термінології — повністю характеристичного ідеалу [46]), розвинуто в [16, 17, 86]. Мегаідеалом $\mathfrak{i}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають підпростір алгебри $\mathfrak{g}$, інваріантний під дією будь-якого автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$. Якщо алгебра $\mathfrak{g}$ скінченновимірна з $\dim\mathfrak{g} = n$ і має мегаідеал $\mathfrak{i}$, що є лінійною оболонкою перших k ($k < n$) базисних елементів алгебри $\mathfrak{g}$, тобто $\mathfrak{i} = \langle e_1, \cdots, e_k\rangle$, то матриця $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ будь-якого автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$ набуває блочної структури, причому $a_{ij} = 0$, якщо $i > k$ і $j \leqslant k$. Інакше кажучи, ієрархія мегаідеалів скінченновимірної алгебри Лі прямо пов'язана з блочною структурою матриці автоморфізмів цієї алгебри Лі. Це спостереження можна також застосувати до нескінченновимірних алгебр Лі зі скінченновимірними мегаідеалами.

Прості засоби побудови мегаідеалів наведено в [17, 85, 86]. Передусім, обидві невласні підалгебри алгебри Лі $\mathfrak{g}$ (нульова підалгебра і сама алгебра $\mathfrak{g}$) є (невласними) мегаідеалами алгебри $\mathfrak{g}$. До того ж, суми, перетини і добутки Лі мегаідеалів також є мегаідеалами, мегаідеали мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$ є мегаідеалами алгебри $\mathfrak{g}$, всі елементи рядів похідних, висхідного і низхідного центральних рядів алгебри $\mathfrak{g}$, зокрема, центр і похідні алгебри $\mathfrak{g}$, а також її радикал і нільрадикал є мегаідеалами алгебри $\mathfrak{g}$. Нагадаємо, що n-ту похідну $\mathfrak{g}^{(n)}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ визначають як $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$ для $n \geqslant 1$ з $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, а її n-й степінь $\mathfrak{g}^n$ — як $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}]$ для $n \geqslant 2$ з $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$. Ще один, менш очевидний, спосіб отримання нових мегаідеалів із уже відомих дає таке твердження.

Твердження 1.4.1. *Якщо $\mathfrak{i}_0$, $\mathfrak{i}_1$ і $\mathfrak{i}_2$ — мегаідеали алгебри $\mathfrak{g}$, то множина $\mathfrak{s} = \{z \in \mathfrak{i}_0 \colon [\langle z\rangle, \mathfrak{i}_1] \subseteq \mathfrak{i}_2\}$ також є її мегаідеалом.*

У версії алгебраїчного методу, що ґрунтується на мегаідеалах, використовують умову $\mathcal{T}_*\mathfrak{i} = \mathfrak{i}$ для кожного мегаідеалу $\mathfrak{i}$ з певної множини відомих мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$ системи $\mathcal{E}$. Мегаідеали, що є сумами інших мегаідеалів, дають зв'язки, що є наслідками зв'язків, виведених із розгляду певних доданків. Тому такими мегаідеалами треба нехтувати під час обрахунків. Після виведення зв'язків на точкові перетворення $\mathcal{T}$ з інваріантності мегаідеалів обчислення повної групи точкових симетрій системи $\mathcal{E}$ завершують прямим методом.

РОЗДІЛ 2

Групова класифікація загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза

2.1. Вступ

Розвиток нових потужних засобів і технік групового аналізу диференціальних рівнянь в останнє десятиріччя суттєво розширив коло розв'язних задач цієї галузі математики. Зокрема, стало можливим вивчати допустимі перетворення й ліївські симетрії для систем диференціальних рівнянь зі складних класів, параметризованих багатьма функціями кількох аргументів.

Низка важливих у математичній фізиці еволюційних рівнянь мають загальний вигляд

$$u_t + C(t,x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t,x)u_k + B(t,x), \quad \text{де} \quad CA^r \neq 0. \tag{2.1}$$

Тут і надалі натуральний параметр r зафіксовано, причому $r \geqslant 2$. Вимога $CA^r \neq 0$ гарантує, що рівняння з класу (2.1) нелінійні й порядку r. У цьому розділі використано стандартні позначення для похідних, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, а також $u_0 = u$, $u_x = u_1$, $u_{xx} = u_2$ і $u_{xxx} = u_3$.

Завдяки важливості рівнянь із класу (2.1) є багато статей, у яких їх розглянуто (з подальшими обмеженнями на довільні елементи) з погляду симетрій, інтегровності, точних розв'язків тощо. Наведемо лише статті, що стосуються допустимих перетворень і групової класифікації класів, пов'язаних із класом (2.1).

Часткові підкласи класу (2.1) з невеликими значеннями r були предметом низки статей, опублікованих в останні двадцять п'ять років. Наприклад, групоїд еквівалентності класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами вигляду $u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$ з $f \neq 0$ і його підкласу рівнянь з $f = f(t)$ побудовано Дж. Кінгстоном і К. Софоклеоусом у [54] у вигляді множини точкових перетворень у парах рівнянь. Насправді, там було неявно доведено, що ці класи нормалізовані у звичайному сенсі. Пізніше такі перетворення названо дозволеними (*allowed*) [38, 115] або формозберігаючими (*form-preserving*) [55]. Ці поняття передували поняттю допустимих (*admissible*) перетворень, яке є центральним у сучасному груповому аналізі класів диференціальних рівнянь. Розв'язання задачі групової класифікації для наведеного вище підкласу з $f = f(t)$ розпочато в [27, 103] і завершено в [79, 112]. Нещодавно в [80] вичерпно проведено розширений симетрійний аналіз класу з $f = f(t,x)$, розглянутого раніше в [54].

Задачу часткової попередньої групової класифікації для спорідненого класу рівнянь Бюргерса з джерелом вигляду $u_t + uu_x = u_{xx} + f(t,x,u)$ з точністю до еквівалентності симетрії рівнянь Бюргерса розв'язано в [61].

У [38, 115] пораховано допустимі перетворення класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду $u_t + f(t,x)uu_x + g(t,x)u_{xxx} = 0$ з $fg \neq 0$ і використано в [38] для проведення його групової класифікації; див. у [105] сучасну інтерпретацію цих результатів. Спробу їхнього переносу на клас рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами вигляду $u_t + f(t,x)uu_x + g(t,x)u_{xx} = 0$ з $fg \neq 0$ за припущення, що допустимі перетворення цього класу подібні до допустимих перетворень наведеного вище аналогу третього порядку, зроблено в [91], але структура відповідного групоїда еквівалентності цілком інша за структуру групоїда в [38]. Трансформаційні властивості класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + (q(t)x + p(t))u_x + h(t)u + k(t)x + l(t) = 0,$$

з $fg \neq 0$ вивчено в [82]; див. також [104]. Цей клас збігається з класом $\mathcal{K}_1$ (для часткового значення $r=3$), що виникає в § 2.3. Клас $\mathcal{K}_1^{r=3}$ є нормалізованим у звичайному сенсі. Його можна відобразити сім'єю його перетворень еквівалентності, наприклад, у підклас рівнянь вигляду $u_t + uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$ з $g \neq 0$, який також є нормалізованим у звичайному сенсі. Розв'язання задачі групової класифікації класу $\mathcal{K}_1^{r=3}$ еквівалентно аналогічній задачі для цього підкласу; див. твердження 2.2.6 і § 2.3. Узагальнені рівняння Кавахара зі змінними коефіцієнтами вивчено в подібний спосіб у [56, 57]. Групову класифікацію галілей-інваріантних рівнянь вигляду $u_t + uu_x = F(u_r)$ проведено в [3, 36]; див. також [71] щодо ліївських редукцій рівнянь із цього класу.

На жаль, у багатьох релевантних статтях отримано неповні або навіть неправильні результати; частковий список таких статей щодо рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами наведено в [82]. Тому є сенс систематично розв'язати задачу групової класифікації для загального класу (2.1).

Більш загальні класи еволюційних рівнянь, що містять клас (2.1), також розглянуто в літературі. Контактні симетрії (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь вивчав Б. Магадєєв [5]. Більш точно, він довів, що (1+1)-вимірне еволюційне рівняння допускає нескінченновимірну алгебру Лі контактних симетрій тоді й лише тоді, коли воно лінеаризовне контактним перетворенням. Він також класифікував із точністю до контактних перетворень еквівалентності еволюційних рівнянь реалізації скінченновимірних алгебр Лі контактними векторними полями з незалежними змінними (t, x) і залежною змінною u, кожна з яких є максимальною алгеброю контактної інваріантності деякого нелінеаризовного еволюційного рівняння. Водночас, еволюційні рівняння, що допускають такі реалізації як свої максимальні алгебри контактної інваріантності, не було побудовано. Не менш важливим є те, що виокремлення класифікації контактних симетрій рівнянь з часткового підкласу всього класу (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь у загальному випадку є більш складною задачею, ніж пряма класифікація контактних симетрій рівнянь із цього підкласу. Твердження, подібне до наведеного вище про результати [5], також справедливе для класифікації еволюційних рівнянь низького порядку (тобто, з $r = 2, 3, 4$), проведених, наприклад, у [14, 44, 47, 118].

У цьому розділі розв'язано задачу повної групової класифікації класу (2.1) для будь-якого фіксованого значення $r \geqslant 2$. Навіть більш важливим результатом розділу є побудова — у процесі вивчення допустимих перетворень у підкласах класу (2.1) — кількох прикладів класів із особливими властивостями, існування яких було під великим сумнівом протягом тривалого часу. Ці приклади дають неочікуване розуміння загальної теорії перетворень еквівалентності класів диференціальних рівнянь. Зокрема, вони виправдовують введення поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності.

Зауважимо, що клас лінійних еволюційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами можна отримати з (2.1), поклавши $C = 0$. Цей клас має цілком інші трансформаційні властивості порівняно з класом (2.1), а будь-які рівняння з $C = 0$ і $C \neq 0$ не пов'язані одне з одним точковим або контактним перетворенням. До того ж, клас лінійних рівнянь повністю класифіковано в [59] і [77, с. 114–118] для $r = 2$ і в [18] для $r > 2$. (Остання стаття покращила й розширила результати статті [44, підрозд. III] у випадку $r = 3$ і статті [48] у випадку $r = 4$.) Тому, лінійні рівняння обґрунтовано виключено із поточного розгляду.

Як зазначено вище, клас (2.1) багатий на рівняння, важливі з фізичної точки зору. Зокрема, він містить низку відомих класичних моделей механіки рідини, зокрема

рівняння Бюргерса	$u_t + uu_x = a_2 u_{xx}$,
рівняння Кортевега–де Фріза	$u_t + uu_x = a_3 u_{xxx}$,
рівняння Курамото–Сивашинського	$u_t + uu_x = a_4 u_4 + a_3 u_3 + a_2 u_2$,
рівняння Кавахара	$u_t + uu_x = a_5 u_5 + a_3 u_3$,
узагальнені рівняння Бюргерса–Кортевега–де Фріза	$u_t + uu_x = a_r u_r$,

де a_i — сталі, а коефіцієнт похідної найвищого порядку — ненульовий. Нижче оглянемо фізичну важливість рівнянь класу (2.1) на прикладі різноманітних рівнянь Бюргерса [24, 95]. Для цих рівнянь незалежні й залежні змінні зазвичай пов'язані з фізичними змінними й координатами в доволі складний спосіб. Ролі t і x часто переставлені, тобто змінні t і x інтерпретують як відповідно просторову й часову величини, на кшталт довжини інтервалу і зсунутого часу. Знак нелінійності також може змінюватись, але це дає еквівалентні рівняння з точністю до зміни знаку u. Важливий клас узагальнених рівнянь Бюргерса складають так звані непланарні рівняння Бюргерса, що мають вигляд

$$u_t + uu_x + \frac{A_t(t)}{2A(t)}u = u_{xx}, \quad A > 0. \tag{2.2}$$

(Зауважимо, що тут і надалі опущено сталі параметри, що можна прибрати зсувами чи масштабними перетвореннями незалежних і залежних змінних, а також зміною їхніх знаків.) Такі рівняння описують поширення слабо нелінійних повздовжніх хвиль, підпорядкованих термов'язкій дифузії і геометричним ефектам, пов'язаним зі зміною "площі променевої трубки" $A(t)$ [45]. Кожне з цих рівнянь можна відобразити точковим перетворенням $\tilde t = \int \sqrt{A(t)}\,\mathrm{d}t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = \sqrt{A(t)}u$ у рівняння

$$\tilde u_{\tilde t} + \tilde u\tilde u_{\tilde x} = g(\tilde t)\tilde u_{\tilde x\tilde x} \tag{2.3}$$

з $g(\tilde t) = \sqrt{A(t)}$. Рівняння вигляду (2.3) також називають непланарними рівняннями Бюргерса [95, підрозд. 4.6], і вони складають підклас класу (2.1) з $r = 2$, виокремленого зв'язками $C = 1$, $A^0 = A^1 = 0$ та $A^2_x = 0$, який, як згадано вище, інтенсивно вивчався в рамках групового аналізу диференціальних рівнянь. Прообрази рівнянь (2.3) з $g(\tilde t) = 1, \tilde t/2, \exp \tilde t$ серед рівнянь вигляду (2.2) — це відповідно рівняння з $A(t) \propto t^j$, $j = 0, 1, 2$, що моделюють планарне ($j = 0$), циліндричне ($j = 1$) і сферичне ($j = 2$) однонаправлене поширення хвиль скінченної амплітуди, див. [25] і [95, підрозд. 3.3–3.4]. Коли відношення $g(\tilde t)/\tilde t$ прямує відповідно до нескінченності, ненульового скінченного значення або нуля при

$\tilde{t} \to \infty$, це називають надциліндричним, циліндричним або підциліндричним випадком [96]. Якщо ідеальний газ має експоненційний усереднений розподіл $\rho(t) \propto \exp(-t/H)$, де висота H є великою порівняно з базовою довжиною хвилі, що поширюється вертикально вгору (t-напрям), а x — зсунутий час, то швидкість $u(t,x)$ задовольняє рівняння (47) у [25], чия спрощена форма $u_t + uu_x - u/(2H) = \exp(t/H)u_{xx}$ зводиться точковим перетворенням до рівняння вигляду (2.3) з $g(\tilde{t}) = \tilde{t}$. Для кожної ненульової функції a аргументу t рівняння $u_t+uu_x-a_t(t)u/a(t) = a(t)u_{xx}$, що моделює акустичні хвилі в атмосфері [93], є подібним до стандартного рівняння Бюргерса з точністю до точкових перетворень. Узагальнене рівняння Бюргерса $u_t + uu_x = \varepsilon xu_{xx} + g(x)u_x$ виникає під час моделювання іонізованих газів [95, підрозд. 4.9].

2.2. Загальні рівняння Бюргерса–Кортевега–де Фріза

2.2.1. Групоїд еквівалентності. Групоїд і групи еквівалентності класу (2.1) обчислимо прямим методом. Перетворення еквівалентності використаємо для знаходження зручного відкаліброваного підкласу класу (2.1), що є придатним для проведення повної групової класифікації. Але спочатку розглянемо широкий надклас загальних (1+1)-вимірних ($r \geqslant 2$) еволюційних рівнянь порядку r вигляду

$$u_t = H(t, x, u_0, \dots, u_r), \quad H_{u_r} \neq 0, \tag{2.4}$$

і послідовно звузимо його, допоки не досягнемо клас (2.1) і його відкалібровані підкласи. Перевага цього методу полягає в тому, що можна вивести нормалізаційні властивості класу (2.1) через відслідковування змін нормалізаційних властивостей при переході від класу (2.4) до його підкласів. Це не тільки дає обмеження на трансформаційні частини допустимих перетворень у цих підкласах, а й призводить до все більш обмежувальних співвідношень між вихідними й кінцевими довільними елементами, допоки ці співвідношення не визначені повністю саме для класу (2.1).

У [5] показано, що контактне перетворення незалежних змінних (t,x) і залежної змінної u пов'язує два фіксованих рівняння з класу (2.4) тоді й лише тоді, коли його компоненти мають вигляд $\tilde t = T(t)$, $\tilde x = X(t,x,u,u_x)$ і $\tilde u = U(t,x,u,u_x)$ за звичайних умов невиродженості й контактності:

$$T_t \neq 0, \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} X_x & X_u & X_{u_x} \\ U_x & U_u & U_{u_x} \end{pmatrix} = 2,$$
$$(U_x + U_u u_x)X_{u_x} = (X_x + X_u u_x)U_{u_x}.$$

Продовження перетворення до перших похідних задано формулами

$$\tilde u_{\tilde x} = V, \quad \tilde u_{\tilde t} = \frac{U_u - X_u V}{T_t} u_t + \frac{U_t - X_t V}{T_t},$$

де

$$V = \frac{U_x + U_u u_x}{X_x + X_u u_x} \quad \text{або} \quad V = \frac{U_{u_x}}{X_{u_x}},$$

коли відповідно $X_x + X_u u_x \neq 0$ або $X_{u_x} \neq 0$. Такі перетворення, що продовжені на довільний елемент H згідно з формулою[2.1]

$$\tilde H = \frac{U_u - X_u V}{T_t} H + \frac{U_t - X_t V}{T_t},$$

складають контактну звичайну групу еквівалентності класу (2.4), а тому цей клас є нормалізованим у звичайному сенсі з точністю до контактних перетворень. Він також нормалізований у звичайному сенсі з точністю до точкових перетворень. Групоїд точкової еквівалентності й звичайну точкову групу еквівалентності виокремлюють з їхніх контактних аналогів умовою $X_{u_x} = U_{u_x} = 0$.

Розглянемо підклас $\mathcal A$ класу (2.4), виокремлений зв'язками

$$H_{u_r u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, r, \qquad H_{u_{r-1} u_l} = 0, \quad l = 1, \dots, r-1,$$

[2.1] У дисертації ліві й праві частини таких співвідношень обчислюють у відповідно нових (з хвильками) і в старих (без хвильок) змінних.

див. [111]. Контактні допустимі перетворення в підкласі $\mathcal{A}$ індуковано точковими допустимими перетвореннями завдяки зв'язкам $H_{u_r u_k} = 0$, $k = 2, \dots, r$. Інакше кажучи, групоїд контактної еквівалентності класу $\mathcal{A}$ збігається з першим продовженням групоїда точкової еквівалентності цього ж класу. Зв'язки $H_{u_r u_1} = 0$ і $H_{u_{r-1} u_l} = 0$, $l = 1, \dots, r-1$, призводять до $X_u = 0$ і $U_{uu} = 0$ для будь-якого допустимого перетворення в класі $\mathcal{A}$, тобто трансформаційна частина таких перетворень має вигляд

$$\tilde{t} = T(t),\ \ \tilde{x} = X(t,x),\ \ \tilde{u} = U^1(t,x)u + U^0(t,x) \tag{2.5}$$

з $T_t X_x U^1 \neq 0$. Продовження цих перетворень на довільний елемент H складають звичайну (точкову) групу еквівалентності класу $\mathcal{A}$. Отже, клас $\mathcal{A}$ нормалізований у звичайному сенсі.

Щоб виокремити клас (2.1), потрібно накласти ще більше зв'язків на довільний елемент H. Повну множину таких зв'язків задано системою

$$H_{u_k u_l} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant r, \quad (k,l) \neq (0,1), \quad H_{u_r} \neq 0, \quad H_{u_0 u_1} \neq 0.$$

Репараметризуємо отриманий підклас, вважаючи $\theta = (A^0, \dots, A^r, B, C)$ набором довільних елементів замість H. Використовуючи прямий метод для обрахування групоїда еквівалентності класу (2.1), зафіксуємо два довільних рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ з класу (2.1) і вимагатимемо, щоб їх зв'язувало точкове перетворення φ вигляду (2.5). Цей специфічний вигляд зумовлено тим, що клас (2.1) є підкласом нормалізованого класу $\mathcal{A}$. Також необхідно виразити струменеві змінні $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}^{(r)})$ у термінах $(t, x, u^{(r)})$. Згідно з (2.5) вирази для перетворених операторів повних похідних такі:

$$\mathrm{D}_{\tilde{t}} = \frac{1}{T_t}\left(\mathrm{D}_t - \frac{X_t}{X_x}\mathrm{D}_x\right), \quad \mathrm{D}_{\tilde{x}} = \frac{1}{X_x}\mathrm{D}_x.$$

Підстановка виразів для перетворених величин в $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ дає рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$. Оскільки за припущенням рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ пов'язані перетворенням φ, рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ має виконуватися на всіх розв'язках рівняння $\mathcal{L}_\theta$. Вважаючи

u_t провідною похідною в $\mathcal{L}_\theta$, підставимо отримані з $\mathcal{L}_\theta$ вирази для u_t у $\tilde{\mathcal{L}}$. Це призводить до тотожності, яку можна розщепити за параметричними похідними $u_0, \dots, u_r$. Рівність нулю коефіцієнта біля u^2 в $\tilde{\mathcal{L}}$ означає, що $U^1_x = 0$. Збираючи інші коефіцієнти біля степенів параметричних похідних, виведемо формули, що точково співвідносять θ і $\tilde{\theta}$; водночас не виникає жодних умов на T, X, U^1 і U^0. Ці формули досить громіздкі (хоча їх можна виписати, використовуючи формулу Фаа ді Бруно). До того ж, вони не потрібні на поточному кроці, оскільки можна спершу зафіксувати відкалібрований підклас класу (2.1). Для цього потрібна лише компонента перетворення для довільного елемента $C = C(t, x)$, яку можна отримати без використання формули Фаа ді Бруно:

$$\tilde{C} = \frac{X_x}{T_t U^1} C.$$

Твердження 2.2.1. *Клас* (2.1) *нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності* $G^{\sim}_{(2.1)}$ *складають перетворення в об'єднаному просторі з координатами* (t, x, u, θ) *з* (t, x, u)*-компонентами вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t, x),$$

де $T = T(t)$, $X = X(t, x)$, $U^1 = U^1(t)$ *і* $U^0 = U^0(t, x)$ *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_t X_x U^1 \neq 0$.

Використаємо сім'ю перетворень еквівалентності

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{C(t, y)}, \quad \tilde{u} = u,$$

параметризовану довільним елементом C, щоб відобразити клас (2.1) на його підклас, виокремлений зв'язком $C = 1$. Водночас бачимо, що $X_x = T_t U^1$, а тому $X_{xx} = 0$, тобто $X = X^1(t)x + X^0(t)$ і $U^1 = X^1/T_t$. Відкалібрований підклас також є нормалізованим у звичайному сенсі. До того ж, оскільки $C = 1$ у найбільш відомих рівняннях із класу (2.1), це калібрування досить природне.

Зауваження 2.2.2. Якщо підклас заданого класу диференціальних рівнянь виокремлено зв'язками з явними виразами на деякі довільні елементи, то можна репараметризувати цей підклас за допомогою зведеного набору довільних елементів, отриманого із повного набору виключенням зв'язаних довільних елементів. Наприклад, за калібрування $C = 1$ можна вважати $(A^0, \dots, A^r, B)$ набором довільних елементів для відповідного підкласу.

Використовуючи отримані вище обмеження на T, X і U, завершимо процедуру знаходження групоїда еквівалентності підкласу, асоційованого з калібруванням $C = 1$, тобто утвореного рівняння вигляду

$$u_t + uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t,x)u_k + B(t,x). \tag{2.6}$$

Перетворені рівняння з каліброваного підкласу

$$\frac{1}{T_t}\left(U^1u_t + U^1_t u + U^0_t - \frac{X_t}{X^1}(U^1u_x + U^0_x)\right) + \frac{1}{X^1}(U^1u + U^0)(U^1u_x + U^0_x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\tilde{A}^k}{(X^1)^k}(U^1u_k + U^0_k) + \tilde{B}$$

можна спростити підстановкою виразу для u_t згідно з рівнянням (2.6) до

$$\sum_{k=0}^{r} A^k u_k + B + \left(\frac{U^0}{U^1} - \frac{X_t}{X^1}\right)u_x + \left(\frac{U^1_t}{U^1} + \frac{U^0_x}{U^1}\right)u + \frac{U^0_t}{U^1} - \frac{X_t}{X^1}\frac{U^0_x}{U^1} + \frac{U^0U^0_x}{(U^1)^2} = \sum_{k=0}^{r}\left[\frac{T_t}{(X^1)^k}\tilde{A}^k u_k + \frac{T_t}{U^1}\left(\tilde{B} + \frac{\tilde{A}^k}{(X^1)^k}U^0_k\right)\right].$$

Розщеплення цього рівняння за u_k дає компоненти перетворень для довільних елементів. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2.2.3. *Клас (2.6) зведених (1+1)-вимірних загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза порядку r з $C = 1$ є нормалізованим у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{(2.6)}$ складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde{u} = \frac{X^1}{T_t}u + U^0(t,x),$$

$$\tilde{A}^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j, \quad \tilde{A}^1 = \frac{X^1}{T_t}A^1 + U^0 - \frac{X^1_t x + X^0_t}{T_t},$$
$$\tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{X^1_t}{X^1} - \frac{T_{tt}}{T_t} + \frac{T_t}{X^1}U^0_x\right),$$
$$\tilde{B} = \frac{X^1}{(T_t)^2}B + \frac{U^0_t}{T_t} + \frac{U^0_x}{X^1}\left(U^0 - \frac{X^1_t x + X^0_t}{T_t}\right) - \sum_{k=0}^{r}\frac{U^0_k}{(X^1)^k}\tilde{A}^k,$$

де $j = 2, \dots, r$, а $T(t)$, $X^1(t)$, $X^0(t)$, $U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_t X^1 \neq 0$.

На цьому кроці зручно ввести ще одне калібрування. Зокрема, сім'я перетворень еквівалентності, параметризована довільним елементом A^1, з $T = t$, $X^1 = 1$, $X^0 = 0$, $U^0 = -A^1$ відображає асоційований відкалібрований підклас (2.6) з $C = 1$ у підклас класу (2.1) з $C = 1$ і $A^1 = 0$. Це калібрування призводить до умови $U^0 = (X^1_t x + X^0_t)/T_t$. Відповідний відкалібрований підклас складають рівняння вигляду

$$\mathcal{L}_\kappa\colon \quad u_t + uu_x = \sum_{j=2}^{r} A^j(t,x)u_j + A^0(t,x)u + B(t,x), \tag{2.7}$$

де $A^r \neq 0$, а $\kappa = (A^0, A^2, \dots, A^r, B)$ — зведений набір довільних елементів. Цей підклас нормалізований у звичайному сенсі. І саме цей відкалібрований підклас є найбільш зручним для розв'язання повної задачі групової класифікації класу (2.1).

Теорема 2.2.4. *Клас (2.7) зведених (1+1)-вимірних загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза порядку r, виокремлений із класу (2.1) калібруванням $(C, A^1) = (1, 0)$, є нормалізованим у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde{u} = \frac{X^1}{T_t}u + \frac{X^1_t}{T_t}x + \frac{X^0_t}{T_t}, \tag{2.8a}$$
$$\tilde{A}^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j, \quad \tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + 2\frac{X^1_t}{X^1} - \frac{T_{tt}}{T_t}\right), \tag{2.8b}$$

$$\tilde{B} = \frac{X^1}{(T_t)^2}B + \frac{1}{T_t}\left(\frac{X^1_t}{T_t}\right)_t x + \frac{1}{T_t}\left(\frac{X^0_t}{T_t}\right)_t - \left(\frac{X^1_t}{T_t}x + \frac{X^0_t}{T_t}\right)\tilde{A}^0, \qquad (2.8c)$$

де $j = 2, \dots, r$, *а* $T = T(t)$, $X^1 = X^1(t)$, $X^0 = X^0(t)$ *— довільні гладкі функції своїх аргументів, причому* $T_tX^1 \neq 0$.

Наслідок 2.2.5. *Алгеброю еквівалентності класу* (2.7) *зведених* (1+1)*-вимірних загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза порядку* r *є алгебра* $\mathfrak{g}^\sim = \langle \hat{D}(\tau), \hat{S}(\zeta), \hat{P}(\chi)\rangle$, *де* $\tau = \tau(t)$, $\zeta = \zeta(t)$, $\chi = \chi(t)$ *пробігають множину гладких функцій від* t, *причому*

$$\hat{D}(\tau) = \tau\partial_t - \tau_t u\partial_u - \tau_t\sum_{j=2}^{r} A^j\partial_{A^j} - (\tau_t A^0 + \tau_{tt})\partial_{A^0} - 2\tau_t B\partial_B,$$

$$\hat{S}(\zeta) = \zeta x\partial_x + (\zeta u + \zeta_t x)\partial_u + j\zeta\sum_{j=2}^{r} A^j\partial_{A^j} + 2\zeta_t\partial_{A^0} + (\zeta B + \zeta_{tt}x - \zeta_t x A^0)\partial_B,$$

$$\hat{P}(\chi) = \chi\partial_x + \chi_t\partial_u + (\chi_{tt} - \chi_t A^0)\partial_B.$$

Оскільки клас (2.1) відображено на клас (2.7) сім'єю перетворень еквівалентності й обидва класи нормалізовані у звичайному сенсі, очевидне таке твердження.

Твердження 2.2.6. *Групова класифікація класу* (2.1) *зводиться до групової класифікації свого підкласу* (2.7)*. Більш точно, будь-який повний список* $G^\sim$*-нееквівалентних розширень ліївських симетрій у класі* (2.7) *є повним списком* $G^\sim_{(2.1)}$*-нееквівалентних розширень ліївських симетрій у класі* (2.1)*.*

2.2.2. Альтернативні калібрування. Покажемо, що калібрування $C = 1$ є найкращим вихідним калібруванням для класу (2.1), а калібрування $(C, A^1) = (1, 0)$ виокремлює його найкращий підклас для проведення групової класифікації.

Очевидною альтернативою є калібрування $A^r = 1$. Його використано в [18] як основне калібрування для проведення групової класифікації лінійних рівнянь вигляду (2.1) з $C = 0$. A^r-компоненту перетворень еквівалентності в класі (2.1) задано формулою

$$\tilde{A}^r = \frac{(X_x)^r}{T_t}A^r.$$

Якщо $A^r = 1$ і $\tilde{A}^r = 1$, то параметри відповідних допустимих перетворень, наведених у твердженні 2.2.1, задовольняють зв'язок $(X_x)^r = T_t$, тобто $X = X^1(t)x + X^0(t)$, де $(X^1)^r = T_t$, що робить параметризацію звичайної групи еквівалентності відповідного підкласу більш складною, ніж за використання калібрування $C = 1$.

Твердження 2.2.7. *Підклас класу (2.1), виокремлений зв'язком $A^r = 1$, є нормалізованим у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t,x),$$
$$\tilde{A}^l = \frac{(X^1)^l}{T_t}A^l, \quad \tilde{A}^1 = \frac{X^1}{T_t}\left(A^1 + \frac{U^0}{U^1}C - \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right),$$
$$\tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^1_t}{U^1} + \frac{U^0_x}{U^1}C\right), \quad \tilde{C} = \frac{X^1}{T_tU^1}C,$$
$$\tilde{B} = \frac{U^1}{T_t}B + \frac{U^0_t}{T_t} + \frac{U^0_x}{T_t}\left(\frac{U^0}{U^1}C - \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right) - \frac{U^0_r}{(X^1)^r} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{U^0_k}{(X^1)^k}\tilde{A}^k,$$

де $l = 2,\dots,r-1$, а $T = T(t)$, $X^0 = X^0(t)$, $U^1 = U^1(t)$, $U^0 = U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_tU^1 \neq 0$, $X^1 = (T_t)^{1/r}$, якщо порядок r непарний, та $T_t > 0$, $X^1 = \varepsilon(T_t)^{1/r}$ з $\varepsilon = \pm 1$, якщо порядок r парний.

На відміну від класу (2.6) додаткове калібрування $A^1 = 0$ трохи погіршує нормалізаційні властивості. Воно призводить до появи довільного елемента C в u-компоненті допустимих перетворень, оскільки тоді маємо

$$U^0 = \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1 C}U^1.$$

Позначимо через θ' набір довільних елементів, зведений подвійним калібруванням:

$$\theta' = (A^0, A^2, \dots, A^{r-1}, B, C).$$

Твердження 2.2.8. *Групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{A}_1$ класу (2.1), виокремленого зв'язками $A^r = 1$ і $A^1 = 0$, складають трійки $(\theta', \varphi, \tilde{\theta}')$, де точкові перетворення φ мають вигляд*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0 \tag{2.9a}$$

з $U^0 := \dfrac{X^1_t x + X^0_t}{X^1 C} U^1$, *а набори довільних елементів θ' і $\tilde{\theta}'$ пов'язані згідно з*

$$\tilde{A}^l = \frac{(X^1)^l}{T_t} A^l, \quad \tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^1_t}{U^1} + \frac{U^0_x}{U^1} C\right), \quad \tilde{C} = \frac{X^1}{T_t U^1} C, \tag{2.9b}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} =& \frac{U^1}{T_t} B + \frac{U^0_t}{T_t} + \frac{U^0_x}{T_t}\left(\frac{U^0}{U^1} C - \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right) - \frac{U^0_r}{(X^1)^r} \\ & - \sum_{l=2}^{r-1} \frac{U^0_l}{(X^1)^l} \tilde{A}^l - U^0 \tilde{A}^0, \end{aligned} \tag{2.9c}$$

причому $l = 2, \ldots, r-1$, а $T = T(t)$, $X^0 = X^0(t)$, $U^1 = U^1(t)$ — довільні гладкі функції від t, що задовольняють $T_t U^1 \neq 0$ та $X^1 = (T_t)^{1/r}$, коли порядок r парний, і $T_t > 0$, $X^1 = \varepsilon (T_t)^{1/r}$ з $\varepsilon = \pm 1$, коли порядок r непарний.

Очевидно, що підклас $\mathcal{A}_1$ не є нормалізованим у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду (2.9) в об'єднаному просторі змінних із координатами (t, x, u, θ'), де параметри додатково задовольняють зв'язки $T_{tt} = X^0_t = X^1_t = U^0 = 0$.

Усі компоненти перетворень (2.9) локально залежать від C, а вирази для $\tilde{A}^0$ і $\tilde{B}$ містять похідні довільного елемента C по t і x. Тому, щоб інтерпретувати (2.9) як узагальнені перетворення еквівалентності, потрібно формально розширити набір довільних елементів θ' похідними довільного елемента C — $Z^0 := C_t$, $Z^k := C_k$, $k = 1, \ldots, r$, — і продовжити на них перетворення еквівалентності:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^0 &= \frac{X^1}{T_t^2 U^1} Z^0 + \left(\frac{X^1}{T_t U^1}\right)_t \frac{C}{T_t}, \\ \tilde{Z}^k &= \frac{(X^1)^{1-k}}{T_t^2 U^1} Z^k, \quad k = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{2.10}$$

У виразах для $\tilde{A}^0$ і $\tilde{B}$ похідні параметр-функції U^0 потрібно розкрити з огляду на відповідні вирази, а похідні довільного елемента C — замінити відповідними довільними елементами Z^i.

Нехай $\bar{\mathcal{A}}_1$ — клас рівнянь вигляду (2.1) з $(A^r, A^1)=(1,0)$ і розширеним набором довільних елементів $\bar{\theta}' = (A^0, A^2, \dots, A^{r-1}, B, C, Z^0, \dots, Z^r)$, де визначальні відношення для Z^0, …, Z^r вважаємо додатковими допоміжними рівняннями на довільні елементи.

Теорема 2.2.9. *Клас $\bar{\mathcal{A}}_1$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_1}$ є його ефективною узагальненою групою еквівалентності, і її складають точкові перетворення в об'єднаному просторі змінних (t, x, u) і довільних елементів $\bar{\theta}'$ з компонентами вигляду (2.9), (2.10) і тими самими зв'язками на параметр-функції, як і в твердженні 2.2.8, де частинні похідні параметр-функції U^0 замінено відповідними усіченими повними похідними $\bar{\mathrm{D}}_t = \partial_t + Z^0\partial_C$ і $\bar{\mathrm{D}}_x = \partial_x + Z^1\partial_C + Z^2\partial_{Z^1} + \dots + Z^r\partial_{Z^{r-1}}$.*

Доведення. Наведені вище точкові перетворення складають групу G, яка породжує весь групоїд еквівалентності класу $\bar{\mathcal{A}}_1$ і є мінімальною серед груп точкових перетворень в об'єднаному просторі з координатами $(t, x, u, \bar{\theta}')$, що мають цю властивість. Отже, група G є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\bar{\mathcal{A}}_1$. Доведемо, що група G збігається з групою $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_1}$. Справді, підстановка будь-якого часткового значення довільного набору $\bar{\theta}'$ у будь-який елемент групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_1}$ дає допустиме перетворення в класі $\bar{\mathcal{A}}_1$. Це означає, що елементи групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_1}$ мають вигляд (2.9), (2.10), де параметр-функції T, X^0 і X^1 можуть залежати від довільних елементів, а частинні похідні цих функцій замінено відповідними повними похідними, продовженими на довільні елементи класу $\bar{\mathcal{A}}_1$. Водночас, ці параметри задовольняють умову $\mathrm{D}_xT = \mathrm{D}_xX^0 = \mathrm{D}_xX^1 = 0$ з продовженим оператором повної похідної D_x. Звідси через розщеплення за незв'язаними похідними довільних елементів випливає, що параметри T, X^0 і X^1 є функціями лише від t. Тому $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_1} = G$. □

Отже, калібрування $(C, A^1) = (1, 0)$ є кращим за $(A^r, A^1) = (1, 0)$.

Зауваження 2.2.10. Теорема 2.2.9 дає перший приклад узагальненої групи еквівалентності, де компоненти перетворень змінних рівнянь залежать від несталого довільного елемента. Цей самий приклад є прикладом узагальненої групи еквівалентності, що сама є ефективною, а тому відповідний клас диференціальних рівнянь допускає єдину ефективну узагальнену групу еквівалентності.

Більш складний приклад узагальненої групи еквівалентності надає підклас $\mathcal{A}_0$ класу (2.1), виокремлений зв'язком $A^1 = 0$. A^1-компоненти перетворень еквівалентності класу (2.1) мають вигляд

$$\tilde{A}^1 = \frac{X_x}{T_t}A^1 + \frac{X_x}{T_t}\frac{U^0}{U^1}C - \frac{X_t}{T_t} - \sum_{j=2}^{r} \tilde{A}^j X_x \left(\frac{1}{X_x}\partial_x\right)^{j-1} \frac{1}{X_x},$$

де кожен з $\tilde{A}^j$, $j = 2, \dots, r$, є комбінацією довільних елементів A^i, $i = j, \dots, r$, з коефіцієнтами, вираженими через T_t і похідні параметр-функції X по x. Підставляючи вираз

$$U^0 = \frac{X_t U^1}{X_x C} + \frac{T_t U^1}{C} \sum_{j=2}^{r} \tilde{A}^j \left(\frac{1}{X_x}\partial_x\right)^{j-1} \frac{1}{X_x},$$

виведений із калібрування $A^1 = 0$, у загальну форму допустимих перетворень класу (2.1) і нехтуючи відношенням між A^1 й $\tilde{A}^1$, отримаємо елементи групоїда еквівалентності підкласу $\mathcal{A}_0$. Отже, цей підклас не є нормалізованим у звичайному сенсі, а його звичайна група еквівалентності ізоморфна підгрупі групи $G^{\sim}_{(2.1)}$, виокремленій обмеженнями $X_{xx} = X_t = 0$ на групові параметри. Так само можна розглянути аналог $\bar{\mathcal{A}}_0$ підкласу $\mathcal{A}_0$ з набором довільних елементів $(A^0, A^2, \dots, A^r, B, C)$, формально розширеним похідними C_t, C_k, A^j_t і A^j_k, $j = 2, \dots, r$, $k = 1, \dots, r$. Тому вираз для трансформаційних частин допустимих перетворень класу $\mathcal{A}_0$ і формули, що пов'язують вихідні й перетворені довільні елементі, включно з продовженням на наведені вище їхні похідні, дають компоненти перетворень, що складають групу G, яка очевидно є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\bar{\mathcal{A}}_0$. Отже, клас $\bar{\mathcal{A}}_0$ також є нормалізованим в узагальненому сенсі.

Зауважимо, що вся узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_0}$ класу $\bar{\mathcal{A}}_0$ збігається з його ефективною узагальненою групою еквівалентності G. Справді, з огляду на опис групоїда еквівалентності підкласу $\mathcal{A}_0$, елементи групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{A}}_0}$ мають вигляд, подібний до вигляду елементів групи G, де групові параметри T, X і U^1 можуть залежати також від довільних елементів підкласів $\mathcal{A}_0$, а їхні частинні похідні по t і x замінено відповідними повними похідними, продовженими на довільні елементи класу $\bar{\mathcal{A}}_0$. Водночас, умова $\mathrm{D}_xT = \mathrm{D}_xU^1 = 0$ з продовженим оператором повної похідної по D_x означає, що параметр-функції T і U^1 залежать щонайбільше від t. Відповідний вираз для U^0 містить похідну D_x^rX, а тому компонента перетворення для B обов'язково задіє похідну $\mathrm{D}_x^{2r}X$. Розщеплюючи цю компоненту за x-похідними порядку $2r$ усіх довільних елементів, (ці похідні не зв'язані), виведемо, що насправді параметр-функція X також не залежить від довільних елементів.

2.2.3. Попередній аналіз ліївських симетрій. Обрахуємо максимальну групу ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_\kappa$ з класу (2.7), використовуючи інфінітезимальний метод. Для цього знайдемо генератори $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$ однопараметричних груп точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}_\kappa$, де компонентами τ, ξ, η залежать від (t, x, u).

Критерій інфінітезимальної інваріантності разом із наслідком 2.2.5, що уточнює вигляд допустимих ліївських симетрій для рівнянь із класу (2.7) з огляду на його нормалізованість, дають таку систему *класифікуючих рівнянь* для ліївських симетрій рівнянь із класу (2.7):

$$\tau A^j_t + (\zeta x + \chi)A^j_x + (\tau_t - j\zeta)A^j = 0, \quad j = 2, \dots, r, \tag{2.11a}$$

$$\tau A^0_t + (\zeta x + \chi)A^0_x + \tau_t A^0 = 2\zeta_t - \tau_{tt}, \tag{2.11b}$$

$$\tau B_t + (\zeta x + \chi)B_x - (\zeta - 2\tau_t)B + (\zeta_t x + \chi_t)A^0 = \zeta_{tt}x + \chi_{tt}. \tag{2.11c}$$

Отже, розв'язання задачі групової класифікації для класу (2.7) зводиться до розв'язання системи (2.11) з точністю до еквівалентності, індукованою групою $G^{\sim}$.

Твердження 2.2.11. *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\kappa$ рівняння $\mathcal{L}_\kappa$ з класу (2.7) є лінійною оболонкою векторних полів вигляду $Q = D(\tau) + S(\zeta) + P(\chi)$, де параметр-функції τ, ζ і χ пробігають множину розв'язків визначальних рівнянь (2.11), причому*

$$\begin{aligned}&D(\tau) = \tau\partial_t - \tau_t u\partial_u, \quad S(\zeta) = \zeta x\partial_x + (\zeta u + \zeta_t x)\partial_u,\\ &P(\chi) = \chi\partial_x + \chi_t\partial_u.\end{aligned}$$

Твердження 2.2.12. *Ядро алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap} := \bigcap_\kappa \mathfrak{g}_\kappa$ рівнянь із класу (2.7) тривіальне, тобто $\mathfrak{g}^{\cap} = \{0\}$.*

На цьому кроці зручно ввести лінійну оболонку

$$\mathfrak{g}_{\langle\rangle} := \langle D(\tau), S(\zeta), P(\chi)\rangle,$$

де параметр-функції τ, ζ і χ пробігають множину гладких функцій від t. Нетривіальні комутаційні співвідношення між векторними полями, на які натягнуто $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, задано такими тотожностями:

$$\begin{aligned}&[D(\tau), D(\check\tau)] = D(\tau\check\tau_t - \check\tau\tau_t), \quad [D(\tau), S(\zeta)] = S(\tau\zeta_t),\\ &[D(\tau), P(\chi)] = P(\tau\chi_t), \quad [S(\zeta), P(\chi)] = -P(\zeta\chi).\end{aligned}$$

З огляду на комутаційні співвідношення очевидно, що $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ є алгеброю Лі. До того ж, $\mathfrak{g}_{\langle\rangle} = \cup_\kappa \mathfrak{g}_\kappa$, оскільки будь-яке векторне поле серед $D(\tau)$, $S(\zeta)$ і $P(\chi)$ лежить у $\mathfrak{g}_\kappa$ для деякого часткового значення набору довільних елементів κ.

Надалі позначимо через π проєкцію розширеного простору з координатами (t, x, u, κ) на простір змінних із координатами (t, x, u), тобто $\pi(t, x, u, \kappa) = (t, x, u)$. Відображення π піднімає векторні поля з $\mathfrak{g}^{\sim}$ та перетворення з $G^{\sim}$, причому $\pi_*\mathfrak{g}^{\sim} = \mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Це показує, що насправді клас (2.7) сильно нормалізований у звичайному сенсі [89]. Зауважимо, що нормалізованість класу (2.7) у звичайному сенсі означає лише, що $\mathfrak{g}_{\langle\rangle} \subseteq \pi_*\mathfrak{g}^{\sim}$. Проєкція π піднімає векторні поля $\hat{D}(\tau)$, $\hat{S}(\zeta)$, $\hat{P}(\chi)$, на які натягнуто алгебру Лі $\mathfrak{g}^{\sim}$, відповідно у векторні поля $D(\tau)$, $S(\zeta)$ і $P(\chi)$, на які натягнуто алгебру $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Через підняття проєкцією π приєднана дія групи $G^{\sim}$ на алгебру $\mathfrak{g}^{\sim}$ індукує дію групи $\pi_*G^{\sim}$ на алгебрі $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, а отже і на множині підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Нагадаємо, що підалгебру $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ називають придатною, якщо існує такий набір довільних елементів κ, що $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_\kappa$. Для будь-якого значення набору довільних елементів κ та будь-якого перетворення $\mathcal{T} \in G^{\sim}$ підняття $\pi_*\mathcal{T}$ відображає максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\kappa$ рівняння $\mathcal{L}_\kappa$ у максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}\kappa}$ рівняння $\mathcal{L}_{\mathcal{T}\kappa}$. Обидві алгебри $\mathfrak{g}_\kappa$ і $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}\kappa}$ містить алгебра $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Інакше кажучи, дія групи $\pi_*G^{\sim}$ на алгебрі $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ зберігає множину придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, а тому група $\pi_*G^{\sim}$ породжує добре визначене відношення еквівалентності на цих підалгебрах. У підсумку, доведено твердження, яке є базисом для групової класифікації класу (2.7).

Твердження 2.2.13. *Повну групову класифікацію класу* (2.7) *зведених* (1+1)*-вимірних загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза порядку r можна отримати з класифікації всіх придатних підалгебр алгебри Лі $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ з точністю до еквівалентності, індукованої дією $\pi_*G^{\sim}$.*

Щоб ефективно провести групову класифікацію алгебраїчним методом, необхідно порахувати приєднані дії перетворень φ з групи $\pi_*G^{\sim}$ на векторні поля Q з $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Цей обрахунок зручно виконати через підняття φ_* векторних полів Q перетвореннями φ:

$$\varphi_*Q = Q(T)\partial_{\tilde{t}} + Q(X)\partial_{\tilde{x}} + Q(U)\partial_{\tilde{u}},$$

див., наприклад, [15, 18, 26, 58]. Тут коефіцієнти φ_*Q потрібно виразити в термінах перетворених змінних за допомогою підстановки $(t,x,u) = \varphi^{-1}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u})$, де φ^{-1} — перетворення, обернене до φ.

На практиці обчислення виконують для сімей елементарних перетворень $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{S}(X^1)$ і $\mathcal{P}(X^0)$ з $\pi_*G^{\sim}$, які отримують з (2.8) покладанням тривіальних значень для всіх крім однієї серед параметр-функцій T, X^1, X^0: t для T, один для X^1, нуль для X^0. Нетривіальні підняття векторних полів, на які натягнуто $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, такі:

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_*(T)D(\tau)=\tilde{D}(\tau T_t), \quad \mathcal{D}_*(T)S(\zeta)=\tilde{S}(\zeta), \quad \mathcal{D}_*(T)P(\chi)=\tilde{P}(\chi), \\
\mathcal{S}_*(X^1)D(\tau)=\tilde{D}(\tau)+\tilde{S}\left(\tau\frac{X^1_t}{X^1}\right), \quad \mathcal{S}_*(X^1)P(\chi)=\tilde{P}(\chi X^1), \qquad (2.12) \\
\mathcal{P}_*(X^0)D(\tau)=\tilde{D}(\tau)+\tilde{P}\left(\tau X^0_t\right), \quad \mathcal{P}_*(X^0)S(\zeta)=\tilde{S}(\zeta)-\tilde{P}(\zeta X^0).
\end{gathered}$$

Тут хвильки над векторними полями в правих частинах рівностей вказують, що ці векторні поля виражено в перетворених змінних, що також включає підстановку $t=T^{-1}(\tilde{t})$ для t, де T^{-1} — обернена функція до T.

2.2.4. Властивості придатних підалгебр. Важливим кроком групової класифікації класу (2.7) є вивчення властивостей придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$. Зокрема, треба визначити максимальну можливу розмірність алгебр ліївської інваріантності рівнянь з цього класу.

Лема 2.2.14. $\dim\mathfrak{g}_\kappa\leqslant 5$ *для будь-якого значення набору довільних елементів* κ.

Доведення. Це твердження прямо випливає з аналізу простору розв'язків лінійної системи (2.11) на τ, ζ і χ для фіксованого набору κ. Позначимо через $\Omega_t\subseteq\mathbb{R}$ і $\Omega_x\subseteq\mathbb{R}$ такі відкриті відрізки на t- і x-осях, що рівняння $\mathcal{L}_\kappa$ є визначеним на області $\Omega_t\times\Omega_x$. Оскільки $A^r\neq 0$ за початковим припущенням, рівняння (2.11a) з $j=r$ можна розв'язати відносно τ_t і, зафіксувавши $x_1\in\Omega_x$, отримати

$$\tau_t=r\zeta-\left.\left(\tau\frac{A^r_t}{A^r}+(\zeta x+\chi)\frac{A^r_x}{A^r}\right)\right|_{x=x_1}=:R^1. \qquad (2.13a)$$

Оцінюючи класифікуючу умову (2.11c) у двох різних точках x_2 і x_3 з Ω_x і варіюючи t, маємо

$$\zeta_{tt}x_2-\chi_{tt}=R^2, \quad \zeta_{tt}x_3-\chi_{tt}=R^3,$$

де R^2 і R^3 є відповідно результатами підстановки x_2 і x_3 у ліву частину рівності (2.11c). Завдяки тому, що x_2 і x_3 є різними, наведену вище систему можна записати як

$$\zeta_{tt} = \cdots, \quad \chi_{tt} = \cdots. \tag{2.13b}$$

Якщо довільний елемент κ зафіксовано, то систему (2.13) можна розглядати як канонічну систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь по t для τ, ζ і χ. Її простір розв'язків є п'ятивимірним. Подальші умови, виведені з класифікуючих рівнянь (2.11), можуть лише зменшити цей простір, звідки випливає, що $\dim \mathfrak{g}_\kappa \leqslant 5$. □

Введемо три натуральних числа, пов'язані з розмірністю певних підпросторів максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\kappa$ рівняння $\mathcal{L}_\kappa$:

$$\begin{aligned} k_1 &:= \dim \big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle P(\chi)\rangle\big), \\ k_2 &:= \dim \big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle\big) - k_1, \\ k_3 &:= \dim \mathfrak{g}_\kappa - \dim \big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle\big) = \dim \mathfrak{g}_\kappa - k_1 - k_2. \end{aligned}$$

Хоча ці числа залежать від κ, з огляду на (2.12) очевидно, що розмірності підалгебр $\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle P(\chi)\rangle$ і $\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle$, а також усієї алгебри $\mathfrak{g}_\kappa$ є $G^\sim$-інваріантними, а тому числа k_i також $G^\sim$-інваріантні.

Лема 2.2.15. *Цілі числа k_1, k_2 і k_3 є $G^\sim$-інваріантними величинами, тобто вони однакові для всіх $G^\sim$-еквівалентних рівнянь із класу* (2.7).

Доведення. Нехай $\mathcal{T} \in G^\sim$ відображає $\mathcal{L}_\kappa$ у $\mathcal{L}_{\tilde\kappa}$. Перетворення $\pi_*\mathcal{T}$ піднімає алгебру $\mathfrak{g}_\kappa$ до алгебри $\mathfrak{g}_{\tilde\kappa}$. Водночас, воно зберігає лінійні оболонки $\langle S(\zeta), P(\chi)\rangle$ і $\langle P(\chi)\rangle$. Тому $\dim \mathfrak{g}_\kappa = \dim \mathfrak{g}_{\tilde\kappa}$, $\dim \mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle = \dim \mathfrak{g}_{\tilde\kappa} \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle$ і $\dim \mathfrak{g}_\kappa \cap \langle P(\chi)\rangle = \dim \mathfrak{g}_{\tilde\kappa} \cap \langle P(\chi)\rangle$. □

Знайдемо тепер верхні межі для значень цих чисел у спосіб, подібний до доведення леми 2.2.14.

Лема 2.2.16. $(k_1, k_2) \in \{(0,0), (0,1), (2,0)\}$ *для будь-якого значення набору κ.*

Доведення. Для будь-якого векторного поля $Q = S(\zeta) + P(\chi)$ з алгебри $\mathfrak{g}_\kappa$ параметр-функції ζ і χ задовольняють систему класифікуючих рівнянь (2.11) для зафіксованого набору довільних елементів $\kappa = (A^0, A^2, \dots, A^r, B)$, а $\tau = 0$.

Зокрема, якщо $A^r_x \neq 0$, то класифікуюче рівняння (2.11a) з $j = r$ можна розв'язати відносно χ і отримати $\chi = (rA^r/A^r_x - x)\zeta$. З фіксованим значенням $x = x_0$ це рівняння означає, що існує така функція $f = f(t)$, що $\chi = f\zeta$. Тоді з класифікаційних рівнянь (2.11b) випливає, що $2\zeta_t = (x + f)A^0_x\zeta$. Знову фіксуючи $x = x_0$, виводимо рівняння $\zeta_t = g\zeta$ для деякої функції $g = g(t)$. Оскільки параметр-функції ζ і χ будь-якого векторного поля $Q = S(\zeta) + P(\chi)$ з $\mathfrak{g}_\kappa$ задовольняють ту саму систему $\chi = f\zeta$ і $\zeta_t = g\zeta$, маємо $k_1 = 0$ і $k_2 \leqslant 1$ у цьому випадку.

Якщо $A^r_x = 0$, то класифікуюче рівняння (2.11a) з $j = r$ одразу дає $\zeta = 0$, тобто $k_2 = 0$. Припустимо, що $k_1 > 0$, тобто існує таке ненульове χ^1, що $P(\chi^1) \in \mathfrak{g}_\kappa$. Тоді із системи (2.11) випливає, що $A^j_x = 0$, $A^0_x = 0$ і $\chi^1 B_x + \chi^1_t A^0 = \chi^1_{tt}$. Диференціювання останнього рівняння по x призводить до $B_{xx} = 0$. Отже, маємо $P(\chi) \in \mathfrak{g}_\kappa$ для будь-якого χ з двовимірного простору розв'язків рівняння $\chi_{tt} = A^0\chi_t + B_x\chi$, що означає $k_1 = 2$. □

Проєкція ϖ простору з координатами (t, x, u) на простір із координатою t підіймає елементи алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ згідно з $D(\tau) + S(\zeta) + P(\chi) \mapsto \tau\partial_t$, а тому $\varpi_*\mathfrak{g}_{\langle\rangle} = \{\tau\partial_t\}$, де τ пробігає множину гладких функцій від t. Підняття $\varpi_*G^\sim$ групи $G^\sim$ відображенням ϖ також добре визначене.

Лема 2.2.17. *Проєкція $\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa$ є алгеброю Лі для будь-якого набору довільних елементів κ, а $\dim \varpi_*\mathfrak{g}_\kappa = k_3 \leqslant 3$. Також*

$$\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa \in \{0, \langle\partial_t\rangle, \langle\partial_t, t\partial_t\rangle, \langle\partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t\rangle\} \bmod \varpi_*G^\sim.$$

Доведення. Покажемо, що $\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa$ справді є алгеброю Лі. Якщо $\tau^i\partial_t \in \varpi_*\mathfrak{g}_\kappa$, $i = 1, 2$, то існують такі $Q^i \in \mathfrak{g}_\kappa$, що $\varpi_*Q^i = \tau^i\partial_t$. Для будь-яких сталих c_1 і c_2 маємо $c_1Q^1 + c_2Q^2 \in \mathfrak{g}_\kappa$, а тому

$$c_1\tau^1\partial_t + c_2\tau^2\partial_t = \varpi_*(c_1Q^1 + c_2Q^2) \in \varpi_*\mathfrak{g}_\kappa.$$

Це означає, що $\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa$ справді є лінійним простором. Цей простір замкнутий відносно дужки Лі векторних полів, а отже є алгеброю Лі, оскільки

$$[\tau^1\partial_t, \tau^2\partial_t] = (\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t)\partial_t = \varpi_*[Q^1, Q^2] \in \varpi_*\mathfrak{g}_\kappa.$$

Оскільки підняття $\varpi_*G^\sim$ групи $G^\sim$ проєкцією ϖ збігається з (псевдо)групою локальних дифеоморфізмів на просторі з координатою t, використаємо теорему Лі, яка стверджує, що максимальна розмірність скінченновимірної алгебри Лі векторних полів на комплексній або дійсній прямій дорівнює трьом, і з точністю до локальних дифеоморфізмів на прямій будь-яка така алгебра є однією з $\{0\}$, $\langle\partial_t\rangle$, $\langle\partial_t, t\partial_t\rangle$ і $\langle\partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t\rangle$. Також нагадаємо, що $\dim\mathfrak{g}_\kappa \leqslant 5$ згідно з лемою 2.2.14. □

Звідси випливає, що $|k| := k_1 + k_2 + k_3 = \dim\mathfrak{g}_\kappa \leqslant 5$.

2.2.5. Групова класифікація. Основний результат підрозділу — таке твердження.

Теорема 2.2.18. *Повний список $G^\sim$-нееквівалентних (а отже і $\mathcal{G}^\sim$-нееквівалентних) розширень ліївської симетрії в класі* (2.7) *вичерпують випадки таблиці 2.1.*

Доведення. Леми 2.2.16, 2.2.17 означають, що базис будь-якої придатної підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ складають

1. k_1 векторних полів $Q^i = P(\chi^i)$, $i = 1, \dots, k_1$, з лінійно незалежними χ,
2. k_2 векторних полів $Q^i = S(\zeta^i) + P(\chi^i)$, $i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$, з ненульовими ζ^i,
3. k_3 векторних полів $Q^i = D(\tau^i) + S(\zeta^i) + P(\chi^i)$, $i = k_1 + k_2 + 1, \dots, |k|$, з лінійно незалежними τ^i,

де $(k_1, k_2) \in \{(0,0), (0,1), (2,0)\}$ і $k_3 \leqslant 3$. Доведення проводимо, вивчаючи окремо випадки, асоційовані з можливими значеннями набору

Таблиця 2.1: Повна групова класифікація класів (2.1) і відповідно (2.7).

№	κ	Базис алгебри $\mathfrak{g}_\kappa$
0	$A^j=A^j(t,x),\ A^0=A^0(t,x),\ B=B(t,x)$	—
1	$A^j=A^j(x),\ A^0=A^0(x),\ B=B(x)$	$D(1)$
2	$A^j=a_j\mathrm{e}^x,\ A^0=a_0\mathrm{e}^x,\ B=b\mathrm{e}^{2x}$	$D(1), D(t)-P(1)$
3	$A^j=a_jx^j\lvert x\rvert^\nu,\ A^0=a_0\lvert x\rvert^\nu,\ B=bx\lvert x\rvert^{2\nu}$	$D(1), D(t)-S(\nu^{-1}),\ \nu\neq 0$
4	$A^j=a_jx^{j-2},\ A_0=0,\ B=bx^{-3}$	$D(1), D(t)+S(\frac12), D(t^2)+S(t)$
5	$A^j=\alpha^j(t)x^j,\ A^0=0,\ B=\beta(t)x$	$S(1)$
6	$A^j{=}\alpha^j(t)x^j,\ A^0{=}1{+}2\ln\lvert x\rvert,\ B{=}\beta(t)x{-}x\ln^2\lvert x\rvert$	$S(\mathrm{e}^t)$
7	$A^j=a_jx^j,\ A^0=0,\ B=bx$	$S(1), D(1)$
8	$A^j=a_jx^j,\ A^0=1+2\ln\lvert x\rvert,\ B=bx-x\ln^2\lvert x\rvert$	$S(\mathrm{e}^t), D(1)$
9	$A^j=\alpha^j(t),\ A^0=B=0$	$P(1), P(t)$
10	$A^j=a_j,\ A^0=a_0,\ B=bx$	$P(\chi^1), P(\chi^2), D(1)$
11	$A^r=1,\ A^j=0,\ j\neq r,\ A^0=B=0$	$P(1), P(t), D(1), D(t)+S(\frac1r)$, (для $r=2$) $D(t^2)+S(t)$

Тут $j=2,\dots,r$, $C=1$, $A^1=0$, $D(\tau)=\tau\partial_t-\tau_tu\partial_u$, $S(\zeta)=\zeta x\partial_x+(\zeta u+\zeta_t x)\partial_u$ і $P(\chi)=\chi\partial_x+\chi_t\partial_u$. Параметри α^j, α^0, β — довільні гладкі функції від t з $\alpha^r\neq 0$. Параметри a_j, a_0 і b — довільні сталі з $a_r\neq 0$. У випадку 10 параметр-функції χ^1 і χ^2 є лінійно незалежними розв'язками рівняння $\chi_{tt}-a_0\chi_t-b\chi=0$, а тому існують три випадки для них залежно від знаку $\Delta:=a_0^2-4b$:

(a) $\chi^1=\mathrm{e}^{\lambda_1t}$, $\chi^2=\mathrm{e}^{\lambda_2t}$, якщо $\Delta>0$, де $\lambda_{1,2}=(a_0\pm\sqrt{\Delta})/2$;

(b) $\chi^1=\mathrm{e}^{\mu t}$, $\chi^2=t\mathrm{e}^{\mu t}$, якщо $\Delta=0$, де $\mu=a_0/2$;

(c) $\chi^1=\mathrm{e}^{\mu t}\cos\nu t$, $\chi^2=\mathrm{e}^{\mu t}\sin\nu t$, якщо $\Delta<0$, де $\mu=a_0/2$ і $\nu=\sqrt{-\Delta}/2$.

$a_r=1 \bmod G^\sim$ у випадках 2, 3, 4, 7 і 10. До того ж, коли одна зі сталих a_j з $j<r$, a_0 або b у випадку 2 ненульова, то її можна покласти рівною ±1 зсувами по x.

інваріантних чисел (k_1,k_2,k_3). Для кожного з таких значень починаємо з наведених вище виглядів базисних векторних полів Q^i алгебри $\mathfrak{s}$, поступово спрощуючи їх за допомогою приєднаних дій перетворень еквівалентності, знайдених у (2.12), і лінійних перекомбінувань базисних елементів. Водночас, оскільки $\mathfrak{s}$ є алгеброю Лі, вона замкнута відносно дужки Лі:

$$[Q^{i'}, Q^{i''}] \in \langle Q^i,\, i = 1, \dots, |k|\rangle, \quad i', i'' = 1, \dots, |k|.$$

Це призводить до зв'язків на компоненти векторних полів Q^i, лише коли $k_2 + k_3 > 1$ або $k_2 + k_3 = 1$ і $k_1 = 2$. Підставляючи компоненти кожного спрощеного векторного поля Q^i у систему класифікуючих рівнянь (2.11), отримаємо систему рівнянь на набір κ, для якого $\mathfrak{g}_\kappa \supset \mathfrak{s}$. У сукупності маємо $|k|$ таких систем. Об'єднаємо їх і розв'яжемо разом для довільних елементів κ. Сумісність об'єднаної системи відносно κ може дати додаткові зв'язки на компоненти векторних полів Q^i. Отриманий вираз для κ можна спростити перетвореннями еквівалентності, чиї спроєктовані приєднані дії зберігають $\mathfrak{s}$.

Потрібно розглянути такі випадки.

$\boldsymbol{k_1 = k_2 = 0}$. Тоді $\dim \mathfrak{s} = k_3$. За умови $k_3 > 1$ з огляду на лему 2.2.17 можна використати спрощені форми векторних полів Q^i, $i = 1, \dots, k_3 - 1$, знайдені у випадках із меншими значеннями параметра k_3.

$k_3 = 0$. Отримаємо загальний випадок 0 таблиці 2.1, де алгебра $\mathfrak{s}$ збігається з ядром алгебр $\mathfrak{g}^\cap = \{0\}$, а тому немає жодних зв'язків на елементи набору κ.

$k_3 = 1$. Базис алгебри $\mathfrak{s}$ складає єдине векторне поле Q^1 з $\tau^1 \neq 0$. Послідовно використовуючи приєднані дії $\mathcal{D}_*(T)$, $\mathcal{S}_*(X^1)$ і $\mathcal{P}_*(X^0)$ з (2.12) з підібраними функціями X^0, X^1 і T, відобразимо це векторне поле у $Q^1 = D(1)$. Система класифікуючих рівнянь (2.11) з компонентами векторного поля Q^1 набуває вигляду $A^j_t = A^0_t = B_t = 0$, що призводить до випадку 1.

$k_3 = 2$. За модулем $\pi_* G^\sim$-еквівалентності базисні елементи алгебри $\mathfrak{s}$ мають вигляд $Q^1 = D(1)$ і $Q^2 = D(t) + S(\zeta^2) + P(\chi^2)$. Умова $[Q^1, Q^2] = D(1) + S(\zeta^2_t) + P(\chi^2_t) \in \langle Q^1, Q^2\rangle$ додатково вимагає, щоб $\zeta^2_t = \chi^2_t = 0$, а тому $\zeta^2, \chi^2 = \mathrm{const}$. Підстановка компонент векторних полів Q^1 і Q^2 у класифікуючі рівняння (2.11) і перестановка отриманих рівнянь призводять до системи

$$\begin{aligned} &A^j_t=0, \quad (\zeta^2x+\chi^2)A^j_x+(1-j\zeta^2)A^j=0,\\ &A^0_t=0, \quad (\zeta^2x+\chi^2)A^0_x+A^0=0,\\ &B_t=0, \quad (\zeta^2x+\chi^2)B_x+(2-\zeta^2)B=0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Якщо $\zeta^2=0$, то з огляду на умову $A^r\neq 0$ рівняння $(\zeta^2x+\chi^2)A^r_x+(1-r\zeta^2)A^r=0$ означає, що $\chi^2\neq 0$ і можна покласти $\chi^2=-1 \bmod G^\sim$; інакше можна покласти $\chi^2=0$, використовуючи приєднану дію $\mathcal{P}_*(-\nu\chi^2)$, де $\nu:=-1/\zeta^2$, що зберігає Q^1. Інтегруючи систему (2.14) для кожного з підвипадків, отримаємо відповідно випадки 2 і 3, де $a_r\neq 0$, а тому $a_r=1 \bmod G^\sim$. Якщо одна зі сталих a_j, $j<r$, a_0 або b у випадку 2 ненульова, то її можна покласти рівною ± 1 зсувами x.

$k_3=3$. З урахуванням відношення $\pi_*G^\sim$-еквівалентності й лінійного перекомбінування базисних елементів можна вважати, що $Q^1=D(1)$, $Q^2=D(t)+S(\zeta^2)+P(\chi^2)$ і $Q^3=D(t^2)+S(\zeta^3)+P(\chi^3)$. Замкненість алгебри $\mathfrak{s}$ відносно дужки Лі векторних полів додатково означає, що $[Q^1,Q^2]=Q^1$, $[Q^1,Q^3]=2Q^2$ і $[Q^2,Q^3]=Q^3$. Як і в попередньому випадку, перше комутаційне співвідношення має місце, лише якщо $\zeta^2,\chi^2=\mathrm{const}$. Друге комутаційне співвідношення призводить до

$$2D(t)+S(\zeta^3_t)+P(\chi^3_t)=2D(t)+2S(\zeta^2)+2P(\chi^2),$$

а тому $\zeta^3_t=2\zeta^2$, $\chi^3_t=2\chi^2$. Інтегруючи ці два рівняння, отримаємо $\zeta^3=2\zeta^2t+\zeta^{30}$ і $\chi^3=2\chi^2t+\chi^{30}$, де ζ^{30} і χ^{30} — сталі. Оскільки

$$[Q^2,Q^3]=D(t^2)+S(2\zeta^2t)+P(2\chi^2t+\zeta^{30}\chi^2-\zeta^2\chi^{30}),$$

то $[Q^2,Q^3]=Q^3$ тоді й лише тоді, коли $\zeta^{30}=0$ і $(1+\zeta^2)\chi^{30}=0$. Розглядаючи рівняння (2.11) для Q^1, Q^2 і Q^3, отримаємо систему (2.14), доповнену рівняннями $\chi^{30}A^j_x=0$, $\chi^{30}B_x+(2\zeta^2x+3\chi^2)A^0=0$ і $\chi^{30}A^0_x=4\zeta^2-2$. Якщо $\chi^{30}\neq 0$, то $\zeta^2=-1$, $A^j_x=0$, а рівняння $(1+j)A^j=0$ означає, що $A^j=0$, $j=2,\dots,r$, а це суперечить умові $A^r\neq 0$. Отже, $\chi^{30}=0$, звідки

$\zeta^2 = 1/2$, а також $A^0 = 0$. Можна покласти $\chi^2 = 0$, використовуючи приєднану дію $\mathcal{P}_*(2\chi^2)$. Визначальними рівняннями, що залишились, є $A^j_x = (j-2)A^j$ і $B_x = -3B$, які інтегруємо до випадку 4 з $a_r \neq 0$, а тому $a_r = 1 \bmod G^\sim$.

$\boldsymbol{k_1 = 0,\ k_2 = 1.}$ Тоді $Q^1 = S(\zeta^1) + P(\chi^1)$, де $\zeta^1 \neq 0$.

$k_3 = 0$. Можна використати приєднану дію $\mathcal{P}_*(\chi^1/\zeta^1)$, щоб покласти $\chi^1 = 0$. До того ж, домноженням Q^1 на ненульову сталу і зміною t, коли ζ^1 не є сталою, можна відкалібрувати ζ^1 до $\zeta^1 = \mathrm{e}^{\varepsilon t}$, де $\varepsilon \in \{0, 1\} \bmod G^\sim$. Класифікуючі умови (2.11) з компонентами векторного поля Q^1 дають систему рівнянь $xA^j_x = jA^j$, $xA^0_x = 2\varepsilon$ і $xB_x - B + \varepsilon x A^0 = \varepsilon x$. Загальним розв'язком цієї системи є

$$
\begin{aligned}
&A^j = \alpha^j(t)x^j, \quad A^0 = \alpha^0(t) + 2\varepsilon \ln|x|,\\
&B = \beta(t)x - \varepsilon(\alpha^0(t) - 1)x\ln|x| - \varepsilon x \ln^2|x|,
\end{aligned}
$$

де α^0, α^j, β — довільні гладкі функції від t з $\alpha^r \neq 0$. Підгрупи групи еквівалентності $G^\sim$, проєкції яких на простір із координатами (t, x, u) зберігають придатні підалгебри $\mathfrak{s} = \langle S(1)\rangle$ і $\mathfrak{s} = \langle S(\mathrm{e}^t)\rangle$, відповідно виокремлено із групи $G^\sim$ зв'язками $X^0 = 0$ і $(X^0, T_t) = (0, 1)$. Дії елементів цих підгруп дають змогу покласти $(\alpha^0, \alpha^r) = (0, 1)$, якщо $\varepsilon = 0$ або $\alpha^0 = 1$, якщо $\varepsilon = 1$, що відповідає випадкам 5 або 6. В останньому випадку калібрування $\alpha^0 = 1$ обрано замість $\alpha^0 = 0$ для того, щоб зробити простішим відповідне значення набору довільних елементів κ.

$k_3 = 1$. Насамперед за відношенням $\pi_* G^\sim$-еквівалентності зведемо базисний елемент Q^2 з $\tau^2 \neq 0$ до вигляду $Q^2 = D(1)$. Замкненість відносно дужки Лі $[Q^2, Q^1] = S(\zeta^1_t) + P(\chi^1_t)$ означає, що набори (ζ^1_t, χ^1_t) і (ζ^1, χ^1) лінійно залежні, тобто $\zeta^1 = c_1\mathrm{e}^{\varepsilon t}$, $\chi^1 = c_0\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ для деяких сталих c_0, c_1 і ε, причому $c_1 \neq 0$. Домножуючи Q^1 на $1/c_1$ і, якщо $\varepsilon \neq 0$, використовуючи приєднану дію $\mathcal{D}_*(\varepsilon t)$, покладемо $c_1 = 1$ і $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Оскільки $\mathcal{P}_*(c_0)D(1) = \tilde{D}(1)$ і $\mathcal{P}_*(c_0)Q^1 = \tilde{S}(\mathrm{e}^{\varepsilon t})$, можна врешті-решт звести Q^1 до вигляду $Q^1 = S(\mathrm{e}^{\varepsilon t})$. Отже, відповідна повна система для довільного елемента включає систему з попереднього випадку як підсистему, доповнену рівняннями $A^j_t = A^0_t = B_t = 0$. Загальний розв'язок повної системи того самого вигляду як і у випадку $k_3 = 0$, де функції α^j, α^0 і β потрібно замінити довільними сталими a_j, a_0 і b з $a_r \neq 0$. Аналогічно випадку $k_3 = 0$, проєкції перетворень еквівалентності з $(T_t, (X^1_t/X^1)_t) = (1, 0)$ і $(T_t, (\mathrm{e}^{-t}X^1_t/X^1)_t) = (1, 0)$ зберігають придатні підалгебри $\mathfrak{s} = \langle S(1), D(1)\rangle$ і $\mathfrak{s} = \langle S(\mathrm{e}^t), D(1)\rangle$, що робить можливим калібрування $(a_0, a_r) = (0, 1)$ або $a_0 = 1$, якщо $\varepsilon = 0$ або $\varepsilon = 1$, і призводить відповідно до випадків 7 і 8.

$k_3 \geqslant 2$. Цей випадок неможливий. Справді, у цьому разі мав би бути ще один базисний елемент додатково до тих, що є у випадку $k_3 = 1$. З точністю до відношення $\pi_*G^\sim$-еквівалентності він мав би вигляд

$$Q^3 = D(t) + S(\zeta^3) + P(\chi^3).$$

Повторюючи розгляд випадку $k_3 = 1$, зокрема отримаємо $A^r = a_r x^r$ з $a_r \neq 0$. Водночас, класифікуючі рівняння (2.11a) для $j = r$ з компонентами векторного поля Q^3 і з наведеним вище довільним елементом A^r мали б бути $\chi^3 A^r_x + A^r = 0$, що суперечить умові $a_r \neq 0$.

$\boldsymbol{k_1 = 2,\ k_2 = 0.}$ Маємо $Q^i = P(\chi^i)$, $i = 1, 2$. Класифікуючі рівняння (2.11) у цьому разі означають, що

$$A^j_x = 0, \quad A^0_x = 0, \quad \chi^i B_x + \chi^i_t A^0 = \chi^i_{tt}.$$

Диференціювання останнього рівняння по x призводить до $B_{xx} = 0$, тобто $B = B^1(t)x + B^0(t)$, а отже $\chi^i_{tt} = A^0\chi^i_t + B^1\chi^i$.

$k_3 = 0$. Застосуємо приєднану дію $\mathcal{S}_*(1/\chi^1)$ до алгебри $\mathfrak{s}$ і покладемо $\chi^1 = 1$, що означає $\chi^2_t \neq 0$. З використанням приєднаної дії $\mathcal{D}_*(\chi^2)$ можна покласти $\chi^2 = t$. Рівняння $\chi^i_{tt} = A^0\chi^i_t + B^1\chi^i$, $i = 1, 2$, тоді означають $A^0 = B^1 = 0$. Компонентами перетворень $\mathcal{P}(X^0)$ для довільного елемента є $\tilde{A}^j = A^j$, $\tilde{A}^0 = A^0$ і $\tilde{B} = B + X^0_{tt}$. Тому вибір $X^0_{tt} = -B^0$ дозволяє покласти калібрування $B = 0$, що призводить до випадку 9.

$k_3 = 1$. Почнемо спрощення базисних елементів алгебри $\mathfrak{s}$ з Q^3 з $\tau^3 \neq 0$, поклавши за відношенням $\pi_*G^\sim$-еквівалентності $Q^3 = D(1)$. Тоді з класифікуючих рівнянь (2.11) з компонентами векторного поля Q^3 випливає, що $A^j_t = A^0_t = B^1_t = B^0_t = 0$. Оберемо

$$X^0 = \frac{B^0}{B^1}, \quad \text{якщо} \quad B^1 \neq 0; \qquad X^0 = \frac{B^0}{A^0}t, \quad \text{якщо} \quad B^1 = 0,\ A_0 \neq 0;$$
$$X^0 = -\frac{B^0}{2}t^2, \ \text{якщо}\ B^1 = A_0 = 0.$$

Оскільки $\mathcal{P}_*(X^0)D(1) = \tilde{D}(1) + \tilde{P}(X^0_t)$, $\mathcal{P}_*(X^0)P(\chi^i) = \tilde{P}(\chi^i)$, $i = 1, 2$, і для обраного значення параметра X^0 маємо $X^0_t \in \langle \chi^1, \chi^2 \rangle$, приєднана дія $\mathcal{P}_*(X^0)$ зберігає алгебру $\mathfrak{s}$. Водночас, компонентою для B перетворення $\mathcal{P}(X^0)$ є $\tilde{B} = B + X^0_{tt} - A^0 X^0_t$, і отже $\tilde{B}^0 = B^0 + X^0_{tt} - A^0 X^0_t - B^1 X^0 = 0$, що дає випадок 10, де $a_r = 1 \bmod G^\sim$.

$k_3 \geqslant 2$. Маємо ще один базисний елемент у $\mathfrak{s}$, вигляд якого спрощуємо до $Q^4 = D(t) + S(\zeta^4) + P(\chi^4)$. Комутування Q^3 і Q^4 дає

$$[Q^3, Q^4] = D(1) + S(\zeta^4_t) + P(\chi^4_t),$$

причому результат комутування лежить в алгебрі $\mathfrak{s}$ лише за умови $\zeta^4 = \mathrm{const}$. Комутатори векторного поля Q^4 з векторними полями Q^i, $i = 1, 2$, дають $[Q^4, Q^i] = P(t\chi^i_t - \zeta^4 \chi^i)$, що означає $\chi^1 = 1$ і $\chi^2 = t$ з точністю до лінійного комбінування $P(\chi^1)$ і $P(\chi^2)$. Звідси випливає, що $A^0 = B^1 = 0$. Завдяки $G^\sim$-еквівалентності покладемо $B^0 = 0$, і тоді класифікуючі рівняння (2.11c) дають $\chi^4_{tt} = 0$. Лінійно перекомбінувавши $P(1)$ і $P(t)$, також можна покласти $\chi^4 = 0$. До того ж, класифікуючі рівняння (2.11a) з $j = r$ та компонентами векторного поля Q^4 означають, що $\zeta^2 = 1/r$, а тому з огляду на ті самі рівняння для інших j отримаємо $A^j = 0$, якщо $j \neq r$. З точністю до $G^\sim$-еквівалентності можна відкалібрувати $A^r = 1$.

Тепер припустимо, що в $\mathfrak{s}$ також є векторне поле $Q^5 = D(t^2) + S(\zeta^5) + P(\chi^5)$. Тоді класифікуючі рівняння (2.11) для A^r і A^0 вимагають, щоб $2t - r\zeta^5 = 0$ і $2\zeta^5_t - 2 = 0$. Ця система сумісна лише для $r = 2$, причому $\zeta^5 = t$. Тому випадок 11 розбивається залежно від значення порядку r. Рівняння (2.11c) з $A^0 = B = 0$ дає $\chi^5_{tt} = 0$, а тому можна покласти $\chi^5 = 0$ через лінійно перекомбінування Q^5 з Q^1 і Q^2. □

2.3. Рівняння з коефіцієнтами, залежними від часової змінної

Для вивчення ліївських симетрій рівнянь із класу (2.1) з коефіцієнтами, залежними від часу, знову зручно розпочати з ширшого класу $\mathcal{K}_0$, який є підкласом класу (2.1), виокремленого зв'язком $C_x = 0$. Для допустимих перетворень класу (2.1) виконується умова $X_{xx} = 0$.

Твердження 2.3.1. *Клас $\mathcal{K}_0$ нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}
&\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde u = U^1(t)u + U^0(t,x),\\
&\tilde A^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j, \quad \tilde A^1 = \frac{X^1}{T_t}\left(A^1 + \frac{U^0}{U^1}C - \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right),\\
&\tilde A^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^1_t}{U^1} + \frac{U^0_x}{U^1}C\right), \quad \tilde C = \frac{X^1}{T_t U^1}C,\\
&\tilde B = \frac{U^1}{T_t}B + \frac{U^0_t}{T_t} + \frac{U^0_x}{T_t}\left(\frac{U^0}{U^1}C - \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right) - \sum_{k=0}^{r}\frac{U^0_k}{(X^1)^k}\tilde A^k,
\end{aligned}$$

де $j = 2, \dots, r$, а T, X^1, X^0, U^1, U^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_t X^1 U^1 \neq 0$.

Розглянемо підклас $\mathcal{K}_1$, отриманий доповненням допоміжної системи на довільні елементи класу (2.1) зв'язками $A^0_x = 0$, $A^1_{xx} = 0$, $A^j_x = 0$, $j = 2, \dots, r$, $C_x = 0$ і $B_{xx} = 0$. Він також нормалізований у звичайному сенсі, а його звичайна група еквівалентності є підгрупою звичайної групи еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{K}_0}$ класу $\mathcal{K}_0$, виокремленої зв'язком $U^0_{xx} = 0$, тобто $U^0 = U^{01}(t)x + U^{00}(t)$. Зауважимо, що клас $\mathcal{K}_1$ можна репараметризувати через представлення $B = B^1(t)x + B^0(t)$, $A^1 = A^{11}(t)x + A^{10}(t)$, і вважати коефіцієнти B^1, B^0, A^{11} і A^{10} новими довільними елементами замість B і A^1. Компонента перетворення для B спрощується до

$$\tilde B = \frac{U^1}{T_t}B + \frac{U^0_t}{T_t} - \frac{U^0_x}{T_t}A^1 - \frac{U^0}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^1_t}{U^1} + \frac{U^0_x}{U^1}C\right).$$

Наступний проміжний підклас $\mathcal{K}_2$ виокремлено посиленням зв'язку на A^1 до $A^1_x = 0$. Насправді це можна здійснити калібруванням A^1 у класі $\mathcal{K}_0$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{K}_0}$-еквівалентності. Оскільки довільний елемент C все ще не відкалібровано до одиниці, він параметризує u-компоненту допустимих перетворень у $\mathcal{K}_2$, $U^{01} = X^1_t U^1/(X^1 C)$, і цей факт можна знову інтерпретувати в термінах узагальненої групи еквівалентності.

Теорема 2.3.2. *Групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{K}_2$ класу (2.1), виокремленого зв'язками $A^k_x = 0$, $k = 0, \dots, r$, $C_x = 0$ і $B_{xx} = 0$, складають трійки $(\theta, \varphi, \tilde\theta)$, де точкове перетворення φ має вигляд*

$$\tilde t = T, \quad \tilde x = X^1 x + X^0, \quad \tilde u = U^1 u + \frac{X^1_t U^1}{X^1 C} x + U^{00}, \tag{2.15a}$$

а набори довільних елементів θ і $\tilde\theta$ сполучені згідно з

$$\begin{aligned} &\tilde A^j = \frac{(X^1)^j}{T_t} A^j, \quad \tilde A^1 = \frac{X^1}{T_t}\left(A^1 + \frac{U^{00}}{U^1}C - \frac{X^0_t}{X^1}\right), \\ &\tilde A^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^1_t}{U^1} + \frac{X^1_t}{X^1}\right), \end{aligned} \tag{2.15b}$$

$$\begin{aligned} \tilde B = \frac{U^1}{T_t}B + \left(\frac{X^1_t U^1}{X^1 C}\right)_t \frac{x}{T_t} + \frac{U^{00}_t}{T_t} - \frac{X^1_t U^1}{X^1 C}\frac{A^1}{T_t} \\ - \left(\frac{X^1_t U^1}{X^1 C}x + U^{00}\right)\tilde A^0, \end{aligned} \tag{2.15c}$$

$$\tilde C = \frac{X^1}{T_t U^1} C, \tag{2.15d}$$

де $j = 2, \dots, r$, а $T = T(t)$, $X^1 = X^1(t)$, $X^0 = X^0(t)$, $U^1 = U^1(t)$, $U^{00} = U^{00}(t)$ — довільні гладкі функції від t, причому $T_t X^1 U^1 \neq 0$.

Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{K}_2}$ підкласу $\mathcal{K}_2$ складають перетворення (2.15), що додатково задовольняють зв'язок $X^1_t = 0$. Тому підклас $\mathcal{K}_2$ не нормалізований у звичайному сенсі.

Рівняння (2.15c) наштовхує на думку, що правильне трактування відповідної узагальненої групи еквівалентності в рамках точкових перетворень потребує розгляду похідної C_t як додаткового довільного елемента Z^0 і продовження співвідношення (2.15d) до Z^0 як похідної функції C:

$$\tilde{Z}^0 = \frac{X^1}{T_t^2 U^1} Z^0 + \left(\frac{X^1}{T_t U^1}\right)_t \frac{C}{T_t}. \tag{2.15e}$$

Позначимо через $\bar{\mathcal{K}}_2$ клас $\mathcal{K}_2$, в якому набір довільних елементів θ формально розширено до $\bar{\theta} = (A^0, \dots, A^r, B, C, Z^0)$ з $Z^0 := C_t$.

Наслідок 2.3.3. *Клас $\bar{\mathcal{K}}_2$ нормалізований в узагальненому сенсі. Група $\breve{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_2}$, яку складають перетворення вигляду* (2.15), *є ефективною узагальненою групою еквівалентності цього класу.*

Доведення. Множина перетворень вигляду (2.15), яку тимчасово позначимо через M, є замкнутою відносно композиції перетворень і містить тотожне перетворення. Кожне перетворення з M є оборотним за означенням. Отже, M є групою. Компоненти перетворень з M мають той самий вигляд, що й компоненти допустимих перетворень і формули, що сполучають вихідні й кінцеві довільні елементи. Ось чому група M породжує групоїд еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_2$, до того ж вона мінімальна серед підгруп із такою властивістю. Отже, M — ефективна узагальнена група еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_2$. □

Уся узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ класу $\bar{\mathcal{K}}_2$ набагато ширша за свою ефективну частину $\breve{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_2}$.

Наслідок 2.3.4. *Узагальнену групу еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ класу $\bar{\mathcal{K}}_2$ складають перетворення модифікованого вигляду* (2.15), *де $T = T(t)$, $X^1 = X^1(t)$, $X^0 = X^0(t, C)$, $U^1 = U^1(t, C)$, $U^{00} = U^{00}(t, C)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_t X^1 (C U^1_C - U^1) \neq 0$, а частинні похідні параметрів X^0, U^1 і U^{00} по t потрібно замінити відповідними усіченими повними похідними по t, $\bar{\mathrm{D}}_t = \partial_t + Z^0 \partial_C$.*

Доведення. З теореми 2.3.2 випливає, що елементи групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ мають модифіковану форму (2.15), де групові параметри T, X^1, X^0, U^1 і U^{00}

можуть залежати від t і довільних елементів $\bar\theta$. Тому частинні похідні цих параметр-функцій потрібно замінити повними похідними по t з

$$\mathrm{D}_t = \partial_t + \sum_\alpha u_{\alpha+\delta_1}\partial_{u_\alpha} + \sum_{k=0}^r A^k_t\partial_{A^k} + B_t\partial_B + C_t\partial_C + Z^0_t\partial_{Z^0} + \cdots .$$

Після підстановки Z^0 замість похідної C_t компоненти перетворення можна розщепити за іншими похідними довільних елементів по t. Це розщеплення показує, що насправді групові параметри не залежать від усіх A^i, B і Z^0, а параметри T і X^1 не залежать також від C. Умову невиродженості для елементів групи $\bar G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$ модифіковано в порівнянні з аналогічною умовою для елементів ефективної частини $\breve G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$ з огляду на те, що параметр-функція U^1 стає залежною від C. Ця умова набуває вигляду $T_tX^1U^1(C/U^1)_C \neq 0$ і зводиться до умови з наслідку. □

Зауваження 2.3.5. Якщо клас диференціальних рівнянь має нетривіальну ефективну узагальнену групу еквівалентності, то ця група, взагалі кажучи, може не бути єдиною. Справді, ефективна узагальнена група еквівалентності $\breve G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$ класу $\bar{\mathcal K}_2$, наведена в наслідку 2.3.3, не є нормальною підгрупою всієї узагальненої групи еквівалентності $\bar G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$ цього класу. Кожна підгрупа групи $\bar G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$, спряжена до $\breve G^\sim_{\bar{\mathcal K}_2}$, є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\bar{\mathcal K}_2$. Іншими словами, клас $\bar{\mathcal K}_2$ має широку сім'ю спряжених ефективних узагальнених груп еквівалентності. Аналогічний факт є навіть більш очевидним для вивченого нижче класу $\bar{\mathcal K}_3$.

Щоб отримати бажаний підклас $\mathcal K_3$ рівнянь із класу (2.1) з коефіцієнтами, залежними щонайбільше від t, накладемо сильніший зв'язок на B, замінивши додаткове допоміжне рівняння $B_{xx}=0$ на $B_x=0$. Це можна здійснити каліруванням довільного елемента B перетвореннями еквівалентності в класі $\mathcal K_2$. На жаль, це погіршує нормалізаційну властивість, оскільки тоді функція X^1, що параметризує елементи групоїда еквівалентності $\mathcal G^\sim_{\mathcal K_3}$ класу $\mathcal K_3$, залежить від вихідних довільних елементів C і A^0 нелокальним чином через рівняння

$$\left(\frac{X^1_t}{C(X^1)^2}\right)_t = A^0\frac{X^1_t}{C(X^1)^2}. \tag{2.16}$$

Водночас, звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{K}_3}$ підкласу $\mathcal{K}_3$ збігається з групою $G^{\sim}_{\mathcal{K}_2}$. Обрахування узагальненої групи еквівалентності підкласу $\mathcal{K}_3$ дає ту саму групу $G^{\sim}_{\mathcal{K}_3}$, що є тривіальною ситуацією з погляду узагальненої еквівалентності. У підсумку, клас $\mathcal{K}_3$ не є нормалізованим ні в звичайному, ні в узагальненому сенсах. Ось чому потрібно строго побудувати розширену узагальнену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{K}_3$. Насправді, це є першою побудовою такого типу в літературі. Розширимо набір довільних елементів θ до

$$\bar\theta = (A^0, \dots, A^r, B, C, Y^1, Y^2)$$

двома довільними елементам Y^1 і Y^2, які є функціями від t і задовольняють допоміжні рівняння

$$Y^1_t = A^0, \quad Y^2_t = C\mathrm{e}^{Y^1}. \tag{2.17}$$

Перша умова на Y^1 і Y^2 еквівалентна допоміжним рівняння $Y^i_{u_\alpha} = 0$, $Y^i_x = 0$, $|\alpha| \leqslant r$, $i = 1, 2$. Кожне значення набору $\bar\theta$, що задовольняє всі допоміжні рівняння класу $\mathcal{K}_3$, а також наведені вище рівняння на Y^1 і Y^2, асоційоване з рівнянням вигляду (2.1) з відповідним значенням набору θ. Позначимо це рівняння через $\bar{\mathcal{L}}_{\bar\theta}$, а клас таких рівнянь через $\bar{\mathcal{K}}_3$. Очевидно, що рівняння $\bar{\mathcal{L}}_{\bar\theta^1}$ і $\bar{\mathcal{L}}_{\bar\theta^2}$ збігаються, якщо $\theta^1 = \theta^2$. Це визначає відношення калібрувальної еквівалентності на множині значень набору довільних елементів $\bar\theta$. Нижче показано, що ця калібрувальна еквівалентність призводить до нетривіальної групи калібрувальної еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$; див. теорію, пов'язану з калібрувальною еквівалентністю в [89]; її ще названо тривіальною еквівалентністю в [60]. Оскільки множина точкових перетворень з $\bar{\mathcal{L}}_{\bar\theta^1}$ до $\bar{\mathcal{L}}_{\bar\theta^2}$ збігається з аналогічною множиною з $\mathcal{L}_{\theta^1}$ до $\mathcal{L}_{\theta^2}$, групоїд еквівалентності класу $\mathcal{K}_3$ ізоморфний групоїду еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$, факторизованому з точністю до калібрувальної еквівалентності. У класі $\bar{\mathcal{K}}_3$ рівняння (2.16) можна розв'язати відносно X^1 у термінах Y^2:

$$X^1 = \frac{1}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0}, \tag{2.18}$$

де ε_1 і ε_0 — довільні сталі з $(\varepsilon_1,\varepsilon_0)\neq(0,0)$. Використовуючи цей розв'язок і допоміжні рівняння (2.17), продовжимо відношення (2.15b)–(2.15d) між вихідними й перетвореними довільними елементами до Y^1 і Y^2. Так, ланцюжок рівностей

$$\tilde Y^1_t=\tilde Y^1_{\tilde t}T_t=\tilde A^0T_t=A^0+\frac{U^1_t}{U^1}+\frac{X^1_t}{X^1}=Y^1_t+\frac{U^1_t}{U^1}+\frac{X^1_t}{X^1}$$

означає, що $\tilde Y^1=Y^1+\ln|U^1X^1|+\delta'$ для деякої сталої δ'. З ланцюжка рівностей

$$\tilde Y^2_t=\tilde Y^2_{\tilde t}T_t=\tilde C\mathrm{e}^{\tilde Y^1}T_t=\frac{X^1}{T_tU^1}C\mathrm{e}^{Y^1}U^1X^1\delta T_t=\frac{\delta Y^2_t}{(\varepsilon_1Y^2+\varepsilon_0)^2},$$

де $\delta=\mathrm{e}^{\delta'}\operatorname{sgn}(U^1X^1)\neq0$, виведемо, що

$$\tilde Y^2=\frac{\varepsilon_1'Y^2+\varepsilon_0'}{\varepsilon_1Y^2+\varepsilon_0},\quad \text{а тому}\quad \tilde Y^1=Y^1+\ln(\delta U^1X^1)\tag{2.19}$$

для деяких сталих ε_1' і ε_0' з $\varepsilon_0\varepsilon_1'-\varepsilon_0'\varepsilon_1=\delta$. Під логарифмом використано дужки, оскільки $\delta U^1X^1>0$. Це завершує опис групоїда еквівалентності $\mathcal G^\sim_{\tilde{\mathcal K}_3}$. Зауважимо, що тут

$$U^{01}=\frac{X^1_tU^1}{X^1C}=-\varepsilon_1U^1X^1\mathrm{e}^{Y^1},$$
$$U^{01}_t=U^{01}\left(A^0+\frac{U^1_t}{U^1}-\varepsilon_1CX^1\mathrm{e}^{Y^1}\right)=T_tU^{01}\tilde A^0.$$

Теорема 2.3.6. *Нехай $\mathcal K_3$ — підклас рівнянь із класу (2.1) з коефіцієнтами, залежними щонайбільше від t, який виокремлено з класу (2.1) зв'язками $A^k_x=C_x=B_x=0$, $k=0,\dots,r$. Клас $\bar{\mathcal K}_3$ тих самих рівнянь, де набір довільних елементів формально розширено віртуальними довільними елементами Y^1 і Y^2, визначеними рівняннями (2.17), нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності $\bar G^\sim_{\bar{\mathcal K}_3}$ складають перетворення вигляду*

$$\tilde t=\bar T(t,Y^1,Y^2),\quad \tilde x=\bar X^1x+\bar X^0(t,Y^1,Y^2),\quad \bar X^1:=\frac{1}{\varepsilon_1Y^2+\varepsilon_0},$$
$$\tilde u=\bar U^1(t,Y^1,Y^2)\big(u-\varepsilon_1\bar X^1\mathrm{e}^{Y^1}x\big)+\bar U^{00}(t,Y^1,Y^2),$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde A^j=\frac{(\bar X^1)^j}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}A^j,\quad \tilde A^1=\frac{\bar X^1}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}\left(A^1+\frac{\bar U^{00}}{\bar U^1}C-\frac{\bar{\mathrm D}_t\bar X^0}{\bar X^1}\right),\\
&\tilde A^0=\frac{1}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}\left(A^0+\frac{\bar{\mathrm D}_t\bar U^1}{\bar U^1}-\varepsilon_1C\bar X^1\mathrm e^{Y^1}\right),\\
&\tilde B=\frac{\bar U^1}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}B+\frac{\bar{\mathrm D}_t\bar U^{00}}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}+\varepsilon_1\bar U^1\bar X^1\mathrm e^{Y^1}\frac{A^1}{\bar{\mathrm D}_t\bar T}-\bar U^{00}\tilde A^0,\quad \tilde C=\frac{\bar X^1}{\bar U^1\bar{\mathrm D}_t\bar T}C,\\
&\tilde Y^1=Y^1+\ln(\delta\bar U^1\bar X^1),\quad \tilde Y^2=\frac{\varepsilon_1'Y^2+\varepsilon_0'}{\varepsilon_1Y^2+\varepsilon_0},
\end{aligned}
$$

де $j=2,\dots,r$*;* $\bar T$*,* $\bar X^0$*,* $\bar U^1$*,* $\bar U^{00}$ *— довільні гладкі функції від* t*,* Y^1 *і* Y^2*, причому* $\bar T_t\bar U^1\neq 0$*;* ε_0*,* ε_1*,* ε_0' *і* ε_1' *— такі довільні сталі, що* $\delta:=\varepsilon_0\varepsilon_1'-\varepsilon_0'\varepsilon_1\neq 0$ *і до того ж,* $\delta\bar U^1\bar X^1>0$*;* $\bar{\mathrm D}_t=\partial_t+A^0\partial_{Y^1}+C\mathrm e^{Y^1}\partial_{Y^2}$ *— усічений оператор повного диференціювання по* t*.*

Доведення. З огляду на наведений вище опис групоїда еквівалентності $\mathcal G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ класу $\bar{\mathcal K}_3$ елементи групи $\bar G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ мають загальний вигляд

$$
\begin{aligned}
&\tilde t=\bar T(t,\bar\theta),\quad \tilde x=\bar X^1(t,\bar\theta)x+\bar X^0(t,\bar\theta),\\
&\tilde u=\bar U^1(t,\bar\theta)u+\bar U^{01}(t,\bar\theta)x+\bar U^{00}(t,\bar\theta),\quad \tilde{\bar\theta}=\bar\Theta(t,x,u,\bar\theta).
\end{aligned}
$$

Обчислення групи $\bar G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ прямим методом аналогічно обчисленню групи $\mathcal G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ і, після розщеплення за x і параметричними похідними залежної змінної u, дає аналогічні вирази для компонент перетворень для змінних (t,x,u) і аналогічні зв'язки на параметр-функції. Відношення між вихідними й перетвореними довільними елементами в групоїді еквівалентності стають компонентами перетворень для довільних елементів у групі еквівалентності. Але є декілька відмінностей, які потрібно зазначити.

Зокрема, оператори повних похідних треба продовжити на довільні елементи. Оскільки довільні елементи класу $\bar{\mathcal K}_3$ залежать щонайбільше від t, продовження є суттєвим лише для $\mathrm D_t$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm D_t=\partial_t+\sum_\alpha u_{\alpha+\delta_1}\partial_{u_\alpha}+\sum_{k=0}^r A^k_t\partial_{A^k}\\
+B_t\partial_B+C_t\partial_C+Y^1_t\partial_{Y^1}+Y^2_t\partial_{Y^2}+\cdots.
\end{aligned}
$$

Вираз для D_x формально збережено, $\mathrm{D}_x = \partial_x + \sum_\alpha u_{\alpha+\delta_2}\partial_{u_\alpha}$. У підсумку, усі частинні похідні по t у виразах, знайдених за рахунок розщеплення за x і параметричними похідними змінної u, перетворюються на повні похідні по t.

Інша відмінність полягає в можливості розщеплення за довільними елементами і їхніми похідними. Після підстановки виразів (2.17) для похідних Y^1_t і Y^2_t у зв'язок на $\bar X^1$:

$$\mathrm{D}_t^2\frac{1}{\bar X^1} = \left(\frac{C_t}{C} + A^0\right)\mathrm{D}_t\frac{1}{\bar X^1},$$

отримане рівняння можна розщепити за A^0_{tt}, $\dots$, A^r_{tt}, B_{tt}, C_{tt}, A^0_t і C_t. Це призводить до системи $\bar X^1_{A^0} = \dots = \bar X^1_{A^r} = 0$, $\bar X^1_B = 0$, $\bar X^1_C = 0$, $\bar X^1_{Y^1} = 0$, $\bar X^1_t = 0$ і $(1/\bar X^1)_{Y^2Y^2} = 0$, чий загальний розв'язок має вигляд (2.18). Вирази для перетворених довільних елементів $\tilde A^0$, $\dots$, $\tilde A^r$, $\tilde B$ і $\tilde C$ можна також розщепити за незв'язаними похідними довільних елементів по t, звідки випливає, що похідні функцій $\bar T$, $\bar X^0$, $\bar U^1$ і $\bar U^{00}$ по $A^0, \dots, A^r$, B і C нульові. Тому оператор D_t можна замінити усіченим оператором повної похідної $\bar{\mathrm{D}}_t$. Зокрема, $\bar U^{01} = (\bar U^1\bar{\mathrm{D}}_t\bar X^1)/(\bar X^1 C)$.

Додаткові допоміжні рівняння (2.17) також потрібно трактувати інакше. Підставимо вирази для Y^1_t і Y^2_t, визначеними цими рівняннями, в розгорнуту форму таких рівнянь для перетворених довільних елементів. Розщеплення отриманих рівнянь за іншими похідними довільних елементів призводить до системи визначальних рівнянь на (Y^1, Y^2)-компоненти перетворень еквівалентності:

$$\tilde Y^2_t = \tilde Y^2_{Y^1} = \tilde Y^i_{A^k} = \tilde Y^i_B = \tilde Y^i_C = 0, \quad i = 1, 2,\ k = 0, \dots, r, \quad \tilde Y^1_t = \frac{U^1_t}{U^1},$$
$$\tilde Y^1_{Y^1} = \frac{U^1_{Y^1}}{U^1} + 1, \quad \tilde Y^1_{Y^2} = \frac{U^1_{Y^2}}{U^1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0}, \quad \tilde Y^2_{Y^2} = \frac{\bar X^1}{U^1}\mathrm{e}^{\tilde Y^1 - Y^1},$$

чий загальний розв'язок має вигляд із твердження теореми. □

Група калібрувальної еквівалентності класу $\bar{\mathcal K}_3$ є підгрупою групи $\bar G^\sim_{\bar{\mathcal K}_3}$, виокремленою зв'язками

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \bar T = t, \quad \bar X^0 = 0, \quad \bar U^1 = 1, \quad \bar U^{00} = 0.$$

Інакше кажучи, усі компоненти калібрувальних перетворень еквівалентності є тотожностями, окрім компонент для Y^1 і Y^2, для яких отримаємо $\tilde{Y}^1 = Y^1 + \ln\varepsilon_1'$, $\tilde{Y}^2 = \varepsilon_1' Y^2 + \varepsilon_0'$, причому $\varepsilon_1' > 0$. Звичайну групу еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$ виокремлено з групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_3}$ зв'язками

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \bar{T}_{Y^i} = \bar{X}^0_{Y^i} = \bar{U}^1_{Y^i} = \bar{U}^{00}_{Y^i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

а її факторгрупа по калібрувальній групі еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$ ізоморфна звичайній групі еквівалентності класу $\mathcal{K}_3$.

Очевидно, що узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_3}$ класу $\bar{\mathcal{K}}_3$ породжує весь його групоїд еквівалентності. Водночас, функції, що параметризують групу, залежать ще від двох аргументів — Y^1 і Y^2 — у порівнянні з функціями, що параметризують групоїд. Якщо опустити аргументи Y^1 і Y^2 в параметр-функціях, то відповідна множина перетворень усе ще буде породжувати групоїд еквівалентності, але вона не є групою відносно композиції перетворень. Це показує, що клас $\bar{\mathcal{K}}_3$ може мати ефективну узагальнену групу еквівалентності, що є власною підгрупою групи $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_3}$, але її побудова потребує більш делікатного розгляду, ніж аналогічна група класу $\mathcal{K}_2$.

Наслідок 2.3.7. *Клас $\mathcal{K}_3$ нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{K}_3}$ можна ототожнити з ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$, яку складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1\big(x + X^{01}(t)Y^2 + X^{00}(t)\big), \quad X^1 := \frac{1}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0},$$
$$\tilde{u} = V(t)\left(\frac{u}{X^1} - \mathrm{e}^{Y^1}(\varepsilon_1 x - \varepsilon_0 X^{01} + \varepsilon_1 X^{00})\right),$$
$$\tilde{A}^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j, \quad \tilde{A}^1 = \frac{X^1}{T_t}\left(A^1 - X^{01}_t Y^2 - X^{00}_t\right),$$
$$\tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{V_t}{V}\right), \quad \tilde{B} = \frac{V}{T_t}\left(\frac{B}{X^1} - \mathrm{e}^{Y^1}(\varepsilon_1 A^1 - \varepsilon_0 X^{01}_t + \varepsilon_1 X^{00}_t)\right),$$
$$\tilde{C} = \frac{(X^1)^2}{T_t V}C, \quad \tilde{Y}^1 = Y^1 + \ln(\delta V), \quad \tilde{Y}^2 = \frac{\varepsilon_1' Y^2 + \varepsilon_0'}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0},$$

де $j=2,\dots,r$; *а* T, X^{00}, X^{01}, V *— довільні гладкі функції від* t, *причому з* $T_tV\neq 0$; ε_0, ε_1, ε'_0 *і* ε'_1 *— довільні сталі, що задовольняють* $\delta:=\varepsilon_0\varepsilon'_1-\varepsilon'_0\varepsilon_1\neq 0$ *і до того ж,* $\delta V>0$.

Доведення. Позначимо тимчасово через M множину перетворень наведеної вище форми. Ця множина є підмножиною групи $G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$, асоційованою з такими значеннями групових параметрів:

$$\bar T=T(t),\quad \bar X^0=X^1\big(X^{01}(t)Y^2+X^{00}(t)\big),\quad \bar U^1=\frac{V(t)}{X^1},$$
$$\bar U^{01}=-\varepsilon_1V(t)\mathrm e^{Y^1},\quad \bar U^{00}=V(t)\mathrm e^{Y^1}\big(\varepsilon_0X^{01}(t)-\varepsilon_1X^{00}(t)\big).$$

Множина M замкнута відносно композиції перетворень, тобто M є підгрупою групи $G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$.

Підгрупа M породжує весь групоїд еквівалентності $\mathcal G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ класу $\bar{\mathcal K}_3$, а тому і весь групоїд еквівалентності класу $\mathcal K_3$. Справді, зафіксуємо будь-яке рівняння $\bar{\mathcal L}_{\bar\theta}$ з класу $\bar{\mathcal K}_3$. Множину $\mathrm T_{\bar\theta}$ всіх допустимих перетворень із початком $\bar\theta$ параметризовано довільними гладкими функціями T, X^0, U^1, U^{00} від t і довільними сталими ε_0, ε_1, ε'_0, ε'_1, що задовольняють нерівності

$$T_tU^1\neq 0,\quad \delta:=\varepsilon_0\varepsilon'_1-\varepsilon'_0\varepsilon_1\neq 0,\quad \delta U^1X^1>0,$$

причому X^1 визначено співвідношенням (2.18) для фіксованого значення довільного елемента $Y^2=Y^2(t)$. Кожне допустиме перетворення з $\mathrm T_{\bar\theta}$ породжено перетворенням еквівалентності з M з тими самими значеннями параметрів T, ε_0, ε_1, ε'_0, ε'_1 і значеннями параметр-функцій X^{00}, X^{01}, V, визначеними у такий спосіб:

$$X^{00}=\varepsilon_0X^0(t)-Y^2(t)\frac{U^{00}(t)}{U^1(t)}\mathrm e^{-Y^1(t)},\ X^{01}=\varepsilon_1X^0(t)+\frac{U^{00}(t)}{U^1(t)}\mathrm e^{-Y^1(t)},$$
$$V=\frac{U^1(t)}{\varepsilon_1Y^2(t)+\varepsilon_0}.$$

Це встановлює взаємно однозначну відповідність між M і $\mathrm T_{\bar\theta}$, а тому підгрупа M є мінімальною серед підгруп групи $G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$, що породжують групоїд еквівалентності $\mathcal G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$. $\square$

Довільні елементи класу $\mathcal{K}_3$ можна відкалібрувати далі у такий спосіб, що відповідні підкласи класу $\mathcal{K}_3$ мали кращі нормалізаційні властивості. Як зазначено вище, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{K}_3}$-еквівалентності можна покласти $C = 1$ і $A^1 = 0$. До того ж, оскільки клас $\mathcal{K}_3$ параметризують функції, що залежать щонайбільше від t, $G^{\sim}_{\mathcal{K}_3}$-еквівалентність дає змогу подальшого калібрування довільних елементів — $A^0 = 0$ і $B = 0$, яке призводить до нормалізованого у звичайному сенсі класу $\mathcal{K}$, чия звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$ скінченновимірна. Водночас, калібрування довільних елементів звичайними перетвореннями еквівалентності в класі, що не є нормалізованим у звичайному сенсі, не дозволяє легко контролювати зміну відповідного групоїда еквівалентності. Тому порядок калібрувань потрібно ревізувати, щоб на кожному кроці калібрування побудувати підклас, нормалізований у звичайному сенсі.

Зауваження 2.3.8. Загалом, якщо складне калібрування розбито на кілька кроків, то порядок кроків є важливим, оскільки проміжні підкласи можуть мають гірші нормалізаційні властивості, аніж вихідний клас і кінцевий відкалібрований підклас.

Використаємо такий порядок калібрувань для виокремлення підкласу $\mathcal{K}$ із класу $\mathcal{K}_1$: $C = 1$, $A^1 = 0$, $A^0 = 0$, $B^1 = 0$ і $B^0 = 0$, які послідовно зв'язують параметри групи (групоїда):

$$U^1 = \frac{X^1}{T_t}, \quad U^0 = \frac{X^1_t x + X^0_t}{T_t}, \quad \frac{T_{tt}}{T_t} = 2\frac{X^1_t}{X^1},$$
$$\left(\frac{X^1_t}{(X^1)^2}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{X^0_t}{T_t}\right)_t = 0.$$

Зауважимо, що впорядкування двох останніх калібрувань не є суттєвим, але якщо спробувати провести хоча б одне з них перед калібруванням $A^0 = 0$, то отримаємо нормалізований в узагальненому розширеному сенсі підклас; див. доведення наслідку 2.3.7. Отже, параметр-функцію X^1 групоїда еквівалентності підкласу з $C = 1$, $A^1 = 0$, $B^1 = 0$ пов'язано з вихідним значенням довільного елемента A^0 через рівняння (2.16) з $C = 1$.

2.4. Рівняння з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної

2.4.1. Попередній аналіз групоїда еквівалентності. Вивчимо групоїд еквівалентності класу $\bar{\mathcal{F}}$ загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної:

$$u_t + C(x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(x)u_k + B(x) \quad \text{з} \quad A^rC \neq 0.$$

Клас $\bar{\mathcal{F}}$ виокремлено з нормалізованого класу (2.1) зв'язками $A^k_t{=}0$, $k = 0, \ldots, r$, $B_t = 0$ і $C_t = 0$. Отже, його звичайною групою еквівалентності $G^\sim_{\bar{\mathcal{F}}}$ є підгрупа групи $G^\sim_{(2.1)}$ з елементів, що зберігають наведені вище зв'язки.

Твердження 2.4.1. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim_{\bar{\mathcal{F}}}$ класу $\bar{\mathcal{F}}$ загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза з просторовими коефіцієнтами складають перетворення в об'єднаному просторі з координатами (t, x, u, θ), чиї (t, x, u)-компоненти мають вигляд*

$$\tilde{t} = c_1t + c_2, \quad \tilde{x} = X(x), \quad \tilde{u} = c_3u + U^0(x),$$

де c_1, c_2 і c_3 — довільні сталі, а $X = X(x)$ і $U^0 = U^0(x)$ — довільні гладкі функції від x, причому $c_1c_3X_x \neq 0$.

Наявність класифікуючих умов [71]

$$\frac{T_t}{(X_x)^r}X_t\tilde{A}^r_{\tilde{x}} + \left(\frac{T_t}{(X_x)^r}\right)_t\tilde{A}^r = 0, \quad \frac{T_tU^1}{X_x}X_t\tilde{C}_{\tilde{x}} + \left(\frac{T_tU^1}{X_x}\right)_t\tilde{C} = 0$$

для допустимих перетворень класу $\bar{\mathcal{F}}$ означає, що він не є нормалізованим у жодному сенсі. Водночас, можна знову відкалібрувати довільні елементи (C, A^1) у $(1, 0)$ перетвореннями еквівалентності класу $\bar{\mathcal{F}}$ і отримати відкалібрований підклас $\mathcal{F}$.

Твердження 2.4.2. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ є чотиривимірною, і її складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = c_1t + c_2, \quad \tilde{x} = c_3x + c_4, \quad \tilde{u} = \frac{c_3}{c_1}u,$$

$$\tilde{A}^j = \frac{c_3^j}{c_1} A^j, \quad \tilde{A}^0 = \frac{1}{c_1} A^0, \quad \tilde{B} = \frac{c_3}{c_1^2} B,$$

де $j = 2, \ldots, r$, *а всі* c_i *— довільні сталі, причому* $c_1 c_3 \neq 0$.

Як і його надклас $\bar{\mathcal{F}}$, клас $\mathcal{F}$ не є нормалізованим у жодному сенсі. Тому задачу опису його групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ треба розглядати як класифікацію його допустимих перетворень із точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$-еквівалентності, див. [89]. Клас $\mathcal{F}$ є підкласом класу (2.7), звідки випливає, що $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є підгрупоїдом групоїда еквівалентності класу (2.7), і тому для його знаходження потрібно лише уточнити результати теореми 2.2.4. Цього можна досягнути диференціюванням по t відношень (2.8b)–(2.8c), розв'язаних відносно вихідних довільних елементів, що дає класифікуючі умови для допустимих перетворень:

$$\left(X^1_t x + X^0_t\right) \tilde{A}^j_{\tilde{x}} + \left(\frac{T_{tt}}{T_t} - j\frac{X^1_t}{X^1}\right) \tilde{A}^j = 0, \tag{2.20}$$

$$\left(X^1_t x + X^0_t\right) \tilde{A}^0_{\tilde{x}} + \frac{T_{tt}}{T_t} \tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t} \left(2\frac{X^1_t}{X^1} - \frac{T_{tt}}{T_t}\right)_t, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \left(X^1_t x + X^0_t\right) \tilde{B}_{\tilde{x}} + \left(2\frac{T_{tt}}{T_t} - \frac{X^1_t}{X^1}\right) \tilde{B} = -\frac{T_t}{X^1} \left(X^1_t x + X^0_t\right)^2 \tilde{A}^0_{\tilde{x}} \\ - \frac{X^1}{T_t^2} \left(T_t \frac{X^1_t x + X^0_t}{X^1}\right)_t \tilde{A}^0 + \frac{X^1}{T_t^2} \left(\frac{T_t}{X^1} \left(\frac{X^1_t x + X^0_t}{T_t}\right)_t\right)_t, \end{aligned} \tag{2.22}$$

де вихідну просторову змінну x після розгортання всіх похідних треба замінити її виразом через $\tilde{x}$, $x = (\tilde{x} - X^0)/X^1$. Зауважимо, що допустимі перетворення з $T_{tt} = X^0_t = X^1_t = 0$ породжує звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$.

2.4.2. Нетривіальні умовні підгрупи еквівалентності. Допустимі перетворення класу $\mathcal{F}$ прокласифікуємо, розв'язуючи класифікуючі умови (2.20)–(2.22) методом розгалуженого розщеплення. Опускаючи деталі обчислень, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$-еквівалентності представимо підкласи класу $\mathcal{F}$, що допускають додаткові допустимі перетворення й обговоримо їхні групи еквівалентностіж див. більш детальний аналіз у [70, 71].

I. Клас $\mathcal{F}_{\rm I}$ рівнянь

$$u_t+uu_x=\sum_{j=2}^{r}a_jx^j|x|^\alpha u_j+\bigl(a_{00}+a_{01}|x|^\alpha\bigr)u+x\bigl(b_0+b_1|x|^\alpha+b_2|x|^{2\alpha}\bigr)$$

з $\alpha a_r\neq0$ природно розбити на два $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}_{\rm I}}$-інваріантні підкласи $\mathcal{F}_{\rm I,0}$ і $\mathcal{F}_{\rm I,1}$, виокремлених відповідно умовами $a_{01}=0$ і $a_{01}\neq0$, оскільки легко показати, що довільний елемент a_{01} перетворено за правилом $\tilde a_{01}=c_4a_{01}$ під дією допустимих перетворень класу, $c_4\neq0$. Клас $\mathcal{F}_{\rm I,1}$ допускає додаткові допустимі перетворення тоді й лише тоді, коли

$$a_{00}=(\alpha+2)b_1/a_{01}\quad \text{і}\quad b_0=-b_1^2(1+\alpha)/a_{01}^2,$$

тому зменшимо набір довільних елементів класу на a_{00} та b_0 і позначимо отриманий підклас знову через $\mathcal{F}_{\rm I,1}$.

Твердження 2.4.3. *Клас $\mathcal{F}_{\rm I,1}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t=\bar T,\quad \tilde x=\bar X^1x,\quad \tilde u=\frac{\bar X^1}{\bar T_t}u-\frac{\bar X^1_t}{\bar T_t}x,$$
$$\tilde\alpha=\alpha,\quad \tilde a_j=\bar c_4a_j,\quad \tilde a_{01}=\bar c_4a_{01},\quad \tilde b_2=\bar c_4^2b_2,\quad \tilde b_1=\bar c_5,$$

де $\bar T$ — гладка функція від t і довільних елементів $\theta=(\alpha,a_j,a_{01},b_2,b_1)$, задана як

$$\bar T(t,\theta)=\frac{1}{\bar c_5}\ln\left|\bar c_5\left(c_2-c_1a_{01}\frac{{\rm e}^{-b_1\alpha t/a_{01}}-1}{b_1\alpha}\right)+1\right|,\quad \text{якщо } \bar c_5\neq0,\ b_1\neq0,$$
$$\bar T(t,\theta)=-a_{01}\bar c_1\frac{{\rm e}^{b_1\alpha t}-1}{b_1\alpha}+\bar c_2,\qquad \text{якщо } \bar c_5=0,\ b_1\neq0,$$
$$\bar T(t,\theta)=\frac{1}{\bar c_5}\ln|\bar c_5\,(\bar c_1t+\bar c_2)\,|,\qquad \text{якщо } \bar c_5\neq0,\ b_1=0,$$
$$\bar T(t,\theta)=\bar c_1t+\bar c_2,\qquad \text{якщо } \bar c_5=0,\ b_1=0,$$

усі $\bar c_i$ — довільні функції від θ, причому $\bar c_1\bar c_4\dfrac{\partial(\tilde a_2,\dots,\tilde a_r,\tilde a_{01},\tilde b_1,\tilde b_2)}{\partial(a_2,\dots,a_r,a_{01},b_1,b_2)}\neq0$, а $\bar X^1(t,\theta)=(\bar c_4\bar T_t)^{-1/\alpha}$, якщо α є непарним або раціональним числом *із непарним чисельником у зведеному вигляді, та* $\bar{X}^1(t) = \varepsilon|\bar{c}_4\bar{T}_t|^{-1/\alpha}$ *з* $\varepsilon = \pm 1$ *і* $\bar{c}_4\bar{T}_t > 0$ *інакше.*

Зауваження 2.4.4. Функція T є розв'язком звичайного диференціального рівняння, що гладко залежить від параметрів, а тому вона є гладкою по них і початкових умовах [12, наслідок 6, с. 97] (тут α, b_1 і a_{01} — параметри рівняння, а c_i — початкові умови). Цей аргумент застосовано для групових параметрів більшості з наведених нижче груп еквівалентності. Справді, з перетворення для A^0 випливає, що функція T задовольняє рівняння

$$\left(\frac{1}{T_t}\right)_t + \delta\frac{1}{T_t} = \gamma$$

для деяких сталих γ і δ, що має загальний розв'язок

$$T(t) = \frac{1}{\gamma}\ln\left|\gamma\left(c_1\frac{\mathrm{e}^{\delta t}-1}{\delta} + c_2\right) + 1\right|.$$

Неперервність цієї функції за параметрами є очевидною, а для сингулярних значень параметрів вираз для функції набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&T(t) = c_1\frac{\mathrm{e}^{\delta t}-1}{\delta} + c_2, && \text{якщо}\quad \gamma = 0 \text{ і } \delta \neq 0,\\
&T(t) = \frac{1}{\gamma}\ln|\gamma(c_1t + c_2) + 1|, && \text{якщо}\quad \gamma \neq 0 \text{ і } \delta = 0,\\
&T(t) = c_1t + c_2, && \text{якщо}\quad (\gamma, \delta) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Можна показати, що перетворення у твердженні 2.4.3 справді утворюють групу. Отже, група еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},1}$ є локальною групою Лі перетворень. Якщо функція T має вигляд $\frac{1}{\gamma}\ln|\gamma(c_1t+c_2)+1|$, а $\gamma c_2 = -1$, то $T(t)$ вироджується в афінну функцію. Щоб цього уникнути, в усіх таких ситуаціях нижче неявно вважаємо інакше. Позначимо через $\frac{\partial(\cdot,\ldots,\cdot)}{\partial(\cdot,\ldots,\cdot)}$ визначник відповідної матриці Якобі.

Оскільки довільний елемент α інваріантний під дією допустимих перетворень, зручно розглядати два підкласи $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$ і $\mathcal{F}_{\mathrm{I},01}$ класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},0}$, виокремлених відповідно умовами $\alpha = -2$ і $\alpha \neq -2$. Розширення допустимих перетворень в останньому класі можливе лише в його підкласі (позначеному знову через $\mathcal{F}_{\mathrm{I},01}$), виокремленому умовами $b_1 = 0$ і $b_0 = -(\alpha+1)a_{00}^2/(\alpha+2)^2$.

Твердження 2.4.5. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{I},01}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t = \bar T(t), \quad \tilde x = \bar X^1(t)x, \quad \tilde u = \frac{\bar X^1}{\bar T_t}u - \frac{\bar X^1_t}{\bar T_t}x,$$
$$\tilde\alpha = \alpha, \quad \tilde a_j = \bar c_4 a_j, \quad \tilde a_{00} = \bar c_5, \quad \tilde b_2 = \bar c_4^2 b_2,$$

де $\bar T$ — гладка функція від t і довільних елементів θ, задана як

$$\bar T(t,\theta) = \frac{1}{\bar c_5}\ln\left|\bar c_5\left(\bar c_1\frac{\mathrm{e}^{a_{00}\alpha t/(\alpha+2)}-1}{a_{00}\alpha/(\alpha+2)}+\bar c_2\right)+1\right|, \quad \text{якщо } \bar c_5\neq 0,\ a_{00}\neq 0,$$
$$\bar T(t,\theta) = \bar c_1\frac{\mathrm{e}^{a_{00}\alpha t/(\alpha+2)}-1}{a_{00}\alpha/(\alpha+2)}+\bar c_2, \quad \text{якщо } \bar c_5 = 0,\ a_{00}\neq 0,$$
$$\bar T(t,\theta) = \frac{1}{\bar c_5}\ln|\bar c_5(\bar c_1 t+\bar c_2)+1|, \quad \text{якщо } \bar c_5\neq 0,\ a_{00} = 0,$$
$$\bar T(t,\theta) = \bar c_1 t+\bar c_2, \quad \text{якщо } \bar c_5 = 0,\ a_{00} = 0.$$

Тут усі $\bar c_i$ — довільні функції від θ, причому $\bar c_1\bar c_4\dfrac{\partial(\tilde a_2,\dots,\tilde a_r,\tilde a_{00},\tilde b_2)}{\partial(a_2,\dots,a_r,a_{00},b_2)}\neq 0$, а $\bar X^1(t,\theta) = (\bar c_4\bar T_t)^{-1/\alpha}$, якщо α непарне або раціональне число з непарним чисельником у зведеному вигляді, та $\bar X^1(t,\theta) = \varepsilon|\bar c_4\bar T_t|^{-1/\alpha}$ з $\varepsilon = \pm 1$ і $\bar c_4\bar T_t > 0$ інакше.

Опис групи еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$ більш складний, тому спочатку знайдемо його групоїд еквівалентності. Відповідно до нашого стандартного підходу розглянемо підклас цього класу, виокремлений умовою $a_{00} = b_1 = 0$.

Твердження 2.4.6. *Точкове перетворення пов'язує два рівняння з класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$ тоді й лише тоді, коли його компоненти мають вигляд*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X^1(t)x, \quad \tilde u = \frac{X^1}{T_t}u - \frac{X^1_t}{T_t}x,$$

де $(X^1)^2=c_4T_t$, *а гладка функція* T *від* t *задовольняє рівняння*

$$\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)_t-\frac12\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)^2=2\tilde b_0T_t^2-2b_0.$$

Тут c_4 *— довільна стала, причому* $c_4T_t>0$.

Останнє рівняння — автономне звичайне диференціальне рівняння на T, яке можна інтегрувати у квадратурах стандартними технiками, але у такий спосіб явний вигляд його загального розв'язку можна записати лише для особливих значень параметрів. З іншого боку, для будь-якого рівняння з $\mathcal F_{\mathrm{I},00}$ існує еквівалентне йому рівняння в підкласі $\mathcal F_{\mathrm{I},00}^{b_0=0}$, виокремленому умовою $b_0=0$. Відповідне точкове перетворення: $\tilde t=T(t)$, $\tilde x=\sqrt{|T_t|}x$, $\tilde u=u/\sqrt{|T_t|}-T_{tt}x/(2|T_t|^{3/2})$, де гладка функція T від t є розв'язком рівняння $(T_{tt}/T_t)_t-\frac12\left(T_{tt}/T_t\right)^2+2b_0=0$, для якого загальний розв'язок можна знайти явно, хоча тут достатньо й часткового розв'язку. Так, $T(t)=\mathrm e^{2bt}$ і $T(t)=\mathrm{tg}(bt)$ є частковими розв'язками, якщо відповідно $b_0=b^2>0$ і $b_0=-b^2<0$, причому $b>0$ в обох випадках.

Твердження 2.4.7. *Клас* $\mathcal F_{\mathrm{I},00}^{b_0=0}$ *нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=X^1(t)x,\quad \tilde u=\frac{X^1}{T_t}u-\frac{X^1_t}{T_t}x,\quad \tilde a_2=c_4a_2,\quad \tilde b_2=c_4^2b_2,$$

де $X^1(t)=\varepsilon\sqrt{c_4T_t}$ *з* $\varepsilon=\pm1$, $T=(c_1t+c_2)/(c_3t+c_0)$, *усі* c_i *— довільні сталі, що задовольняють* $\delta=c_1c_0-c_2c_3\neq0$, *а* c_0, c_1, c_2 *і* c_3 *визначені з точністю до ненульового множника, причому* $c_4\delta>0$.

З іншого боку, будь-яке допустиме перетворення класу $\mathcal F_{\mathrm{I},00}$ можна зобразити як композицію допустимого перетворення між вихідним рівнянням з $\mathcal F_{\mathrm{I},00}$ і перетвореним рівнянням з $\mathcal F_{\mathrm{I},00}^{b_0=0}$, допустимого перетворення, породженого перетворенням еквівалентності з $\mathcal F_{\mathrm{I},00}^{b_0=0}$, і допустимого перетворення у зворотному напрямку. У такий спосіб можна уникнути неявних виразів у квадратурах, що виникають у попередньому підході. Зауважимо, що параметр-функцію T визначено як розв'язок звичайного диференціального рівняння третього порядку, параметризованого сталими b_0 і $\tilde b_0$, а тому її саму за теоремою Пеано–Пікара параметризовано трьома додатковими сталими.

Твердження 2.4.8. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його ефективну узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = P^2(T(P^1(t))), \quad \tilde x = \sqrt{P^2_{\bar t}P^1_t}\,X^1(\hat t)x,\\
&\tilde u = \frac{1}{P^2_{\bar t}}\left(\frac{X^1}{T_{\hat t}P^1_t}u-\left(\frac{X^1P^1_{tt}}{2T_{\hat t}(P^1_t)^{3/2}}+\frac{X^1_{\hat t}\sqrt{P^1_t}}{T_{\hat t}}+\frac{P^2_{\bar t\bar t}X^1\sqrt{P^1_t}}{2P^2_{\bar t}}\right)x\right),\\
&\tilde a_j = c_4a_j, \quad \tilde b_2 = c_4^2b_2,\\
&\tilde b_0 = \frac{1}{(P^2_{\bar t})^2}\left(\frac{1}{(P^1_t)^2}\left(b_0-\frac{(P^1_{tt})^2}{4(P^1_t)^2}+\frac12\left(\frac{P^1_{tt}}{P^1_t}\right)_t\right)-\frac{(P^2_{\bar t\bar t})^2}{4(P^2_{\bar t})^2}+\frac12\left(\frac{P^2_{\bar t\bar t}}{P^2_{\bar t}}\right)_{\bar t}\right),
\end{aligned}
$$

де $\hat t = P^1(t)$, $\bar t = T(\hat t)$, $\tilde t = P^2(\bar t)$, $T = (c_1\hat t + c_2)/(c_3\hat t + c_0)$, $X^1(\hat t) = \varepsilon(c_4T_{\hat t})^{1/2}$ *з* $\delta = c_1c_0 - c_2c_3 \neq 0$, *усі* c_i *— довільні сталі,*

$$
P^1(t) = \begin{cases} t, & \textit{якщо}\quad b_0 = 0,\\ \operatorname{tg}(\sqrt{-b_0}t), & \textit{якщо}\quad b_0 < 0,\\ \mathrm{e}^{2\sqrt{b_0}t}, & \textit{якщо}\quad b_0 > 0; \end{cases}
$$

$P^2(\bar t)$ *пробігає множину функцій* $\left\{\bar t,\ \frac{1}{c_5}\ln|\bar t|,\ \frac{1}{2c_5}\operatorname{arctg}\bar t\right\}$, *сталі* c_i, $i = 0,1,2,3$, *визначені з точністю до ненульового множника, причому* $c_4\delta > 0$, $P^2_{\bar t} > 0$ *і* $\varepsilon = \pm1$.

Довільний елемент $\tilde b_0$ перетвореного рівняння приймає значення c_5^2, якщо $P^2(y) = \frac{1}{c_5}\ln|y|$, значення $-c_5^2$, якщо $P^2(y) = \frac{1}{2c_5}\operatorname{arctg} y$ ($c_5 \neq 0$ в обох випадках) і значення 0 інакше. Функції $P^2(T(P^1(t)))$ задають трипараметричну сім'ю розв'язків згаданого вище нелінійного рівняння третього порядку на T, параметризованого сталими b_0 і $\tilde b_0$.

Зауваження 2.4.9. Точкові перетворення з твердження 2.4.8 утворюють групу за побудовою, а тому складають ефективну узагальнену групу еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$. Щоб отримати всю узагальнену групу еквівалентності, треба дати змогу сталим c_i пробігати множину довільних гладких функцій від довільних елементів класу.

II. Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} u_t + uu_x = \sum_{j=2}^{r} a_j x^j u_j &+ (a_{01}\ln|x| + a_{00}) \\ &+ x\left(-\frac{a_{01}^2}{4}\ln^2|x| + \left(\frac{a_{01}^2}{4} - \frac{a_{00}a_{01}}{2}\right)\ln|x| + b_0\right) \end{aligned}$$

розіб'ємо на два підкласи $\mathcal{F}_{\mathrm{II},0}$ і $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$, виокремлені відповідно умовами $a_{01}=0$ і $a_{01}\neq 0$ і інваріантними під дією допустимих перетворень класу $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$.

Твердження 2.4.10. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{II},0}$ нормалізований у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t = c_1 t + c_2, \quad \tilde x = c_4 \mathrm{e}^{c_3 t} x, \quad \tilde u = \frac{c_4 \mathrm{e}^{c_3 t}}{c_1}(u + c_3 x),$$
$$\tilde a_j = \frac{a_j}{c_1}, \quad \tilde a_{00} = \frac{a_{00} + 2c_3}{c_1}, \quad \tilde b_0 = \frac{b_0 - c_3^2}{c_1^2},$$

де всі c_i — довільні сталі з $c_1c_4 \neq 0$.

Серед розглянутих підкласів класу $\mathcal{F}$ клас $\mathcal{F}_{\mathrm{II},0}$ є єдиним нормалізованим у звичайному сенсі.

Твердження 2.4.11. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності $\bar G^{\sim}_{\mathrm{II},1}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t = \bar c_1 t + \bar c_2, \quad \tilde x = \bar X^1 x, \quad \tilde u = \frac{\bar X^1}{\bar c_1}\left(u + \frac{\bar c_4 a_{01}}{2}\mathrm{e}^{a_{01}t/2}x\right), \quad \tilde a_j = \frac{a_j}{\bar c_1},$$
$$\tilde a_{01} = \frac{a_{01}}{\bar c_1}, \quad \tilde a_{00} = \frac{1}{\bar c_1}(a_{00} - a_{01}\bar c_3),$$

$$\tilde{b}_0 = \frac{1}{4\bar{c}_1^2}\left(4b_0 - a_{01}^2(\bar{c}_3^2 + \bar{c}_3) + 2a_{00}a_{01}\bar{c}_3\right),$$

де $\bar{X}^1 := \exp\left(\bar{c}_3 + \bar{c}_4\exp(\frac{a_{01}t}{2})\right)$, *а всі* $\bar{c}_i$ *— гладкі функції довільних елементів* a_{00}, a_{01}, a_j *і* b_0, *причому* $\bar{c}_1\dfrac{\partial(\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_r,\tilde{a}_{01},\tilde{a}_{00},\tilde{b}_0)}{\partial(a_2,\dots,a_r,a_{01},a_{00},b_0)} \neq 0.$

Щоб виокремити ефективну узагальнену групу еквівалентності з узагальненої групи еквівалентності, покладемо $\bar{c}_2 := c_2/a_{01}$, $\bar{c}_3 := -c_3/a_{01}$ і позбудемось залежності інших $\bar{c}_i$ від довільних елементів.

Твердження 2.4.12. *Ефективну узагальнену групу еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{\mathrm{II},1}$ *класу* $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$ *складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = c_1t + \frac{c_2}{a_{01}}, \quad \tilde{x} = X^1(t)x, \quad \tilde{u} = \frac{X^1(t)}{c_1}\left(u + \frac{c_4a_{01}}{2}\mathrm{e}^{a_{01}t/2}x\right),$$
$$\tilde{a}_j = \frac{a_j}{c_1}, \quad \tilde{a}_{01} = \frac{a_{01}}{c_1}, \quad \tilde{a}_{00} = \frac{1}{c_1}(a_{00} + c_3),$$
$$\tilde{b}_0 = \frac{1}{4c_1^2}\left(4b_0 + (a_{01} - 2a_{00})c_3 - c_3^2\right),$$

де $X^1(t) := \exp\left(-\frac{c_3}{a_{01}} + c_4\exp(\frac{a_{01}t}{2})\right)$, *а всі* c_i *— довільні сталі з* $c_1 \neq 0$.

Ефективна узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathrm{II},1}$ не є нормальною підгрупою групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathrm{II},1}$, що одразу видно із t-компоненти композиції перетворень. Отже, вона не єдина як ефективна узагальнена група еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$, оскільки спряжені до неї підгрупи в $\bar{G}^{\sim}_{\mathrm{II},1}$ також є ефективними узагальненими групами еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$.

III. Клас диференціальних рівнянь вигляду

$$u_t + uu_x = \sum_{j=2}^{r} a_j\mathrm{e}^{\alpha x}u_j + (a_{01}\mathrm{e}^{\alpha x} + a_{00})u + b_2\mathrm{e}^{2\alpha x} + b_1\mathrm{e}^{\alpha x} + b_0$$

з $\alpha a_r \neq 0$ допускає додаткові допустимі перетворення тоді й лише тоді, коли

$$b_0 = -\frac{a_{00}^2 + a_{00}}{2\alpha} \quad \text{і} \quad b_1 = -\frac{a_{00}a_{01}}{\alpha}.$$

Твердження 2.4.13. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = \bar T, \quad \tilde x = \bar c_5 x - \frac{\bar c_5}{\alpha}\ln|\bar c_4 \bar T_t|, \quad \tilde u = \frac{\bar c_5}{\bar T_t}\left(u - \frac{\bar T_{tt}}{\alpha \bar T_t}\right),\\
&\tilde\alpha = \frac{\alpha}{\bar c_5}, \quad \tilde a_j = \bar c_4 \bar c_5^j a_j, \quad \tilde a_{01} = \bar c_4 a_{01}, \quad \tilde a_{00} = \bar c_3, \quad \tilde b_2 = \bar c_4^2 \bar c_5 b_2,
\end{aligned}
$$

де функція T від t і довільних елементів θ задана як

$$
\begin{aligned}
&\bar T(t,\theta) = \frac{1}{\bar c_3}\ln\left|\bar c_3\left(\bar c_1\frac{\mathrm{e}^{a_{00}t}-1}{a_{00}} + \bar c_2\right) + 1\right|, && \text{якщо } \bar c_3 \neq 0,\ a_{00} \neq 0,\\
&\bar T(t,\theta) = \bar c_1\frac{\mathrm{e}^{a_{00}t}-1}{a_{00}} + \bar c_2, && \text{якщо } \bar c_3 = 0,\ a_{00} \neq 0,\\
&\bar T(t,\theta) = \frac{1}{\bar c_3}\ln|\bar c_3(\bar c_1 t + \bar c_2)|, && \text{якщо } \bar c_3 \neq 0,\ a_{00} = 0,\\
&\bar T(t,\theta) = \bar c_1 t + \bar c_2, && \text{якщо } \bar c_3 = 0,\ a_{00} = 0,
\end{aligned}
$$

$\bar c_i$ — гладкі функції від θ, причому $\bar c_1 \bar c_4 \bar c_5 \dfrac{\partial(\tilde\alpha, \tilde a_2, \dots, \tilde a_r, \tilde a_{00}, \tilde a_{01}, \tilde b_2)}{\partial(\alpha, a_2, \dots, a_r, a_{00}, a_{01}, b_2)} \neq 0.$

Для знаходження ефективної узагальненої групи еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ вдамося до евристичних міркувань. Довільний елемент $\tilde a_{00}$ може приймати будь-яке дійсне значення. Отже, достатньо розглянути перетворення $\tilde a_{00} = a_{00} + c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$. У такий спосіб збережено кількість початкових умов, що параметризують T, і гарантовано необхідну область для значень довільного елемента $\tilde a_{00}$. Щоб задовольнити інші умови на ефективну узагальнену групу еквівалентності, позбудемось будь-якої залежності всіх інших $\bar c_i$ від довільних елементів. Насправді, правильну їхню параметризацію обрано вже в твердженні.

Твердження 2.4.14. *Ефективну узагальнену групу еквівалентності $\hat G^{\sim}_{\mathrm{III}}$ класу $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = T, \quad \tilde x = c_5 x - \frac{c_5}{\alpha}\ln|c_4 T_t|, \quad \tilde u = \frac{c_5}{T_t}\left(u - \frac{T_{tt}}{\alpha T_t}\right), \quad \tilde\alpha = \frac{\alpha}{c_5},\\
&\tilde a_j = c_4 c_5^j a_j, \quad \tilde a_{01} = c_4 a_{01}, \quad \tilde a_{00} = a_{00} + c_3, \quad \tilde b_2 = c_4^2 c_5 b_2,
\end{aligned}
$$

де функція T задана як

$$
\begin{aligned}
&T(t) = \frac{\ln\left|(a_{00}+c_3)\left(c_1\dfrac{\mathrm{e}^{a_{00}t}-1}{a_{00}}+c_2\right)+1\right|}{a_{00}+c_3}, && \text{якщо } c_3 \neq -a_{00},\ a_{00} \neq 0,\\
&T(t) = c_1\frac{\mathrm{e}^{a_{00}t}-1}{a_{00}}+c_2, && \text{якщо } c_3 = -a_{00},\ a_{00} \neq 0,\\
&T(t) = \frac{1}{c_3}\ln\bigl|c_3(c_1t+c_2)\bigr|, && \text{якщо } c_3 \neq 0,\ a_{00} = 0,\\
&T(t) = c_1t+c_2, && \text{якщо } c_3 = 0,\ a_{00} = 0,
\end{aligned}
$$

а всі c_i — довільні сталі, причому $c_1c_4c_5 \neq 0$.

Аналогічно класу $\mathcal{F}_{\mathrm{II},1}$ можна показати неєдиність ефективної узагальненої групи еквівалентності для класу $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$.

IV. Обговоримо останній підклас $\mathcal{F}_{\mathrm{IV}}$ класу $\mathcal{F}$, що допускає додаткові допустимі перетворення. Його складають рівняння вигляду

$$
u_t + uu_x = \sum_{j=2}^{r} a_ju_j + a_0u + b_1x + b_0.
$$

Оскільки довільні елементи a_j можна масштабувати дією групи еквівалентності цього класу, виокремимо два його підкласи: $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},0}$ з $a_j = 0$ для всіх $j = 2, \ldots, r-1$ і доповнюючий до нього підклас $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},1}$ з щонайменше одним ненульовим a_j з $j = 2, \ldots, r-1$.

Твердження 2.4.15. *Клас $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},1}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = \bar{T}^1t + \bar{T}^0, \quad \tilde{x} = \bar{X}^1x + \bar{X}^0, \quad \tilde{u} = \frac{\bar{X}^1}{\bar{T}^1}u + \frac{\bar{X}^0_t}{\bar{T}^1},\\
&\tilde{a}_j = \frac{(\bar{X}^1)^r}{\bar{T}^1}a_j, \quad a_0 = \frac{a_0}{\bar{T}^1}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{b_1}{(\bar{T}^1)^2}, \quad \tilde{b}_0 = \frac{1}{(\bar{T}^1)^2}\left(\bar{X}^1b_0 + \bar{c}_3\right),
\end{aligned}
$$

$$\bar{X}^0(t,\theta) := \begin{cases} \bar{c}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \bar{c}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \bar{c}_3, & \textit{якщо}\ \ D > 0,\ \lambda_1 \neq 0, \\ \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \bar{c}_3, & \textit{якщо}\ \ D > 0,\ \lambda_1 = 0, \\ \bar{c}_1 \mathrm{e}^{b_1 t/2} + \bar{c}_2 t \mathrm{e}^{b_1 t/2} + \bar{c}_3, & \textit{якщо}\ \ D = 0,\ b_1 \neq 0, \\ \bar{c}_1 t^2 + \bar{c}_2 t + \bar{c}_3, & \textit{якщо}\ \ D = 0,\ b_1 = 0, \\ \bar{c}_1 \mathrm{e}^{b_1 t/2} \cos(\sqrt{-D}t + \bar{c}_2) + \bar{c}_3, & \textit{якщо}\ \ D < 0, \end{cases}$$

де $D = b_1^2 + 4a_0$ *і* $\lambda_{1,2} = (b_1 \pm \sqrt{D})/2$ *з* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, *а* $\bar{X}^1$, $\bar{T}^0$, $\bar{T}^1$ *і всі* $\bar{c}_i$ *пробігають множину гладких функцій від довільних елементів* $\theta = (a_j, a_0, b_1, b_0)$, *причому* $\bar{X}^1\bar{T}^1\dfrac{\partial(\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_r,\tilde{a}_0,\tilde{b}_1,\tilde{b}_0)}{\partial(a_2,\dots,a_r,a_0,b_1,b_0)} \neq 0.$

Тут функція $\bar{X}^0$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння $\bar{X}^0_{ttt} - b_1\bar{X}^0_{tt} - a_0\bar{X}^0_t = 0$, а тому вона гладко залежить від параметрів b_1, a_0 і початкових умов.

Розглянемо окремо випадки $r = 2$ і $r > 2$, у яких групоїд еквівалентності класу $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},0}$ набуває суттєво різного вигляду. Спочатку вважаємо, що $r > 2$, і позначимо клас таких рівнянь через $\mathcal{F}^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$. Цей клас має додаткові допустимі перетворення тоді й лише тоді, коли

$$b_1 = \frac{r-1}{(r-2)^2}a_0^2,$$

а тому зменшимо набір довільних елементів на елемент b_1.

Твердження 2.4.16. *Клас* $\mathcal{F}^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$ *нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = \bar{T}, \quad \tilde{x} = \bar{X}^1 x + \bar{X}^0, \quad \tilde{u} = \frac{\bar{X}^1}{\bar{T}_t}u + \frac{\bar{X}^1_t}{\bar{T}_t}x + \frac{\bar{X}^0_t}{\bar{T}_t},$$
$$\tilde{a}_r = \bar{c}_4 a_r, \quad \tilde{a}_0 = \bar{c}_3, \quad \tilde{b}_0 = \bar{c}_5,$$

де $\bar{T}$ *і* $\bar{X}^0$ *— гладкі функції від* t *і довільних елементів* $\theta = (a_0, a_r, b_0)$ *з* $\bar{T}_t \neq 0$, *що задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь*

$$\bar{c}_3 = \frac{1}{T_t}\left(a_0 - \frac{T_{tt}}{T_t}\right), \tag{2.23}$$

$$\bar c_5 = b_0\frac{\bar X^1}{\bar T_t^{\,2}} + \frac{1}{\bar T_t}\left(\frac{\bar X^0_t}{\bar T_t}\right)_t - \bar c_3\frac{\bar X^0_t}{\bar T_t} - \frac{\bar c_3^2(r-1)}{(r-2)^2}\bar X^0, \tag{2.24}$$

параметризованих θ, $\bar X^1=\varepsilon(\bar c_4\bar T_t)^{1/r}$ *з* $\varepsilon=\pm1$ *і* $\bar c_4\bar T_t>0$, *якщо порядок* r *парний, і* $\varepsilon=1$ *інакше, а* $\bar c_3$, $\bar c_4$, $\bar c_5$ *і "сталі інтегрування" у загальному розв'язку зазначеної системи — такі довільні гладкі функції від* θ, *що* $\bar c_4\dfrac{\partial(\tilde a_r,\tilde a_0,\tilde b_0)}{\partial(a_r,a_0,b_0)}\neq 0$.

Як зазначено вище, загальний розв'язок рівняння (2.23) як рівняння на $\bar T$ можна знайти досить просто. Тоді (2.24) стає окремим рівнянням відносно $\bar X^0$. Найпростішим методом його розв'язання є метод з попереднього пункту. Спочатку відкаліброуємо довільні елементи a_0 і b_0 до нуля фіксованим узагальненим перетворенням еквівалентності $\mathcal T$ цього класу (або рівносильно — сім'єю звичайних перетворень еквівалентності), а потім розв'яжемо відповідне рівняння $(\bar X^0_t/\bar T_t)_t=0$ в отриманому підкласі:

$$\bar X^0=\bar c_1\bar T+\bar c_2.$$

Зауважимо, що рівняння на $\bar T$ також помітно спрощується: $\bar T_{tt}=0$. Узагальнені перетворення еквівалентності в класі $\mathcal F^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$ є композиціями оберненого перетворення $\mathcal T^{-1}$, перетворень еквівалентності в підкласі з $a_0=b_0=0$ і перетворення $\mathcal T$. Хоча перетворення $\mathcal T$ можна знайти в явному вигляді (окремо розглянувши чотири випадки: $a_0=b_0=0$; $a_0\neq0$, $b_0=0$; $a_0=0$, $b_0\neq0$; $a_0\neq0$, $b_0\neq0$), для цього потрібно двічі використати теорему Чебишева про інтегрування біноміальних диференціалів, що робить такий вигляд занадто громіздкими. Дивись аналогічний розгляд для наступного підкласу.

Клас $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ допускає додаткові допустимі перетворення тоді й лише тоді, коли a_0=0. Позначимо підклас, виокремлений цією умовою, знову через $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$.

Твердження 2.4.17. *Точкове перетворення вигляду*

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=X^1(t)x+X^0(t),\quad \tilde u=\frac{X^1}{T_t}u+\frac{X^1_t}{T_t}x+\frac{X^0_t}{T_t}$$

пов'язує вихідне й перетворене рівняння в класі $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ тоді й лише тоді, коли $(X^1)^2/T_t = \mathrm{const} \neq 0$, параметр-функція T пробігає множину розв'язків рівняння

$$\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)_t - \frac{1}{2}\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)^2 = 2\tilde{b}_1 T_t^2 - 2b_1,$$

а параметр-функція X^0 задовольняє рівняння

$$\frac{1}{T_t}\left(\frac{X^0_t}{T_t}\right)_t - \tilde{b}_1 X^0 = \tilde{b}_0 - b_0\frac{X^1}{T_t{}^2}.$$

Останнє рівняння з заданим значенням параметр-функції T є лінійним неоднорідним рівнянням на X^0 як функцію від T, а диференціальне рівняння на T інтегроване у квадратурах стандартними технiками як автономне рівняння на $\ln|T_t|$. Однак, завдяки трюку, аналогічному до використаного для класу $\mathcal{F}_{\mathrm{I},00}$, можна досягти кращих результатів. А саме, відкалібруємо довільні елементи b_0 і b_1 до нуля точковими перетвореннями вигляду

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \sqrt{T_t}x + X^0(t), \quad \tilde{u} = \frac{u}{\sqrt{T_t}} + \frac{T_{tt}x}{2(T_t)^{3/2}} + \frac{X^0_t}{T_t},$$

де

$$T = \mathrm{e}^{2\sqrt{b_1}t}, \quad X^0 = 4b_0(2\sqrt{b_1})^{3/2}\mathrm{e}^{\sqrt{b_1}t}, \quad \text{якщо} \quad b_1 > 0,$$
$$T = \mathrm{tg}(\sqrt{-b_1}t), \quad X^0 = \frac{-b_0(-b_1)^{3/4}}{\cos\sqrt{-b_1}t}, \quad \text{якщо} \quad b_1 < 0,$$

отримавши підклас $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},00}$ класу $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$. Після цього знайдемо групоїд еквівалентності класу $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$, беручи композиції перетворень еквівалентності в підкласі $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},00}$ з точковими перетвореннями, що відображають рівняння з надкласу у рівняння з підкласу й навпаки.

Твердження 2.4.18. *Клас $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},00}$ нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0, \quad \tilde{u} = \frac{X^1}{T_t}u + \frac{X^1_t}{T_t}x, \quad \tilde{a}_2 = c_4 a_2,$$

де $X^1(t)=\varepsilon(c_4\delta)^{1/2}/(c_3t+c_0)$, $T=(c_1t+c_2)/(c_3t+c_0)$, *а* X^0 *і всі* c_i *— такі довільні сталі, що* $\delta=c_1c_0-c_2c_3\neq 0$ *та* c_0, c_1, c_2, c_3 *визначені з точністю до ненульового сталого множника, причому* $c_4\delta>0$ *і* $\varepsilon=\pm1$.

Точкове перетворення $\mathcal{T}_{\tilde T,\tilde X^0}$, що відображає рівняння з $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},00}$ у рівняння з $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$, має той самий вигляд, як і наведений вище:

$$t=\tilde T(\tilde t),\quad x=|\tilde T_{\tilde t}|^{1/2}\tilde x+\tilde X^0(\tilde t),\quad u=\frac{\tilde u}{|\tilde T_{\tilde t}|^{1/2}}+\frac{\tilde T_{\tilde t\tilde t}\tilde x}{2|\tilde T_{\tilde t}|^{3/2}}+\frac{\tilde X^0_{\tilde t}}{\tilde T_{\tilde t}},$$

де $\tilde T(T(t))=t$ і $\tilde X^0(\tilde t)=-(X^0/T_t)(\tilde T(\tilde t))$, тобто

$$\big(\tilde T,\tilde X^0\big)=\left(\frac{\ln|\tilde t|}{2\sqrt{\tilde b_1}},\ \frac{\tilde b_0}{\tilde b_1}\right),\qquad \text{якщо}\quad \tilde b_1>0;$$

$$\big(\tilde T,\tilde X^0\big)=\left(\frac{\operatorname{arctg}(\tilde t)}{\sqrt{-\tilde b_1}},\ \frac{\tilde b_0}{\tilde b_1}\right),\quad \text{якщо}\quad \tilde b_1<0.$$

Твердження 2.4.19. *Клас* $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ *нормалізований в узагальненому сенсі. Його ефективну узагальнену групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t=P^2(T(P^1(t))),\quad \tilde x=\sqrt{P^1_tP^2_{\bar t}}\,X^1(\hat t)x+\sqrt{P^2_{\bar t}}(X^1R^1+X^0)+R^2,$$

$$\tilde u=\frac{X^1u}{T_{\hat t}\sqrt{P^1_tP^2_{\bar t}}}+\left(\frac{X^1P^1_{tt}}{2T_{\hat t}\sqrt{(P^1_t)^3P^2_{\bar t}}}+\frac{X^1_{\hat t}\sqrt{P^1_t}}{T_{\hat t}\sqrt{P^2_{\bar t}}}+\frac{P^2_{\bar t\bar t}X^1}{2\sqrt{P^1_t}}(P^2_{\bar t})^2\right)x$$
$$+\frac{X^1R^1_t}{T_{\hat t}\sqrt{P^2_{\bar t}}P^1_t}+\frac{X^1_{\hat t}R^1}{T_{\hat t}}+\frac{P^2_{\bar t\bar t}}{2(P^2_{\bar t})^{3/2}}\big(X^1R^1+X^0\big)+\frac{R^2_{\bar t}}{P^2_{\bar t}},$$

$$\tilde a_2=c_4a_2,$$

$$\tilde b_1=\frac{1}{(P^2_{\bar t})^2}\left(\frac{1}{(P^1_t)^2}\left(b_1+\left(\frac{P^1_{tt}}{2P^1_t}\right)_t-\frac{(P^1_{tt})^2}{4(P^1_t)^2}\right)+\left(\frac{P^2_{\bar t\bar t}}{2P^2_{\bar t}}\right)_{\bar t}-\frac{(P^2_{\bar t\bar t})^2}{4(P^2_{\bar t})^2}\right),$$

$$\tilde b_0=\frac{1}{(P^2_{\bar t})^{3/2}}\left(\frac{b_0}{(P^1_t)^{3/2}}+\frac{1}{P^1_t}\left(\frac{R^1_t}{P^1_t}\right)_t\right)+\frac{1}{P^2_{\bar t}}\left(\frac{R^2_{\bar t}}{P^2_{\bar t}}\right)_{\bar t}-\tilde b_1R^2,$$

де $\hat t = P^1(t)$, $\bar t = T(\hat t)$, $\tilde t = P^2(\bar t)$, $T = (c_1\hat t + c_2)/(c_3\hat t + c_0)$, $X^1(\hat t) = \varepsilon(c_4T_{\hat t})^{1/2}$ *з* $\delta = c_1c_0 - c_2c_3 \neq 0$*;*

$$\big(P^1(t), R^1(t)\big) = \begin{cases} \big(t,\ -b_0t^2/2\big), & \textit{якщо } b_1 = 0,\\ \big(\operatorname{tg}(|b_1|^{1/2}t),\ -b_0|b_1|^{3/4}/\cos(|b_1|^{1/2}t)\big), & \textit{якщо } b_1 < 0,\\ \big(\mathrm{e}^{2\sqrt{b_1}t},\ 4b_0(2\sqrt{b_1})^{3/2}\mathrm{e}^{\sqrt{b_1}t}\big), & \textit{якщо } b_1 > 0; \end{cases}$$

X^0 *і всі* c_i *— довільні сталі, а пара гладких функцій* $(P^2(\bar t), R^2(\bar t))$ *пробігає множину*

$$\left\{\left(\bar t,\ \frac{c_6\bar t^2}{2}\right),\ \left(\frac{\ln|\bar t|}{2c_5},\ \frac{c_6}{c_5^2}\right),\ \left(\frac{\operatorname{arctg}\bar t}{c_5},\ -\frac{c_6}{c_5^2}\right)\right\},$$

причому c_i, $i = 0,\dots,3$, *визначені з точністю до ненульового сталого множника,* $c_4\delta > 0$, $P^2_{\bar t} > 0$ *і* $\varepsilon = \pm1$*.*

У позначеннях твердження 2.4.19 точкове перетворення $\mathcal T_{P^2,R^2}$ відображає рівняння з $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},00}$ у рівняння з $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ з набором довільних елементів (b_0, b_1), рівним відповідно $(c_6, 0)$, (c_6, c_5^2) і $(c_6, -c_5^2)$.

Підсумуємо цей підрозділ такою теоремою.

Теорема 2.4.20. *Звичайна група еквівалентності класу* $\mathcal F$ *зведених загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної, є чотиривимірною. Список її максимальних нетривіальних умовних підгруп еквівалентності вичерпано узагальненими групами еквівалентності нормалізованих підкласів* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},1}$, $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},01}$, $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},00}$, $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{II},1}$, $\mathcal F_{\mathrm{III}}$, $\mathcal F_{\mathrm{IV},1}$, $\mathcal F^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$, $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ *і звичайною групою еквівалентності нормалізованого підкласу* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{II},0}$*. Групоїд еквівалентності класу* $\mathcal F$ *породжено його звичайною групою еквівалентності і групами еквівалентності наведених вище підкласів.*

Тут дашки над позначеннями класів означають розширення відповідних класів без дашків за допомогою зсувів. Для всіх нормалізованих в узагальненому сенсі класів можна взяти їхні ефективні узагальнені групи еквівалентності як максимальні умовні групи еквівалентності. Позначимо через $\mathcal F_0$ доповнення до об'єднання наведених вище підкласів у класі $\mathcal{F}$. Клас $\mathcal{F}_0$ є нормалізованим у звичайному сенсі, а його група еквівалентності збігається з групою еквівалентності класу $\mathcal{F}$.

Наслідок 2.4.21. *Клас $\mathcal{F}$ є об'єднанням нормалізованих (або в узагальненому, або у звичайному сенсах) класів $\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{I},1}$, $\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{I},01}$, $\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{I},00}$, $\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{II},1}$, $\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{II},0}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},1}$, $\mathcal{F}^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$, $\mathcal{F}^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ і $\mathcal{F}_0$.*

2.5. Рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами

2.5.1. Групоїд еквівалентності. Вивчимо клас $\mathcal{L}$ рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами, що мають загальний вигляд

$$u_t + C(t,x)uu_x = A^2(t,x)u_{xx} \qquad \text{з} \qquad A^2C \neq 0, \tag{2.25}$$

який надалі називаємо *вихідним*. Почнемо вивчення допустимих перетворень класу $\mathcal{L}$ з розгляду його надкласу $\mathcal{B}$ більш загальних рівнянь Бюргерса

$$u_t + C(t,x)uu_x = A^2(t,x)u_{xx} + A^1(t,x)u_x + A^0(t,x)u + B(t,x),$$

де довільні елементи A^i, B і C — гладкі функції від (t,x) з $A^2C \neq 0$. Згідно з твердженням 2.2.1 клас $\mathcal{B}$ нормалізований у звичайному сенсі.

Твердження 2.5.1. *Клас $\mathcal{B}$ нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайну групу еквівалентності складають точкові перетворення вигляду*[2.2]

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t,x), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t,x),$$
$$\tilde{A}^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{U^0_x}{U^1}C + \frac{U^1_t}{U^1}\right), \quad \tilde{C} = \frac{X_x}{T_tU^1}C,$$

[2.2] Загалом, дію групи еквівалентності класу диференціальних рівнянь визначено на просторі з відповідними незалежними й залежними змінними, похідними залежних змінних усіх порядків, не більших за порядок рівнянь класу, та довільними елементами класу як координатами [83, 89]. Оскільки довільні елементи всіх класів диференціальних рівнянь, розглянутих у цьому розділі, є функціями лише незалежних змінних (t,x), то можна вважати, що для кожного з цих класів відповідна група еквівалентності діє на просторі з незалежними й залежними змінними (t,x,u), а також довільними елементами відповідного класу як координатами.

$$\tilde{A}^1 = \frac{X_x}{T_t}\left(A^1 + \frac{X_{xx}}{X_x}A^2 + \frac{U^0}{U^1}C - \frac{X_t}{X_x}\right), \quad \tilde{A}^2 = \frac{X_x^2}{T_t}A^2,$$
$$\tilde{B} = \frac{1}{T_t}\left(B - \frac{U^0U^0_x}{U^1}C - U^0_{xx}A^2 - U^0_xA^1 - U^0A^0 + U^0_t - \frac{U^0U^1_t}{U^1}\right),$$

де T, X, U^0, U^1 — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_tX_xU^1 \neq 0$.

Щоб виокремити клас $\mathcal{L}$ з класу $\mathcal{B}$, потрібно додатково покласти довільні елементи A^0, A^1 і B рівними нулю. Водночас, лише пару з них — або (A^0, A^1), або (A^1, B) — можна відкалібрувати сім'ями своїх перетворень еквівалентності класу $\mathcal{B}$. До того ж, жоден з підкласів класу $\mathcal{B}$, отриманих поступовим накладанням зазначених вище зв'язків, не є нормалізованим у звичайному сенсі, хоча калібрування $A^1 = 0$ призводить до підкласу, нормалізованого в узагальненому сенсі, див. § 2.2.2.

Тут і надалі заради стислості позначимо через $(\tilde{*})$ рівняння вигляду $(*)$ у хвилястих змінних. Знання групоїда еквівалентності надкласу $\mathcal{B}$ суттєво спрощує обчислення групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{L}$.

Твердження 2.5.2. *Точкове перетворення φ у просторі з координатами (t, x, u) сполучає рівняння (2.25) і $(\widetilde{2.25})$ з класу $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли його компоненти мають вигляд*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t,x), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t,x),$$

де T, X, U^0, U^1 — гладкі функції своїх аргументів з $T_tX_xU^1 \neq 0$, причому вони задовольняють систему визначальних рівнянь

$$X_t = A^2X_{xx} + \frac{U^0C}{U^1}X_x, \quad CU^0_x = -U^1_t, \quad U^1U^0_t = A^2U^0_{xx}.$$

Відповідні набори довільних елементів сполучені за правилом

$$\tilde{C} = \frac{X_x}{T_tU^1}C, \quad \tilde{A}^2 = \frac{X_x^2}{T_t}A^2.$$

Наслідок 2.5.3. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t),\ \tilde{x} = X^1x + X^0,\ \tilde{u} = U^1u,\ \tilde{C} = \frac{X^1}{T_tU^1}C,\ \tilde{A}^2 = \frac{(X^1)^2}{T_t}A^2,$$

де T — довільна гладка функція від t, а X^0, X^1 і U^1 — довільні сталі, причому $T_tX^1U^1 \neq 0$.

Опис групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{L}$ у твердженні 2.5.2 дає змогу перевірити еквівалентність рівнянь із цього класу з точністю до точкових перетворень.

Щоб ефективно провести групову класифікацію класу $\mathcal{L}$, можна було б скористатись алгебраїчним методом групової класифікації. Однак клас $\mathcal{L}$ не є нормалізованим. Загальна стратегія в такому разі полягає або у розбитті класу на нормалізовані підкласи [89, 105, 115], або у відображенні цього класу на клас із кращими трансформаційними властивостями [106, 109]. У поточному підрозділі скомбінуємо обидва ці методи.

Почнемо з перетворення рівнянь із класу $\mathcal{L}$ у деякі рівняння класу $\mathcal{B}$ сім'єю $\mathcal{F}$ точкових перетворень $\hat{t}{=}t$, $\hat{x} = X(t,x) := \int(1/C(t,x))\mathrm{d}x$, $\hat{u}{=}u$, параметризованою довільним елементом C. Таким чином, отримаємо *відображений* клас $\hat{\mathcal{L}}$, який складають рівняння

$$\hat{\mathcal{L}}\colon\quad \hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = \hat{A}^2(\hat{t},\hat{x})\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} + \hat{A}^1(\hat{t},\hat{x})\hat{u}_{\hat{x}}. \tag{2.26}$$

Зокрема, довільні елементи вихідного і перетвореного рівнянь сполучені за правилом

$$\hat{A}^2 = X_x^2A^2, \quad \hat{A}^1 = X_{xx}A^2 - X_t.$$

Надалі дашки над змінними й над довільними елементами опускаємо. Клас $\hat{\mathcal{L}}$ можна виокремити додатковими зв'язками $(A^0, B) = (0,0)$ на довільні елементи підкласу класу $\mathcal{B}$, асоційованого з умовою $C=1$, чий групоїд еквівалентності описано у теоремі 2.2.3. Це легко призводить до опису групоїда еквівалентності $\hat{\mathcal{G}}^\sim$ класу $\hat{\mathcal{L}}$.

Твердження 2.5.4. *Точкове перетворення пов'язує два рівняння з класу $\hat{\mathcal{L}}$ тоді й лише тоді, коли його компоненти мають вигляд*

$$\tilde{t} = T, \quad \tilde{x} = T_tU^1x + X^0, \quad \tilde{u} = U^1u - U^1_tx + U^0,$$

де T, X^0, U^0 і U^1 — гладкі функції від t, причому $T_tU^1\neq 0$ і

$$U^1_{tt}x-U^0_t=A^1U^1_t.$$

Довільні елементи $(\tilde A^1,\tilde A^2)$ перетвореного рівняння виражено через довільні елементи (A^1,A^2) вихідного рівняння як

$$\tilde A^1=U^1A^1-U^1_tx+U^0-\frac{(T_tU^1)_tx+X^0_t}{T_t},\quad \tilde A^2=T_t(U^1)^2A^2.$$

Наслідок 2.5.5. *Звичайна група еквівалентності $\hat G^\sim$ класу $\hat{\mathcal L}$ збігається з його узагальненою групою еквівалентності, причому її складають точкові перетворення вигляду*

$$\begin{gathered}\tilde t=T,\quad \tilde x=T_tU^1x+X^0,\quad \tilde u=U^1u+U^0,\\ \tilde A^1=U^1A^1+U^0-\frac{T_{tt}U^1x+X^0_t}{T_t},\quad \tilde A^2=T_t(U^1)^2A^2,\end{gathered}\tag{2.27}$$

де T і X^0 — довільні гладкі функції від t з $T_t\neq 0$, а U^0 і U^1 — довільні сталі з $U^1\neq 0$.

Структура множини допустимих перетворень із фіксованим вихідним рівнянням із класу $\hat{\mathcal L}$ суттєво залежить від того, чи є довільний елемент A^1 афінним по x. Клас $\hat{\mathcal L}$ можна зобразити як неперетинне об'єднання двох підкласів, *відображеного сингулярного* підкласу $\hat{\mathcal L}_0$ і *відображеного регулярного* підкласу $\hat{\mathcal L}_1$, виокремлених із класу $\hat{\mathcal L}$ відповідно зв'язками

$$A^1_{xx}=0\quad \text{і}\quad A^1_{xx}\neq 0.$$

Оскільки ці зв'язки інваріантні під дією допустимих перетворень класу $\hat{\mathcal L}$, рівняння з підкласу $\hat{\mathcal L}_0$ не сполучені з рівняннями з підкласу $\hat{\mathcal L}_1$ жодним точковим перетворенням. Як доведено нижче, ці підкласи є нормалізованими відповідно у розширеному узагальненому й у звичайному сенсах. Зауважимо, що зв'язки $A^1_{xx}=0$ і $A^1_{xx}\neq 0$, що розбивають клас $\hat{\mathcal L}$, набагато простіші за їхні аналоги, що розбивають клас $\mathcal L$ на *сингулярний* і *регулярний* підкласи $\mathcal{L}_0$ і $\mathcal{L}_1$, які відповідно є прообразами підкласів $\hat{\mathcal{L}}_0$ і $\hat{\mathcal{L}}_1$ відносно сім'ї $\mathcal{F}$ точкових перетворень:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\colon\quad \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x = 0,\\
&\mathcal{L}_1\colon\quad \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x \neq 0.
\end{aligned}\tag{2.28}$$

Характеристику *регулярний* для підкласу $\hat{\mathcal{L}}_1$ зумовлено таким наслідком.

Твердження 2.5.6. *Клас $\hat{\mathcal{L}}_1$ нормалізований у звичайному сенсі. Його група еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ збігається з групою $\hat{G}^{\sim}$.*

Оскільки класи $\mathcal{L}_1$ і $\hat{\mathcal{L}}_1$ сполучені сім'єю $\mathcal{F}$ простих точкових перетворень, групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_1^{\sim}$ класу $\mathcal{L}_1$ можна легко відновити з групоїда еквівалентності класу $\hat{\mathcal{L}}_1$, що дуже зручно з огляду на складну умову, що виокремлює підклас $\mathcal{L}_1$ з класу $\mathcal{L}$.

Твердження 2.5.7. *Точкове перетворення в просторі з координатами (t,x,u) сполучає рівняння з класу $\mathcal{L}_1$ тоді й лише тоді, коли його компоненти мають вигляд $\tilde{t}=T(t)$, $\tilde{x}=X(t,x)$, $\tilde{u}=U^1u+U^0$, де T і X — гладкі функції своїх аргументів, U^0 і U^1 — довільні сталі, причому $T_tX_xU^1\neq 0$, а функція X задовольняє рівняння Колмогорова*

$$X_t = A^2X_{xx} + \frac{U^0C}{U^1}X_x.$$

Відповідні довільні елементи сполучені за правилом

$$\tilde{C} = \frac{X_x}{T_tU^1}C,\quad \tilde{A}^2 = \frac{X_x^2}{T_t}A^2.$$

Наслідок 2.5.8. *Звичайна група еквівалентності $G_1^{\sim}$ класу $\mathcal{L}_1$ збігається зі своїм аналогом для класу $\mathcal{L}$.*

Покажемо, що на відміну від підкласу $\hat{\mathcal{L}}_1$ підклас $\hat{\mathcal{L}}_0$ класу $\hat{\mathcal{L}}$, виокремлений зв'язком $A^1_{xx}=0$, не є нормалізованим у звичайному сенсі, а через те, що він запобігає нормалізованості свого надкласу $\hat{\mathcal{L}}$, він заслуговує на характеристику *сингулярний*. Репараметризуємо клас $\hat{\mathcal{L}}_0$, вважаючи коефіцієнти зображення $A^1(t,x) = A^{11}(t)x + A^{10}(t)$ для A^1 з огляду на зв'язок $A^1_{xx} = 0$ новими довільними елементами замість A^1. Тому надалі набором довільних елементів для класу $\hat{\mathcal{L}}_0$ є $\theta = (A^{10}, A^{11}, A^2)$. Довільні елементи A^{10} і A^{11} задовольняють допоміжні рівняння $A^{10}_x = A^{11}_x = 0$.

Твердження 2.5.9. *Групоїд еквівалентності $\hat{\mathcal{G}}^{\sim}_0$ класу $\hat{\mathcal{L}}_0$ складають трійки $(\theta, \varphi, \tilde{\theta})$, де θ і $\tilde{\theta}$ позначають набори довільних елементів вихідного й перетвореного рівнянь із класу $\hat{\mathcal{L}}_0$, а φ є точковим перетворенням із компонентами вигляду*

$$\tilde{t} = T, \quad \tilde{x} = T_t U^1 x + X^0, \quad \tilde{u} = U^1 u - U^1_t x + U^{00}, \tag{2.29a}$$

де T, X^0, U^1, U^{00} — гладкі функції від t, що задовольняють $T_t U^1 \neq 0$, а

$$U^1_{tt} = A^{11} U^1_t, \quad U^{00}_t = -A^{10} U^1_t. \tag{2.29b}$$

Довільні елементи вихідного й кінцевого рівнянь сполучені за правилом

$$\begin{gathered}\tilde{A}^2 = (U^1)^2 T_t A^2, \quad \tilde{A}^{11} = \frac{1}{T_t}\left(A^{11} - \frac{T_{tt}}{T_t} - \frac{2U^1_t}{U^1}\right), \\ \tilde{A}^{10} = U^1 A^{10} - \frac{X^0_t}{T_t} + U^{00} - \frac{X^0}{T_t}\left(A^{11} - \frac{T_{tt}}{T_t} - \frac{2U^1_t}{U^1}\right).\end{gathered} \tag{2.29c}$$

Щоб побудувати звичайну групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_0$ класу $\hat{\mathcal{L}}_0$, розщепимо класифікуючі умови (2.29b) для допустимих перетворень за довільними елементами A^{10} і A^{11} і отримаємо, що U^1 і U^{00} — сталі. Це означає, що групу $\hat{G}^{\sim}_0$ складають точкові перетворення в просторі з координатами $(t, x, u, A^{10}, A^{11}, A^2)$, чиї компоненти мають вигляд (2.29a), (2.29c), де T і X^0 — гладкі функції від t, а U^1 і U^{00} — довільні сталі, причому $T_t U^1 \neq 0$. Отже, група $\hat{G}^{\sim}_0$ також збігається з групою $\hat{G}^{\sim}$, але клас $\hat{\mathcal{L}}_0$ не є нормалізованим у звичайному сенсі, і аналогічне твердження має місце для підкласу $\mathcal{L}_0$ класу $\mathcal{L}$, див. твердження 2.5.6 і 2.5.7. З іншого боку, увівши віртуальні нелокальні довільні елементи Y^0, Y^1 і Y^2, визначені рівняннями

$$Y^0_t = A^{11}, \quad Y^1_t = \mathrm{e}^{Y^0}, \quad Y^2_t = A^{10} \mathrm{e}^{Y^0}, \tag{2.30}$$

побудуємо накриття допоміжної системи для довільних елементів класу $\hat{\mathcal{L}}_0$. (Це застосування техніки із теорії нелокальних симетрій диференціальних рівнянь [21] у контексті класів диференціальних рівнянь.) Позначимо через $\bar{\mathcal{L}}_0$ клас, отриманий репараметризацією класу $\hat{\mathcal{L}}_0$, з розширеним набором довільних елементів

$$\bar{\theta} = (A^{10}, A^{11}, A^2, Y^0, Y^1, Y^2).$$

Доведемо, що клас $\bar{\mathcal{L}}^0$ нормалізований в узагальненому сенсі.

Наслідок 2.5.10. *Групоїд еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}_0$ складають трійки $(\bar{\theta}, \varphi, \tilde{\bar{\theta}})$, де набори довільних елементів $\bar{\theta}$ і $\tilde{\bar{\theta}}$ вихідного й перетвореного рівнянь сполучені рівняннями (2.29c) і*

$$\begin{aligned}
&\tilde{Y}^0 = Y^0 + \ln\frac{\delta}{T_t(c_1Y^1+c_0)^2}, \quad \tilde{Y}^1 = \frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0},\\
&\tilde{Y}^2 = \frac{\delta Y^2}{c_1Y^1+c_0} - \frac{\delta X^0\mathrm{e}^{Y^0}}{T_t(c_1Y^1+c_0)^2} - c_2\frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0} + c_3,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

а компоненти точкового перетворення φ мають вигляд (2.29a) з

$$U^1 = c_1Y^1 + c_0, \quad U^{00} = c_2 - c_1Y^2, \tag{2.32}$$

$\delta = c_1'c_0 - c_1c_0'$, T і X^0 — довільні гладкі функції від t, а c_0, c_0', c_1, c_1', c_2 і c_3 — такі довільні сталі, що $\delta T_t > 0$.

Доведення. Після введення віртуальних довільних елементів можна розв'язати рівняння (2.29b) на U^1 і U^{00} у термінах Y^i. Вираз для перетвореного нелокального довільного елемента $\tilde{Y}^0$ випливає з ланцюжка тотожностей

$$\begin{aligned}
\partial_t\tilde{Y}^0 = \tilde{Y}^0_{\tilde{t}}T_t = \tilde{A}^{11}T_t = A^{11} - \frac{T_{tt}}{T_t} - \frac{2c_1Y^1_t}{c_1Y^1+c_0} = \\
\left(Y^0 + \ln\frac{1}{|T_t|(c_1Y^1+c_0)^2}\right)_t.
\end{aligned}$$

Для Y^1 і Y^2 процедури аналогічні. □

Зауваження 2.5.11. Існує нетривіальна калібрувальна еквівалентність між рівняннями з репараметризованого класу $\bar{\mathcal{L}}_0$, що походить із невизначеності у визначенні віртуальних довільних елементів. Більш точно, набори довільних елементів $\bar{\theta}$ і $\tilde{\bar{\theta}}$ асоційовані з тим самим рівнянням із класу $\bar{\mathcal{L}}_0$ тоді й лише тоді, коли

$$\begin{aligned}&\tilde{A}^{10}=A^{10},\quad \tilde{A}^{11}=A^{11},\quad \tilde{A}^{2}=A^{2},\\&\tilde{Y}^{0}=Y^{0}+\ln c_1',\quad \tilde{Y}^{1}=c_1'Y^1+c_0',\quad \tilde{Y}^{2}=c_1'Y^2+c_3,\end{aligned}\tag{2.33}$$

де c_0', c_1', c_3 — довільні сталі з $c_1'>0$. Рівняння (2.33) разом із рівняннями $\tilde{t}=t$, $\tilde{x}=x$ і $\tilde{u}=u$ зображують компоненти калібрувальних перетворень еквівалентності в класі $\bar{\mathcal{L}}_0$, що складають калібрувальну групу еквівалентності $G^{\mathrm{g}\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0}$ класу $\bar{\mathcal{L}}_0$. Ця група є нормальною підгрупою звичайної групи еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0}$ класу $\bar{\mathcal{L}}_0$, а факторгрупа $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0}/G^{\mathrm{g}\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0}$ є ізоморфною звичайній групі еквівалентності підкласу $\hat{\mathcal{L}}_0$ класу $\hat{\mathcal{L}}$, що збігається зі звичайною групою еквівалентності всього класу $\hat{\mathcal{L}}$. Дивись деталі щодо калібрувальних перетворень еквівалентності в [89].

Теорема 2.5.12. *Клас $\bar{\mathcal{L}}_0$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_0$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}&\tilde{t}=\bar{T},\quad \tilde{x}=(\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T})(c_1Y^1+c_0)x+\bar{X}^0,\\&\tilde{u}=(c_1Y^1+c_0)u-c_1\mathrm{e}^{Y^0}x+c_2-c_1Y^2,\end{aligned}\tag{2.34a}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{A}^{2}=(\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T})(c_1Y^1+c_0)^2A^2,\\&\tilde{A}^{11}=\frac{1}{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}}\left(A^{11}-\frac{\bar{\mathrm{D}}_t^2\bar{T}}{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}}-\frac{2c_1\mathrm{e}^{Y^0}}{c_1Y^1+c_0}\right),\end{aligned}\tag{2.34b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{10}=(c_1Y^1+c_0)A^{10}-\frac{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{X}^0}{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}}+c_2-c_1Y^2\\-\frac{\bar{X}^0}{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}}\left(A^{11}-\frac{\bar{\mathrm{D}}_t^2\bar{T}}{\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}}-\frac{2c_1\mathrm{e}^{Y^0}}{c_1Y^1+c_0}\right),\end{aligned}\tag{2.34c}$$

$$\tilde{Y}^{0}=Y^0+\ln\frac{\delta}{(\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T})(c_1Y^1+c_0)^2},\quad \tilde{Y}^{1}=\frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0},\tag{2.34d}$$

$$\tilde{Y}^2=\frac{\delta Y^2}{c_1Y^1+c_0}-\frac{\delta\bar{X}^0\mathrm{e}^{Y^0}}{(\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T})(c_1Y^1+c_0)^2}-c_2\frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0}+c_3. \tag{2.34e}$$

Тут $\bar{\mathrm{D}}_t=\partial_t+A^{11}_t\partial_{A^{11}}+A^{10}_t\partial_{A^{10}}+A^{11}\partial_{Y^0}+\mathrm{e}^{Y^0}\partial_{Y^1}+A^{10}\mathrm{e}^{Y^0}\partial_{Y^2}+A^2_t\partial_{A^2}$ *— усічений оператор повної похідної по* t, $\delta:=c_1'c_0-c_0'c_1$, $\bar{T}$ *і* $\bar{X}^0$ *— гладкі функції від відповідно* (t,Y^1) *і* (t,Y^0,Y^1,Y^2), *а* c_i *— довільні сталі, причому* $\delta\bar{\mathrm{D}}_t\bar{T}>0$.

Зауважимо, що якщо опустити залежність параметрів $\bar{T}$ і $\bar{X}^0$ групи $\bar{G}^\sim_0$ від нелокальних довільних елементів Y^i, то отримаємо множину перетворень еквівалентності, що не складають групу відносно композиції перетворень, хоча ця множина породжує весь групоїд еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}_0$. Зокрема, значення $\bar{X}^{0,3}$ параметр-функції $\bar{X}^0$ для композиції $\mathcal{T}^3$ перетворень $\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2\in\bar{G}^\sim_0$ має вигляду

$$\bar{X}^{0,3}=\mathrm{D}_{\tilde{t}}\bar{T}^{,2}(c_{1,2}\tilde{Y}^1+c_{0,2})\bar{X}^{0,1}+\bar{X}^{0,2}, \tag{2.35}$$

де індекс після коми вказує на номер перетворення, з яким асоційовано відповідний параметр. Тому залежність параметра $\bar{X}^0$ від Y^1 є необхідною для замикання відносно композиції перетворень. Аналогічно можна показати, що параметр $\bar{X}^0$ має залежати від Y^0. Водночас, залежність параметра $\bar{T}$ від усіх віртуальних довільних елементів, а $\bar{X}^0$ — від Y^2 є надлишковою. Керуючись інтуїцією, шукаємо перетворення з параметром $\bar{X}^0$ вигляду $\bar{X}^0=T_t\exp(\alpha Y^0)(c_1Y^1+c_0)^\beta\breve{X}^0(t)$ для деяких сталих α і β. Підстановка цього анзацу в (2.35) дає $\alpha=-1/2$ і $\beta=1$.

Наслідок 2.5.13. *Ефективну узагальнену групу еквівалентності* $\breve{G}^\sim_0$ *класу* $\bar{\mathcal{L}}_0$ *складають точкові перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}
&\tilde{t}=T,\quad \tilde{x}=T_t(c_1Y^1+c_0)\left(x+\mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0\right),\\
&\tilde{u}=(c_1Y^1+c_0)u-c_1\mathrm{e}^{Y^0}x+c_2-c_1Y^2,\\
&\tilde{A}^{10}=(c_1Y^1+c_0)\left(A^{10}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0A^{11}-\mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0_t\right)\\
&\qquad+c_1\mathrm{e}^{Y^0/2}+c_2-c_1Y^1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde A^{11}=\frac{1}{T_t}\left(A^{11}-\frac{T_{tt}}{T_t}-\frac{2c_1\mathrm{e}^{Y^0}}{c_1Y^1+c_0}\right),\quad \tilde A^2=T_t(c_1Y^1+c_0)^2A^2,\\
&\tilde Y^0=Y^0+\ln\frac{\delta}{T_t(c_1Y^1+c_0)^2},\quad \tilde Y^1=\frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0},\\
&\tilde Y^2=\frac{\delta Y^2}{c_1Y^1+c_0}-\frac{\delta\breve X^0\mathrm{e}^{Y^0/2}}{c_1Y^1+c_0}-c_2\frac{c_1'Y^1+c_0'}{c_1Y^1+c_0}+c_3,
\end{aligned}
$$

де $\delta:=c_1'c_0-c_0'c_1$, T *і* $\breve X^0$ *— гладкі функції від* t, *а* c_i *— довільні сталі, причому* $\delta T_t>0$.

Наслідок 2.5.14. *Клас* $\hat{\mathcal L}_0$ *нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групоїд еквівалентності породжено групою* $\breve G_0^{\sim}$.

До того ж, клас $\hat{\mathcal L}_0$ можна відобразити сім'єю перетворень еквівалентності з $U^1=1$, $U^{00}=0$ і параметрами T і X^0, що задовольняють систему

$$T_{tt}=A^{11}T_t,\quad X^0_t=A^{10}T_t,$$

до свого підкласу $\mathcal L_{0'}$ рівнянь вигляду $u_t+uu_x=A^2(t,x)u_{xx}$, вивченого в [80]. Інакше кажучи, відкаліброуємо довільні елементи A^{10} і A^{11} до нулів допустимими перетвореннями. Клас $\mathcal L_{0'}$ є також підкласом вихідного класу $\mathcal L$. Його виокремлено звідти умовою $C=1$, тобто $\mathcal L_{0'}{=}\mathcal L\cap\hat{\mathcal L}$. Це означає, що кожне рівняння з класу $\mathcal L_0$ відображено точковим перетворенням у рівняння з того самого класу з $C=1$.

2.5.2. Групова класифікація. Класи диференціальних рівнянь називають подібними, якщо вони сполучені точковим перетворенням залежних і незалежних змінних. Однією з найцікавіших властивостей подібних класів є те, що їхні групові класифікації з точністю до відповідних груп (або групоїдів) еквівалентності взаємопов'язані, і їх можна отримати одну з одної так званим методом відображень, див. докладніше в [109]. Водночас, класи $\mathcal L$ і $\hat{\mathcal L}$ (і відповідні підкласи) сполучені сім'єю $\mathcal F$ точкових перетворень, параметризованою довільними елементами вихідних рівнянь. Назвемо такі класи *слабо подібними*. Можна припустити, що групові класифікації слабо подібних класів усе ще пов'язані, але насправді це не так для групових класифікацій із точністю до груп еквівалентності. Однак, аналогічне твердження про групову класифікацію з точністю до групоїдів еквівалентності залишається в силі.

Зауважимо, що з огляду на результати попереднього підрозділу групова класифікація класу $\mathcal{L}_0$ з точністю до $\mathcal{G}_0^\sim$-еквівалентності зводиться до групової класифікації класу $\mathcal{L}_{0'}$ з точністю до $G_{0'}^\sim$-еквівалентності, яку проведено в [80].

Підсумовуючи наведене, сформулюємо таку теорему.

Теорема 2.5.15. *Повний список $\mathcal{G}^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{L}$ рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами є неперетинним об'єднанням повних списків $G_{0'}^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії його нормалізованого підкласу $\mathcal{L}_{0'}$ і $\mathcal{G}_1^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії його підкласу $\mathcal{L}_1$. Останній список є прообразом повного списку $G_1^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в нормалізованому класі $\hat{\mathcal{L}}_1$ з точністю до сім'ї $\mathcal{F}$ точкових перетворень $\tilde{t}=t$, $\tilde{x}=\int(1/C(t,x))\mathrm{d}x$, $\tilde{u}=u$, параметризованої довільним елементом C вихідних рівнянь, яка відображає клас $\mathcal{L}$ у клас $\hat{\mathcal{L}}$.*

Із зазначених причин надалі зосередимося на регулярному підкласі $\mathcal{L}_1$. Для цього спочатку потрібно розглянути відображений клас $\hat{\mathcal{L}}_1$. Оскільки цей клас є нормалізованим у звичайному сенсі, для розв'язання задачі його групової класифікації скористаємося алгебраїчним методом. Водночас, опустимо всі деталі, які можна знайти в [72], оскільки цей метод уже було застосовано в дисертації для класу (2.1), і наведемо лише результат класифікації.

Теорема 2.5.16. *Повний список $\hat{G}_1^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\hat{\mathcal{L}}_1$ вичерпано випадками таблиці 2.2.*

Щоб розв'язати задачу групової класифікації для класу $\mathcal{L}_1$ використаємо метод відображень [109].

Таблиця 2.2: Повна групова класифікація в класі $\hat{\mathcal{L}}_1$ з точністю до $\hat{G}_1^{\sim}$-еквівалентності.

№	A^2	A^1	Базис алгебри $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$
0	$A^2(t,x)$	$A^1(t,x)$	—
1	$\phi(x)$	$\psi(x)$	$D(1)$
2	$\phi(x)$	$\psi(x)+t$	$D(1)+S^0$
3	$\mathrm{e}^{-2t}\phi(x\mathrm{e}^t)$	$\mathrm{e}^{-t}\psi(x\mathrm{e}^t)$	$D(1)-S^1$
4	$x\lvert x\rvert^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$	$c_1\lvert x\rvert^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$	$D(1),\ D(t)+\alpha S^1$
5	c_2x	$\ln\lvert x\rvert$	$D(1),\ D(t)+S^0$
6	e^x	$c_1\mathrm{e}^x$	$D(1),\ D(t)-P(1)-S^1$
7	$c_2x\sqrt{\lvert x\rvert}$	$c_1\sqrt{\lvert x\rvert}+t$	$D(1)+S^0,\ D(t)+S^1$

Функції ϕ і ψ — довільні достатньо гладкі функції своїх аргументів, причому $\phi\neq 0$ і $\psi_{xx}\neq 0$; α, c_1 і c_2 — такі довільні сталі, що $\alpha\notin\{-1,0\}$ і $c_1c_2\neq 0$; $c_2>0 \bmod G_1^{\sim}$ у випадку 7.

Теорема 2.5.17. *Повний список $\mathcal{G}_1^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{L}_1$ вичерпано випадками таблиці 2.3.*

Доведення. Класи $\hat{\mathcal{L}}_1$ і $\mathcal{L}_1$ сполучає сім'я точкових перетворень

$$t=\hat{t},\quad x=\hat{X}(\hat{t},\hat{x}),\quad u=\hat{u}, \tag{2.36}$$

параметризована гладкою функцією $\hat{X}$ від $(\hat{t},\hat{x})$, що задовольняє умову невиродженості $\hat{X}_{\hat{x}}\neq 0$ і рівняння Колмогорова

$$\hat{X}_{\hat{t}}=\hat{A}^2\hat{X}_{\hat{x}\hat{x}}+\hat{A}^1\hat{X}_{\hat{x}}. \tag{2.37}$$

Тут і надалі величини з дашками відповідають класу $\hat{\mathcal{L}}_1$, а звичайні — класу $\mathcal{L}_1$. Довільні елементи A^2 і C класу $\mathcal{L}_1$ сполучені з довільними елементами $\hat{A}^1$ і $\hat{A}^2$ класу $\hat{\mathcal{L}}_1$ згідно з

$$A^2=\hat{X}_{\hat{x}}^2\hat{A}^2,\quad C=\hat{X}_{\hat{x}}.$$

Звісно, знайти загальний розв'язок рівняння (2.37) неможливо, а тому неможливо й розв'язати задачу групової класифікації для класу $\mathcal{L}_1$ з

Таблиця 2.3: Повна групова класифікація класу $\mathcal{L}_1$ з точністю до $\mathcal{G}_1^{\sim}$-еквівалентності.

№	A^2	C	Базис алгебри інваріантності
0	$A^2(t,x)$	$C(t,x)$	—
1	$\phi(x)$	$\psi(x)$	∂_t
2	$\phi(\rho)\rho_x^{-2}$	ρ_x^{-1}	$\partial_t-\rho_t\rho_x^{-1}\partial_x+\partial_u$
3	$\phi(x)$	$\mathrm{e}^t\psi(x)$	$\partial_t-u\partial_u$
4	$\lvert x\rvert^\nu$	$\lvert x\rvert^\mu$	∂_t, $(2-\nu)t\partial_t+x\partial_x+(\nu-\mu-1)u\partial_u$
5	$\mathrm{e}^{\gamma x}$	e^x	∂_t, $\gamma t\partial_t-\partial_x-(\gamma-1)u\partial_u$
6	$\alpha\zeta\zeta_x^{-2}$	ζ_x^{-1}	∂_t, $t\partial_t+\zeta\zeta_x^{-1}\partial_x+\partial_u$
7	$\alpha t^{-1}\zeta\lvert\zeta\rvert^{1/2}\zeta_x^{-2}$	$t^{-2}\zeta_x^{-1}$	$\partial_t+\partial_u$, $t\partial_t+2\zeta\zeta_x^{-1}\partial_x+u\partial_u$

Функції ϕ і ψ — такі довільні гладкі ненульові функції своїх аргументів, що відповідні A^2 і C задовольняють умову (2.28) для класу $\mathcal{L}_1$; функція ρ — частковий розв'язок рівняння $\rho_t=\phi(\rho)\rho_x^{-2}\rho_{xx}-\psi(\rho)-t$ з $\rho_x\neq 0$; функція ζ — частковий розв'язок рівняння $\zeta_x=\exp\left(\frac12\alpha^{-1}\ln^2|\zeta|\right)$ у випадку 6 і рівняння $\zeta_x=\exp\left(\alpha^{-1}(4\varepsilon'|\zeta|^{1/2}+\beta\ln|\zeta|-2|\zeta|^{-1/2})\right)$ з $\varepsilon'=\operatorname{sgn}\zeta$ у випадку 7; α, β, γ, ν і μ — довільні сталі, причому $\mu(\nu-2)(\nu-\mu-1)\neq 0$, $\gamma(\gamma-1)\neq 0$ і $\alpha\beta\neq 0$.

точністю до його групи еквівалентності. Натомість, проведемо групову класифікацію класу $\mathcal{L}_1$ з точністю до його групоїда еквівалентності $\mathcal{G}_1$. Для цього кожному випадку таблиці 2.2 зіставимо рівняння Колмогорова (2.37) з відповідними коефіцієнтами $\hat A^1$ і $\hat A^2$, знайдемо його частковий розв'язок $\hat X$, порахуємо відповідні значення довільних елементів A^2 і C і піднімемо асоційовані алгебри інваріантності точковим перетворенням (2.36) з відібраним значенням параметр-функції $\hat X$. Розглянемо крок за кроком усі вісім випадків розширення ліївської симетрії у класі $\hat{\mathcal{L}}_1$ і відобразимо їх у відповідні класифікаційні випадки класу $\mathcal{L}_1$.

0. Цей випадок відповідає загальному рівнянню з класу $\mathcal{L}^1$ з нульовою максимальною алгеброю ліївської інваріантності.

1. Рівняння (2.37) з незалежними від часу довільними елементами $\hat A^1$ і $\hat A^2$ допускає ліївську симетрію $\partial_{\hat t}$. Анзац $\hat X=\hat\vartheta(\omega)$ з $\omega=x$ і $\hat\vartheta_\omega\neq 0$

для стаціонарного розв'язку рівняння (2.37) зводить його до рівняння $\hat\phi(\omega)\hat\vartheta_{\omega\omega}+\hat\psi(\omega)\hat\vartheta_\omega=0$. Змінюючи $\hat\phi$ і $\hat\vartheta$, розглянемо останнє рівняння як рівняння на $\hat\psi$. Легко бачити, що перетворені довільні елементи C і A^2 також не залежать від часу, $A^2=\psi(x)$ і $C=\phi(x)$ з

$$(\psi(\phi(1/\psi)_x)_x)_x\neq 0,$$

а підняття векторного поля $D(1)$ очевидне.

2. Оскільки $\hat X_{\hat x}\neq 0$, то виконуючи узагальнене перетворення годографа з новими незалежними змінними $(t,x)=(\hat t,\hat X)$ та новою залежною змінною $\rho=\hat x$, зведемо рівняння Колмогорова з $\hat A^2=\hat\phi(\hat x)$ і $\hat A^1=\hat\psi(\hat x)+\hat t$ до рівняння на $\rho=\rho(t,x)$:

$$\rho_t=\hat\phi(\rho)\rho_x^{-2}\rho_{xx}-\hat\psi(\rho)-t.$$

Для кожного значення набору параметр-функцій $(\hat\phi,\hat\psi)$ потрібно знайти лише один частковий розв'язок останнього рівняння. Тоді $C=\rho_x^{-1}$, $A^2=\hat\phi(\rho)\rho_x^{-2}$, а векторне поле $D(1)+S^0$ піднімаємо до $\partial_t-\rho_t\rho_x^{-1}\partial_x+\partial_u$.

3. Рівняння (2.37) з $\hat A^2=\mathrm{e}^{-2\hat t}\hat\phi(\mathrm{e}^{\hat t}\hat x)$ і $\hat A^1=\mathrm{e}^{-\hat t}\hat\psi(\mathrm{e}^{\hat t}\hat x)$ допускає нетривіальну ліївську симетрію $\partial_{\hat t}-\hat x\partial_{\hat x}$, яка відповідає анзацу $\hat X=\hat\vartheta(\omega)$ з $\omega=\mathrm{e}^{\hat t}\hat x$ і $\hat\vartheta_\omega\neq 0$. Він зводить рівняння (2.37) до рівняння

$$\hat\phi(\omega)\hat\vartheta_{\omega\omega}=(\omega-\hat\psi(\omega))\hat\vartheta_\omega.$$

Можна вважати $\hat\phi$ і $\hat\vartheta$ довільними гладкими функціями від ω з $\hat\phi\hat\vartheta_\omega\neq 0$ і розглянути редуковане рівняння як рівняння на $\hat\psi$. Тоді довільні елементи класу $\mathcal{L}_1$ виражені як $A^2=\phi(x)$ і $C=\mathrm{e}^t\psi(x)$, де ϕ і ψ — довільні гладкі ненульові функції від x з $(\psi(\phi(1/\psi)_x)_x)_x\neq-(1/\psi)_x$. Остання нерівність випливає з умови (2.28) для класу $\mathcal{L}_1$. Відповідна алгебра ліївської інваріантності — це $\langle\partial_t-u\partial_u\rangle$.

4. У залежності від значення параметра c_1 у виразі для $\hat A^1$ відповідне рівняння Колмогорова (2.37) має частковий розв'язок $\hat X=|\hat x|^{1-c_1}$, якщо $c_1\neq 1$, або $\hat X=\ln|\hat x|$ інакше. Це призводить до розбиття на випадок 4 з $\mu\neq 1$ та випадок 5. Вирази для перетворених довільних елементів і векторних полів, на які натягнуто максимальну алгебру ліївської інваріантності, легко знайти після перепозначення параметрів і спрощення перетворених довільних елементів перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{L}_1$. Нові параметри виражено через старі як $\mu = -c_1/(1-c_1)$, $\nu = \big(1-2c_1+\alpha/(\alpha+1)\big)/(1-c_1)$, якщо $c_1 \neq 1$, і $\gamma = 1/(\alpha+1)$, якщо $c_1 = 1$. Нерівності для нових параметрів (μ,ν) і γ випливають із їхніх аналогів для старих параметрів c_1 і α. Ці нерівності можна також вивести підстановкою відповідних виразів для A^1 і A^2 в умову (2.28) для $\mathcal{L}_1$.

5. Рівняння (2.37) з $\hat{A}^2 = c_2\hat{x}$ і $\hat{A}^1 = \ln|\hat{x}|$ допускає ліївську симетрію $\partial_{\tilde{t}}$, а анзац $\hat{X} = \vartheta(\hat{x})$ зводить його до $c_2\hat{x}\vartheta_{\hat{x}\hat{x}} + (\ln|\hat{x}|)\vartheta_{\hat{x}} = 0$. Це рівняння можна легко проінтегрувати один раз до

$$\vartheta_{\hat{x}} = \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_2^{-1}\ln^2|\hat{x}|\right),$$

де сталу інтегрування покладено рівною нулю без втрати загальності. Нехай ζ — обернена функція до функції ϑ, $\hat{x} = \zeta(x)$, а тому $\zeta_x = 1/\vartheta_{\hat{x}}$, тобто ζ задовольняє рівняння $\zeta_x = \exp\left(\tfrac{1}{2}c_2^{-1}\ln^2|\zeta|\right)$. Щоб отримати $\mathcal{G}_1^{\sim}$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії, потрібно взяти лише один частковий розв'язок останнього рівняння для кожного значення параметра $c_2 \neq 0$. Довільні елементи перетвореного рівняння $C = \zeta_x^{-1}$ і $A^2 = c_2\zeta\zeta_x^{-2}$ задовольняють умову (2.28) для $\mathcal{L}_1$. Його максимальною алгеброю ліївської інваріантності є лінійна оболонка векторних полів ∂_t і $t\partial_t + \zeta\zeta_x^{-1}\partial_x + \partial_u$, що відповідає випадку 6. Можна також показати, що функція $\xi := \zeta\zeta_x^{-1}$ задовольняє рівняння $(\xi\xi_{xx})_x = 0$.

6. У цьому разі рівняння Колмогорова (2.37) має стаціонарний частковий розв'язок $\hat{X} = \mathrm{e}^{-c_1\hat{x}}$, що призводить до таких виразів для довільних елементів A^2 і C: $A^2 = c_1^2|x|^{2-1/c_1}$, $C = -c_1x$. Позначивши $\nu := 2 - 1/c_1$ і подіявши перетвореннями еквівалентності масштабування змінних і зміни їхніх знаків, спростимо ці вирази до $A^2 = |x|^\nu$, $C = x$ з $\nu \neq 2$. Відповідна максимальна алгебра ліївської інваріантності є

$$\langle \partial_t,\ (2-\nu)t\partial_t + x\partial_x - (2-\nu)u\partial_u \rangle,$$

що є підвипадком випадку 4 з $\mu = 1$.

7. Рівняння (2.37) з $\hat{A}^2 = c_2\hat{x}\sqrt{|\hat{x}|}$ і $\hat{A}^1 = c_1\sqrt{|\hat{x}|} + \hat{t}$ інваріантне щодо векторного поля $\hat{t}\partial_{\hat{t}} + 2\hat{x}\partial_{\hat{x}}$. Це дає змогу провести ліївську редукцію цього рівняння за допомогою анзацу $\hat{X} = \vartheta(\omega)$ з $\omega = \hat{x}/t^2$ до рівняння

$$-2\omega\vartheta_\omega = \varepsilon c_2\omega|\omega|^{1/2}\vartheta_{\omega\omega} + (\varepsilon c_1|\omega|^{1/2} + 1)\vartheta_\omega,$$

де $\tilde{c}_1 := \varepsilon c_1$, $\tilde{c}_2 := \varepsilon c_2$, $\varepsilon := \operatorname{sgn} t$ і $\varepsilon' := \operatorname{sgn}\omega$. Інтегруємо редуковане рівняння до

$$\vartheta_\omega = \exp\big(-\tilde{c}_2^{-1}(4\varepsilon'|\omega|^{1/2} + \tilde{c}_1\ln|\omega| - 2|\omega|^{-1/2})\big),$$

де сталу інтегрування знову покладено рівною нулю. Нехай ζ — обернена функція до функції ϑ, $\omega = \zeta(x)$ і тому $\hat{x} = t^2\zeta(x)$ і $\varepsilon' = \operatorname{sgn}\zeta$. Беручи частковий розв'язок рівняння

$$\zeta_x = \exp\big(\tilde{c}_2^{-1}(4\varepsilon'|\zeta|^{1/2} + \tilde{c}_1\ln|\zeta| - 2|\zeta|^{-1/2})\big)$$

для кожного значення набору параметрів $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ з $\tilde{c}_1\tilde{c}_2 \neq 0$, отримаємо випадок 7 з довільними елементами $C = t^{-2}\zeta_x^{-1}$ і $A^2 = \tilde{c}_2 t^{-1}\zeta|\zeta|^{1/2}\zeta_x^{-2}$, що задовольняють умову (2.28) для $\mathcal{L}_1$, і алгеброю ліївської інваріантності $\langle\partial_t + \partial_u,\ t\partial_t + 2\zeta\zeta_x^{-1}\partial_x + u\partial_u\rangle$. $\square$

РОЗДІЛ 3

Групова класифікація нелінійних рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтом дифузії, залежним від градієнта

3.1. Вступ

Нещодавні дослідження в біології показали важливість рівнянь реакції–дифузії як прототипів моделей формування патернів. Такі структури як фронти, спіралі тощо можна знайти в різноманітних типах систем реакції–дифузії [65, 66]. Останні застосування моделей реакції–дифузії пов'язані з дослідженнями процесів морфогенезу, а також є доречними у описі пігментації шкіри людей та тварин [39]. Серед інших явищ, для яких застосовують такі моделі, — екологічна інвазія, поширення епідемій, розвиток пухлин і загоювання поранень [102].

Початковою метою цього розділу була групова класифікація класу $\mathcal{R}$ (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтом дифузії, залежним від градієнта:

$$u_t = f(u_x)u_{xx} + g(u), \tag{3.1}$$

де $f = f(u_x)$ і $g = g(u)$ — гладкі функції своїх аргументів з $f \neq 0$. Цю задачу розглянуто в [23] з кількома неточностями, що робить необхідним вивчити її ще раз.

Згідно з формалізованим означенням класу диференціальних рівнянь [83, 89] повну систему допоміжних рівнянь і нерівностей на довільні елементи f і g класу $\mathcal{R}$ визначено як

$$\begin{aligned} &f_t = f_x = f_u = f_{u_t} = f_{u_{tt}} = f_{u_{tx}} = f_{u_{xx}} = 0, \quad f \neq 0, \\ &g_t = g_x = g_{u_t} = g_{u_x} = g_{u_{tt}} = g_{u_{tx}} = g_{u_{xx}} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Структура класу $\mathcal{R}$ не найкраща з погляду перетворень еквівалентності й ліївських симетрій. Ось чому зручніше зобразити цей клас як об'єднання чотирьох підкласів:

$$\mathcal{R} = \mathcal{H} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}.$$

Підклас $\mathcal{H}$ напівлінійних рівнянь (так званих "нелінійних рівнянь теплопровідності з джерелом") виокремлено зв'язком $f_{u_x} = 0$. Цей підклас включає всі лінійні рівняння з класу $\mathcal{R}$, які додатково задовольняють зв'язок $g_{uu} = 0$ і зводяться простим точковим перетворенням до лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$. Повну групову класифікацію підкласу $\mathcal{H}$ проведено в [4] під час групової класифікації ширшого класу рівнянь реакції–дифузії загального вигляду $u_t = \big(f(u)u_x\big)_x + g(u)$ з $f \neq 0$; див. також [11, с. 133–136] для вдосконаленої презентації цих результатів.

Підклас $\mathcal{L}$ складають рівняння з класу $\mathcal{R}$, де значення довільного елемента f задовольняють зв'язок $({u_x}^2 f)_{u_x} = 0$. Підклас $\mathcal{L}$ є особливим, оскільки кожне рівняння з нього можна лінеаризувати до рівняння Колмогорова. Більш точно, перетворення годографа $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = u$, $\tilde{u} = x$ з $(\tilde{t}, \tilde{x})$ і $\tilde{u}$, що є відповідно новими незалежними й залежними змінними, відображає рівняння вигляду (3.1), де $f = cu_x^{-2}$ з $c = \mathrm{const} \neq 0$, у рівняння Колмогорова

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = c\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - g(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{x}}. \tag{3.3}$$

Зокрема, це означає, що підклас $\mathcal{L}$ має суттєво інші точкові перетворення й ліївські симетрії у порівнянні з іншими підкласами, а його групова класифікація зводиться до групової класифікації класу рівнянь Колмогорова, яку наведено, наприклад, у [90, наслідок 7] з точністю до загальної точкової еквівалентності.

Підклас $\mathcal{F}$ виокремлено зв'язком $g_u = 0$. Сингулярність підкласу $\mathcal{F}$ виявляють властивості його перетворень еквівалентності, див. § 3.2. Зокрема, підклас $\mathcal{F}$ допускає розширення групи еквівалентності в порівнянні з усім класом $\mathcal{R}$, і його можна відобразити сім'єю його перетворень еквівалентності в його підклас $\mathcal{F}'$, асоційований із додатковим зв'язком $g = 0$. Отже, групова класифікація підкласу $\mathcal{F}$ зводиться до групової класифікації підкласу $\mathcal{F}'$. Останній підклас складають "нелінійні рівняння фільтрації" вигляду (3.1) з допоміжними умовами

$$f \neq 0, \quad g = 0.$$

Групову класифікацію класу $\mathcal{F}'$ проведено в [1, 2]. Списки нееквівалентних розширень ліївської симетрії в цьому класі з точністю до його повної групи еквівалентності та з точністю до деякої власної підгрупи цієї групи можна також виокремити з відповідних списків для потенційних рівнянь конвекції–дифузії, наведених у [88] через обрання випадків з нульовим коефіцієнтом конвекції.

Кожен із додаткових допоміжних зв'язків, асоційованих із підкласами $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{F}$, пов'язано зі спеціальними випадками розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{R}$. Ось чому назвемо доповнення $\mathcal{C}$ об'єднання $\mathcal{H} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ у $\mathcal{R}$ *регулярним підкласом* класу $\mathcal{R}$. Він асоційований як підклас класу $\mathcal{R}$ із системою нерівностей

$$f_{u_x} \neq 0, \quad (u_x{}^2 f)_{u_x} \neq 0, \quad g_u \neq 0.$$

Зауважимо, що об'єднання підкласів $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{F}$ не є диз'юнктивним, оскільки є два непорожні перетини серед попарних перетинів цих підкласів — $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}$ і $\mathcal{L} \cap \mathcal{F}$. На жаль, не існує жодного розбиття класу $\mathcal{R}$ на неперетинні підкласи, кращого для групової класифікації. Наприклад, група еквівалентності підкласу $\mathcal{F} \setminus (\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$ є власною підгрупою групи еквівалентності підкласу $\mathcal{F}$, що суттєво ускладнює групову класифікацію класу $\mathcal{F} \setminus (\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$ у порівнянні з $\mathcal{F}$.

Хоча групові класифікації для підкласів $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{F}$ відомі, повне виключення їх із розгляду, як це зроблено в [23], не є природним. Так, існують точкові перетворення, які відображають рівняння з підкласу $\mathcal{F}$ у рівняння з підкласу $\mathcal{C}$, а відповідні розширення ліївської симетрії в $\mathcal{F}$ простіші за їхні аналоги в $\mathcal{C}$. Те саме можна сказати й про пару підкласів $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$. Отже, щоб розв'язати задачу групової класифікації для класу $\mathcal{R}$, проведемо групову класифікацію регулярного підкласу $\mathcal{C}$, використовуючи метод розгалуженого розщеплення [52, 67, 110], скомбінуємо результат із відомою груповою класифікацією підкласу $\mathcal{F}$ і доповнимо його додатковими нееквівалентними випадками розширень ліївських симетрій із підкласів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{L}$.

Як зазначено вище, початковою метою поточного розділу було коректне розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{R}$, але її було змінено після ретельного аналізу допустимих перетворень і перетворень еквівалентності в цьому класі. Узагальнена група еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ підкласу $\mathcal{F}$ виявилася нетривіальною, а її використання як умовної узагальненої групи еквівалентності класу $\mathcal{R}$ спрощує обчислення під час групової класифікації цього класу і робить її більш сумісною з ієрархією підкласів, розглянутих для класу $\mathcal{R}$. Також побудовано ефективну узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ підкласу $\mathcal{F}$, що є найбільш цікавим і водночас неочікуваним результатом розділу, оскільки вона дала перший приклад нетривіальної скінченновимірної ефективної узагальненої групи еквівалентності в літературі (клас стаціонарних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза було розглянуто пізніше). До того ж, група $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є власною, але не нормальною підгрупою групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, а тому вона не є єдиною ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\mathcal{F}$. Ще однією цікавою властивістю класу $\mathcal{F}$ є те, що його звичайну групу еквівалентності не містить жодна ефективна узагальнена група еквівалентності цього класу.

Деякі технічні доведення, а також побудову точних розв'язків рівнянь із класу $\mathcal{C}$, які опущено, можна знайти в [75].

3.2. Перетворення еквівалентності

Щоб одночасно знайти групи еквівалентності ненормалізованого класу диференціальних рівнянь і набору його підкласів, запропоновано оптимізовану версію прямого методу, який містить попереднє вивчення допустимих перетворень у всьому класі й послідовне розщеплення визначальних рівнянь для цих перетворень за відповідними довільними елементами та їхніми похідними залежно від допоміжних зв'язків, асоційованих із кожним із підкласів.

За означенням перетвореннями еквівалентності для класу $\mathcal{R}$ і його підкласів є точкові перетворення в об'єднаному просторі незалежних змінних (t,x), залежної змінної u, її похідних першого та другого порядків і довільних елементів f і g. Завдяки особливій формі довільних елементів f і g ці перетворення можна визначити на просторі з меншою кількістю координат. Оскільки довільний елемент f залежить від u_x, ця похідна має бути серед координат такого простору, хоча відповідну компоненту перетворень можна знайти з x- і u-компонент за допомогою ланцюгового правила. Завдяки еволюційній формі рівнянь похідну u_t не містять компоненти перетворення для u_x, а тому її можна виключити з координат такого простору. У підсумку, мінімальним списком координат для простору, на якому діють перетворення еквівалентності для класів $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ і $\mathcal{C}$ є (t,x,u,u_x,f,g).

Твердження 3.2.1. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim_\mathcal{R}$ класу $\mathcal{R}$ збігається зі звичайними групами еквівалентності його підкласів $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{C}$, і її складають точкові перетворення в просторі з координатами (t,x,u,u_x,f,g), чиї компоненти мають вигляд*

$$\begin{aligned}&\tilde t=T_1t+T_0,\quad \tilde x=X_1x+X_0,\quad \tilde u=U_2u+U_0,\quad \tilde u_{\tilde x}=\frac{U_2}{X_1}u_x,\\ &\tilde f=\frac{X_1^2}{T_1}f,\quad \tilde g=\frac{U_2}{T_1}g,\end{aligned}\tag{3.4}$$

де T_i, X_j і U_k — довільні сталі, причому $T_1X_1U_2\neq0$.

Розв'язуючи додаткове допоміжне рівняння $(u_x{}^2 f)_{u_x} = 0$ на довільний елемент f у підкласі $\mathcal{L}$, отримаємо зображення $f = cu_x^{-2}$ з довільною ненульовою сталою c. Якщо репараметризувати підклас $\mathcal{L}$, вважаючи цю сталу новим довільним елементом замість f, то відповідну компоненту перетворення задає формула $\tilde{c} = U_2^2 T_1^{-1} c$.

Твердження 3.2.2. *Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складають точкові перетворення в просторі з координатами (t, x, u, u_x, f, g), чиї компоненти мають вигляд*

$$
\begin{gathered}
\tilde{t} = T_1 t + T_0, \quad \tilde{x} = X_1 x + X_0, \quad \tilde{u} = U_1 x + U_2 u + U_3 t + U_0, \\
\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{U_1 + U_2 u_x}{X_1}, \quad \tilde{f} = \frac{(X_1)^2}{T_1} f, \quad \tilde{g} = \frac{U_2}{T_1} g + \frac{U_3}{T_1},
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

де T_i, X_j, U_k — довільні сталі, причому $T_1 X_1 U_2 \neq 0$.

Група $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є нетривіальною умовною звичайною групою еквівалентності класу $\mathcal{R}$ за умови $g_u = 0$, оскільки звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$ класу $\mathcal{R}$ є власною підгрупою групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, яку виокремлено зв'язками $U_1 = U_3 = 0$ на групові параметри. Елементи групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ з $(U_1, U_3) \neq (0, 0)$ є суто умовними перетвореннями еквівалентності для класу $\mathcal{R}$ за умови $g_u = 0$.

Сім'я перетворень із групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ з (t, x, u)-компонентами $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u - gt$, яку параметризовано довільним елементом g, відображає клас $\mathcal{F}$ на його підклас $\mathcal{F}'$, виокремлений зв'язком $g = 0$. Звичайну групу еквівалентності класу $\mathcal{F}'$ вперше знайдено в [1, 2].

Твердження 3.2.3. *Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$ класу $\mathcal{F}'$ складають точкові перетворення в просторі з координатами (t, x, u, u_x, f), чиї компоненти мають вигляд*

$$
\begin{gathered}
\tilde{t} = T_1 t + T_0, \quad \tilde{x} = X_1 x + X_2 u + X_0, \quad \tilde{u} = U_1 x + U_2 u + U_0, \\
\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{U_1 + U_2 u_x}{X_1 + X_2 u_x}, \quad \tilde{f} = \frac{(X_1 + X_2 u_x)^2}{T_1} f,
\end{gathered}
$$

де T_i, X_j, U_k — довільні сталі, причому $T_1(X_1 U_2 - X_2 U_1) \neq 0$.

Група $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$ є нетривіальною умовною звичайною групою еквівалентності обох класів $\mathcal{R}$ і $\mathcal{F}$ за умови $g=0$. Елементи групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$ з $X_2\neq 0$ не мають жодних аналогів у групах $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$ і $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, а тому вони є справжніми умовними перетвореннями еквівалентності для класів $\mathcal{R}$ і $\mathcal{F}$ за умови $g=0$.

Підгрупу групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, що зберігає підклас $\mathcal{F}'$ класу $\mathcal{F}$, асоційовано зі зв'язком $U_3=0$, а проєкція на простір із координатами (t,x,u,u_x,f) відображає її на власну підгрупу групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$. Тому групову класифікацію класу $\mathcal{F}$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$-еквівалентності не можна звести до групової класифікації класу $\mathcal{F}'$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$-еквівалентності наведеним вище відображенням класу $\mathcal{F}$ на його підклас $\mathcal{F}'$. Щоб сумістити групові класифікації класів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}'$, розглянемо сильнішу еквівалентність у класі $\mathcal{F}$, яку асоційовано з узагальненою групою еквівалентності цього класу.

Твердження 3.2.4. *Узагальнену групу еквівалентності $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складають точкові перетворення в просторі з координатами (t,x,u,u_x,f,g), чиї компоненти мають вигляд*

$$\tilde t=\bar T^1t+\bar T^0,\quad \tilde x=\bar X^1x+\bar X^2u-g\bar X^2t+\bar X^0,$$
$$\tilde u=\bar U^1x+\bar U^2u+(\bar T^1\bar F-g\bar U^2)t+\bar U^0,\quad \tilde u_{\tilde x}=\frac{\bar U^1+\bar U^2u_x}{\bar X^1+\bar X^2u_x},$$
$$\tilde f=\frac{(\bar X^1+\bar X^2u_x)^2}{\bar T^1}f,\quad \tilde g=\bar F,$$

де $\bar T^i, \bar X^j, \bar U^k, \bar F$ — довільні гладкі функції від g з $\bar T^1(\bar X^1\bar U^2-\bar X^2\bar U^1)\bar F_g\neq 0$.

Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є (скінченновимірною) підгрупою узагальненої групи еквівалентності $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, і її звідти виокремлює така система зв'язків на групові параметри:

$$\bar T^0_g=\bar T^1_g=\bar X^0_g=\bar X^1_g=\bar X^2=0,\quad \bar U^0_g=\bar U^1_g=\bar U^2_g=0,\quad \bar T^1\bar F_g=\bar U^2.$$

Позначимо через $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ групоїд еквівалентності класу $\mathcal{F}$, а через $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ — підгрупоїд групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, породжений узагальненою групою еквівалентності $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Підгрупоїд групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, породжений звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, є власним підгрупоїдом групоїда $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Тому група $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$

є прикладом нетривіальної узагальненої групи еквівалентності, а також нетривіальною умовною узагальненою групою еквівалентності класу $\mathcal{R}$, причому нетривіальність пов'язана з обома атрибутами "умовна" і "узагальнена". Залежність групових параметрів від g є зайвою для породження допустимих перетворень у підкласі $\mathcal{F}$ і є проявом того факту, що довільний елемент g є сталою у цьому підкласі. Ось чому потрібно розглянути його ефективну узагальнену групу еквівалентності. Лише залежність t-коефіцієнта в x-компоненті від g є суттєвою для узагальненої еквівалентності. Водночас, покладання групових параметрів $\bar{T}^i$, $\bar{X}^j$, $\bar{U}^k$ і $\bar{T}^1\bar{F}-\bar{U}^2$ сталими виокремлює підмножину елементів групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, що не є підгрупою цієї групи, хоча ця підмножина є мінімальною серед підмножин групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, що генерують підгрупоїд $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Побудова ефективної узагальненої групи еквівалентності класу $\mathcal{F}$ насправді є більш складною.

Твердження 3.2.5. *Ефективну узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складають точкові перетворення*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t}=T_1t+T_0, \quad \tilde{x}=X_1x+X_2u-X_2gt+X_0,\\
&\tilde{u}=U_1x+U_2u+(1-U_2)gt+U_3t+\frac{T_0}{T_1}g+U_0, \quad \tilde{u}_{\tilde{x}}=\frac{U_1+U_2u_x}{X_1+X_2u_x},\\
&\tilde{f}=\frac{(X_1+X_2u_x)^2}{T_1}f, \quad \tilde{g}=\frac{g+U_3}{T_1},
\end{aligned}
$$

де T_i, X_j, U_k — довільні сталі, причому $T_1(X_1U_2-X_2U_1)\neq 0$.

Доведення. Розглянемо множину H_1 точкових перетворень у просторі з координатами (t,x,u,u_x,f,g), чиї компоненти мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t}=T_1t+T_0,\\
&\tilde{x}=X_1x+X_2u+(A_{11}g+A_{10})t+B_{11}g+B_{10},\\
&\tilde{u}=U_1x+U_2u+(A_{21}g+A_{20})t+B_{21}g+B_{20},\\
&\tilde{u}_{\tilde{x}}=\frac{U_1+U_2u_x}{X_1+X_2u_x}, \quad \tilde{f}=\frac{(X_1+X_2u_x)^2}{T_1}f, \quad \tilde{g}=\frac{C_1g+C_0}{T_1},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

де T_i, X_j, U_k, A_l, B_m, C_n — такі довільні сталі, що задовольняють умову $T_1(X_1U_2-X_2U_1)C_1\neq 0$. Очевидно, що ця множина є замкнутою відносно композиції перетворень і взяття оберненого, тобто вона є (локальною) групою перетворень розмірності $\dim H_1 = 16$. Тоді перетин $H_0 := H_1 \cap \bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ групи H_1 з групою $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, виокремленої з групи H_1 зв'язками $A_{10} = 0$, $A_{11} = -X_2$, $A_{20} = C_0$ і $A_{21} = C_1 - U_2$, також є групою, причому $\dim H_0 = 12$. Підгрупа H_0 групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ породжує весь індукований групою $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ підгрупоїд $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Водночас, для кожної фіксованої пари довільних елементів (f, g) підгрупоїд $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ містить рівно дев'ятипараметричну сім'ю допустимих перетворень із (f, g) як вихідною парою довільних елементів. Ось чому потрібно знайти ще три зв'язки на групові параметри групи H_1, щоб побудувати дев'ятивимірну підгрупу групи H_0, що породжує весь підгрупоїд $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$.

Проаналізуємо композицію $\hat{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{T}}\mathcal{T}$ двох довільних перетворень $\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T}$ з групи H_0. Ці узагальнені перетворення еквівалентності мають загальний вигляд (3.6), де групові параметри задовольняють наведені вище зв'язки для підгрупи H_0. Додатково репараметризуємо H_0, замінивши параметр B_{21} величиною $B'_{21} + T_0/T_1$, і позначимо значення групових параметрів, що відповідають $\hat{\mathcal{T}}$ і $\tilde{\mathcal{T}}$, відповідно дашками та хвильками. Це дає, зокрема, такі вирази для значень групових параметрів для композиції $\hat{\mathcal{T}}$:

$$
\hat{C}_1 = \tilde{C}_1 C_1, \quad \hat{B}_{11} = \tilde{X}_1 B_{11} + \tilde{X}_2 B'_{21} + \frac{\tilde{B}_{11}}{T_1},
$$
$$
\hat{B}'_{21} = \tilde{U}_1 B_{11} + \tilde{U}_2 B'_{21} + \frac{\tilde{B}'_{21}}{T_1},
$$

звідки випливає, що зв'язки $C_1 = 1$, $B_{11} = B'_{21} = 0$, які виокремлюють підмножину $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ з групи H_0, зберігаються при композиції перетворень і взятті оберненого у групі H_0. Отже, $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є дійсно групою. Вона породжує весь підгрупоїд $\mathcal{S}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, а будь-яка її власна підмножина не має цієї властивості, тобто $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є мінімальною підгрупою групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ з такою властивістю. □

Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ підкласу $\mathcal{F}$ не міститься в ефективній узагальненій групі еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, побудованій у твердженні ні 3.2.5. Перетин $G^{\sim}_{\mathcal F}\cap\hat G^{\sim}_{\mathcal F}$ виокремлено з групи $G^{\sim}_{\mathcal F}$ зв'язками $T_0=0$ і $U_2=1$.

Для узагальнення зазначеного твердження необхідно розглянути інфінітезимальні аналоги відповідних груп. Для зручності введемо такі дуальні позначення для релевантних векторних полів на просторі з координатами (t,x,u,u_x,f,g):

$$
\begin{aligned}
&Q^1=P^t=\partial_t,\quad Q^2=D^t=t\partial_t-f\partial_f-g\partial_g,\\
&Q^3=P^x=\partial_x,\quad Q^4=D^x=x\partial_x-u_x\partial_{u_x}+2f\partial_f,\\
&Q^5=P^u=\partial_u,\quad Q^6=D^u=u\partial_u+u_x\partial_{u_x}+g\partial_g,\\
&Q^7=Z^t=t\partial_u+\partial_g,\quad Q^8=Z^x=x\partial_u+\partial_{u_x},\\
&Q^9=R=(u-gt)\partial_x-u_x^2\partial_{u_x}+2u_xf\partial_f.
\end{aligned}
$$

З точністю до антикомутативності дужки Лі ненульові комутаційні співвідношення між цими векторними полями вичерпано такими:

$$
\begin{aligned}
&[P^t,D^t]=P^t,\ [P^x,D^x]=P^x,\ [P^u,D^u]=P^u,\ [P^t,Z^t]=P^u,\\
&[P^x,Z^x]=P^u,\ [Z^t,D^t]=-Z^t,\ [Z^x,D^x]=-Z^x,\ [Z^t,D^u]=Z^t,\\
&[Z^x,D^u]=Z^x,\ [P^t,R]=-gP^x,\ [P^u,R]=P^x,\ [D^x,R]=-R,\\
&[D^u,R]=R,\ [Z^x,R]=D^x-D^u+gZ^t.
\end{aligned}
$$

Алгебри Лі $\mathfrak g^{\sim}_{\mathcal F}$, $\bar{\mathfrak g}^{\sim}_{\mathcal F}$ і $\hat{\mathfrak g}^{\sim}_{\mathcal F}$ груп $G^{\sim}_{\mathcal F}$, $\hat G^{\sim}_{\mathcal F}$ і $\bar G^{\sim}_{\mathcal F}$ природно назвати звичайною алгеброю еквівалентності, узагальненою алгеброю еквівалентності й ефективною узагальненою алгеброю еквівалентності класу $\mathcal F$ відповідно. Кожна з них є множиною інфінітезимальних генераторів однопараметричних підгруп відповідних груп. Для того, щоб побудувати всі такі генератори, послідовно зробимо один із групових параметрів у відповідному загальному вигляді групових елементів залежним від неперервного параметра δ, а інші групові параметри покладемо рівними їхнім значенням, які відповідають тотожному перетворенню, а саме $T_1=X_1=U_2=1$ і $T_0=X_0=X_2=U_0=U_1=U_3=0$ для груп $G^{\sim}_{\mathcal F}$ і $\hat G^{\sim}_{\mathcal F}$ (параметр X_2 релевантний тільки для $\hat G^{\sim}_{\mathcal F}$), і аналогічно

$\bar{T}^1 = \bar{X}^1 = \bar{U}^2 = 1$, $\bar{T}^0 = \bar{X}^0 = \bar{X}^2 = \bar{U}^0 = \bar{U}^1 = 0$ і $\bar{F} = g$ для групи $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Диференціюємо компоненти перетворень по δ при $\delta = 0$. У підсумку, маємо

$$\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{F}} = \langle Q^1, \dots, Q^8 \rangle, \quad \bar{\mathfrak{g}}^{\sim}_{\mathcal{F}} = \left\{ \sum_{i=1}^{9} \vartheta^i(g) Q^i \right\},$$

$$\hat{\mathfrak{g}}^{\sim}_{\mathcal{F}} = \langle P^t + gP^u,\, D^t,\, P^x,\, D^x,\, P^u,\, D^u - gZ^t,\, Z^t,\, Z^x,\, R \rangle,$$

де коефіцієнти ϑ^i пробігають множину гладких функцій від g, тобто алгебра $\bar{\mathfrak{g}}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є модулем над кільцем гладких функцій від g з базисом $(Q^1, \dots, Q^9)$, спорядженим дужкою Лі векторних полів.

Теорема 3.2.6. *Жодна ефективна узагальнена група еквівалентності класу $\mathcal{F}$ не містить звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ цього класу.*

Доведення. Доведемо таке переформульоване твердження. Припустимо, що підгрупа узагальненої групи еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ містить звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ цього класу і породжує той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$, що і вся група $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$. Тоді ця підгрупа не є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\mathcal{F}$.

Повний список дискретних звичайних перетворень еквівалентності класу $\mathcal{F}$, незалежних із точністю до комбінування одне з одним і з неперервними звичайними перетвореннями еквівалентності цього класу, вичерпують інволюції I^t, I^x і I^u, що змінюють знаки наборів (t, f, g), (x, u_x) і (u, u_x, g) відповідно. Серед узагальнених перетворень еквівалентності існує ще одне незалежне дискретне перетворення I^g: $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{x}}, \tilde{f}, \tilde{g}) = (t, x, u - 2gt, u_x, f, -g)$. Дискретні перетворення еквівалентності грають допоміжну роль у доведенні.

Достатньо довести такий інфінітезимальний аналог переформульованого вище твердження. Нехай підалгебра $\mathfrak{h}$ алгебри $\bar{\mathfrak{g}}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ є інваріантною під дією дискретних перетворень із групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, тобто $I^t_*\mathfrak{h}, I^x_*\mathfrak{h}, I^u_*\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$, є асоційованою з деякою (псевдо)групою перетворень та містить алгебру $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ і векторне поле $Q = \sum_{i=1}^{9} \zeta^i Q^i$, де $\zeta^i = \zeta^i(g)$ — гладкі функції від g з $\zeta^9 \neq 0$. Тоді ця підалгебра також є інваріантною під дією I^t_*, I^x_*

і I^u_*, є асоційованою з деякою (псевдо)групою перетворень і містить іншу (власну) підалгебру $\mathfrak{s}$, серед елементів якої є $K^j = \sum_{i=1}^9 \chi^{ij} Q^i$, де χ^{ij} — гладкі функції від g з $\det(\chi^{ij}) \neq 0$, $i, j = 1, \dots, 9$.

Якщо алгебра $\mathfrak{h}$ містить векторне поле R, то прокомутувавши його з елементами алгебри $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{F}}$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&[R, P^t] = gP^x \in \mathfrak{h}, \quad [gP^x, Z^x] = gP^u \in \mathfrak{h},\\
&[Z^x, R] = D^t - D^u + gZ^t \in \mathfrak{h}.
\end{aligned}
$$

Тому $gZ^t \in \mathfrak{h}$, тобто $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{F}} + \langle gP^x, gP^u, gZ^t \rangle \supsetneq \hat{\mathfrak{g}}^\sim_{\mathcal{F}}$. Можна обрати $\mathfrak{s} = \hat{\mathfrak{g}}^\sim_{\mathcal{F}}$. Тоді маємо $I^t_*\mathfrak{s} = I^x_*\mathfrak{s} = I^u_*\mathfrak{s} = I^g_*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$.

Інакше, порахувавши комутатори

$$
\begin{aligned}
&[Q, D^x] = \zeta^9 R - \zeta^8 Z^x + \zeta^3 P^x \in \mathfrak{h},\\
&[\zeta^9 R - \zeta^8 Z^x + \zeta^3 P^x, D^x] = \zeta^9 R + \zeta^8 Z^x + \zeta^3 P^x \in \mathfrak{h},\\
&[\zeta^9 R - \zeta^8 Z^x + \zeta^3 P^x, D^t + D^u] = -\zeta^9 R - \zeta^8 Z^x \in \mathfrak{h},
\end{aligned}
$$

виведемо, що $\zeta^9 R \in \mathfrak{h}$ і $\zeta^9 \neq \mathrm{const}$. Так само можна показати, що для будь-якого елемента $\sum_{i=1}^9 \vartheta^i(g) Q^i \in \mathfrak{h}$ елемент $\vartheta^3 P^x$, а тому й елемент $\vartheta^3 P^u = [\vartheta^3 P^x, Z^x]$ належать алгебрі $\mathfrak{h}$. Взявши ще два комутаційні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&[Z^x, \zeta^9 R] = \zeta^9 (D^x - D^u + gZ^t) \in \mathfrak{h},\\
&[Z^x, \zeta^9 (D^x - D^u + gZ^t)] = -2\zeta^9 Z^x \in \mathfrak{h},
\end{aligned}
$$

отримаємо $\zeta^9 Z^x \in \mathfrak{h}$. Розглянемо лінійну оболонку $\mathfrak{s} = \langle P^t, D^t, Z^t, D^x, D^u, \beta P^x, \beta P^u, \alpha R, \alpha(D^x - D^u + gZ^t), \alpha Z^x \mid \alpha R, \beta P^x \in \mathfrak{h} \rangle$. Вона є підалгеброю алгебри $\mathfrak{h}$. Оскільки вся алгебра $\mathfrak{h}$ є інваріантною під дією I^t_*, I^x_* і I^u_* і є асоційованою з (псевдо)групою перетворень, підалгебра $\mathfrak{s}$ має ті самі властивості. З огляду на умову $R \notin \mathfrak{h}$, параметр-функція α не приймає сталі значення. Тому $Z^x \notin \mathfrak{s}$, тобто $\mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{h}$. Як елементи K^j, $j = 1, \dots, 9$, можна вибрати P^t, D^t, Z^t, D^x, D^u, P^x, P^u, $\zeta^9 R$ і $\zeta^9 Z^x$.

Отже, алгебра $\mathfrak{h}$ не є ефективною узагальненою алгеброю еквівалентності класу $\mathcal{F}$. $\square$

3.3. Класифікація ліївських симетрій

Щоб порахувати максимальні алгебри ліївської інваріантності рівнянь із класу $\mathcal{R}$, використаємо інфінітезимальний метод [69, 77]. Інфінітезимальними генераторами однопараметричних груп ліївської симетрії рівнянь із класу $\mathcal{R}$ є векторні поля $Q=\tau(t,x,u)\partial_t+\xi(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u$ на просторі з координатами (t,x,u), де компоненти τ, ξ, η є гладкими функціями цих координат. Критерій інфінітезимальної інваріантності призводить до системи

$$\left(-\xi_u {u_x}^2+(\eta_u-\xi_x)u_x+\eta_x\right)f_{u_x}+(-2\xi_u u_x+\tau_t-2\xi_x)f=0, \tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned}&\left(-\xi_{uu}u_x^3+(\eta_{uu}-2\xi_{xu}){u_x}^2+(2\eta_{xu}-\xi_{xx})u_x+\eta_{xx}\right)f\\&\qquad+(\xi_t+\xi_u g)u_x+\eta g_u+(\tau_t-\eta_u)g-\eta_t=0.\end{aligned} \tag{3.7b}$$

Тому задача групової класифікації класу $\mathcal{R}$ зводиться до класифікації розв'язків системи (3.7) залежно від значень довільних елементів f і g з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності або з точністю до загальної точкової еквівалентності.

Щоби знайти ядра алгебр ліївської інваріантності класу $\mathcal{R}$ і його підкласів $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ і $\mathcal{C}$ (кожна з цих алгебр є перетином максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь із відповідних (під)класів), послідовно розщепимо рівняння (3.7a) і (3.7b) за довільними елементами і їхніми похідними та за u_x, з огляду відповідні допоміжні рівняння для довільних елементів. Див. також статті [23], [4] і [1, 2], де пораховано відповідно ядра алгебр ліївської інваріантності класів $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ і $\mathcal{F}'$.

Твердження 3.3.1. *Ядро алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{R}}$ класу $\mathcal{R}$ збігається з ядрами алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{H}}$ та $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{C}}$ його підкласів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{C}$ і є оболонкою векторних полів ∂_t і ∂_x: $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{R}}=\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{H}}=\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{C}}=\langle\partial_t,\,\partial_x\rangle$. Ядрами алгебр ліївської інваріантності підкласів $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}'$ є відповідно $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}}=\langle\partial_t,\,\partial_x,\,x\partial_x\rangle$, $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{F}}=\langle\partial_t,\,\partial_x,\partial_u\rangle$, $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{F}'}=\langle\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_u,\,2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle$.*

Об'єднавши групові класифікації підкласів $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{H}$ і $\mathcal{L}$, першу з яких наведено в теоремі 3.4.1 нижче, другу і третю проведено відповідно в [1, 2] і в [4], а четверту можна отримати відображенням перетворення годографа $\tilde t = t$, $\tilde x = u$, $\tilde u = x$ з групової класифікації класу рівнянь Колмогорова в [90], отримаємо таке твердження.

Теорема 3.3.2. *Повний список нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{R}$ вичерпано випадками таблиці 3.1, де використано $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-, $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$-, $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$- і $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}}$-еквівалентності відповідно для рівнянь із підкласів $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ і $\mathcal{L}$.*

Тут $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ — групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}$.

Позначення до таблиці 3.1. Номери з тими самими арабськими цифрами й різними римськими літерами відповідають випадкам, еквівалентним із точністю до додаткових перетворень еквівалентності. Явні формули для цих перетворень наведено під таблицею 3.1. Випадки, що пронумеровані різними числами в арабських цифрах, є нееквівалентними з точністю до точкових перетворень. Алгебри ліївської інваріантності, наведені у випадках 0, 1 і 2, є максимальними лише за умови, що відповідні набори довільних елементів (f, g) є $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-нееквівалентними іншим випадкам.

(Звичайні) групи еквівалентності підкласів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{C}$ збігаються одна з одною, а також із групою $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$. Ось чому у класі $\mathcal{R}$ випадки $3'$ і $4\mathrm{a}'$ можна об'єднати відповідно з випадками 3 і 4a, дозволивши значення $n = 0$.

Перекреслені номери випадків 12c і 12d вказують на те, що вони неявно наведені в списку розширень ліївської симетрії для підкласу $\mathcal{F}$ з огляду на їх $\bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$-еквівалентність випадку 12a.

Для випадків у таблиці виконуються такі умови: $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, $m \in \mathbb{R}$; $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$; $m \neq -1, 0, 1$ і $(n, m) \neq (1, 2)$ у випадку 4a; $m \neq 0, 1$ у випадку $4\mathrm{a}'$; $n \neq \pm 1$ у випадку 4b; $n \geqslant -1 \bmod \bar G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ у випадку 9a; $m \geqslant 0 \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$ у випадку 11 у випадках 12a, 12b і 12c параметр-функція $h = h(t, x)$ пробігає множину розв'язків відповідних

Таблиця 3.1: Групова класифікація класу $\mathcal{R}$

№	$f(u_x)$	$g(u)$	Базис максимальної алгебри ліївської інваріантності
			Підклас $\mathcal{C}$, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x$
1	$\forall$	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^t\partial_u$
2	$\forall$	u^{-1}	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u$
3	$\lvert u_x\rvert^n$	$\varepsilon\mathrm{e}^u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ (n+2)t\partial_t+x\partial_x-(n+2)\partial_u$
4a	$\lvert u_x\rvert^n$	$\lvert u\rvert^m$	$\partial_t,\ \partial_x,\ (1-m)(n+2)t\partial_t+(n+1-m)x\partial_x+(n+2)u\partial_u$
4b	$\lvert u_x\rvert^n$	$\lvert u\rvert^{n+1}+\varepsilon u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon nt}(\varepsilon\partial_t+u\partial_u)$
5	$(u_x+1)^{-1}$	εu	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}\partial_u,\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}(\partial_t+\varepsilon(u+x)\partial_u)$
6a	u_x	u^2	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t-u\partial_u,\ t^2\partial_t-(2tu+1)\partial_u$
6b	u_x	u^2+1	$\partial_t,\ \partial_x,\ \cos 2t\,(\partial_t+2\partial_u)+2u\sin 2t\,\partial_u,\ \sin 2t\,(\partial_t+2\partial_u)-2u\cos 2t\,\partial_u$
6c	u_x	u^2-1	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{2t}(\partial_t-2(u+1)\partial_u),\ \mathrm{e}^{-2t}(\partial_t+2(u-1)\partial_u)$
7	$u_x(u_x{+}1)^{-3}$	εu	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}\partial_u,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon t}(\partial_t-\varepsilon u\partial_x+\varepsilon u\partial_u)$
9b	$\lvert u_x\rvert^n$	εu	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}\partial_u,\ nx\partial_x+(n+2)u\partial_u,\ \mathrm{e}^{-\varepsilon nt}(\partial_t+\varepsilon u\partial_u)$
			Підклас $\mathcal{F}$, з точністю до $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$-еквівалентності
8	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u$
9a	$\lvert u_x\rvert^n$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u,\ nt\partial_t-u\partial_u$
10	e^{u_x}	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u,\ t\partial_t-x\partial_u$
11	$\dfrac{\mathrm{e}^{m\,\mathrm{arctg}\,u_x}}{{u_x}^2+1}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u,\ mt\partial_t+u\partial_x-x\partial_u$
12a	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x,\ u\partial_u,\ 2t\partial_x-xu\partial_u,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-(x^2+2t)u\partial_u,\ h\partial_u$
			Підклас $\mathcal{H}$, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності; тільки випадки, додаткові до випадку 12a
3′	1	$\varepsilon\mathrm{e}^u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x-2\partial_u$
4a′	1	$\lvert u\rvert^m$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2(1-m)t\partial_t+(1-m)x\partial_x+2u\partial_u$
13	1	$\varepsilon u\ln\lvert u\rvert$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}(2\partial_x-\varepsilon xu\partial_u),\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}u\partial_u$
12b	1	εu	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x+2\varepsilon tu\partial_u,\ u\partial_u,\ 2t\partial_x-xu\partial_u,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-(x^2+2t-4\varepsilon t^2)u\partial_u,\ h\partial_u$
~~12~~c	1	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x+2t\partial_u,\ (u-t)\partial_u,\ 2t\partial_x-x(u-t)\partial_u,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-\big((x^2{+}2t)(u-t)-4t^2\big)\partial_u,\ h\partial_u$
			Підклас $\mathcal{L}$, з точністю до $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}}$-еквівалентності
14	u_x^{-2}	$\forall$	$\partial_t,\ \tilde{h}\partial_x,\ x\partial_x$
15	u_x^{-2}	μu^{-1}	$\partial_t,\ \tilde{h}\partial_x,\ x\partial_x,\ 4t\partial_t+2u\partial_u,\ 4t^2\partial_t+4tu\partial_u-\big(u^2+2(1+\nu)t\big)x\partial_x$
16	u_x^{-2}	$\dfrac{1{-}2\nu\,\mathrm{tg}\ln\lvert u\rvert^\nu}{u}$	$\partial_t,\ \tilde{h}\partial_x,\ x\partial_x,\ 2t\partial_t+u\partial_u-xug\partial_x,\ 4t^2\partial_t{+}4tu\partial_u{-}(u^2{+}2t{+}2tug)x\partial_x$
~~12~~d	u_x^{-2}	0	$\partial_t,\ \tilde{h}\partial_x,\ x\partial_x,\ 2t\partial_t+u\partial_u,\ 4t^2\partial_t+4tu\partial_u-(u^2+2t)x\partial_x,\ 2t\partial_u-xu\partial_x$

рівнянь: $h_t = h_{xx}$, $h_t = h_{xx} + \varepsilon h$ і $h_t = h_{xx} + \varepsilon$; у випадках 14–16 і 12d дійсні сталі параметри μ і ν задовольняють із точністю до точкових перетворень зв'язки $\mu \geqslant 1$, $\mu \neq 2$ і $\nu > 0$, а параметр-функція $\tilde{h} = \tilde{h}(t, u)$ пробігає множину розв'язків лінійного рівняння $\tilde{h}_t = \tilde{h}_{uu} - g(u)\tilde{h}_u$.

Додаткові перетворення еквівалентності між випадками таблиці вичерпано такими:

6b $\to$ 6a: $\tilde{t} = \operatorname{arctg} t,\ \ \tilde{x} = x,\ \ \tilde{u} = (t^2+1)u + t;$

6c $\to$ 6a: $\tilde{t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|,\ \ \tilde{x} = x,\ \ \tilde{u} = (t^2-1)u + t;$

4b $\to$ 4a$_{m=n+1}$, 9b $\to$ 9a: $\tilde{t} = \mathrm{e}^{\varepsilon n t}/(\varepsilon n),\ \ \tilde{x} = x,\ \ \tilde{u} = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}u;$

12b $\to$ 12a: $\tilde{t} = t,\ \ \tilde{x} = x,\ \ \tilde{u} = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}u;$

12c $\to$ 12a: $\tilde{t} = t,\ \ \tilde{x} = x,\ \ \tilde{u} = u - t;$

12d $\to$ 12a: $\tilde{t} = t,\ \ \tilde{x} = u,\ \ \tilde{u} = x.$

3.4. Розв'язок задачі групової класифікації для регулярного підкласу

Цей підрозділ присвячено доведенню такої теореми.

Теорема 3.4.1. *Повний список $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{C}$ вичерпано випадками 1, 2, 3, 4a, 4b, 5, 6a, 6b, 6c, 7 і 9b таблиці 3.1.*

Нагадаємо, що $G^{\sim}_{\mathcal{C}}$-еквівалентність збігається з обмеженням $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності на клас $\mathcal{C}$.

Виявляється, що крім рівнянь $\tau_x = \tau_u = 0$, компоненти векторних полів ліївської симетрії рівнянь із класу $\mathcal{C}$ також задовольняють інші визначальні рівняння, що не задіюють довільні елементи f і g.

Лема 3.4.2. *За умов $f_{u_x} \neq 0$, $({u_x}^2 f)_{u_x} \neq 0$ і $g_u \neq 0$ із системи* (3.7) *випливає, що*

$$\xi_{xx} = \xi_{xu} = \xi_{uu} = \eta_{xx} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0. \tag{3.8}$$

Доведення. Розглянемо два очевидних диференціальних наслідки системи (3.7). Один із них виведемо, діючи операторами $u_x\partial_u + \partial_x$ і $-\partial_{u_x}$ відповідно на рівняння (3.7a) і (3.7b) і додаючи отримані рівняння:

$$\big(\xi_{uu}{u_x}^2 - 2\eta_{uu}u_x - 2\eta_{xu} - \xi_{xx}\big)f = \xi_t + \xi_u g. \tag{3.9}$$

Іншим наслідком є сума рівняння (3.7b) і рівняння (3.9), домноженого на u_x:

$$\big((\eta_{uu} + 2\xi_{xu}){u_x}^2 + 2\xi_{xx}u_x - \eta_{xx}\big)f = \eta g_u + (\tau_t - \eta_u)g - \eta_t. \tag{3.10}$$

Рівняння (3.9) і (3.10) наводять на думку, що доведення треба розбити на три випадки залежно від того, чи дають ці рівняння умови на f, і якою є структура цих умов:

1. $(1/f)_{u_xu_xu_x} \neq 0$, 2. $(1/f)_{u_xu_xu_x} = 0$, $(1/f)_{u_xu_x} \neq 0$, і
3. $(1/f)_{u_xu_x} = 0$.

У першому випадку наведені вище диференціальні наслідки можна розщепити і за f, і за u_x, що одразу призводить до шуканих рівнянь.

Третя умова означає, що $f = (u_x + \gamma)^{-1} \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$. (Нагадаємо, що $f_{u_x} \neq 0$.) Підстановка виразу для функції f у (3.7a) і розщеплення за похідною u_x дають рівняння $\xi_u = 0$, $\eta_u = \gamma(\tau_t - \xi_x)$ і $\eta_x = \tau_t - \xi_x$, які призводять до $\eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$. Використовуючи виведені рівняння, спростимо рівняння (3.9), а потім знов “підставимо й розщепимо”, що зокрема дає $\xi_{xx} = 0$, а тому також $\eta_{xx} = 0$.

У другому випадку, який є набагато складнішим за інші, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності покладемо $f = ({u_x}^2+2\beta u_x+\gamma)^{-1}$, де $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$, оскільки $({u_x}^2 f)_{u_x} \neq 0$. Підставляючи вираз для функції f у (3.7a) і розщеплюючи за похідною u_x, отримаємо

$$\begin{aligned}&\eta_u = -\beta\xi_u + \frac{1}{2}\tau_t, \quad \eta_x = -\beta\xi_x + \frac{\beta}{2}\tau_t + (\beta^2 - \gamma)\xi_u,\\ &(\beta^2 - \gamma)(2\xi_x - \beta\xi_u - \tau_t) = 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Перехресне диференціювання перших двох рівнянь у (3.11) дає $(\beta^2-\gamma)\xi_{uu}=0$. Диференціювання останнього рівняння в (3.11) по x і по u

відповідно дають $(\beta^2-\gamma)\xi_{xu}=0$ і $(\beta^2-\gamma)\xi_{xx}=0$. З огляду на ці рівняння те саме диференціювання перших двох рівнянь у (3.11) призводить до $\eta_{xx}=-\beta\xi_{xx}$, $\eta_{xu}=-\beta\xi_{xu}$ і $\eta_{uu}=-\beta\xi_{uu}$. Отже, якщо $\gamma\neq\beta^2$, то маємо шукані визначальні рівняння.

Припустимо, що $\gamma=\beta^2$. Тоді $\beta\neq 0$, і з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності можна покласти $\beta=1$, тобто $f=(u_x+1)^{-2}$. Загальним розв'язком системи $\eta_x=-\xi_x+\tau_t/2$, $\eta_u=-\xi_u+\tau_t/2$ є $\eta=\tau_t(u+x)/2-\xi+\eta^0$, де η^0 — довільна гладка функція від t. Для цих значень функцій f і η визначальне рівняння (3.7b) набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&\big((\xi_t+\xi_u g)u_x+\eta g_u+(\tau_t-\eta_u)g-\eta_t\big)(u_x+1)=\\
&\qquad \xi_{uu}{u_x}^2+2\xi_{xu}u_x+\xi_{xx},
\end{aligned}
$$

а його розщеплення за степенями похідної u_x призводить до системи

$$
\begin{aligned}
&\xi_t+\xi_u g=\xi_{uu}, \quad \eta g_u+(\tau_t-\eta_u)g-\eta_t=\xi_{xx},\\
&\xi_{uu}-2\xi_{xu}+\xi_{xx}=0.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Останнє рівняння можна зобразити як $(\partial_x-\partial_u)^2\xi=0$, а тому його загальним розв'язком є $\xi=\xi^1(t,\omega)u+\xi^0(t,\omega)$, де ξ^1 і ξ^0 — довільні гладкі функції від t і $\omega=x+u$. З огляду на виведені вирази для ξ і η система перших двох рівнянь системи (3.12) зводиться до системи

$$
\xi^1_t u+\xi^0_t+(\xi^1_\omega u+\xi^1+\xi^0_\omega)g=\xi^1_{\omega\omega}u+2\xi^1_\omega+\xi^0_{\omega\omega}, \tag{3.13}
$$
$$
(-2\xi^1 u-2\xi^0+\tau_t\omega+2\eta^0)g_u+\tau_t g+4\xi^1_\omega-\tau_{tt}\omega-2\eta^0_t=0. \tag{3.14}
$$

Вважаємо (t,ω,u) набором незалежних змінних в останній системі.

Якщо довільний елемент g не є дробово-лінійною функцією, то рівняння (3.13) можна розщепити одночасно за g та u й отримати рівняння $\xi^1_\omega=0$ і $\xi^0_\omega=-\xi^1$, наслідком яких є $\xi^0_{\omega\omega}=0$. Навпаки (тобто у випадку несталої дробово-лінійної функції g, оскільки $g_u\neq 0$ за припущенням леми), диференціюємо рівняння (3.14) по ω і розщеплюємо виведені диференціальні наслідки за u, що знову призводить до рівнянь $\xi^1_\omega=0$ і $\xi^0_{\omega\omega}=0$. Отже, у третьому випадку також маємо шукані рівняння $\xi_{xx}=\xi_{xu}=\xi_{uu}=0$, а тому і $\eta_{xx}=\eta_{xu}=\eta_{uu}=0$. □

Інакше кажучи, система визначальних рівнянь на ліївські симетрії рівнянь із класу $\mathcal{C}$ насправді зводиться до системи рівнянь $\tau_x = \tau_u = 0$, (3.7a), (3.8) і

$$\xi_t + \xi_u g = 0, \tag{3.15}$$

$$\eta g_u + (\tau_t - \eta_u)g - \eta_t = 0. \tag{3.16}$$

Система (3.8) еквівалентна такому зображенню компонент ξ і η:

$$\xi = \xi^1(t)x + \xi^2(t)u + \xi^0(t), \quad \eta = \eta^1(t)x + \eta^2(t)u + \eta^0(t),$$

де ξ^0, ξ^1, ξ^2, η^0, η^1, η^2 — гладкі функції від t.

Лема 3.4.3. *(i) Для всіх рівнянь із класу $\mathcal{C}$, крім $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентних рівнянням випадку 7, x-компоненти векторних полів ліївської симетрії задовольняють визначальне рівняння $\xi_u = 0$.*

(ii) для всіх рівнянь із класу $\mathcal{C}$, крім $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентних рівнянням випадку 5, u-компоненти векторних полів ліївської симетрії задовольняють визначальне рівняння $\eta_x = 0$.

Доведення. Припустимо, що рівняння $\mathcal{E}$ з класу $\mathcal{C}$ допускає векторне поле Q ліївської симетрії з $(\xi^2, \eta^1) \neq (0, 0)$, а (f, g) є асоційованим значенням набору довільних елементів.

Якщо $\xi_u = \xi^2 \neq 0$ (відповідно $\eta_x = \eta^1 \neq 0$) для векторного поля Q, то рівняння (3.15) (відповідно диференціальний наслідок рівняння (3.16), отриманий дією оператора ∂_x) означає, що $g_{uu} = 0$, а тому $g = u \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$, оскільки $g_u \neq 0$ у класі $\mathcal{C}$. Рівняння (3.15) і (3.16) для цього значення довільного елемента g розщеплено за (x, u) відповідно до рівнянь

$$\xi^0_t = \xi^1_t = 0, \quad \xi^2_t = -\xi^2 \quad \text{і} \quad \eta^0_t = \eta^0, \quad \eta^1_t = \eta^1, \quad \eta^2_t = \tau_t. \tag{3.17}$$

Тепер застосуємо розгалужене розщеплення за функцією f. Тут рівняння шаблонного вигляду на функцію f має форму

$$(a_1 {u_x}^2 + a_2 u_x + a_3) f_{u_x} + (2a_1 u_x + a_4) f = 0, \tag{3.18}$$

де $a_1, \ldots, a_4$ — сталі. Його отримують фіксуванням t у класифікуючих рівняннях (3.7a). Позначимо через k кількість лінійно незалежних наборів (a_1, a_2, a_3, a_4) серед тих, що відповідають рівнянням шаблонного вигляду на функцію f. Маємо $k > 0$, оскільки $(\xi^2, \eta^1) \neq (0,0)$ для векторного поля Q.

Якщо $k \geqslant 2$, то $f = \varepsilon(u_x+1)^{-2} \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$ з $\varepsilon = \pm 1$, оскільки $f_{u_x} \neq 0$ і $({u_x}^2 f)_{u_x} \neq 0$ для рівнянь із класу $\mathcal{C}$. Розщеплюючи рівняння (3.7a) для цього значення довільного елемента f за похідною u_x, виведемо рівняння $\tau_t = 2\eta^1 + 2\xi^1$ і $R := \xi^1 - \xi^2 + \eta^1 - \eta^2 = 0$. Тоді з огляду на систему (3.17) маємо $\tau_{tt} = 2\eta^1$, $R_{tt} = -\xi^2 + \eta^1 = 0$ і $R_{ttt} = \xi^2 + \eta^1 = 0$, тобто $\xi^2 = \eta^1 = 0$ для всіх векторних полів ліївської симетрії рівняння $\mathcal{E}$, що суперечить умові $(\xi^2, \eta^1) \neq (0,0)$ для Q.

Отже, $k = 1$. Зафіксуємо рівняння шаблонного вигляду й нехай (a_1, a_2, a_3, a_4) — відповідний (ненульовий) набір коефіцієнтів. Оскільки $k = 1$, то набір коефіцієнтів $(-\xi^2, \eta^2 - \xi^1, \eta^1, \tau_t - 2\xi^1)$ рівняння (3.7a) пропорційний до (a_1, a_2, a_3, a_4):

$$-\xi^2 = \lambda a_1, \quad \eta^2 - \xi^1 = \lambda a_2, \quad \eta^1 = \lambda a_3, \quad \tau_t - 2\xi^1 = \lambda a_4, \tag{3.19}$$

де $\lambda = \lambda(t)$ — ненульова гладка функція від t, а $(a_1, a_3) \neq (0,0)$, оскільки $(\xi^2, \eta^1) \neq (0,0)$ для векторного поля Q. Це означає, що $a_1\eta^1 + a_3\xi^2 = 0$. Диференціювання цього рівняння по t з огляду на (3.17) дає рівняння $a_1\eta^1 - a_3\xi^2 = 0$, тобто $a_1\eta^1 = a_3\xi^2 = 0$, а тому $\xi^2\eta^1 = a_1 a_3 = 0$.

Якщо $a_1 \neq 0$, то завдяки можливості одночасного протилежного масштабування набору (a_1, a_2, a_3, a_4) і функції λ без обмеження загальності можна вважати, що $a_1 = 1$ і $\lambda = -\xi^2 \neq 0$. Тому $\eta^1 = 0$ і $a_3 = 0$. Іншими рівняннями, що випливають з (3.19), є $\eta^2 = -a_2\xi^2 + \xi^1$ і $\tau_t = -a_4\xi^2 + 2\xi^1$. Скомбінуємо їх із рівняннями системи (3.17), звідки $\tau_t = \eta^2_t = a_2\xi^2$, що призводить до $a_4 = -a_2$ і $\xi^1 = 0$. Маємо $a_2 \neq 0$, оскільки інакше фіксоване рівняння шаблонного вигляду на функцію f суперечить допоміжній нерівності $({u_x}^2 f)_{u_x} \neq 0$ для довільних елементів рівнянь із класу $\mathcal{C}$. Ось чому з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності можна покласти $a_2 = 1$ і отримати (після заміни знаку t, якщо $\varepsilon = -1$) випадок 7.

Для випадку $a_3 \neq 0$ розгляд аналогічний. Завдяки можливості одночасного протилежного масштабування набору (a_1, a_2, a_3, a_4) і функції λ без обмеження загальності можна вважати, що $a_3 = 1$ і $\lambda = \eta^1 \neq 0$. Тому $\xi^2 = 0$ і $a_1 = 0$. Іншими рівняннями, що випливають з (3.19) є

$$\eta^2 = a_2\eta^1 + \xi^1, \quad \tau_t = a_4\eta^1 + 2\xi^1.$$

Комбінування їх із рівняннями системи (3.17) дає $\tau_t = \eta^2_t = a_2\eta^1$, що призводить до $a_4 = a_2$ і $\xi^1 = 0$. Маємо $a_2 \neq 0$, оскільки інакше фіксоване рівняння шаблонного вигляду на функцію f суперечить допоміжній нерівності $f_{u_x} \neq 0$ на довільні елементи рівнянь із класу $\mathcal{C}$. Ось чому з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентності можна покласти $a_2 = 1$ і отримати (після зміни знаку t, якщо $\varepsilon = -1$) випадок 5. □

Отже, з доведення класифікаційної задачі можна виключити рівняння, $G^{\sim}_{\mathcal{R}}$-еквівалентні рівнянням із випадків 5 або 7, і додатково можна покласти $\xi_t = \xi_u = \eta_x = 0$, тобто

$$\xi = c_1x + c_2, \quad \eta = \eta^2(t)u + \eta^0(t),$$

де c_1, c_2 — сталі. Нерозв'язні визначальні рівняння вичерпано зведеним варіантом рівнянь (3.7a) і (3.16):

$$(\eta^2 - c_1)u_xf_{u_x} + (\tau_t - 2c_1)f = 0, \tag{3.20}$$

$$(\eta^2u + \eta^0)g_u + (\tau_t - \eta^2)g = \eta^2_tu + \eta^0_t. \tag{3.21}$$

Завершимо групову класифікацію класу $\mathcal{C}$ методом розгалуженого розщеплення. Система зведених класифікуючих рівнянь (3.20) і (3.21) є незачепленою, а довільні елементи f і g є унарними функціями різних аргументів. Тому потрібно застосувати двокрокове розгалужене розщеплення — спочатку за функцією f, а потім за функцією g. Тут рівняннями шаблонного вигляду на функції f і g є відповідно

$$a_2u_xf_{u_x} + a_4f = 0, \tag{3.22}$$

$$(b_1u + b_2)g_u + b_3g = b_4u + b_5, \tag{3.23}$$

де a_2, a_4 і b_1, …, b_5 — сталі. (Сталі a_2 і a_4 позначаємо у сумісний із шаблонним виглядом (3.18) спосіб.) Рівняння шаблонного вигляду на функції f і g отримують фіксуванням t у відповідних класифікуючих рівняннях (3.20) і (3.21). Позначимо через k (або l) кількість лінійно незалежних наборів (a_2, a_4) (або $(b_1, \dots, b_5)$) серед тих, що відповідають рівнянням шаблонного вигляду на функцію f (або g). Маємо $k < 2$, оскільки $f \neq 0$.

$\boldsymbol{k = 0}$. Це означає, що рівняння (3.20) є тотожністю відносно функції f, тобто $\eta^2 = c_1$ і $\tau_t = 2c_1$. Тоді $b_3 = b_1$ і $b_4 = 0$ у шаблонному вигляді (3.23) рівнянь на функцію g. Кількість l лінійно незалежних наборів серед можливих значень набору коефіцієнтів (b_1, b_2, b_5) не може перевищувати одного, оскільки інакше відповідна система рівнянь шаблонного вигляду є або несумісною, або має тільки сталі розв'язки, що суперечить допоміжній нерівності $g_u \neq 0$ для довільних елементів рівнянь із класу $\mathcal{C}$. Якщо $l = 0$, тобто класифікуюче рівняння (3.21) є також тотожністю, то отримаємо загальний класифікаційний випадок 0 таблиці 3.1 без розширення ліївської симетрії. Для $l = 1$, залежно від того, чи зникає коефіцієнт b_1 у нетотожному рівнянні шаблонного вигляду, отримаємо, що або $g = u \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$, або $g = u^{-1} + \nu \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$. Перший розв'язок відповідає випадку 1, а другий призводить до випадку 2 з огляду на умову $\nu = 0$, оскільки для $\nu \neq 0$ знову отримаємо ядро алгебр інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{C}} = \langle \partial_t,\, \partial_x \rangle$, що відповідає умові $l = 0$ і суперечить умові $l = 1$.

$\boldsymbol{k = 1}$. Зафіксуємо (нетотожне) рівняння шаблонного вигляду на функцію f, і нехай (a_2, a_4) — відповідний (ненульовий) набір коефіцієнтів. Нерівність $f \neq 0$ означає, що $a_2 \neq 0$, а тому можна покласти $a_2 = 1$. Позначимо $n := -a_4$. Тоді рівняння (3.22) означає, що $f = |u_x|^n \bmod G^{\sim}_{\mathcal{R}}$, де $n \neq 0$ і $n \neq -2$ згідно з допоміжними нерівностями $f_{u_x} \neq 0$ і $(u_x{}^2 f)_{u_x} \neq 0$ для довільних елементів рівнянь із класу $\mathcal{C}$. Оскільки $k = 1$, то набір коефіцієнтів $(\eta^2 - c_1, \tau_t - 2c_1)$ рівняння (3.20) пропорційний набору $(1, -n)$. Інакше кажучи, $\eta^2 - c_1 = \lambda$, $\tau_t - 2c_1 = -n\lambda$, де $\lambda = \lambda(t)$ —

ненульова гладка функція від t. Тому $\tau_t = -n\eta^2 + (n+2)c_1$, а рівняння (3.21) набуває вигляду

$$(\eta^2 u + \eta^0)g_u + \big((n+2)c_1 - (n+1)\eta^2\big)g = \eta^2_t u + \eta^0_t. \tag{3.24}$$

Застосуємо розгалужене розщеплення за функцією g, використовуючи величину l для розрізнення класифікаційних випадків. Маємо $l>0$, оскільки інакше рівняння (3.24) є тотожністю відносно g, а тому $\eta^0 = \eta^2 = 0$ і, з огляду на умови $n \neq -2$, $c_1 = 0$, воно призводить до ядра алгебр інваріантності $\mathfrak{g}^\cap_{\mathcal{C}} = \langle \partial_t, \partial_x \rangle$ і дає $k=0$, що суперечить умові $k=1$. Подальший розгляд розбивається на два випадки, $l \geqslant 2$ і $l=1$.

$l \geqslant 2$. Зауважимо, що максимальним значенням величини l є три, бо для більшого значення l системи рівнянь шаблонного вигляду несумісні.

Припустимо, що для двох рівнянь шаблонного вигляду з лінійно незалежними наборами коефіцієнтів $(b_1,\dots,b_5)$ і $(b'_1,\dots,b'_5)$ виконуються умови $b_2b'_1 - b'_2b_1 \neq 0$, $b_3b'_1 - b'_3b_1 = 0$ і $b_4b'_1 - b'_4b_1 \neq 0$. Тоді сумісність цих рівнянь означає, що $g_{uuu} = 0$ і $g_{uu} \neq 0$, тобто $g = u^2 + \delta \bmod G^\sim_{\mathcal{R}}$ з $\delta \in \{-1,0,1\}$. Розщеплюючи рівняння (3.24) для отриманих значень довільного елемента g за u, виведемо рівняння

$$(n+2)c_1 = (n-1)\eta^2, \quad \eta^0_t = -2\delta\eta^2, \quad \eta^2_t = 2\eta^0.$$

Отже $n=1$, оскільки інакше $\eta^0 = 0$, $\delta c_1 = 0$ і $\eta^2 = (n+2)c_1/(n-1)$, а тому $l \leqslant 1$, що суперечить умові $l \geqslant 2$. Звідси $c_1 = 0$, й отримаємо випадки 6a, 6b і 6c залежно від значення величини δ.

Якщо існує пара рівнянь шаблонного вигляду з будь-якими іншими умовами на відповідні лінійно незалежні набори коефіцієнтів b_i і b'_j, то $g_{uu} = 0$, тобто $g = \varepsilon u \bmod G^\sim_{\mathcal{R}}$ з $\varepsilon \in \{-1,1\}$ з огляду на допоміжну нерівність $g_u \neq 0$ у класі $\mathcal{C}$. Рівняння (3.24) з цим значенням довільного елемента g можна розщепити на рівняння

$$\eta^2_t = -\varepsilon n\eta^2 + \varepsilon(n+2)c_1, \quad \eta^0_t = \varepsilon\eta^0.$$

У підсумку, отримаємо випадок 9b, для якого насправді $l=3$.

$l=1$. Тоді набір коефіцієнтів рівняння (3.24) пропорційний (ненульовому) набору коефіцієнтів рівняння шаблонного вигляду:

$$\eta^2=\chi b_1,\quad \eta^0=\chi b_2,\quad (n+2)c_1-(n+1)\eta^2=\chi b_3,$$
$$-\eta^2_t=\chi b_4,\quad -\eta^0_t=\chi b_5,$$

де $\chi=\chi(t)$ — ненульова гладка функція від t. До того ж, маємо нерівність $g_{uu}\neq 0$, оскільки інакше $l=2$. Розглянемо окремо два випадки: $(b_1,b_4)\neq(0,0)$ і $b_1=b_4=0$.

Припустимо спочатку, що $(b_1,b_4)\neq(0,0)$. Комбінуючи наведені вище рівняння, виведемо рівняння $b_1\chi_t+b_4\chi=0$ і $b_2\chi_t+b_5\chi=0$, чия сумісність як алгебраїчних рівнянь відносно (χ_t,χ) означає, що пара (b_2,b_5) пропорційна парі (b_1,b_4). Отже, з точністю до $G^\sim_{\mathcal R}$-еквівалентності (більш точно, до зсувів змінної u) можна покласти $b_2=b_5=0$, а тому $\eta^0=0$. Тоді стає очевидним, що $b_1\neq 0$, оскільки інакше $b_3b_4\neq 0$, що означає $g_{uu}=0$. Тому завдяки можливості одночасного протилежного масштабування набору (b_1,b_3,b_4) і функції χ без обмеження загальності можна вважати, що $b_1=1$ і $\chi=\eta^2\neq 0$. Звідси

$$(n+2)c_1=(n+1+b_3)\eta^2,\quad \eta^2_t=-b_4\eta^2.$$

Для $b_4=0$ прямо отримаємо випадок 4a. Якщо $b_4\neq 0$, то $c_1=0$ і $b_3=-n-1$, що дає випадок 4b.

Нехай $b_1=b_4=0$. Тоді нерівність $g_{uu}\neq 0$ означає, що $b_2\neq 0$ і $b_5=0$. Щоб вивести останню рівність, використаємо той факт, що інакше $\eta^0_t=b_2\chi_t\neq 0$, а тому $b_3=0$, що суперечить нерівності $g_{uu}\neq 0$. Отже, $g=\varepsilon \mathrm{e}^u \bmod G^\sim_{\mathcal R}$ з $\varepsilon\in\{-1,1\}$, що дає випадок 3.

Доведення теореми 3.4.1 завершено.

РОЗДІЛ 4

Симетрійний аналіз моделі ізотермічного дрейфового потоку

4.1. Вступ

Фізичні процеси часто моделюють системами квазилінійних диференціальних рівнянь першого порядку, тобто системами диференціальних рівнянь першого порядку, які є лінійними за похідними залежних змінних, чиї коефіцієнти можуть у загальному випадку залежати від залежних і незалежних змінних. Такі системи часто виникають в акустиці, механіці рідини й газовій динаміці [114], а у випадку двох незалежних змінних вони мають загальний вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} A^{ij}\frac{\partial u^j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} B^{ij}\frac{\partial u^j}{\partial x} + C^i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

де $n \times n$ матриці $A = (A^{ij})$, $B = (B^{ij})$ і n-компонентний вектор $C = (C^i)$ — функції від незалежних змінних (t, x) і залежних змінних $(u^1, \dots, u^n)$, але не від їхніх похідних. Такі системи і їхні природні узагальнення для випадку понад двох незалежних змінних відомі як (трансляційно неінваріантні неоднорідні) системи гідродинамічного типу і є предметом інтенсивного дослідження; див. наприклад роботи [20, 22, 40, 42, 43, 68, 78, 97, 98] і посилання в них.

Важливим класом таких систем є еволюційні трансляційно інваріантні системи гідродинамічного типу з двома незалежними змінними, для яких матриця A — $n \times n$ одинична матриця, вектор C зникає, а матриця B залежить лише від залежних змінних. Заради лаконічності називатимемо саме такі системи системами гідродинамічного типу.

Якщо систему гідродинамічного типу можна діагоналізувати заміною залежних змінних $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$, тобто $\tilde{B}^{ij} = 0$ для нової матриці $\tilde{B}$, якщо $i \neq j$, а $V^i := \tilde{B}^{ii}$ є власними значеннями матриці B, то нові залежні змінні називають *рімановими інваріантами* цієї системи, а власні значення $V^1, \ldots, V^n$ — характеристичними швидкостями системи, див. наприклад [94]. Зауважимо, що системи гідродинамічного типу з понад двома залежними змінними загалом не є діагоналізовними. Діагоналізовану систему гідродинамічного типу називають істинно нелінійною, якщо $V_i^i \neq 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, і лінійно виродженою, якщо не виконується жодна з цих нерівностей. Тут і нижче, якщо не вказано явно, індекси i, j, k змінюються від 1 до n, а функція з нижнім індексом на кшталт i позначає похідну по i-му рімановому інваріанту.

У теорії систем гідродинамічного типу існує критерій інтегровності, що ґрунтується на узагальненому перетворенні годографа [9, 10]. Цей критерій стверджує, що діагоналізована строго гіперболічна (строга гіперболічність означає, що всі характеристичні швидкості V^i дійсні й різні) система гідродинамічного типу є інтегровною в наведеному нижче сенсі тоді й лише тоді, коли має місце умова

$$\partial_i \frac{V_j^k}{V^j - V^k} = \partial_j \frac{V_i^k}{V^i - V^k}$$

для всіх $i \neq k \neq j$ (тут немає підсумовування за повторюваними індексами). Такі системи гідродинамічного типу називають *напівгамільтоновими* [9, 10]; див. наприклад [29, с. 60] і [30] для подальшої інформації. Якщо задано діагоналізовану систему гідродинамічного типу

$$\mathfrak{r}_t^i + V^i \mathfrak{r}_x^i = 0,$$

де $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}^1, \ldots, \mathfrak{r}^n)$ — набір її рімановмх інваріантів, а $V = (V^1, \ldots, V^n)$ — відповідний набір характеристичних швидкостей, то узагальнене перетворення годографа дає змогу локально зобразити загальний розв'язок цієї системи (за винятком розв'язків, для яких $\mathfrak{r}^i_x = 0$ для деякого індексу i) у вигляді

$$x - V^i(\mathfrak{r})t = W^i(\mathfrak{r}), \tag{4.2}$$

де $W = (W^1, \dots, W^n)$ — загальний розв'язок системи

$$\frac{W^i_j}{W^j - W^i} = \frac{V^i_j}{V^j - V^i}, \quad i \neq j,$$

з умовою невиродженості $\det(V^i_j t + W^i_j) \neq 0$ (знову немає підсумовування за повторюваними індексами), яка гарантує, що анзац (4.2) локально розв'язний відносно $\mathfrak{r}$.

Надалі в поточному розділі працюватимемо з трикомпонентною ($n = 3$) системою гідродинамічного типу, що виникає під час вивчення моделі двофазового потоку. Ця задача є дуже важливою у фізиці завдяки її застосуванню в кількох галузях, як-от атомна енергетика та хімічна промисловість [31, 116].

Оскільки вона є досить складною, розроблено її різноманітні спрощення. Одним із них є введена у [119] модель дрейфового потоку, яка дає змогу описувати рух не індивідуальних фаз, а суміші в цілому. Останню модель ретельно вивчено у [32, 33, 34], де введено кілька її підмоделей і, зокрема, поняття функції ковзання. У [13] розглянуто модель без умови ковзання, яку описує система

$$\rho^1_t + u\rho^1_x + u_x\rho^1 = 0, \tag{4.3a}$$
$$\rho^2_t + u\rho^2_x + u_x\rho^2 = 0, \tag{4.3b}$$
$$(\rho^1 + \rho^2)(u_t + uu_x) + a^2(\rho^1_x + \rho^2_x) = 0, \tag{4.3c}$$

де $u = u(t, x)$ — спільна швидкість обох фаз, $\rho^1 = \rho^1(t, x)$ і $\rho^2 = \rho^2(t, x)$ — густини рідин (або рідини й газу), a — стала, що залежить від обох фаз. У [92] зроблено спробу групового аналізу цієї системи. На жаль, ця робота містить багато неточностей, включно з неправильним обчисленням максимальної алгебри ліївської інваріантності, а також деякі помилки в класифікації одновимірних і двовимірних підалгебр цієї алгебри. Водночас, система (4.3) має багато гарних додаткових властивостей, оскільки вона є системою гідродинамічного типу, і метою поточного розділу є розширений груповий аналіз системи (4.3).

Для цього зручно спростити вихідну модель (4.3) заміною змінних. Передусім, використовуючи одночасне масштабування x і u покладемо $a = 1$ за умови додатності сталої a, яка природна з фізичної точки зору. Ввівши нові залежні змінні $v = \ln(\rho^1 + \rho^2)$ і $w = \rho^1/\rho^2$ замість ρ^1 і ρ^2, перепишемо систему (4.3) як систему $\mathcal{S}$:

$$u_t + uu_x + v_x = 0, \tag{4.4a}$$

$$v_t + uv_x + u_x = 0, \tag{4.4b}$$

$$w_t + uw_x = 0. \tag{4.4c}$$

Очевидно, що система (4.4) є системою гідродинамічного типу. До того ж, діагоналізуючи матрицю біля похідних по x заміною залежних змінних $\mathfrak{r}^1 = \frac{1}{2}(u + v)$, $\mathfrak{r}^2 = \frac{1}{2}(u - v)$, $\mathfrak{r}^3 = w$, відобразимо систему (4.4) у систему

$$\mathfrak{r}^1_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1)\mathfrak{r}^1_x = 0, \tag{4.5a}$$

$$\mathfrak{r}^2_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1)\mathfrak{r}^2_x = 0, \tag{4.5b}$$

$$\mathfrak{r}^3_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3_x = 0. \tag{4.5c}$$

Тому ці $\mathfrak{r}^1$, $\mathfrak{r}^2$ і $\mathfrak{r}^3$ є рімановими інваріантами системи (4.4), а рімановими інваріантами вихідної системи (4.3) є відповідно

$$\mathfrak{r}^1 = \frac{u + \ln(\rho^1 + \rho^2)}{2}, \quad \mathfrak{r}^2 = \frac{u - \ln(\rho^1 + \rho^2)}{2}, \quad \mathfrak{r}^3 = \frac{\rho^1}{\rho^2},$$

звідки вирази для вихідних залежних змінних (u, ρ^1, ρ^2) у термінах рімановових інваріантів мають вигляд

$$u = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2, \quad \rho^1 = \frac{\mathfrak{r}^3 \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1 - \mathfrak{r}^2}}{\mathfrak{r}^3 + 1}, \quad \rho^2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1 - \mathfrak{r}^2}}{\mathfrak{r}^3 + 1}.$$

Також очевидно, що характеристичними швидкостями системи (4.5) є

$$V^1 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1, \quad V^2 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1, \quad V^3 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2. \tag{4.6}$$

Система (4.5) не є істинно нелінійною, оскільки $V^3_3 = 0$. Вона строго гіперболічна, діагоналізована й напівгамільтонова, а тому до неї можна застосувати узагальнене перетворення годографа. Однак, важливо поглибити предмет дослідження і вивчити цю систему в рамках групового аналізу. Зауважимо, що підсистема перших двох рівнянь системи (4.5) збігається з діагоналізованим виглядом системи, що описує потоки одновимірного ізентропічного газу зі сталою швидкістю звука [94, підрозд. 2.2.7, рівн. (16)].

У розділі використовуємо обидва зображення (4.4), і (4.5) системи $\mathcal{S}$. Як правило під час обчислень зручніше працювати з діагоналізованим зображенням, хоча деякі результати можна компактніше виразити в термінах змінних u, v і w. Дивись доведення, які опущено, і інші результати щодо системи у [73, 74].

4.2. Структури низьких порядків

4.2.1. Ліївські симетрії. Для обчислення максимальної алгебри ліївської інваріантності системи (4.4) використаємо інфінітезимальний метод.

Теорема 4.2.1. *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ системи $\mathcal{S}$ є нескінченновимірною, і вона є лінійною оболонкою векторних полів*

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} = t\partial_t + x\partial_x, \quad \mathcal{G} = t\partial_x + \partial_u, \quad \mathcal{P}^t = \partial_t, \quad \mathcal{P}^x = \partial_x, \\ &\mathcal{P}^v = \partial_v, \quad \mathcal{W}(\Omega) = \Omega(w)\partial_w, \end{aligned} \tag{4.7}$$

де Ω пробігає множину гладких функцій від w.

Зауваження 4.2.2. Аналогічно, максимальну алгебру ліївської інваріантності системи (4.5) натягнуто на векторні поля

$$\hat{\mathcal{D}} = t\partial_t + x\partial_x, \quad \hat{\mathcal{G}} = 2t\partial_x + \partial_{\mathfrak{r}^1} + \partial_{\mathfrak{r}^2}, \quad \hat{\mathcal{P}}^t = \partial_t, \quad \hat{\mathcal{P}}^x = \partial_x,$$

$$\hat{\mathcal{P}}^v = \partial_{\mathfrak{r}^1} - \partial_{\mathfrak{r}^2}, \quad \hat{\mathcal{W}}(\Omega) = \Omega(\mathfrak{r}^3)\partial_{\mathfrak{r}^3},$$

де Ω пробігає множину гладких функцій від $\mathfrak{r}^3$.

4.2.2. Повна група точкових симетрій. Порахуємо повну групу точкових симетрій системи (4.4), використовуючи версію алгебраїчного методу, що ґрунтується на мегаідеалах.

Ненульові комутаційні співвідношення між базисними елементами (4.7) максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ системи $\mathcal{S}$ такі:

$$[\mathcal{P}^t, \mathcal{D}] = \mathcal{P}^t, \quad [\mathcal{P}^x, \mathcal{D}] = \mathcal{P}^x, \quad [\mathcal{P}^t, \mathcal{G}] = \mathcal{P}^x,$$
$$[\mathcal{W}(\Omega^1), \mathcal{W}(\Omega^2)] = \mathcal{W}(\Omega^1\Omega^2_w - \Omega^2\Omega^1_w).$$

Отже, алгебра $\mathfrak{g}$ є прямою сумою своїх скінченновимірної й нескінченновимірної частин: $\mathfrak{g} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle \oplus \langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle$. До того ж, скінченновимірну частину можна представити у вигляді прямої суми:

$$\mathfrak{g} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x \rangle \oplus \langle \mathcal{P}^v \rangle \oplus \langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle.$$

Побудуємо список мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$. Передусім, похідні алгебри $\mathfrak{g}$ є її мегаідеалами, отже $\mathfrak{g}' = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{W}(\Omega) \rangle$ і $\mathfrak{g}'' = \langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle$ є мегаідеалами, а $\mathfrak{g}^{(i)} = \mathfrak{g}''$ для $i \geqslant 2$. Центр $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \langle \mathcal{P}^v \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}$ є також її мегаідеалом.

Лема 4.2.3. *Радикал $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$ збігається зі скінченновимірною частиною алгебри $\mathfrak{g}$,*

$$\mathfrak{r} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle.$$

Доведення. Скінченновимірна частина $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle$, є її ідеалом, причому розв'язним, оскільки $\mathfrak{s}'' = \{0\}$, а тому її містить радикал $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$, тобто $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{r}$. Якщо деякий ідеал алгебри $\mathfrak{g}$ містить векторне поле $\mathcal{W}(\Omega^0)$ для хоча б однієї ненульової функції $\Omega^0 = \Omega^0(w)$, то він містить і всю нескінченновимірну частину $\langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle$, а тому не є розв'язним. Отже, $\mathfrak{r} \cap \langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle = \{0\}$ і $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$. □

Таким чином, розклад Леві нескінченновимірної алгебри $\mathfrak{g}$ має вигляд $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{g}''$, де $\mathfrak{r}$ — її (скінченновимірний) радикал, а $\mathfrak{g}''$ — її (нескінченновимірна) проста підалгебра, яка також є її (мега)ідеалом, що не містить жодного власного підідеалу.

Лема 4.2.4. *Нільрадикал $\mathfrak{n}$ алгебри $\mathfrak{g}$ є лінійною оболонкою векторних полів $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}^t$, $\mathcal{P}^x$ і $\mathcal{P}^v$:*

$$\mathfrak{n} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle.$$

Доведення. Нільрадикал алгебри $\mathfrak{g}$ міститься в її радикалі $\mathfrak{r}$. Позначимо через $\mathfrak{s}$ лінійну оболонку векторних полів $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}^t$, $\mathcal{P}^x$ і $\mathcal{P}^v$: $\mathfrak{s} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle$. Підпростір $\mathfrak{s}$ є ідеалом алгебри $\mathfrak{g}$, причому нільпотентним, оскільки $\mathfrak{s}^2 = \{0\}$. До того ж, він є максимальним серед таких ідеалів, оскільки єдиним підпростором радикала $\mathfrak{r}$, що містить ідеал $\mathfrak{s}$ як власний ідеал, є сам радикал $\mathfrak{r}$, який не є нільпотентним. Отже, $\mathfrak{n} = \mathfrak{s}$. □

Наслідок 4.2.5. *Похідні $\mathfrak{r}' = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x \rangle$ і $\mathfrak{n}' = \langle \mathcal{P}^x \rangle$ відповідно радикала $\mathfrak{r}$ і нільрадикала $\mathfrak{n}$ алгебри $\mathfrak{g}$ є її мегаідеалами.*

Наслідок 4.2.6. *Ідеал $\mathfrak{m}_1 = \langle \mathcal{G}, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}$ є її мегаідеалом.*

Доведення. Випливає з твердження 1.4.1 для $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{r}$ і $\mathfrak{i}_2 = \mathfrak{n}'$. □

Нільрадикал $\mathfrak{n}$ не є суттєвим для алгебраїчного методу, що ґрунтується на мегаідеалах, оскільки він є сумою інших мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{r}'$. У підсумку, для знаходження повної групи точкових симетрій системи (4.4) алгебраїчним методом, що ґрунтується на мегаідеалах, використаємо такий список мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$:

$$\langle \mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle,\ \langle \mathcal{G}, \mathcal{P}^x, \mathcal{P}^v \rangle,\ \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x \rangle,\ \langle \mathcal{P}^x \rangle,\ \langle \mathcal{P}^v \rangle,\ \langle \mathcal{W}(\Omega) \rangle. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2.7. *Повну групу точкових симетрій G системи (4.4) складають перетворення вигляду*

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = T^1 t + T^0, \quad \tilde{x} = T^1 x + T^1 U^0 t + X^0, \\ &\tilde{u} = u + U^0, \quad \tilde{v} = v + V^0, \quad \tilde{w} = W(w), \end{aligned} \tag{4.9}$$

де T^0, T^1, X^0, U^0, V^0 *— довільні сталі з* $T^1 \neq 0$, *а* W *пробігає множину гладких функцій від* w, *причому* $W_w \neq 0$.

Доведення. Точкові перетворення симетрії системи (4.4) мають загальний вигляд

$$\mathcal{T}\colon\ (\tilde t, \tilde x, \tilde u, \tilde v, \tilde w) = (T, X, U, V, W),$$

де T, X, U, V, W — функції від t, x, u, v і w з ненульовим якобіаном. Щоб отримати визначальні рівняння для компонент такого $\mathcal{T}$, піднімемо ним кожне з векторних полів Q, заданих у (4.7), і використаємо інваріантність під дією підняття $\mathcal{T}_*$ мінімальних мегаідеалів зі списку (4.8), що містять Q. Це призводить до таких умов:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_*\mathcal{D} = a_{11}(\tilde t\partial_{\tilde t} + \tilde x\partial_{\tilde x}) + a_{21}(\tilde t\partial_{\tilde x} + \partial_{\tilde u}) + a_{31}\partial_{\tilde t} + a_{41}\partial_{\tilde x} + a_{51}\partial_{\tilde v},\\
&\mathcal{T}_*\mathcal{G} = a_{22}(\tilde t\partial_{\tilde x} + \partial_{\tilde u}) + a_{42}\partial_{\tilde x} + a_{52}\partial_{\tilde v},\\
&\mathcal{T}_*\mathcal{P}^t = T_t\partial_{\tilde t} + X_t\partial_{\tilde x} + U_t\partial_{\tilde u} + V_t\partial_{\tilde v} + W_t\partial_{\tilde w} = a_{33}\partial_{\tilde t} + a_{43}\partial_{\tilde x},\\
&\mathcal{T}_*\mathcal{P}^x = T_x\partial_{\tilde t} + X_x\partial_{\tilde x} + U_x\partial_{\tilde u} + V_x\partial_{\tilde v} + W_x\partial_{\tilde w} = a_{44}\partial_{\tilde x},\\
&\mathcal{T}_*\mathcal{P}^v = T_v\partial_{\tilde t} + X_v\partial_{\tilde x} + U_v\partial_{\tilde u} + V_v\partial_{\tilde v} + W_v\partial_{\tilde w} = a_{55}\partial_{\tilde v},\\
&\mathcal{T}_*\mathcal{W}(\Omega) = \Omega(T_w\partial_{\tilde t} + X_w\partial_{\tilde x} + U_w\partial_{\tilde u} + V_w\partial_{\tilde v} + W_w\partial_{\tilde w}) = \tilde\Omega^\Omega\partial_{\tilde w},
\end{aligned}\tag{4.10}$$

де всі a_i — сталі, а $\tilde\Omega^\Omega$ — гладка функція від $\tilde w$, що залежить від параметр-функції $\Omega = \Omega(w)$.

Зберемо компоненти векторних полів в останніх чотирьох умовах системи (4.10) і враховуємо отримані рівняння після розвинення й покомпонентного розщеплення перших двох умов. У підсумку, приходимо до вигляду компонент

$$\begin{aligned}
&T = a_{33}t - a_{31}, \quad X = a_{22}a_{33}x + a_{43}t - a_{41},\\
&U = a_{22}u + U^0, \quad V = a_{55}v + a_{52}u + V^0, \quad W = W(w),
\end{aligned}\tag{4.11}$$

де U^0 і V^0 є довільними сталими, і додатково $a_{22}a_{33}a_{55} \neq 0$, $a_{11} = 1$, $a_{44} = a_{22}a_{33}$ і $a_{42} = a_{31}a_{22}$.

Використовуючи вигляд (4.11), дораховуємо групу G прямим методом. □

Наслідок 4.2.8. *Система* (4.4) *допускає дві незалежні (з точністю до комбінування одна з одною і з неперервними симетріями) дискретні точкові симетрії, а саме віддзеркалення*

$$(t,x,u,v,w)\to(-t,-x,u,v,w),\quad (t,x,u,v,w)\to(t,x,u,v,-w).$$

Зауваження 4.2.9. Як уже зазначено в § 1.4, версія алгебраїчного методу для знаходження повної групи точкових симетрій, що ґрунтується на автоморфізмах, вимагає знання групи автоморфізмів відповідної максимальної алгебри інваріантності. Для системи $\mathcal{S}$ ця алгебра нескінченновимірна, а тому обчислення її групи автоморфізмів є складним. Однак, може бути корисним знайти групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathfrak{r})$ радикала $\mathfrak{r}$, який з огляду на лему 4.2.3 збігається зі скінченновимірною частиною алгебри $\mathfrak{g}$. Відмітимо, що радикал $\mathfrak{r}$ ізоморфний алгебрі $A^0_{4,8}\oplus A_1$ з класифікаційного списку п'ятивимірних дійсних алгебр Лі, наведеного в [7, 8]. У базисі $(\mathcal{D},\mathcal{G},\mathcal{P}^t,\mathcal{P}^x,\mathcal{P}^v)$ групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathfrak{r})$ можна ототожнити з матричною групою, яку складають матриці вигляду

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&b_{22}&0&0&0\\b_{31}&0&b_{33}&0&0\\b_{41}&b_{31}b_{22}&b_{43}&b_{22}b_{33}&0\\b_{51}&b_{52}&0&0&b_{55}\end{pmatrix}\qquad\text{з}\qquad b_{22}b_{33}b_{55}\neq0.$$

Знання групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{r})$ дає змогу апріорі накласти такі зв'язки на сталі a_i в умовах (4.10):

$$a_{11}=1,\quad a_{22}a_{33}a_{55}\neq0,\quad a_{21}=0,\quad a_{44}=a_{22}a_{33},\quad a_{42}=a_{31}a_{22}.$$

Структура матриці автоморфізмів очевидно означає, що існує ще один мегаідеал алгебри $\mathfrak{r}$, а отже, й алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{m}_2=\langle\mathcal{D},\mathcal{P}^t,\mathcal{P}^x,\mathcal{P}^v\rangle$. Це завершує опис мегаідеалів алгебри $\mathfrak{g}$. Більш точно, мегаідеали алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпано суттєвими мегаідеалами $\mathfrak{n}'$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ і $\mathfrak{g}''$ і їхніми сумами. Мегаідеал $\mathfrak{m}_2$ не можна знайти, використовуючи засоби з § 1.4. Наявність цього мегаідеалу пояснює перший із наведених вище зв'язків на сталі a_i, а решту з них можна отримати, використовуючи версію алгебраїчного методу, що ґрунтується на мегаідеалах, яка водночас є прямим наслідком свого аналога, що ґрунтується на автоморфізмах, під час застосування до радикала $\mathfrak{r}$. Насправді, це обговорення показує можливість комбінування обох версій алгебраїчного методу для знаходження повної групи точкових симетрій системи диференціальних рівнянь.

Зауваження 4.2.10. Серед виведених з умови (4.10) є один зв'язок на сталі a_i, а саме $a_{51} = 0$, який не можна отримати зі структури матриці автоморфізмів радикала $\mathfrak{r}$. Це означає, що існують автоморфізми всієї алгебри $\mathfrak{g}$, не індуковані точковими перетвореннями простору з координатами (t, x, u, v, w).

4.2.3. Розв'язок через лінеаризацію. Використовуючи те, що система $\mathcal{S}$ є лише частково зачепленою, а підсистему $\mathcal{S}_0$ можна лінеаризувати, побудуємо неявне зображення загального розв'язку для діагоналізованого вигляду (4.5) системи $\mathcal{S}$ у термінах загального розв'язку (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона. Насамперед, зведемо систему (4.5) точковим перетворенням до системи, що містить (1+1)-вимірне рівняння Клейна–Гордона. Зручно вивести це перетворення як ланцюжок простіших точкових перетворень. Почнемо з перетворення годографа, де

$$y = \mathfrak{r}^1/2, \quad z = -\mathfrak{r}^2/2 \quad \text{— нові незалежні змінні, а}$$
$$p = t, \quad \hat{q} = x, \quad s = \mathfrak{r}^3 \quad \text{— нові залежні змінні.}$$

(Для зручності перетворення годографа скомбіновано з масштабуванням змінних $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$.) Це перетворення відображає систему (4.5) у систему

$$\hat{q}_z - (2y - 2z + 1)p_z = 0, \tag{4.12a}$$
$$\hat{q}_y - (2y - 2z - 1)p_y = 0, \tag{4.12b}$$
$$s_y p_z + s_z p_y = 0. \tag{4.12c}$$

Зобразивши рівняння (4.12a) у вигляді $\big(\hat{q} - (2y - 2z + 1)p\big)_z - 2p = 0$, зробимо заміну $\check{q} = \hat{q} - (2y - 2z + 1)p$ змінної $\hat{q}$. Тоді рівняння (4.12a) і (4.12b) набувають відповідно вигляду $p=\check q_z/2$ і $\check q_y+2p_y+2p=0$. Виключивши p з другого рівняння з огляду на перше, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними $\check q_{yz}+\check q_y+\check q_z=0$ на $\check q$, яке зведемо заміною $q=\mathrm e^{y+z}\check q$ змінної $\check q$ до (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона на q у конусних змінних: $q_{yz}{=}q$. Виконуючи цей ланцюжок із двох перетворень у всій системі (4.12), отримаємо систему $\mathcal K$ вигляду

$$q_{yz}=q, \tag{4.13a}$$
$$K^1s_y=K^2s_z, \tag{4.13b}$$

де $K^1:=(\mathrm D_z-1)^2q=q_{zz}-2q_z+q$, а $K^2:=-(\mathrm D_y-1)(\mathrm D_z-1)q=q_y+q_z-2q$ на розв'язках рівняння (4.13a), причому $\mathrm D_yK^1=K^2$ і $\mathrm D_zK^2=K^1$. Тут $\mathrm D_y$ і $\mathrm D_z$ — оператори повних похідних відповідно по y і z. Виключимо p з системи (4.13) з огляду на рівняння

$$p=\frac12\mathrm e^{-y-z}(q_z-q), \tag{4.14}$$

а також знехтуємо цим рівнянням. Композицією трьох наведених вище перетворень є перетворення

$$\begin{aligned}\mathcal T\colon\quad &y=\frac{\mathfrak r^1}{2},\quad z=-\frac{\mathfrak r^2}{2},\quad p=t,\\ &q=\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2}\big(x-(\mathfrak r^1+\mathfrak r^2+1)t\big),\quad s=\mathfrak r^3.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Щоб вивести з системи (4.13) систему (4.5), потрібно додати рівняння (4.14) як означення для p до системи (4.13), а потім розширити набір залежних змінних (q,s) змінною p і виконати обернене перетворення

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal T}\colon\quad &t=p,\quad x=\mathrm e^{-y-z}q+(2y-2z+1)p,\\ &\mathfrak r^1=2y,\quad \mathfrak r^2=-2z,\quad \mathfrak r^3=s\end{aligned} \tag{4.16}$$

до перетворення (4.15). Зручно зібрати вирази для похідних змінних p і q низького порядку і для їхніх комбінацій у термінах старих змінних із огляду на систему (4.5):

$$p_y=-\frac{1}{\mathfrak r^1_x},\quad p_z=-\frac{1}{\mathfrak r^2_x},\quad K^1=-\frac{2}{\mathfrak r^2_x}\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2},\quad K^2=\frac{2}{\mathfrak r^1_x}\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2},$$

$$\frac{s_y}{K^2}=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\frac{\mathfrak{r}^3_x}{2},\quad q_y=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\left(\frac{2}{\mathfrak{r}^1_x}+x-V^1t-2t\right),$$
$$q_z=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(x-V^2t),\quad q_{zz}=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\left(-\frac{2}{\mathfrak{r}^2_x}+x-V^2t+2t\right).$$

Точкове перетворення (4.15) можна здійснити тоді й лише тоді, коли має місце умова невиродженості $\mathfrak{r}^1_t\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x\mathfrak{r}^2_t\neq 0$, яка на розв'язках системи (4.5) є еквівалентною умові $\mathfrak{r}^1_x\mathfrak{r}^2_x\neq 0$. Тоді також $\mathfrak{r}^1_t\mathfrak{r}^2_t\neq 0$, а тому обидва ріманових інваріанти $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ не є сталими. У цьому разі введемо "псевдопотенціал" Ψ, визначений потенціальною системою $\Psi_y=q-\Psi$, $\Psi_z=q_z-\Psi$ для рівняння (4.13a). Насправді, цей "псевдопотенціал" є модифікацією $\Psi=\mathrm{e}^{-y-z}\tilde\Psi$ стандартного потенціалу $\tilde\Psi$ для рівняння (4.13a), асоційованого з його збереженим струмом $(\mathrm{e}^{y+z}q_z,-\mathrm{e}^{y+z}q)$ через потенціальну систему $\tilde\Psi_y=\mathrm{e}^{y+z}q$, $\tilde\Psi_z=\mathrm{e}^{y+z}q_z$. Легко бачити, що функція Ψ задовольняє рівняння Клейна–Гордона $\Psi_{yz}=\Psi$. До того ж, розв'язки рівнянь (4.13a), (4.13b) і (4.14) можна локально виразити в термінах Ψ:

$$q=\Psi_y+\Psi,\quad p=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y-z}(\Psi_z-\Psi_y),\quad s=W\left(\mathrm{e}^{y+z}(\Psi_y+\Psi_z-2\Psi)\right).$$

Тут і надалі W — довільна гладка функція свого аргументу. Повертаючись до старих координат, отримаємо регулярну сім'ю розв'язків системи (4.5), яку зображено в термінах загального розв'язку рівняння Клейна–Гордона. Зауважимо, що умовою невиродженості для перетворення (4.15) у термінах Ψ є $K^1K^2\neq 0$, де

$$K^1=\Psi_{zz}-\Psi_z+\Psi_y-\Psi,\quad K^2=\Psi_{yy}-\Psi_y+\Psi_z-\Psi.$$

З огляду на рівняння $\Psi_{yz}=\Psi$ нерівності $K^1\neq 0$ і $K^2\neq 0$ є еквівалентними одна одній, а також умові $\Psi\notin\langle\mathrm{e}^{-y-z},\mathrm{e}^{y+z},(y-z)\mathrm{e}^{y+z}\rangle$.

Якщо умова невиродженості $\mathfrak{r}^1_t\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x\mathfrak{r}^2_t\neq 0$ не виконується, то принаймні один із ріманових інваріантів $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ є сталою.

Нехай $\mathfrak{r}^1$ є сталою: $\mathfrak{r}^1=c$, а $\mathfrak{r}^2$ — ні. Тоді рівняння (4.5a) стає тотожністю. Виконаємо перетворення годографа $\bar t=t$, $\bar z=\mathfrak{r}^2$, $\bar q=x$, $\bar s=\mathfrak{r}^3$ у двох інших рівняннях (4.5b) і (4.5c), змінюючи ролі змінних x і $\mathfrak{r}^2$, тобто $\bar t$

і $\bar{z}$ — нові незалежні змінні, а $\bar{q}$ і $\bar{s}$ — нові залежні змінні. Це призводить до системи $\bar{q}_{\bar{t}} = \bar{z} + c - 1$, $\bar{s}_{\bar{z}} + \bar{q}_{\bar{z}}\bar{s}_{\bar{t}} = 0$. Інтегруючи перше рівняння, отримаємо $\bar{q} = (\bar{z} + c - 1)\bar{t} + \mathrm{e}^{\bar{z}}\Theta^2_{\bar{z}}$, де Θ^2 — довільна функція від $\bar{z}$. Загальний розв'язок другого рівняння зобразимо у вигляді $\bar{s} = W(\mathrm{e}^{-\bar{z}}\bar{t} - \Theta^2_{\bar{z}} - \Theta^2)$. Розгляд, коли лише ріманів інваріант $\mathfrak{r}^2$ є сталою, аналогічний. У підсумку побудуємо дві сингулярні сім'ї розв'язків системи (4.5).

Коли обидва ріманових інваріанти $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ є сталими, отримаємо ультрасингулярну сім'ю розв'язків системи (4.5).

Теорема 4.2.11. *Будь-який розв'язок системи* (4.5) *(локально) належить одній із таких сімей (нижче W є довільною функцією свого аргументу):*

1) регулярна сім'я, де обидва ріманових інваріанти $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ не є сталими (загальний розв'язок):

$$\begin{aligned}
&t = -\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}(\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi_{\mathfrak{r}^2}),\\
&x = \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\big((2\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi) - (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1)(\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi_{\mathfrak{r}^2})\big),\\
&\mathfrak{r}^3 = W\big(\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(\Psi_{\mathfrak{r}^1} - \Psi_{\mathfrak{r}^2} - \Psi)\big);
\end{aligned}$$

тут функція $\Psi = \Psi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $\Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = -\Psi/4$, але $\Psi \notin \langle\, \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2},\ \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2},\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\,\rangle$;

2) дві сингулярні сім'ї, де лише один із ріманових інваріантів $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ є сталим:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{r}^1 = c, \quad x = (\mathfrak{r}^2 + c - 1)t + \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2}\Theta^2_{\mathfrak{r}^2}, \quad \mathfrak{r}^3 = W(\mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^2}t - \Theta^2_{\mathfrak{r}^2} - \Theta^2);\\
&\mathfrak{r}^2 = c, \quad x = (\mathfrak{r}^1 + c + 1)t + \mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^1}\Theta^1_{\mathfrak{r}^1}, \quad \mathfrak{r}^3 = W(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1}t + \Theta^1_{\mathfrak{r}^1} - \Theta^1);
\end{aligned}$$

тут c — довільна стала, а $\Theta^1 = \Theta^1(\mathfrak{r}^1)$ і $\Theta^2 = \Theta^2(\mathfrak{r}^2)$ — довільні функції своїх аргументів;

3) ультрасингулярна сім'я, де $\mathfrak{r}^3 = W(x - (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2)t)$, а $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$ — довільні сталі.

Регулярну, сингулярні й ультрасингулярну сім'ї розв'язків системи $\mathcal{S}$ асоційовано з розв'язками підсистеми $\mathcal{S}_0$ відповідно рангів 2, 1 і 0; див. [41].

Підсім'ю регулярної сім'ї розв'язків із несталою параметр-функцією W можна також знайти за допомогою узагальненого перетворення годографа [9]; див. побудову в [73, підрозд. 9].

4.2.4. Узагальнені симетрії першого порядку. Для вивчення узагальнених симетрій першого порядку[4.1] системи (4.3) зручніше скористатись її діагоналізованим виглядом (4.5) у термінах рімановних інваріантів $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2, \mathfrak{r}^3)$. Відтепер повторювані індекси i і j означають підсумовування по $i, j \in \{1, 2, 3\}$, а індекс k є фіксованим і приймає значення $1, 2$ або 3. З точністю до еквівалентності узагальнених симетрій достатньо розглянути тільки еволюційні узагальнені векторні поля [21, 69] з характеристиками вигляду $\eta = (\eta^1(t, x, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_x), \eta^2(t, x, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_x), \eta^3(t, x, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_x))$, де $\mathfrak{r}_x$ позначає набір x-похідних першого порядку рімановних інваріантів.

Еволюційне узагальнене векторне поле Q першого порядку є узагальненою симетрією системи (4.5), якщо воно задовольняє умову

$$Q^{(1)}(\mathfrak{r}^k_t + V^k\mathfrak{r}^k_x)|_{(4.5)} = 0,$$

що призводить до системи $R^k = 0$ на характеристику η, де

$$\begin{aligned}R^k := \eta^k_t - \eta^k_{\mathfrak{r}^j}V^j\mathfrak{r}^j_x - \eta^k_{\mathfrak{r}^j_x}\left((\mathfrak{r}^1_x + \mathfrak{r}^2_x)\mathfrak{r}^j_x + V^j\mathfrak{r}^j_{xx}\right) + (\eta^1 + \eta^2)\mathfrak{r}^k_x\\ + V^k(\eta^k_x + \eta^k_{\mathfrak{r}^j}\mathfrak{r}^j_x + \eta^k_{\mathfrak{r}^j_x}\mathfrak{r}^j_{xx}).\end{aligned}$$

Розщеплення рівняння $R^k = 0$ за $\mathfrak{r}^j_{xx}$ дає $\eta^k_{\mathfrak{r}^j_x} = 0$ для $j \neq k$, звідки

$$R^k := \eta^k_t + V^k\eta^k_x + (V^k - V^j)\eta^k_{\mathfrak{r}^j}\mathfrak{r}^j_x - \eta^k_{\mathfrak{r}^k_x}(\mathfrak{r}^1_x + \mathfrak{r}^2_x)\mathfrak{r}^k_x + (\eta^1 + \eta^2)\mathfrak{r}^k_x.$$

Тоді рівняння $R^3_{\mathfrak{r}^1_x\mathfrak{r}^1_x} = 0$ і $R^3_{\mathfrak{r}^2_x\mathfrak{r}^2_x} = 0$ є еквівалентними відповідно рівнянням $\eta^1_{\mathfrak{r}^1_x\mathfrak{r}^1_x} = 0$ і $\eta^2_{\mathfrak{r}^2_x\mathfrak{r}^2_x} = 0$, а тому компоненти η^1 і η^2 характеристики η можна зобразити у вигляді

$$\eta^k = \theta^k(t, x, \mathfrak{r})\mathfrak{r}^k_x + \zeta^k(t, x, \mathfrak{r}), \quad k = 1, 2.$$

[4.1] Кажемо, що узагальнена симетрія є першого порядку, якщо порядок її характеристики як диференціальної функції не більше за одиницю. Зокрема, ліївські симетрії розглядаємо як узагальнені симетрії першого порядку.

Використовуючи це зображення, розщепимо всю систему $R^k=0$ за $(\mathfrak{r}^1_x,\mathfrak{r}^2_x)$ і додатково рівняння $R^1=0$ і $R^2=0$ за $\mathfrak{r}^3_x$. У підсумку, отримаємо систему

$$\begin{aligned}
&2\theta^1_{\mathfrak{r}^2}=2\theta^2_{\mathfrak{r}^1}=\theta^1-\theta^2,\quad \zeta^1_{\mathfrak{r}^2}=\zeta^2_{\mathfrak{r}^1}=0,\quad \theta^k_{\mathfrak{r}^3}=\zeta^k_{\mathfrak{r}^3}=0,\\
&H^k:=\theta^k_t+V^k\theta^k_x+\zeta^1+\zeta^2=0,\quad \zeta^k_t+V^k\zeta^k_x=0,\quad k=1,2,\\
&\mathfrak{r}^3_x\eta^3_{\mathfrak{r}^3_x}+\eta^3_{\mathfrak{r}^1}=\theta^1\mathfrak{r}^3_x,\quad \mathfrak{r}^3_x\eta^3_{\mathfrak{r}^3_x}-\eta^3_{\mathfrak{r}^2}=\theta^2\mathfrak{r}^3_x,\\
&\eta^3_t+V^3\eta^3_x+(\zeta^1+\zeta^2)\mathfrak{r}^3_x=0.
\end{aligned}\tag{4.17}$$

З огляду на рівняння $\zeta^1_{\mathfrak{r}^2}=\zeta^2_{\mathfrak{r}^1}=0$ розщепимо рівняння $\zeta^1_t+V^k\zeta^1_x=0$ $(\zeta^2_t+V^k\zeta^2_x=0)$ за $\mathfrak{r}^2$ $(\mathfrak{r}^1)$ на рівняння $\zeta^1_t=0$, $\zeta^1_x=0$ $(\zeta^2_t=0,\ \zeta^2_x=0)$. Позначимо $\mathcal{K}^1:=\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3_x}+\partial_{\mathfrak{r}^1}$, $\mathcal{K}^2:=\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3_x}-\partial_{\mathfrak{r}^2}$, $\mathcal{B}:=\partial_t+V^3\partial_x$ і виведемо такі диференціальні наслідки системи (4.17):

$$\begin{aligned}
&\partial_{\mathfrak{r}^2}(\theta^1_t+V^1\theta^1_x+\zeta^1+\zeta^2)=\theta^1_x-\theta^2_x+\zeta^2_{\mathfrak{r}^2}=0,\\
&(\mathcal{K}^1\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{K}^1)\eta^3=\eta^3_x=(\theta^1_x-\zeta^1_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^3_x,\\
&\partial_{\mathfrak{r}^1}(\theta^2_t+V^2\theta^2_x+\zeta^1+\zeta^2)=\theta^2_x-\theta^1_x+\zeta^1_{\mathfrak{r}^1}=0,\\
&(\mathcal{B}\mathcal{K}^2-\mathcal{K}^2\mathcal{B})\eta^3=\eta^3_x=(\theta^2_x-\zeta^2_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^3_x.
\end{aligned}$$

Отже, $\theta^1_x-\theta^2_x=\zeta^1_{\mathfrak{r}^1}=-\zeta^2_{\mathfrak{r}^2}=\zeta^1_{\mathfrak{r}^1}-\zeta^2_{\mathfrak{r}^2}$, тобто $\zeta^1_{\mathfrak{r}^1}=\zeta^2_{\mathfrak{r}^2}=0$, $\theta^1_x{=}\theta^2_x$, звідки $\eta^3_x=\theta^1_x\mathfrak{r}^3_x$. Можна зробити висновок, що ζ^1 і ζ^2 — сталі. Диференціювання рівняння $2\theta^1_{\mathfrak{r}^2}=2\theta^2_{\mathfrak{r}^1}=\theta^1-\theta^2$ по x дає $2\theta^1_{x\mathfrak{r}^2}=2\theta^2_{x\mathfrak{r}^1}=\theta^1_x-\theta^2_x=0$, а тому $\theta^1_{x\mathfrak{r}^1}=\theta^2_{x\mathfrak{r}^1}=0$ і $\theta^2_{x\mathfrak{r}^2}=\theta^1_{x\mathfrak{r}^2}=0$. Диференціальний наслідок $\partial_x(H^1-H^2)=0$ системи (4.17) еквівалентний рівнянням $\theta^1_{xx}=\theta^2_{xx}=0$. Отже, рівняння $\partial_xH^1=0$ і $\partial_xH^2=0$ зводяться до $\theta^1_{tx}=\theta^2_{tx}=0$. У підсумку, маємо

$$\begin{aligned}
&\theta^k_x=\gamma=\mathrm{const},\quad \theta^k_t=-\gamma V^k-(\zeta^1+\zeta^2),\quad 2\theta^1_{\mathfrak{r}^2}=2\theta^2_{\mathfrak{r}^1}=\theta^1-\theta^2,\\
&\eta^3_x=\gamma\mathfrak{r}^3_x,\quad \eta^3_t=-\gamma V^3\mathfrak{r}^3_x-(\zeta^1+\zeta^2)\mathfrak{r}^3_x,\quad \mathfrak{r}^3_x\eta^3_{\mathfrak{r}^3_x}+\eta^3_{\mathfrak{r}^1}=\theta^1\mathfrak{r}^3_x,\\
&\mathfrak{r}^3_x\eta^3_{\mathfrak{r}^3_x}-\eta^3_{\mathfrak{r}^2}=\theta^2\mathfrak{r}^3_x.
\end{aligned}$$

Інтегруючи цю систему, виведемо явні вирази для θ^1, θ^2 і η^3, а отже і для всієї характеристики η векторного поля Q:

$$\eta^1=\big(\gamma x-\gamma tV^1-(\zeta^1+\zeta^2)t+\Phi+\Phi_{\mathfrak{r}^1}\big)\mathfrak{r}^1_x+\zeta^1,$$

$$\eta^2 = \bigl(\gamma x - \gamma t V^2 - (\zeta^1+\zeta^2)t + \Phi - \Phi_{\mathfrak{r}^2}\bigr)\mathfrak{r}^2_x + \zeta^2,$$
$$\eta^3 = \bigl(\gamma x - \gamma t V^3 - (\zeta^1+\zeta^2)t + \Phi\bigr)\mathfrak{r}^3_x + \Omega,$$

де γ, ζ^1 і ζ^2 — довільні сталі, функція $\Omega = \Omega\bigl(\mathfrak{r}^3, \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathfrak{r}^3_x\bigr)$ пробігає множину гладких функцій від $\bigl(\mathfrak{r}^3, \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathfrak{r}^3_x\bigr)$, функція $\Phi = \Phi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $2\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \Phi_{\mathfrak{r}^1} - \Phi_{\mathfrak{r}^2}$. Доведено таку теорему.

Теорема 4.2.12. *Алгебра зведених узагальнених симетрій першого порядку системи* (4.5) *є лінійною оболонкою еволюційних узагальнених векторних полів вигляду*

$$\check{\mathcal{D}} = \bigl(x - V^1 t\bigr)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1} + \bigl(x - V^2 t\bigr)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + \bigl(x - V^3 t\bigr)\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},$$
$$\check{\mathcal{G}}_1 = (t\mathfrak{r}^1_x - 1)\partial_{\mathfrak{r}^1} + t\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + t\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}, \quad \check{\mathcal{G}}_2 = \partial_{\mathfrak{r}^1} - \partial_{\mathfrak{r}^2},$$
$$\check{\mathcal{P}}(\Phi) = (\Phi + \Phi_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1} + (\Phi - \Phi_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + \Phi\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}, \quad \check{\mathcal{W}}(\Omega) = \Omega\partial_{\mathfrak{r}^3},$$

де параметр-функція Ω пробігає множину гладких функцій від $\omega^0 := \mathfrak{r}^3$ і $\omega^1 := \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathfrak{r}^3_x$, а параметр-функція $\Phi = \Phi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $2\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \Phi_{\mathfrak{r}^1} - \Phi_{\mathfrak{r}^2}$.[4.2]

Зауваження 4.2.13. Серед узагальнених векторних полів, наведених у теоремі 4.2.12, є еволюційні форми ліївських симетрій системи (4.5) (див. зауваження 4.2.2), а також істинні узагальнені симетрії. Узагальнені векторні поля $\check{\mathcal{D}}$, $\check{\mathcal{G}}_1$, $\check{\mathcal{G}}_2$, $\check{\mathcal{P}}(\mathfrak{r}^1{+}\mathfrak{r}^2)$, $\check{\mathcal{P}}(1)$ і $\check{\mathcal{W}}(\Omega)$ з Ω, залежним лише від $\mathfrak{r}^3$, є еволюційними формами відповідно векторних полів $-\hat{\mathcal{D}}$, $-\frac12\hat{\mathcal{G}} - \frac12\hat{\mathcal{P}}^v$, $\hat{\mathcal{P}}^v$, $\hat{\mathcal{P}}^t$, $-\hat{\mathcal{P}}^x$ і $\hat{\mathcal{W}}(\Omega)$. Векторні поля $\check{\mathcal{W}}(\Omega)$ з Ω, що не є функціями лише від $\mathfrak{r}^3$, є справжніми узагальненими симетріями. Існування узагальнених симетрій $\check{\mathcal{P}}(\Phi)$ з $\Phi \notin \mathrm{span}(1, \mathfrak{r}^1{+}\mathfrak{r}^2)$ можна пояснити тим, що підняття векторних полів $\check{\mathcal{P}}(\Phi)$ проєкцією на $(t, x, \mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ є еволюційними формами векторних полів ліївської симетрії $\check{\mathcal{P}}(\tau^0, \xi^0)$ суттєвої підсистеми $\mathcal{S}_0$, записаної в термінах $(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$, з $\tau^0 = \frac12(\Phi_{\mathfrak{r}^1} + \Phi_{\mathfrak{r}^2})$ і $\xi^0 = \frac12(\Phi_{\mathfrak{r}^1} + \Phi_{\mathfrak{r}^2})(\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1) - \Phi + \Phi_{\mathfrak{r}^2}$. Отже, ліївські симетрії суттєвої підсистеми $\mathcal{S}_0$, що не мають аналогів серед ліївських симетрій системи $\mathcal{S}$, можна продовжити до її узагальнених симетрій першого порядку.

[4.2] Підстановка $\tilde{\Phi} = \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\Phi$ зводить це рівняння до рівняння Клейна–Гордона $\tilde{\Phi}_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = -\tilde{\Phi}/4$.

На відміну від сім'ї $\{\breve{\mathcal{P}}(\tau^0,\xi^0)\}$ інша особлива ліївська симетрія $\breve{\mathcal{J}}$ суттєвої підсистеми $\mathcal{S}_0$ пов'язана з похідною $\zeta^1_{\mathfrak{r}^1}$, яка зануляється в доведенні теореми 4.2.12, а тому ця симетрія не має жодного аналога серед узагальнених симетрій першого порядку системи $\mathcal{S}$.

4.2.5. Гідродинамічні закони збереження та їхні узагальнення. Знайдемо тепер повний простір законів збереження нульового порядку системи (4.5), який насправді вичерпують лінійні комбінації одного трансляційно неінваріантного закону збереження й гідродинамічних законів збереження. Нагадаємо, що закон збереження називають *гідродинамічним*, якщо його густина ρ є функцією лише від залежних змінних.

Теорема 4.2.14. *Простір законів збереження нульового порядку системи* (4.5) *є лінійною оболонкою одного трансляційно неінваріантного закону збереження зі збереженим струмом*

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(x-V^3t,\,V^3(x-V^3t)-t\big)$$

і простору гідродинамічних законів збереження цієї системи, який є натурально ізоморфним[4.3] *простору збережених струмів загального вигляду*

$$\big(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega+\Psi_{\mathfrak{r}^1}-\Psi_{\mathfrak{r}^2},\,(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega+V^1\Psi_{\mathfrak{r}^1}-V^2\Psi_{\mathfrak{r}^2}\big).$$

Тут Ω — довільна гладка функція від $\mathfrak{r}^3$, а параметр-функція $\Psi=\Psi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $2\Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=\Psi_{\mathfrak{r}^2}-\Psi_{\mathfrak{r}^1}$.

Доведення. Якщо $\rho=\rho(t,x,\mathfrak{r})$ — густина закону збереження системи (4.5), то $\bar{\mathsf{E}}\bar{\mathrm{D}}_t\rho=0$, де $\bar{\mathrm{D}}_t=\partial_t-\sum_{i=1}^3V^i\mathfrak{r}^i_x\partial_{\mathfrak{r}^i}$ — усічений зведений оператор повної похідної по t з огляду на систему (4.5), а

[4.3]Розглянуто два типи *натурального* (або *канонічного*) *ізоморфізму*—пов'язаний із лінійними факторпросторами й факторалгебрами Лі. Для лінійного простору V і його підпросторів U і W таких, що $V=U\dotplus W$, де "$\dotplus$" позначає пряму суму підпросторів, природний ізоморфізм між V/U і W встановлено так, що кожен клас еквівалентності по підпростору U відповідає єдиному елементу підпростору W, що належить цьому класу еквівалентності. Аналогічно, натуральний ізоморфізм встановлено між $\mathfrak{a}/\mathfrak{i}$ і $\mathfrak{b}$, де $\mathfrak{a}$ — алгебра Лі, а $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{i}$ — відповідно такі її підалгебра й ідеал, що $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\in\!\!\!\!+\,\mathfrak{i}$.

$\bar{\mathsf{E}} = \big(\partial_{\mathfrak{r}^i} - \mathrm{D}_x\partial_{\mathfrak{r}^i_x},\ j = 1,2,3\big)^{\mathsf{T}}$ — усічений оператор Ейлера. Наведена вище умова еквівалентна системі

$$\sum_{i=1}^{3}\big((V^j - V^i)\rho_{\mathfrak{r}^i\mathfrak{r}^j} + V^j_{\mathfrak{r}^i}\rho_{\mathfrak{r}^j} - V^i_{\mathfrak{r}^j}\rho_{\mathfrak{r}^i}\big)\mathfrak{r}^i_x + \rho_{\mathfrak{r}^j t} + V^j\rho_{\mathfrak{r}^j x} = 0, \quad j = 1,2,3.$$

Розщеплення цієї системи за похідними $\mathfrak{r}^i_x$ дає три рівняння, що відповідають доданкам без похідних рімановых інваріантів $\mathfrak{r}$, і систему, що відповідає коефіцієнтам похідних $\mathfrak{r}^i_x$, $i = 1,2,3$, чия ліва частина антисиметрична з точністю до перестановки індексів i і j. Тому остання система містить лише три незалежних диференціальних рівняння на густину ρ. У підсумку, виведемо систему із шістьох визначальних рівнянь на густину ρ:

$$\begin{aligned}&\rho_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^3} = \rho_{\mathfrak{r}^3}, \quad \rho_{\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^3} = -\rho_{\mathfrak{r}^3}, \quad 2\rho_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \rho_{\mathfrak{r}^2} - \rho_{\mathfrak{r}^1},\\ &\rho_{t\mathfrak{r}^j} + V^j\rho_{x\mathfrak{r}^j} = 0, \quad j = 1,2,3.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Позначивши $R^0 := \rho_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^3} - \rho_{\mathfrak{r}^3}$ і $R^j := \rho_{t\mathfrak{r}^j} + V^j\rho_{x\mathfrak{r}^j}$, $j = 1,2,3$, виведемо диференціальний наслідок $\partial_{\mathfrak{r}^3}R^1 - (\partial_t + V^1\partial_x)R^0 - R^3 = \rho_{\mathfrak{r}^3 x} = 0$ системи (4.18), а тому також $\rho_{\mathfrak{r}^3 t} = 0$. Перші два рівняння системи (4.18) можна переписати як $(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\rho_{\mathfrak{r}^3})_{\mathfrak{r}^1} = (\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\rho_{\mathfrak{r}^3})_{\mathfrak{r}^2} = 0$. Отже, загальний розв'язок цієї системи допускає зображення

$$\rho = \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega(\mathfrak{r}^3) + \tilde\rho(t,x,\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2),$$

де $\Omega = \Omega(\mathfrak{r}^3)$ — довільна гладка функція від $\mathfrak{r}^3$, а $\tilde\rho = \tilde\rho(t,x,\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ — загальний розв'язок зведеної системи

$$2\tilde\rho_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \tilde\rho_{\mathfrak{r}^2} - \tilde\rho_{\mathfrak{r}^1}, \quad \tilde\rho_{t\mathfrak{r}^j} + V^j\tilde\rho_{x\mathfrak{r}^j} = 0, \quad j = 1,2. \tag{4.19}$$

Останні два рівняння системи (4.19) інтегруються до $\tilde\rho_{\mathfrak{r}^j} = f^j(y_j,\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$, $j = 1,2$, де f^1 і f^2 — гладкі функції своїх аргументів, а $y_j = x - V^j t$. Сумісність цих зображень для похідних $\tilde\rho_{\mathfrak{r}^1}$ і $\tilde\rho_{\mathfrak{r}^2}$ одного з одним і з першим рівнянням системи (4.19) призводить до рівнянь на функції f^1 і f^2:

$$(y_1 - y_2)f^1_{y_1} + 2f^1_{\mathfrak{r}^2} = (y_1 - y_2)f^2_{y_2} + 2f^2_{\mathfrak{r}^1} = f^2 - f^1. \tag{4.20}$$

Незалежно диференціюючи ці рівняння по y_1 і по y_2, отримаємо $f^1_{y_1y_1} = f^2_{y_2y_2} = 0$, тобто $f^j = g^j(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)y_j + h^j(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ для деяких гладких функцій g^j і h^j від $(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$, $j = 1, 2$. Тоді розщеплення рівнянь (4.20) за y_1 і y_2 дає систему $g^1_{\mathfrak{r}^2} = -g^1$, $g^2_{\mathfrak{r}^1} = g^2$, $g^1 = -g^2$, $2h^1_{\mathfrak{r}^2} = 2h^2_{\mathfrak{r}^1} = h^2 - h^1$ на коефіцієнти g^j і h^j. Загальний розв'язок цієї системи можна зобразити у вигляді $g^1 = -g^2 = C\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}$, $h^1 = \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} - \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^1}$, $h^2 = \Psi_{\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2} - \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}$, де C — довільна стала, а $\Psi = \Psi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ — довільний розв'язок рівняння $2\Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \Psi_{\mathfrak{r}^2} - \Psi_{\mathfrak{r}^1}$. Одночасно інтегруючи рівняння $\tilde\rho_{\mathfrak{r}^j} = f^j$ з огляду на виведені вирази для функції f_j, $j = 1, 2$, у підсумку отримаємо

$$\tilde\rho = C\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(x - V^3t) + \Psi_{\mathfrak{r}^1} - \Psi_{\mathfrak{r}^2} + \rho^0$$

з довільною гладкою функцією ρ^0 від (t, x), яка є густиною нульової дивергенції, а тому нею потрібно знехтувати. Щодо знаходження потоку σ, асоційованого з $\rho = \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega + \tilde\rho$, зазначимо лише, що

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_x\sigma &= -\bar{\mathrm{D}}_t\rho\\ &= \mathrm{D}_x\big((\mathfrak{r}^1{+}\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega + C(V^3(x{-}V^3t){-}t) + V^1\Psi_{\mathfrak{r}^1} - V^2\Psi_{\mathfrak{r}^2}\big). \qquad \square\end{aligned}$$

Характеристиками законів збереження, що відповідають збереженим струмам із теореми 4.2.14, є відповідно

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(x - V^1t,\ x - V^2t,\ 0),$$
$$(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega + \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^1} - \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2},\ -\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega + \Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} - \Psi_{\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2},\ \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega_{\mathfrak{r}^3}).$$

На додачу до стандартної еквівалентності законів збереження можна розглянути їхню еквівалентність із точністю до дії групи точкових симетрій системи диференціальних рівнянь; див. [53, 90] для подальшої інформації. Множину законів збереження, що породжує простір законів збереження через лінійне комбінування й дію точкових симетрій, називають *генеруючою множиною* цього простору [53].

Існують тільки два нееквівалентних значення параметр-функції $\Omega(\mathfrak{r}^3)$ з точністю до перетворення з групи точкових симетрій G системи (4.5) (див. теорему 4.2.7) — $\Omega = 1$ і $\Omega = \mathfrak{r}^3$. До того ж, легко бачити, що збережений струм з $(\Omega,\Psi)=(1,0)$ збігається з збереженим струмом з $(\Omega,\Psi)=(0,\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2})$.

Наслідок 4.2.15. *Генеруючу множину простору гідродинамічних законів збереження системи (4.5) з точністю до дії групи точкових симетрій G цієї системи складають закони збереження зі збереженими струмами*

$$\mathrm{DHC}=\left(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\mathfrak{r}^3,\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\mathfrak{r}^3\right),$$
$$\mathrm{EHC}(\Psi)=\big(\Psi_{\mathfrak{r}^1}-\Psi_{\mathfrak{r}^2},\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2+1)\Psi_{\mathfrak{r}^1}-(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2-1)\Psi_{\mathfrak{r}^2}\big),$$

де $\Psi=\Psi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $2\Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=\Psi_{\mathfrak{r}^2}-\Psi_{\mathfrak{r}^1}$.

Багато напівгамільтонових систем, включно із системою (4.5), також допускають закони збереження першого порядку [28, 101] (див. також [99, 100]). Щоб побудувати такі закони збереження для системи (4.5), згідно з [28, теорема 5.1] потрібно знайти деякі гладкі ненульові функції $G^i(\mathfrak{r})$, $i=1,2,3$, що задовольняють рівняння

$$\frac{G^i_{\mathfrak{r}^j}}{G^i}=-\frac{V^i_{\mathfrak{r}^j}}{V^i-V^j},\quad i\neq j.$$

Можна взяти $G^1=\mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^2/2}$, $G^2=\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1/2}$, $G^3=\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}$. Кожен збережений струм першого порядку системи (4.5) з густиною, незалежною від (t,x), є еквівалентним сумі гідродинамічних збережених струмів і збереженого струму вигляду

$$\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{(G^i)^2f^i}{\mathfrak{r}^i_x}+G^3\Omega,\ \sum_{i=1}^{2}V^i\frac{(G^i)^2f^i}{\mathfrak{r}^i_x}+V^3G^3\Omega-2x\sum_{i=1}^{2}V^i_{\mathfrak{r}^i}\frac{(G^i)^2f^i}{\mathfrak{r}^i_x}\right),$$

де $\Omega=\Omega(\mathfrak{r}^3,\mathfrak{r}^3_x/G^3)$ — довільна гладка функція свого аргументу, а $f^1=f^1(\mathfrak{r}^1)$ і $f^2=f^2(\mathfrak{r}^2)$ — довільні гладкі функції відповідно від $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$, що задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^{2}(G^i)^2f^i=\mathrm{const}\,.$$

(Наведені вищі підсумовування йдуть від 1 до 2, оскільки $V^3_{\mathfrak{r}^3}=0$.) Отже, $f^1(\mathfrak{r}^1)=c\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1}$ і $f^2(\mathfrak{r}^2)=-c\mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^2}$, де c — довільна стала.

Твердження 4.2.16. *Простір збережених струмів законів збереження системи* (4.5) *порядку, не вищого за один, з* (t,x)*-незалежними густинами є лінійною оболонкою сім'ї збережених струмів* $\mathrm{C}_1(\Omega)$, C_0 *і збережених струмів* $\mathrm{EHC}(\Psi)$, *наведених у наслідку* 4.2.15. *Тут*

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_0 &= \left(\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^1_x}-\frac{1}{\mathfrak{r}^2_x}\right)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}, \left(\frac{V^1}{\mathfrak{r}^1_x}-\frac{V^2}{\mathfrak{r}^2_x}\right)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\right),\\ \mathrm{C}_1(\Omega) &= \left(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega, (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega\right),\end{aligned} \tag{4.21}$$

а Ω *пробігає множину гладких функцій від* $\omega^0=\mathfrak{r}^3$ *і* $\omega^1=\mathfrak{r}^3_x\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}$.

4.3. Структури вищих порядків

4.3.1. Попередній аналіз. Для системи $\mathcal{E}$ диференціальних рівнянь позначимо через $\mathcal{E}^{(\infty)}$ многовид, визначений системою $\mathcal{E}$ і її диференціальними наслідками у відповідному просторі струменів. Локальний об'єкт, асоційований із системою $\mathcal{E}$ у рамках симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, на кшталт узагальненої симетрії, збереженого струму локального закону збереження, характеристики закону збереження чи косиметрії, називають тривіальним, якщо він зникає на розв'язках системи $\mathcal{E}$ або, що рівноцінно, на многовиді $\mathcal{E}^{(\infty)}$. Два таких локальних об'єкти того самого типу вважають еквівалентними, якщо їхня різниця є тривіальною, а тому такі об'єкти одного типу розглядають із точністю до цього відношення еквівалентності.

Система $\mathcal{S}$ еволюційна, а тому струменеві змінні t, x і $\mathfrak{r}^i_\kappa=\partial^\kappa\mathfrak{r}^i/\partial x^\kappa$, $i=1,2,3$, $\kappa\in\mathbb{N}_0$, задають стандартні координати на многовиді $\mathcal{S}^{(\infty)}$. Отже, з точністю до наведених вище відношень еквівалентності на розв'язках системи $\mathcal{S}$ для класів суміжності кожного локального симетрієподібного об'єкта, асоційованого із системою $\mathcal{S}$, можна розглядати представників, чиї компоненти не залежать від похідних рімановових інваріантів $\mathfrak{r}$, що містять диференціювання по t.[4.4] Символ з $[\mathfrak{r}]$, на

[4.4] Для характеристик законів збереження потрібно використовувати лема 3 з [62]; див. також [69, лема 4.28].

кшталт $f[\mathfrak{r}]$, позначає диференціальну функцію від $\mathfrak{r}$, що залежить щонайбільш від t, x і скінченної кількості похідних рімановых інваріантів $\mathfrak{r}$ по x, $f = f(t, x, \mathfrak{r}_0, \dots, \mathfrak{r}_\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Нижче розглядаємо тільки такі диференціальні функції і вважаємо, що компоненти будь-якого локального симетрієподібного об'єкта, асоційованого з системою $\mathcal{S}$, є такими диференціальними функціями. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ порядок $\operatorname{ord}_{\mathfrak{r}^i} f[\mathfrak{r}]$ диференціальної функції $f[\mathfrak{r}]$ відносно $\mathfrak{r}^i$ визначаємо як $\max\{\kappa \in \mathbb{N}_0 \mid f_{\mathfrak{r}^i_\kappa} \neq 0\}$, коли ця множина не порожня, і $-\infty$ інакше.

Обмежимо оператори D_x і D_t повних похідних по x і t на множину зазначених вище диференціальних функцій від $\mathfrak{r}$ і додатково виключимо похідні рімановых інваріантів $\mathfrak{r}$, що містять диференціювання по t, з D_t з огляду на систему $\mathcal{S}$, відповідно отримуючи (комутуючі) оператори

$$\mathcal{D}_x := \partial_x + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{r}^i_{\kappa+1} \partial_{\mathfrak{r}^i_\kappa}, \quad \mathcal{D}_t := \partial_t - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{D}_x^\kappa (V^i \mathfrak{r}^i_1) \partial_{\mathfrak{r}^i_\kappa}.$$

Також визначимо комутуючі оператори

$$\mathcal{A} := \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^1} \mathcal{D}_x \quad \text{і} \quad \mathcal{B} := \mathcal{D}_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2) \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

Замість стандартних координат на многовиді $\mathcal{S}^{(\infty)}$ зручно ввести модифіковані: t, x, $r^j_\kappa = \mathfrak{r}^j_\kappa$ і $\omega^\kappa := \mathcal{A}^\kappa \mathfrak{r}^3$ для $\kappa \in \mathbb{N}_0$ і $j = 1, 2$.[4.5] У цих позначеннях маємо

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}\omega^\kappa = \omega^{\kappa+1}, \quad \mathcal{B}\omega^\kappa = 0, \quad \kappa \in \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{B}r^1 = -r^1_1, \quad \mathcal{B}r^2 = r^2_1, \\
\mathcal{D}_x = \partial_x + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(r^1_{\kappa+1} \partial_{r^1_\kappa} + r^2_{\kappa+1} \partial_{r^2_\kappa} + \mathrm{e}^{r^1 - r^2} \omega^{\kappa+1} \partial_{\omega^\kappa} \right), \\
\mathcal{D}_t = \partial_t - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\mathcal{D}_x^\kappa (V^1 r^1_1) \partial_{r^1_\kappa} + \mathcal{D}_x^\kappa (V^2 r^2_1) \partial_{r^2_\kappa} + (r^1 + r^2) \mathrm{e}^{r^1 - r^2} \omega^{\kappa+1} \partial_{\omega^\kappa} \right).
\end{gathered}$$

Визначимо порядки $\operatorname{ord}_{r^j} f$, $j = 1, 2$, і $\operatorname{ord}_\omega f$ диференціальної функції $f = f[\mathfrak{r}]$ відносно r^j і "ω" як $\max\{\kappa \mid f_{r^j_\kappa} \neq 0\}$ і $\max\{\kappa \mid f_{\omega^\kappa} \neq 0\}$,

[4.5] Оператор $\mathcal{A}$ і модифіковані координати пов'язані з виродженістю характеристичної швидкості V^3, тобто $V^3_{\mathfrak{r}^3} = 0$; див. [28, теорема 5.2].

коли відповідні множини не порожні, і $-\infty$ інакше. Зауважимо, що $\mathrm{ord}_\omega f = \mathrm{ord}_{\mathfrak{r}^3} f$. Позначення на кшталт $f[r^1, r^2]$, або рівноцінно $f[\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2]$, позначає диференціальну функцію f від $(r^1, r^2) = (\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ зазначеного вище типу.

Лема 4.3.1. *Диференціальна функція $f = f[\mathfrak{r}]$ задовольняє рівняння $\mathcal{B}f{=}0$ тоді й лише тоді, коли вона є гладкою функцією скінченної кількості ω^i: $f = f(\omega^0, \dots, \omega^\kappa)$ з $\kappa \in \mathbb{N}_0$.*

Як стандартні координати на многовиді $\mathcal{K}^{(\infty)}$, асоційованому із системою (4.13), можна взяти струменеві змінні y, z, $q_\iota = \partial^\iota q/\partial y^\iota$, якщо $\iota \geqslant 0$, і $q_\iota = \partial^{-\iota} q/\partial z^{-\iota}$, якщо $\iota < 0$, $\iota \in \mathbb{Z}$, $s_\kappa = \partial^\kappa s/\partial y^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}_0$. У цих координатах усічені оператори повних похідних по y і z відповідно набувають вигляду

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_y &= \partial_y + \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} q_{\iota+1}\partial_{q_\iota} + \sum_{\kappa=0}^{+\infty} s_{\kappa+1}\partial_{s_\kappa},\\
\mathcal{D}_z &= \partial_z + \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} q_{\iota-1}\partial_{q_\iota} + \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \mathcal{D}_y^\kappa\left(\frac{K^1}{K^2}s_1\right)\partial_{s_\kappa},
\end{aligned}
$$

де $K^1 := q_{-2} - 2q_{-1} + q_0$, $K^2 := q_1 + q_{-1} - 2q_0$. Нескінченне продовження перетворення (4.15) індукує підняття операторів $\mathcal{D}_t$, $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ до операторів

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{D}}_t = -\frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^2}(2y-2z+1)\mathcal{D}_y - \frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^1}(2y-2z-1)\mathcal{D}_z,\\
&\hat{\mathcal{D}}_x = \frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^2}\mathcal{D}_y + \frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^1}\mathcal{D}_z,\\
&\hat{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{e}^{-y-z}}{K^2}\mathcal{D}_y + \frac{\mathrm{e}^{-y-z}}{K^1}\mathcal{D}_z, \quad \hat{\mathcal{B}} = -\frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^2}\mathcal{D}_y + \frac{\mathrm{e}^{y+z}}{K^1}\mathcal{D}_z,
\end{aligned}
$$

а тому $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{A}}$.

Символ з $[q, s]$, на кшталт $f[q, s]$, позначає диференціальну функцію від (q, s), що залежить щонайбільш від y, z і скінченної, але невизначеної наперед кількості q_ι, $\iota \in \mathbb{Z}$, і s_κ, $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Порядок $\mathrm{ord}_s f$ диференціальної функції $f = f[q, s]$ відносно s визначимо як $\max\{\kappa \in \mathbb{N}_0 \mid f_{s_\kappa} \neq 0\}$, коли ця множина не порожня, і $-\infty$ інакше. Аналогічно, символ з $[q]$, на кшталт $f[q]$, позначає диференціальну функцію від q, що залежить щонайбільше від y, z і скінченної, але невизначеної наперед кількості q_ι, $\iota \in \mathbb{Z}$.

Також використаємо модифіковані координати y, z, $\hat{q}_\iota = q_\iota$, $\iota \in \mathbb{Z}$ і $\hat{\omega}^\kappa = \hat{\mathcal{A}}^\kappa s$, $\kappa \in \mathbb{N}_0$, на многовиді $\mathcal{K}^{(\infty)}$.

З леми 4.3.1 випливає таке твердження.

Наслідок 4.3.2. *Диференціальна функція $f = f[q, s]$ задовольняє рівняння $\hat{\mathfrak{B}} f = 0$, тобто*

$$K^1 \mathcal{D}_y f = K^2 \mathcal{D}_z f,$$

тоді й лише тоді, коли вона є гладкою функцією скінченної кількості $\hat{\omega}^i$: $f = f(\hat{\omega}^0, \ldots, \hat{\omega}^\kappa)$ з $\kappa \in \mathbb{N}_0$.

Нескінченне продовження перетворення (4.16) індукує підняття операторів $\mathcal{D}_y$ і $\mathcal{D}_z$ до (комутуючих) операторів

$$\tilde{\mathcal{D}}_y := -\frac{1}{\mathfrak{r}^1_x}\big(\mathcal{D}_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1)\mathcal{D}_x\big),$$
$$\tilde{\mathcal{D}}_z := -\frac{1}{\mathfrak{r}^2_x}\big(\mathcal{D}_t + (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1)\mathcal{D}_x\big).$$

4.3.2. Узагальнені симетрії. Вичерпно описати узагальнені симетрії системи (4.5) дають змогу два факти. По-перше, рівняння (4.5c) є лише частково зачепленим із рівняннями (4.5a) і (4.5b). По-друге, підсистема (4.5a)–(4.5b) лінеаризовна перетворенням годографа, а відповідна лінійна система зводиться до (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона.

Позначимо через Σ алгебру узагальнених симетрій системи (4.5), а через $\Sigma^{\rm triv}$ алгебру її тривіальних узагальнених симетрій, чиї характеристики зникають на розв'язках системи (4.5). Факторалгебру $\Sigma^{\rm q} = \Sigma/\Sigma^{\rm triv}$ можна ототожнити, наприклад, з підалгеброю канонічних представників у зведеній еволюційній формі, $\hat{\Sigma}^{\rm q} = \big\{ \sum_{i=1}^3 \eta^i[\mathfrak{r}]\partial_{\mathfrak{r}^i} \in \Sigma \big\}$. Критерій інваріантності системи (4.5) під дією узагальненого векторного поля $\sum_{i=1}^{3}\eta^i[\mathfrak{r}]\partial_{\mathfrak{r}^i}$ призводить до системи з трьох визначальних рівнянь на компоненти η^i:

$$\mathcal{D}_t\eta^1+(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2+1)\mathcal{D}_x\eta^1+\mathfrak{r}^1_x(\eta^1+\eta^2)=0, \tag{4.22a}$$

$$\mathcal{D}_t\eta^2+(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2-1)\mathcal{D}_x\eta^2+\mathfrak{r}^2_x(\eta^1+\eta^2)=0, \tag{4.22b}$$

$$\mathcal{D}_t\eta^3+(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathcal{D}_x\eta^3+\mathfrak{r}^3_x(\eta^1+\eta^2)=0. \tag{4.22c}$$

Лема 4.3.3. *Для будь-якого узагальненого векторного поля $\sum_{i=1}^{3}\eta^i[\mathfrak{r}]\partial_{\mathfrak{r}^i}$ з $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$ його компоненти η^1 і η^2 не залежать від похідних ріманового інваріанта $\mathfrak{r}^3$, тобто $\eta^1=\eta^1[\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2]$ і $\eta^2=\eta^2[\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2]$.*

Лема 4.3.3 є проявом часткової зачепленості системи (4.5). З огляду на цю лему підалгебра $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}_3$ алгебри $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$, яку складають елементи з нульовими компонентами η^1 і η^2, є ідеалом алгебри $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$, а факторалгебра $\Sigma^{\mathrm{q}}_{12}:=\hat\Sigma^{\mathrm{q}}/\hat\Sigma^{\mathrm{q}}_3$ ізоморфна підалгебрі зведених узагальнених симетрій підсистеми (4.5a)–(4.5b), що допускають локальні продовження на $\mathfrak{r}^3$.

Ідеал $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}_3$ описано таким наслідком леми 4.3.1.

Наслідок 4.3.4. *Узагальнене векторне поле $\eta^3\partial_{\mathfrak{r}^3}$ належить $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$ тоді й лише тоді, коли коефіцієнт η^3 — гладка функція скінченної кількості ω^i.*

Уточнимо вигляд канонічних представників класів еквівалентності по підалгебрі $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}_3$.

Лема 4.3.5. *Кожен клас еквівалентності по підалгебрі $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}_3$ містить узагальнене векторне поле вигляду*

$$\eta^1[\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2]\partial_{\mathfrak{r}^1}+\eta^2[\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2]\partial_{\mathfrak{r}^2}+\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathfrak{r}^3_x\hat\eta^3[\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2]\partial_{\mathfrak{r}^3}, \tag{4.23}$$

де коефіцієнти η^1, η^2 і $\hat\eta^3$ задовольняють систему визначальних рівнянь (4.22a), (4.22b) і

$$\mathcal{D}_t\hat\eta^3+(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathcal{D}_x\hat\eta^3+\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(\eta^1+\eta^2)=0. \tag{4.24}$$

Елементи вигляду (4.23) з алгебри $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$ складають підалгебру цієї алгебри, яку позначимо через $\bar\Sigma^{\mathrm{q}}_{12}$. На жаль, алгебри Σ^{q}_{12} і $\bar\Sigma^{\mathrm{q}}_{12}$ не є ізоморфними. Хоча $\hat\Sigma^{\mathrm q} = \bar\Sigma^{\mathrm q}_{12} + \hat\Sigma^{\mathrm q}_3$, ця сума не є прямою, оскільки $\bar\Sigma^{\mathrm q}_{12} \cap \hat\Sigma^{\mathrm q}_3 = \langle \mathrm e^{\mathfrak r^2-\mathfrak r^1}\mathfrak r^3_x\partial_{\mathfrak r^3}\rangle$. Алгебра $\Sigma^{\mathrm q}_{12}$ є натурально ізоморфною фактор-алгебрі $\bar\Sigma^{\mathrm q}_{12}/\langle \mathrm e^{\mathfrak r^2-\mathfrak r^1}\mathfrak r^3_x\partial_{\mathfrak r^3}\rangle$.

Вичерпний опис алгебри $\Sigma^{\mathrm q}_{12}$ є досить складним. Для цього зведемо систему (4.5) до системи (4.13), що містить (1+1)-вимірне рівняння Клейна–Гордона. Аналогічно системі (4.5), позначимо через $\mathfrak S$ алгебру узагальнених симетрій системи (4.13), а через $\mathfrak S^{\mathrm{triv}}$ — алгебру її тривіальних узагальнених симетрій, чиї характеристики зникають на розв'язках системи (4.13). Факторалгебру $\mathfrak S^{\mathrm q} = \mathfrak S/\mathfrak S^{\mathrm{triv}}$ можна ототожнити, наприклад, з підалгеброю канонічних представників в еволюційній формі, тобто

$$\hat{\mathfrak S}^{\mathrm q} = \{\chi[q,s]\partial_q + \theta[q,s]\partial_s \in \mathfrak S\}.$$

Дужку Лі на алгебрі $\hat{\mathfrak S}^{\mathrm q}$ визначимо як модифіковану дужку Лі узагальнених векторних полів у просторі струменів із незалежними змінними (y,z) і залежними змінними (q,s), де всі мішані похідні змінної q і всі похідні змінної s, що містять диференціювання по y, замінено виразами, які випливають із системи (4.13) і її диференціальних наслідків. Система визначальних рівнянь на компоненти елементів алгебри $\hat{\mathfrak S}^{\mathrm q}$ така:

$$\mathrm D_y\mathrm D_z\chi = \chi, \tag{4.25a}$$

$$s_1(\mathrm D_z-1)^2\chi + K_1\mathrm D_y\theta = \frac{K^1}{K^2}s_1(\mathrm D_y+\mathrm D_z-2)\chi + K^2\mathrm D_z\theta. \tag{4.25b}$$

Алгебра $\hat{\mathfrak S}^{\mathrm q}$ ізоморфна алгебрі $\hat\Sigma^{\mathrm q}$. Цей ізоморфізм спільно індукують підняття алгебри Σ до алгебри $\mathfrak S$ продовженням точкового перетворення (4.15), виключення похідних залежної змінної p (включно з самою змінною p) з огляду на рівняння (4.14) і його диференціальні наслідки та наступна проєкція отриманих узагальнених векторних полів на простір струменів із незалежними змінними (y,z) і залежними змінними (q,s). Щоб відобразити $\mathfrak S$ у Σ, потрібно продовжити елементи алгебри $\mathfrak S$ на p згідно з рівнянням (4.14) і підняти результат нескінченним продовженням точкового перетворення (4.16).

Лема 4.3.6. *q-компоненти елементів алгебри $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}$ не залежать від змінної s і її похідних.*

Лема 4.3.6 є аналогом леми 4.3.3 для системи (4.13) і проявом часткової зачепленості цієї системи. З огляду на лему 4.3.6 підалгебра $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}_s$ алгебри $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}$, яку складають елементи з нульовими q-компонентами, є ідеалом алгебри $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}$. З наслідку 4.3.2 (або наслідку 4.3.4) випливає, що цей ідеал складають узагальнені векторні поля вигляду $\theta\partial_s$, де θ — гладка функція скінченної, але невизначеної наперед кількості $\hat{\omega}^i$. Оскільки ідеал $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}_s$ алгебри $\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}$ відповідає ідеалу $\hat{\Sigma}^{\mathrm{q}}_3$ алгебри $\hat{\Sigma}^{\mathrm{q}}$ і ізоморфний йому, то достатньо описати факторалгебру $\mathfrak{S}^{\mathrm{q}}_q := \hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}/\hat{\mathfrak{S}}^{\mathrm{q}}_s$.

Позначимо через $\hat{\Xi}^{\mathrm{q}}$ алгебру зведених узагальнених симетрій (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона (4.13a):

$$\hat{\Xi}^{\mathrm{q}} = \{\chi[q]\partial_q \mid \mathcal{D}_y\mathcal{D}_z\chi = \chi\}.$$

Факторалгебра $\mathfrak{S}^{\mathrm{q}}_q$ є натурально ізоморфною підалгебрі $\mathfrak{A}$ алгебри $\hat{\Xi}^{\mathrm{q}}$, яку складають елементи алгебри $\hat{\Xi}^{\mathrm{q}}$, що допускають локальне продовження на змінну s. У додатку A.1 показано, що алгебра $\hat{\Xi}^{\mathrm{q}}$ є напівпрямою сумою своєї підалгебри $\hat{\Lambda}^{\mathrm{q}}$ і свого ідеалу $\hat{\Xi}^{-\infty}$: $\hat{\Xi}^{\mathrm{q}} = \hat{\Lambda}^{\mathrm{q}} \Subset \hat{\Xi}^{-\infty}$, де

$$\hat{\Lambda}^{\mathrm{q}} := \langle\, (\mathcal{J}^\kappa q)\partial_q,\, (\mathcal{D}_y^\iota\mathcal{J}^\kappa q)\partial_q,\, (\mathcal{D}_z^\iota\mathcal{J}^\kappa q)\partial_q,\, \kappa\in\mathbb{N}_0,\, \iota\in\mathbb{N}\,\rangle,$$
$$\hat{\Xi}^{-\infty} := \{f(y,z)\partial_q \mid f\in\mathrm{KG}\},$$

$\mathcal{J} := y\mathcal{D}_y - z\mathcal{D}_z$, а KG позначає множину розв'язків (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона (4.13a), тобто $f\in\mathrm{KG}$ означає, що $f_{yz} = f$.

Лема 4.3.7.

$$\mathfrak{A} = \big\{Q^{\zeta,c} := \big((\mathcal{D}_y+1)\zeta + cq\big)\partial_q \mid \zeta=\zeta[q]\colon \mathcal{D}_y\mathcal{D}_z\zeta = \zeta,\ c\in\mathbb{R}\big\},$$

а продовження узагальненого векторного поля $Q^{\zeta,c}$ на змінну s задано формулою

$$\theta = \frac{s_1}{K^2}(\mathcal{D}_y+\mathcal{D}_z-2)\zeta. \tag{4.26}$$

Інакше кажучи, лема 4.3.7 означає, що елемент алгебри $\hat\Lambda^{\mathrm{q}}$ можна відобразити в узагальнену симетрію системи (4.5) тоді й лише тоді, коли відповідний оператор належить лінійній оболонці

$$\langle\, 1,\ (\mathcal{D}_y+1)\mathcal{D}_y^{\iota}\mathcal{J}^{\kappa},\ (\mathcal{D}_z+1)\mathcal{D}_z^{\iota}\mathcal{J}^{\kappa},\ \kappa,\iota\in\mathbb{N}_0\,\rangle.$$

Зокрема, ця лінійна оболонка містить усі многочлени від змінної $\mathcal{D}_y$ і всі многочлени від змінної $\mathcal{D}_z$. Її доповненням у всьому просторі операторів, асоційованих з елементами алгебри $\hat\Lambda^{\mathrm{q}}$, є $\langle\,\mathcal{J}^{\kappa},\ \kappa\in\mathbb{N}\,\rangle$. Елементи алгебри $\hat\Lambda^{\mathrm{q}}$, асоційовані з операторами з доповнюючого підпростору, відповідають *нелокальним* симетріям системи (4.5). Такі нелокальні симетрії є узагальненими симетріями певних потенціальних систем для системи (4.5), пов'язаних із потенціальними системами для (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона (4.13a).

Завершуючи наведений вище розгляд, сформулюємо теорему.

Теорема 4.3.8. *Факторалгебра Σ^{q} узагальнених симетрій системи (4.5) натурально ізоморфна алгебрі $\hat\Sigma^{\mathrm{q}}$, що є лінійною оболонкою узагальнених векторних полів*

$$\begin{aligned}
&\check{\mathcal{W}}(\Omega)=\Omega\partial_{\mathfrak{r}^3},\\
&\check{\mathcal{D}}=\big(x-V^1t\big)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+\big(x-V^2t\big)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+\big(x-V^3t\big)\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},\\
&\check{\mathcal{P}}(\Phi)=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\left((\Phi+2\Phi_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\Phi-2\Phi_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\Phi\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\right),\\
&\check{\mathcal{R}}(\Gamma)=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\Big((\tilde{\mathrm{D}}_y\Gamma+\Gamma)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\tilde{\mathrm{D}}_z\Gamma+\Gamma)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\Gamma\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\Big),
\end{aligned}$$

де Γ пробігає множину $\{\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa}\tilde q,\ \tilde{\mathrm{D}}_y^{\iota}\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa}\tilde q,\ \tilde{\mathrm{D}}_z^{\iota}\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa}\tilde q,\ \kappa\in\mathbb{N}_0,\ \iota\in\mathbb{N}\}$, параметр-функція $\Phi=\Phi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння Клейна–Гордона $\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=-\Phi/4$, а параметр-функція Ω пробігає множину гладких функцій скінченної, але наперед невизначеної кількості $\omega^{\kappa}:=(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathcal{D}_x)^{\kappa}\mathfrak{r}^3$, $\kappa\in\mathbb{N}_0$.

4.3.3. Косиметрії. Простір Υ косиметрій системи (4.5) можна обчислити аналогічно узагальненим симетріям через використання її часткової зачепленості і лінеаризовності її підсистеми (4.5a)–(4.5b) перетворенням годографа. Нехай $\Upsilon^{\rm triv}\subset\Upsilon$ позначає простір тривіальних косиметрій системи (4.5), що зникають на її розв'язках. Факторпростір $\Upsilon^{\rm q}=\Upsilon/\Upsilon^{\rm triv}$ можна ототожнити, наприклад, з підпростором, який складають канонічні представники косиметрій: $\hat\Upsilon^{\rm q}=\big\{(\lambda^i[\mathfrak r], i=1,2,3)\in\Upsilon\big\}$.

Теорема 4.3.9. *Простір $\hat\Upsilon^{\rm q}$ канонічних представників косиметрій є лінійною оболонкою косиметрій із трьох сімей:*

1. $\mathrm e^{\mathfrak r^1-\mathfrak r^2}\big(\Omega,-\Omega,(\hat{\mathcal A}\Omega)/\omega^1\big)$ *з оператором* $\hat{\mathcal A}=\sum_{\kappa=0}^\infty\omega^{\kappa+1}\partial_{\omega^\kappa}$ *і з* Ω, *що пробігає множину гладких функцій скінченної, але наперед невизначеної кількості* $\omega^\kappa=(\mathrm e^{\mathfrak r^2-\mathfrak r^1}\mathrm D_x)^\kappa\mathfrak r^3$, $\kappa\in\mathbb N_0$.
2. $\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2}(-2\Phi_{\mathfrak r^1},\,\Phi,0)$, *де параметр-функція* $\Phi=\Phi(\mathfrak r^1,\mathfrak r^2)$ *пробігає простір розв'язків рівняння Клейна–Гордона* $\Phi_{\mathfrak r^1\mathfrak r^2}=-\Phi/4$.
3. $\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2}\big(-\tilde{\mathrm D}_y\tilde{\mathfrak Q}\tilde q,\,\tilde{\mathfrak Q}\tilde q,\,0\big)$, *де оператор* $\tilde{\mathfrak Q}$ *пробігає множину*

$$\big\{\tilde{\mathfrak J}^\kappa,\,\tilde{\mathfrak J}^\kappa\tilde{\mathrm D}_y^\iota,\,\tilde{\mathfrak J}^\kappa\tilde{\mathrm D}_z^\iota,\,\kappa\in\mathbb N_0,\,\iota\in\mathbb N\big\}.$$

4.3.4. Закони збереження. Прямим методом доведено таку теорему.

Теорема 4.3.10. *Простір законів збереження системи* (4.5) *є натурально ізоморфним простору, натягнутому на такі збережені струми цієї системи:*

1. $\big(\mathrm e^{\mathfrak r^1-\mathfrak r^2}\Omega,\ (\mathfrak r^1+\mathfrak r^2)\mathrm e^{\mathfrak r^1-\mathfrak r^2}\Omega\big)$, *де параметр-функція* Ω *пробігає простір гладких функцій скінченної, але невизначеної наперед кількості* $\omega^\kappa=(\mathrm e^{\mathfrak r^2-\mathfrak r^1}\mathrm D_x)^\kappa\mathfrak r^3$, $\kappa\in\mathbb N_0$, *і такі дві функції треба вважати еквівалентними, якщо їхня різниця належить образу оператора* $\hat{\mathcal A}=\sum_{\kappa=0}^\infty\omega^{\kappa+1}\partial_{\omega^\kappa}$.
2. $\big(\mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2}(2\Phi_{\mathfrak r^1}+\Phi),\ \mathrm e^{(\mathfrak r^1-\mathfrak r^2)/2}(2(\mathfrak r^1+\mathfrak r^2+1)\Phi_{\mathfrak r^1}+(\mathfrak r^1+\mathfrak r^2-1)\Phi)\big)$, *де параметр-функція* $\Phi=\Phi(\mathfrak r^1,\mathfrak r^2)$ *пробігає простір розв'язків рівняння Клейна–Гордона* $\Phi_{\mathfrak r^1\mathfrak r^2}=-\Phi/4$.

3. $\big(\mathfrak{r}^2_x\tilde\rho+\mathfrak{r}^1_x\tilde\sigma,\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2-1)\mathfrak{r}^2_x\tilde\rho+(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2+1)\mathfrak{r}^1_x\tilde\sigma\big)$ *з* $\tilde\rho=-\tilde q\tilde{\mathfrak{D}}_z\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde q$, $\tilde\sigma=(\tilde{\mathfrak{D}}_y\tilde q)\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde q$, *де оператор* $\tilde{\mathfrak{Q}}$ *пробігає множину* $\big\{\,\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa'},\ \kappa'\in2\mathbb{N}_0+1,\ (\tilde{\mathfrak{J}}+\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}^\iota_y,\ (\tilde{\mathfrak{J}}-\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}^\iota_z,\ \kappa\in\mathbb{N}_0,\ \iota\in\mathbb{N},\ \kappa+\iota\in2\mathbb{N}_0+1\,\big\}$.

Зауваження 4.3.11. Збережені струми з теореми 4.3.10, асоційовані з

$$\Omega=\frac{\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}^3+1},\quad \Omega=\frac{1}{\mathfrak{r}^3+1},\quad \Omega=1,$$
$$\Phi=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2-1),\quad \Phi=\frac18\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\left((\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)^2-4\mathfrak{r}^2\right),$$

відповідають збереженню мас обох індивідуальних фаз і маси суміші, а також збереженню імпульсу суміші й енергії в моделі дрейфового потоку, див. [51, розд. 13]. Відповідні рівняння в збереженій формі такі:

$$\rho^1_t+(\rho^1u)_x=0,\quad \rho^2_t+(\rho^2u)_x=0,\quad (\rho^1+\rho^2)_t+\big((\rho^1+\rho^2)u\big)_x=0,$$
$$\big((\rho^1+\rho^2)u\big)_t+\big((\rho^1+\rho^2)(u^2+1)\big)_x=0,$$
$$\left((\rho^1+\rho^2)\left(\frac{u^2}{2}+\ln(\rho^1+\rho^2)\right)\right)_t+\left((\rho^1+\rho^2)\left(\frac{u^2}{2}+\ln(\rho^1+\rho^2)+1\right)u\right)_x=0.$$

Зокрема, величину $\ln(\rho^1+\rho^2)$ можна інтерпретувати як внутрішню енергію суміші. Перше, друге й четверте рівняння складають збережену форму системи $\mathcal{S}$ у вихідних залежних змінних (u,ρ^1,ρ^2).

Теорема 4.3.12. *Під дією узагальнених симетрій системи* (4.5) *на її простір законів збереження генеруючу множину законів збереження цієї системи складають два закони збереження нульового порядку, що відповідно містять збережені струми*

$$f\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(\,\mathfrak{r}^3,\ (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathfrak{r}^3\,\big), \tag{4.27a}$$
$$\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(x-V^3t,V^3(x-V^3t)-t\big)\quad з\quad V^3:=\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2. \tag{4.27b}$$

4.3.5. Гамільтонові структури гідродинамічного типу. Систему $\mathcal{E}$ еволюційних диференціальних рівнянь $\mathbf{u}_t-K[\mathbf{u}]=0$, де K — набір функцій від незалежних змінних $(t,\mathbf{x})$ і просторових похідних (включно з похідними порядку нуль) залежних змінних $\mathbf{u}=(u^1,\dots,u^n)^\mathsf{T}$, називають гамільтоновою, якщо її можна зобразити у вигляді $\mathbf{u}_t = \mathfrak{H}\,\delta\mathcal{H}$. Тут $\mathfrak{H}$ — гамільтонів оператор, тобто формально кососпряжений матричний диференціальний оператор, асоційована з яким дужка $\{\cdot,\cdot\}$, визначена як $\{\mathcal{I},\mathcal{J}\} = \int \delta\mathcal{I}\cdot\mathfrak{H}\,\delta\mathcal{J}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ для функціоналів $\mathcal{I}$ і $\mathcal{J}$, задовольняє тотожність Якобі, а тому є дужкою Пуасона, δ позначає варіаційну похідну, а функціонал $\mathcal{H}$ називають гамільтоніаном системи $\mathcal{E}$ відносно оператора $\mathfrak{H}$, див. [29].

Теорема 4.3.13. *Система $\mathcal{S}$ допускає нескінченну сім'ю узгоджених гамільтонових структур $\mathfrak{H}_\Theta$, параметризованих гладкою функцією Θ від $\mathfrak{r}^3$,*

$$\mathfrak{H}_\Theta = \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\,\mathrm{diag}\big(-1,1,\Theta(\mathfrak{r}^3)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\big)\mathrm{D}_x \\ -\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}}{2}\begin{pmatrix}\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x & \mathfrak{r}^1_x-\mathfrak{r}^2_x & -2\mathfrak{r}^3_x\\ \mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x & \mathfrak{r}^1_x-\mathfrak{r}^2_x & -2\mathfrak{r}^3_x\\ 2\mathfrak{r}^3_x & 2\mathfrak{r}^3_x & -2f^{33}\end{pmatrix},$$

а відповідна сім'я гамільтоніанів $\mathcal{H}_{c_0,\Xi} = \int H_{c_0,\Xi}\mathrm{d}x$ визначена їхніми густинами

$$H_{c,\Xi} = \left(\frac14(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)^2+\frac12\big(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2\big)+\Xi(\mathfrak{r}^3)\right)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}+c(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2).$$

Тут $f^{33} := \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\big((\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x)\Theta+\frac12\mathfrak{r}^3_x\Theta_{\mathfrak{r}^3}\big)$, c — довільна стала, а функція Ξ від $\mathfrak{r}^3$ задовольняє допоміжне рівняння

$$\Xi_{\mathfrak{r}^3\mathfrak{r}^3}\Theta+\frac12\Theta_{\mathfrak{r}^3}\Xi_{\mathfrak{r}^3} = 2c.$$

За допомогою будь-якого гамільтонового оператора $\mathfrak{H}_\Theta$ можна спорядити простір $\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}$ канонічних представників косиметрій системи $\mathcal{S}$ структурою алгебри Лі, див. [35] і [19, підрозд. 3.1], де відповідну дужку Лі визначено формулою

$$[\gamma^1,\gamma^2]_{\mathfrak{H}_\Theta} = \ell_{\gamma^2}\mathfrak{H}_\Theta\gamma^1+\ell^\dagger_{\mathfrak{H}_\Theta\gamma^1}\gamma^2+(\ell_{\gamma^1}-\ell^\dagger_{\gamma^1})\mathfrak{H}_\Theta\gamma^2$$

для будь-яких $\gamma^1, \gamma^2 \in \hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}$. Тут ℓ_γ і $\ell_\gamma^\dagger$ — відповідно універсальний оператор лінеаризації диференціальної функції $\gamma \in \hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}$ і формально спряжений до нього оператор. Позначимо описану алгебру Лі через $\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}_\Theta$, а відповідну дужку Лі — $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{H}_\Theta}$. Оператор $\mathfrak{H}_\Theta$ встановлює гомоморфізм між алгеброю Лі $\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}_\Theta$ і алгеброю Лі $\hat{\Sigma}^{\mathrm{q}}$ канонічних представників узагальнених симетрій системи $\mathcal{S}$. Образ $\mathfrak{H}_\Theta\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}_\Theta$ цього гомоморфізму є власною підалгеброю алгебри $\hat{\Sigma}^{\mathrm{q}}$. Більш точно, образ $\mathfrak{H}_\Theta\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}_\Theta$ є лінійною оболонкою узагальнених симетрій із трьох сімей, що є образами відповідних сімей із теореми 4.3.9 і чиїми елементами є, у позначеннях теорем 4.3.8 і 4.3.9, такі векторні поля:

1. $\check{\mathcal{W}}(\bar{\Omega}^\Theta)$, де $\bar{\Omega}^\Theta = \hat{\mathcal{A}}\big((\hat{\mathcal{A}}\Omega)\Theta/\omega^1\big)$,

2. $\check{\mathcal{P}}(\bar{\Phi})$, де $\bar{\Phi} = \Phi_{\mathfrak{r}^1} - \frac{1}{2}\Phi$, а тому параметр-функція $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ пробігає простір розв'язків рівняння Клейна–Гордона $\bar{\Phi}_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = -\bar{\Phi}/4$,

3. $\check{\mathcal{R}}(\bar{\Gamma})$, де $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{D}}_y - 1)\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde{q}$.

Для ненульової функції Θ ядро зазначеного вище гомоморфізму є двовимірним і натягнуто на косиметрії $\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(1,-1,0)$ і $\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(\bar{\Theta}, -\bar{\Theta}, \bar{\Theta}_{\mathfrak{r}^3})$, де $\bar{\Theta}$ є первісною функції $1/\Theta$, тобто $\bar{\Theta}_{\mathfrak{r}^3} = 1/\Theta$. Перша косиметрія є особливою завдяки тому, що вона є єдиним (з точністю до лінійної незалежності) спільним елементом першої і другої сімей із теореми 4.3.9. Обидві косиметрії є характеристиками законів збереження і асоційовані зі збереженими струмами $\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}(1, \mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)$ і $\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(\bar{\Theta}, (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\bar{\Theta}\big)$, які належать до першої сім'ї з теореми 4.3.10. У підсумку, простір функціоналів Казіміра гамільтонового оператора $\mathfrak{H}_\Theta$ є лінійною оболонкою двох функціоналів

$$\mathcal{C}_1 := \int \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{C}_2^\Theta := \int \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\bar{\Theta}(\mathfrak{r}^3)\,\mathrm{d}x.$$

У виродженому випадку з $\Theta \equiv 0$ ядро наведеного вище гомоморфізму є нескінченновимірним і збігається з першою сім'єю з теореми 4.3.9. Елементи цієї сім'ї є характеристиками законів збереження тоді й лише тоді, коли вони відповідають збереженим струмам із першої сім'ї з теореми 4.3.10. Це означає, що простір функціоналів Казіміра гамільтонового оператора $\mathfrak{H}_0$ складають функціонали

$$\int \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega(\omega^0,\omega^1,\dots)\,\mathrm{d}x,$$

де параметр-функція Ω пробігає простір гладких функцій скінченної, але невизначеної наперед кількості $\omega^\kappa=(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathcal{D}_x)^\kappa\mathfrak{r}^3$, $\kappa\in\mathbb{N}_0$.

Розглянемо зв'язки, що виокремлюють простір канонічних представників характеристики законів збереження системи $\mathcal{S}$, які описано у [74, теорема 18], з простору $\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}$ канонічних представників її косиметрій. Накладаючи ці зв'язки на Ω і $\tilde{\mathfrak{Q}}$, що параметризують сім'ї, які генерують $\mathfrak{H}_\Theta\hat{\Upsilon}^{\mathrm{q}}$, виокремимо алгебру гамільтонових симетрій системи $\mathcal{S}$, асоційованих із гамільтоновим оператором $\mathfrak{H}_\Theta$.

Теорема 4.3.14. *Алгебра гамільтонових симетрій системи* (4.5) *для гамільтонового оператора* $\mathfrak{H}_\Theta$ *з гладкою функцією* Θ *від* $\omega^0:=\mathfrak{r}^3$ *є лінійною оболонкою узагальнених векторних полів* $\check{\mathcal{W}}(\bar{\Omega}^\Theta)=\bar{\Omega}^\Theta\partial_{\mathfrak{r}^3}$,

$$\check{\mathcal{P}}(\Phi)=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\left((\Phi+2\Phi_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\Phi-2\Phi_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\Phi\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\right),$$
$$\check{\mathcal{R}}(\bar{\Gamma})=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\Big((\tilde{\mathfrak{D}}_y\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\tilde{\mathfrak{D}}_z\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\bar{\Gamma}\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\Big),$$

де $\bar{\Omega}^\Theta=\hat{\mathcal{A}}\big(\Theta\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-\hat{\mathcal{A}})^\kappa\Omega_{\omega^\kappa}\big)$, *причому* $\hat{\mathcal{A}}=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\omega^{\kappa+1}\partial_{\omega^\kappa}$, *а параметр-функція* Ω *пробігає простір гладких функцій скінченної, але невизначеної наперед кількості* $\omega^\kappa=(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathcal{D}_x)^\kappa\mathfrak{r}^3$, $\kappa\in\mathbb{N}_0$, *параметр-функція* $\Phi=\Phi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ *пробігає простір розв'язків рівняння Клейна–Гордона* $\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=-\Phi/4$, *а* $\bar{\Gamma}=\frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{D}}_y-1)\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde{q}$ *з оператором* $\tilde{\mathfrak{Q}}$, *що пробігає множину*

$$\big\{\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa'},\ \kappa'\in 2\mathbb{N}_0+1,\ (\tilde{\mathfrak{J}}+\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}_y^\iota,\ (\tilde{\mathfrak{J}}-\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}_z^\iota,$$
$$\kappa\in\mathbb{N}_0,\ \iota\in\mathbb{N},\ \kappa+\iota\in 2\mathbb{N}_0+1\big\}.$$

Висновки

Основні результати дисертації такі:

- Прокласифіковано ліївські симетрії класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза довільного фіксованого порядку, а також його підкласів із довільними елементами, залежними лише від часової чи лише від просторової змінних. Показано, що цей клас нормалізований у звичайному сенсі, а задачу його групової класифікації зведено до задачі групової класифікації його підкласу, яку проведено алгебраїчним методом. Показано важливість правильного вибору порядку калібрувань довільних елементів.
- Знайдено перші приклади узагальнених груп еквівалентності з параметрами, що залежать від несталих довільних елементів. Також уперше строго побудовано розширені узагальнені групи еквівалентності класів рівнянь з частинними похідними. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності і проаналізовано основні властивості таких груп.
- Комбінуванням кількох методів ефективно проведено групову класифікацію класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Спочатку використано метод відображень, щоб отримати клас, зручніший із погляду групового аналізу. Зручність полягає в тому, що відображений клас можна розбити на два підкласи, інваріантні під дією допустимих перетворень усього класу. Вона особливо помітна на тлі відповідної умови для розбиття вихідного класу. Показано, що отримані підкласи нормалізовані відповідно в узагальненому й розширеному узагальненому сенсах. Для першого підкласу групову класифікацію проведено алгебраїчним методом, а класифікацію другого зведено до відомої у літературі. Об'єднання побудованих класифікаційних списків відображено у класифікаційний список для вихідного класу.

- Вперше наведено формалізований опис методу розгалуженого розщеплення для загальних класів диференціальних рівнянь. За допомогою його двокрокової версії прокласифіковано ліївські симетрії рівнянь реакції–дифузії з певного класу. Також виокремлено підклас цього класу з нетривіальною скінченновимірною узагальненою групою еквівалентності й доведено, що жодна ефективна узагальнена група еквівалентності виокремленого підкласу не містить його звичайної групи еквівалентності.

- Для загальних груп еквівалентності, включно з нескінченновимірними, строго формалізовано процедуру вибору представника множини еквівалентних рівнянь, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності, тобто процедуру докалібровування довільних елементів такого підкласу рівнянь перетвореннями еквівалентності.

- Проведено розширений симетрійний аналіз системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Показано, що її можна звести до рівняння Клейна–Гордона. За допомогою цього зв'язку описано її загальний розв'язок, знайдено алгебри Лі її вищих симетрій та косиметрій, простір законів збереження, а також побудовано нескінченну сім'ю гамільтонових структур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации, *Докл. АН СССР* **293**:5, (1987), 1033–1035

2. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Нелокальные симметрии. Эвристический подход, *Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Новейшие достижения,* **34**, ВИНИТИ, М., (1989), 3–83.

3. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь вищого порядку, в *Групові та аналітичні методм у математичній фізиці, Збірник праць Інституту математики НАН Унраїни*, **36** (2001), 45–50.

4. Дородницын В.А., Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником, *Журн. вычисл. математики и мат. физики* **22**:6 (1982), 1393–1400.

5. Магадеев Б.А., О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений, *Алгебра и Анализ* **5** (1993), 141–156.

6. Мелешко С.В., Групповая классификация уравнений двумерных движений газа, *Прикладная математика и механика* **58** (1994), 56–62.

7. Мубаракзянов Г.М., Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка, *Изв. вузов. Мат.* (1963), № 3(34), 99–106.

8. Мубаракзянов Г.М., О разрешимых алгебрах Ли, *Изв. вузов. Мат.* (1963), № 1(32), 114–123.

9. Царев С.П., О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа, *Докл. АН СССР* **282**:3 (1985), 534–537.

10. Царев С.П., Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа, *Изв. АН СССР* **54**:5 (1990), 1048–1068.

11. Ames W.F., Anderson R.L., Dorodnitsyn V.A., Ferapontov E.V., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. and Svirshchevskiĭ S.R., *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

12. Arnol'd V., *Ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

13. Banda M., Herty M. and Ngnotchouye J., Toward a mathematical analysis for drift flux multiphase flow models in networks, *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (2010), 4633–4653.

14. Basarab-Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R., The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.* **69** (2001), 43–94, arXiv:math-ph/0005013.

15. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E.M. and Popovych R.O., Complete group classification of a class of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 123515, arXiv:1106.4801.

16. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E.M. and Popovych R.O., Algebraic method for finding equivalence groups, *J. Phys. Conf. Ser.* (2015), 17 pp., arXiv:1503.06487.

17. Bihlo A. and Popovych R.O., Point symmetry group of the barotropic vorticity equation, in *Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010,*

Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2011 pp. 15–27, arXiv:1009.1523.

18. Bihlo A. and Popovych R.O., Group classification of linear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **448** (2017), 982–2015, arXiv:1605.09251.

19. Błaszak M., *Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

20. Błaszak M. and Sergyeyev A., A coordinate-free construction of conservation laws and reciprocal transformations for a class of integrable hydrodynamic-type systems, *Rep. Math. Phys.* **64** (2009), 341–354, arXiv:0803.0308.

21. Bocharov A.V., Chetverikov V.N., Duzhin S.V., Khor'kova N.G., Krasil'shchik I.S., Samokhin A.V., Torkhov Y.N., Verbovetsky A.M. and Vinogradov A.M., *Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

22. Burde G. and Sergyeyev A., Ordering of two small parameters in the shallow water wave problem, *J. Phys. A* **46** (2013), 075501, arXiv:1301.6672.

23. Cherniha R., King J.R. and Kovalenko S., Lie symmetry properties of nonlinear reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusivity, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **36** (2016), 98–108, arXiv:1507.01893.

24. Crighton D.G., Model equations of nonlinear acoustics, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **11** (1979), 11–33.

25. Crighton D.G. and Scott J.F., Asymptotic solutions of model equations in nonlinear acoustics, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **292** (1979), 101–134.

26. Dos Santos Cardoso-Bihlo E.M., Bihlo A. and Popovych R.O., Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011), 3622–3638, arXiv:1012.0297.

27. Doyle J. and Englefield M.J., Similarity solutions of a generalized Burgers equation, *IMA J. Appl. Math.* **44** (1990), 145–153.

28. Doyle P.W., Symmetry classes of quasilinear systems in one space variable, *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994), 225–266.

29. Dubrovin B. and Novikov S., Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory, *Russian Math. Surveys* **44** (1989), 35–124.

30. El G., Hydrodynamic-type systems and their integrability. Introduction for applied mathematicians, 2014, preprint.

31. Evje S. and Fjelde K., Relaxation schemes for the calculation of two-phase flow in pipes, *Math. Comput. Modelling* **36** (2002), 535–567.

32. Evje S. and Flätten T., Weakly implicit numerical schemes for a two-fluid model, *SIAM J. Appl. Math.* **26** (2005), 1449–1484.

33. Evje S. and Flätten T., On the wave structure of two phase flow models, *SIAM J. Appl. Math.* **67** (2007), 487–511.

34. Evje S. and Karlsen K.H., Global existence of weak solutions for a viscous two-phase model, *J. Differential Equations* **245** (2008), 2660–2703.

35. Fuchssteiner B., The Lie algebra structure of degenerate Hamiltonian and bi-Hamiltonian systems, *Progr. Theoret. Phys.* **68** (1982), 1082–1104.

36. Fushchych W. and Boyko V., Higher-order Galilei-invariant equations of Burgers and Korteweg–de Vries type, *Ukrainian Math. J.* **48** (1996), 1799–1814.

37. Gagnon L. and Winternitz P., Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A* **26** (1993), 7061–7076.

38. Gazeau J.P. and Winternitz P., Symmetries of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 4087–4102.

39. Grindrod P., *The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations. Patterns and Waves*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2nd ed., 1996.

40. Grundland A.M. and Hariton A.J., Supersymmetric version of a hydrodynamic system in Riemann invariants and its solutions, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 043502, arXiv:0801.3292.

41. Grundland A.M. and Huard B., Riemann invariants and rank-k solutions of hyperbolic systems, *J. Nonlinear Math. Phys.* **13** (2006), 393–419, arXiv:math-ph/0511061.

42. Grundland A.M. and Huard B., Conditional symmetries and Riemann invariants for hyperbolic systems of PDEs, *J. Phys. A* **40** (2007), 4093–4123, arXiv:math-ph/0701024.

43. Grundland A., Sheftel M. and Winternitz P., Invariant solutions of hydrodynamic-type equations, *J. Phys. A* **33** (2000), 8193–8215.

44. Güngör F., Lahno V. and Zhdanov R., Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **45** (2004), 2280–2313, arXiv:nlin/0201063.

45. Hammerton P. and Crighton D., Approximate solution methods for nonlinear acoustic propagation over long ranges, *Proc. R. Soc. Lond. A* **426** (1989), 125–152.

46. Hilgert J. and Neeb K., *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer, New York, 2012.

47. Huang Q., Lahno V., Qu C. and Zhdanov R., Preliminary group classification of a class of fourth-order evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 023503.

48. Huang Q., Qu C. and Zhdanov R., Group classification of linear fourth-order evolution equations, *Rep. Math. Phys.* **70** (2012), 331–343.

49. Hydon P., How to construct discrete symmetries of partial differential equations, *Eur. J. Appl. Math* **11** (2000), 515–527.

50. Hydon P.E., *Symmetry methods of differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

51. Ishii M. and Hibiki T., *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*, Springer, 2006.

52. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, *Lobachevskii J. Math.* **31** (2010), 100–122, arXiv:0710.2731.

53. Khamitova R.S., The structure of a group and the basis of conservation laws, *Theoret. and Math. Phys.* **52** (1982), 777–781.

54. Kingston J.G. and Sophocleous C., On point transformations of a generalised Burgers equation, *Phys. Lett. A* **155** (1991), 15–19.

55. Kingston J.G. and Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A* **31** (1998), 1597–1619.

56. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations with time-dependent coefficients, in Lie theory and its applications in physics*, vol. 111 of* Springer Proc. Math. Stat.*, Springer, Tokyo*, 2014 pp. 451–459, arXiv:1402.0347.

57. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A* **47** (2014), 045201, arXiv:1309.7161.

58. Kurujyibwami C., Basarab-Horwath P. and Popovych R., Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **157** (2018), 171–203.

59. Lie S., Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung, *Arch. for Math.* **6** (1881), 328–368, (Translation by N.H. Ibragimov: Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 2, 1994, 473–508).

60. Lisle I., Equivalence transformations for classes of differential equations. Thesis (Ph.D.)–The University of British Columbia (Canada), 1992.

61. Long F., Karnbanjong A., Suriyawichitseranee A., Grigoriev Y. and Meleshko S., Application of a Lie group admitted by a homogeneous equation for group classification of a corresponding inhomogeneous equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **48** (2017), 350–360.

62. Martínez Alonso L., On the Noether map, *Lett. Math. Phys.* **3** (1979), 419–424.

63. Meleshko S.V., Generalization of the equivalence transformations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **3** (1996), 170–174.

64. Mkhize T., Moyo S. and Meleshko S., Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations: the algebraic approach, *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (2015), 1824–1837.

65. Murray J.D., *Mathematical Biology. I. An Introduction*, vol. 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 3rd ed., 2002.

66. Murray J.D., *Mathematical Biology. II. Spatial Models and Biomedical Applications*, vol. 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 3rd ed., 2003.

67. Nikitin A.G. and Popovych R.O., Group classification of nonlinear Schrödinger equations, *Ukrainian Math. J.* **53** (2001), 1255–1265, arXiv:math-ph/0301009.

68. Odesskii A. and Sokolov V., Non-homogeneous systems of hydrodynamic type possessing Lax representations, *Comm. Math. Phys.* **324** (2013), 47–62.

69. Olver P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, vol. 107 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1993.

70. Opanasenko S., Equivalence groupoid of a class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients, in *Collection of Works of Institute of Mathematics*, vol. 16, no. 1, Institute of Mathematics, Kyiv, pp. 131–154, 2019. arXiv:1909.00036.

71. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, arXiv:1703.06932.

72. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Equivalence groupoid of variable-coefficient Burgers equations, *J. Math. Anal. Appl.* **491** (2020), 124215, arXiv:1910.13500.

73. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift model, *Physica D* **402** (2020), 132188, arXiv:1705.09277.

74. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian operators of isothermal no-slip drift flux model, *Physica D* **411** (2020), 132546, arXiv:1908.00034.

75. Opanasenko S., Boyko V. and Popovych R.O., Enhanced group classification of reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, arXiv:1804.08776.

76. Opanasenko S. and Popovych R.O., Generalized symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation (2018), 16 pp., arXiv:1810.12434.

77. Ovsiannikov L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, Inc., New York – London, 1982.

78. Pavlov M., Integrable hydrodynamic chains, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 4134–4156, arXiv:1008.4530.

79. Pocheketa O., Popovych R. and Vaneeva O., Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping, *Appl. Math. Comput.* **243** (2014), 232–244, arXiv:1308.4265.

80. Pocheketa O. and Popovych R.O., Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101501, arXiv:1603.09377.

81. Pommaret J.F., *Partial differential equations and group theory. New perspectives for applications*, Mathematics and its Applications, 293. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

82. Popovych R. and Vaneeva O., More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), 3887–3899, arXiv:0911.1848.

83. Popovych R.O., Classification of admissible transformations of differential equations, in *Collection of Works of Institute of Mathematics*, vol. 3, no. 2, Institute of Mathematics, Kyiv, pp. 239–254, 2006.

84. Popovych R.O. and Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2010), 073102, arXiv:1010.3010.

85. Popovych R.O., Boyko V., Nesterenko M. and Lutfullin M., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A.* **36** (2003), 7337–7360, arXiv:math-ph/0301029v7.

86. Popovych R.O. and Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Complete point symmetry group of the barotropic vorticity equation on a rotating sphere, *J. Engrg. Math.* **82** (2013), 31–38, arXiv:1206.6919.

87. Popovych R.O. and Ivanova N., New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations, *J. Phys. A* **37** (2004), 7547–7565, arXiv:math-ph/0306035.

88. Popovych R.O. and Ivanova N., Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion–convection equations, *J. Phys. A* **38** (2005), 3145–3155, arXiv:math-ph/0402066.

89. Popovych R.O., Kunzinger M. and Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359, arXiv:math-ph/0611061.

90. Popovych R.O., Kunzinger M. and Ivanova N.M., Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations, *Acta Appl. Math.* **100** (2008), 113–185, arXiv:0706.0443.

91. Qu C.Z., Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Burgers equations, *IMA J. Appl. Math.* **54** (1995), 203–225, arXiv:math-ph/0301029v7.

92. Raja Sekhar T. and Satapathy P., Group classification for isothermal multiphase drift flux model of two phase flow, *Comput. Math. Appl.* **72** (2016), 1436–1443.

93. Romanova N.N., The vertical propagation of short acoustic waves in the real atmosphere, *Atmos. and Oceanic Phys.* **6** (1970), 73–84.

94. Rozhdestvenskii B.L. and Janenko N.N., *Systems of quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.

95. Sachdev P., *Nonlinear diffusive waves*, Cambridge University Press, 2009.

96. Scott J., The long time asymptotic of solutions to the generalized Burgers equation, *Proc. R. Soc. Lond. A* **373** (1981), 443–456.

97. Sergyeyev A., A simple construction of recursion operators for multidimensional dispersionless integrable systems, *J. Math. Anal. Appl.* **454** (2017), 468–480, arXiv:1501.01955.

98. Sergyeyev A., Integrable (3+1)-dimensional systems with rational lax pairs, *Nonlinear Dynamics* **91** (2018), 1677–1680, arXiv:1711.07395.

99. Serre D., Richness and the classification of quasilinear hyperbolic systems, *IMA Vol. Math. Appl.* **29** (1989), 315–333.

100. Serre D., Systèmes hyperboliques riches de lois de conservation., *Collège de France Seminar* **11** (1991), 248–281.

101. Sheftel M., Higher integrals and symmetries of semi-Hamiltonian systems, *Differential Equations* **29** (1994), 1548–1560.

102. Smoller J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, vol. 258 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1994.

103. Soh C.W., Symmetry reductions and new exact invariant solutions of the generalized Burgers equation arising in nonlinear acoustics, *Internat. J. Engrg. Sci.* **42** (2004), 1169–1191.

104. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient KdV-like equations, in Lie theory and its applications in physics*, vol. 36 of* Springer Proc. Math. Stat., Springer, Tokyo, 2013 pp. 451–459, arXiv:1204.4875.

105. Vaneeva O. and Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101504.

106. Vaneeva O., Pošta S. and Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), 19–25, arXiv:1608.03941.

107. Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O. and Sophocleous C., Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **330** (2007), 1363–1386, arXiv:math-ph/0605081.

108. Vaneeva O.O., Kuriksha O. and Sophocleous C., Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), 1243–1251, arXiv:1407.8488.

109. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46, arXiv:0708.3457.

110. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 225–242, arXiv:1111.5198.

111. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Equivalence transformations in the study of integrability, *Physica Scripta* **89** (2014), 038003.

112. Vaneeva O.O., Sophocleous C. and Leach P., Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems, *J. Engrg. Math.* **91** (2015), 165–176, arXiv:1303.3548.

113. Vinogradov A.M., The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. II. The nonlinear theory, *J. Math. Anal. Appl.* **100** (1984), 41–129.

114. Whitham G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley–Interscience, New York, 1st ed., 1999.

115. Winternitz P. and Gazeau J., Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *Phys. Lett. A* **167** (1992), 246–250.

116. Yun B.J., Park G.C. and Chung C.H., Measurements of void concentration parameters in the drift-flux model, *J. Kor. Nucl. Soc.* **25** (1993), 91–101.

117. Zharinov V., *Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations*, vol. 9 of *Series on Soviet and East European Mathematics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1992.

118. Zhdanov R. and Lahno V., Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source, *J. Phys. A* **32** (1999), 7405–7418, arXiv:math-ph/9906003.

119. Zuber N. and Findlay J.A., Average volumetric concentration in two-phase flow systems, *J. Heat Transfer* **87** (1965), 357–372.

Додаток А

Узагальнені симетрії і закони збереження (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона

Нижче наведено кілька результатів розширеного симетрійного аналізу (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона

$$\mathcal{K}\colon \quad u_{xy} = u;$$

див. [76] для докладного викладення цих результатів.

А.1. Узагальнені симетрії

Під час обрахування узагальнених симетрій без обмеження загальності можна розглядати лише еволюційні узагальнені векторні поля і еволюційних представників узагальнених симетрій [69, с. 291], а тому вважаємо, що алгеброю узагальнених симетрій рівняння $\mathcal{K}$ є

$$\Xi = \{Q = \eta[u]\partial_u \mid \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\eta[u] = \eta[u] \;\text{ на }\; \mathcal{K}\},$$

де $\eta[u]$ позначає диференціальну функцію від u, а D_x і D_y — оператори повних похідних відповідно по x і y. Позначимо через Ξ^{triv} алгебру тривіальних узагальнених симетрій рівняння $\mathcal{K}$, яка є ідеалом алгебри Ξ. Її складають усі узагальнені векторні поля в еволюційній формі з незалежними змінними (x, y) і залежною змінною u, чиї характеристики зникають на розв'язках рівняння $\mathcal{K}$. Факторалгебра $\Xi^{\mathrm{q}} = \Xi/\Xi^{\mathrm{triv}}$ є натурально ізоморфною алгебрі канонічних представників у зведеній еволюційній формі:

$$\hat{\Xi}^{\mathrm{q}} = \{Q = \eta[u]\partial_u \in \Xi \mid \exists n \in \mathbb{N}_0\colon \eta[u] = \eta(x, y, u_{-n}, \dots, u_n)\}.$$

Тут x, y, $u_0 := u$, $u_k := \partial_x^k u$ і $u_{-k} := \partial_y^k u$, $k \in \mathbb{N}$, становлять стандартні координати на многовиді, визначеному рівнянням $\mathcal{K}$ і його диференціальними наслідками в просторі струменів нескінченного порядку $\mathrm{J}^\infty(x, y|u)$ з незалежними змінними (x, y) і залежною змінною u.

Теорема A.1.1. *Факторалгебра* Ξ^{q} *узагальнених симетрій рівняння Клейна–Гордона* $\mathcal{K}$ *натурально ізоморфна алгебрі* $\tilde{\Xi}^{\mathrm{q}}$*, яка є напівпрямою сумою підалгебри*

$$\tilde{\Lambda}^{\mathrm{q}} = \langle\, (\mathrm{J}^k u)\partial_u,\ (\mathrm{J}^k \mathrm{D}_x^l u)\partial_u,\ (\mathrm{J}^k \mathrm{D}_y^l u)\partial_u,\ k \in \mathbb{N}_0,\ l \in \mathbb{N} \rangle$$

з абелевим ідеалом $\tilde{\Xi}^{-\infty} = \{f(x, y)\partial_u \mid f_{xy} = f\}$. *Тут* $\mathrm{J} = x\mathrm{D}_x - y\mathrm{D}_y$.

A.2. Закони збереження

Теорема A.2.1. *Простір законів збереження* (1+1)*-вимірного рівняння Клейна–Гордона* $\mathcal{K}$ *натурально ізоморфний простору, натягнутому на збережені струми*

$$\mathrm{C}^1_{k'l'},\ k' \in \mathbb{N}_0,\ l' \in \mathbb{N}, \quad \bar{\mathrm{C}}^1_{k'l'},\ \mathrm{C}^2_{k'l'},\ \bar{\mathrm{C}}^2_{k'l'},\ k', l' \in \mathbb{N}_0, \quad \mathrm{C}^0_f,$$

де параметр-функція $f = f(x, y)$ *пробігає множину розв'язків рівняння* $\mathcal{K}$ *і*

$$\mathrm{C}^1_{k'l'} = \Big(-y(\mathrm{D}_y \mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u)^2 - x(\mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u)^2,\ x(\mathrm{D}_x \mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u)^2 + y(\mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u)^2\Big),$$

$$\mathrm{C}^2_{k'l'} = \left(-\left(\left(\mathrm{J} - \frac{1}{2}\right)^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u\right)^2,\ \left(\mathrm{D}_x \left(\mathrm{J} - \frac{1}{2}\right)^{k'} \mathrm{D}_x^{l'} u\right)^2\right),$$

$$\bar{\mathrm{C}}^1_{k'l'} = \Big(y(\mathrm{D}_y \mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u)^2 + x(\mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u)^2,\ -x(\mathrm{D}_x \mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u)^2 - y(\mathrm{J}^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u)^2\Big),$$

$$\bar{\mathrm{C}}^2_{k'l'} = \left(\left(\mathrm{D}_y \left(\mathrm{J} + \frac{1}{2}\right)^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u\right)^2,\ -\left(\left(\mathrm{J} + \frac{1}{2}\right)^{k'} \mathrm{D}_y^{l'} u\right)^2\right),$$

причому $\operatorname{ord} \mathrm{C}^1_{k'l'} = \operatorname{ord} \mathrm{C}^2_{k'l'} = \operatorname{ord} \bar{\mathrm{C}}^1_{k'l'} = \operatorname{ord} \bar{\mathrm{C}}^2_{k'l'} = k'+l'+1$, *а* $\operatorname{ord} \mathrm{C}^0_f = 1$.

Інакше кажучи, збережені струми $\mathrm{C}^1_{k'l'}$, $k' \in \mathbb{N}_0$, $l' \in \mathbb{N}$, $\bar{\mathrm{C}}^1_{k'l'}$, $\mathrm{C}^2_{k'l'}$, $\bar{\mathrm{C}}^2_{k'l'}$, $k', l' \in \mathbb{N}_0$, з $k' + l' = n - 1$ складають повну (з точністю до додавання законів збереження нижчого порядку) множину лінійно незалежних законів збереження порядку n рівняння $\mathcal{K}$, якщо $n \geqslant 2$. Простір законів збереження першого порядку натягнуто на збережені струми $\bar{\mathrm{C}}^1_{00}$, C^2_{00}, $\bar{\mathrm{C}}^2_{00}$ і C^0_f, де параметр-функція $f = f(x, y)$ пробігає множину розв'язків рівняння $\mathcal{K}$.

Твердження A.2.2. *Генеруючу множину законів збереження рівняння $\mathcal{K}$ під дією узагальнених симетрій $(1 + 1)$-вимірного рівняння Клейна–Гордона $\mathcal{K}$ на простір його законів збереження складає єдиний закон збереження, що містить збережений струм*

$$(-u^2, u_x^2).$$

Додаток Б

Список публікацій і апробація результатів

Результати дисертації опубліковано в роботах [1–13]. Статті [1–4] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук і зараховуються як сім фахових публікацій згідно з п. 2 Наказу №1220 МОН України від 23.09.2019, оскільки статті [1,2,4] опубліковано у виданнях, що віднесено до квартилів Q1–Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, а тому кожна з них прирівнюється до двох публікацій. Статтю [3] опубліковано без співавторів, статті [7–13] — тези конференцій, а статті [1–6] проіндексовано у міжнародних наукометричних базах даних, а саме [1,2,4] — у Web of Science, [1,2,4,5,6] — у Scopus і MathSciNet та [1,3,4] — у Zentralblatt MATH.

1. Opanasenko S., Boyko V. and Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusivity, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, 30 pp., arXiv:1804.08776.

2. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **402** (2020), 132188, 29 pp., arXiv:1705.09277.

3. Opanasenko S., Equivalence groupoid of a class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, 131–154, arXiv:1909.00036.

4. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 40 pp., arXiv:1703.06932.

5. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Equivalence groupoid and group classification of a class of variable-coefficient Burgers equations, *J. Math. Anal. Appl.* **490** (2020), 124215, 22 pp., arXiv:1910.13500.

6. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian structures of an isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **411** (2020), 132546, 19 pp., arXiv:1908.00034.

7. Opanasenko S., Symmetries and exact solutions of isothermal no-slip drift flux model, International workshop in honour of Wilhelm Fushchych “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, December 17–20, 2016), `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Opanasenko.pdf`

8. Opanasenko S., Group classification a class of nonlinear reaction–diffusion equations, “International Conference of Young Mathematicians Dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)” (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 7–10, 2017), `https://www.imath.kiev.ua/~young/conf2/index.php?module=4&lang=ua`.

9. Opanasenko S., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, International conference “Geometry and Algebra of PDEs – 2017” (UiT the Arctic University of Norway, Tromsø, Norway, June 6–10, 2017), Book of abstracts, p. 4, `http://serre.mat-stat.uit.no/pdes2017/Abstracts-GAPDE2017.pdf`.

10. Opanasenko S., Algebraic method of finding the complete point symmetry group of a system of differential equations, Workshop “Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017” (Memorial University of Newfoundland, St. John’s, NL, Canada, August 28–September 1, 2017),

Book of abstracts, p. 12, https://www.mun.ca/aac/Workshops/PastWork/CGAA2017/.

11. Opanasenko S., Effective generalized equivalence groups, International workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018), Book of abstracts, p. 33, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2018 /Opanasenko.html.
12. Opanasenko S., Higher symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation, International conference "Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability" (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italy, October 8–12, 2018), Abstract, https://gdeq.org/Opanasenko_S._Generalized_symmetries_and_conservation_laws_of_(1%2B1)-dimensional_Klein-Gordon_equation_(abstract).
13. Opanasenko S., Symmetry analysis of an isothermal no-slip drift flux model, "Second JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019" (Universidad de Santiago, Santiago, Chile, May 25 – June 6, 2018), Book of abstracts, p. 46, http://www.dmcc.usach.cl/JNMP-Conference-2019/images/Abstracts-Alf-2019.pdf.

Результати дисертації доповідалися на таких конференціях, симпозіумах і семінарах:

- міжнародний симпозіум "Group analysis of differential equations and integrable systems" (Ларнака, Кіпр, 2018),
- міжнародний семінар "Symmetry and integrability of equations of mathematical physics" (Київ, 2016),
- міжнародний семінар "Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017" (Сент Джонс, Канада, 2017),
- міжнародна конференція "Geometry and algebra of PDEs – 2017" (Тромсьо, Норвегія, 2017),

- міжнародна конференція “Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability” (Трієст, Італія, 2018),
- міжнародна конференція “The 2nd JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019” (Сантьяго, Чилі, 2019),
- міжнародна конференція “International conference of young mathematicians dedicated to the 100th anniversary of academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)” (Київ, 2017),
- наукові семінари відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін),
- науковий семінар відділу математичної фізики Центру математичних досліджень Монреальського університету (Канада, 2018),
- науковий семінар кафедри математики університету Лафборо (Сполучене Королівство, 2019),
- науковий семінар “Generalized functions” математичного факультету Віденського університету (Австрія, 2019).