НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Опанасенко Станіслав Вікторович

УДК 517.958

Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Попович Роман Омелянович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Шепельський Дмитро Георгійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник відділу математичної фізики;

кандидат фізико-математичних наук, професор
Юрик Іван Іванович,
Національний університет харчових технологій, м. Київ,
завідувач кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 17 листопада 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.106.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *9 жовтня 2020 р.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А.С. Романюк**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поставивши перед собою амбітну мету розробити загальний алгоритм інтегрування звичайних диференціальних рівнянь за аналогією з теорією розв'язання алгебраїчних рівнянь, Софус Лі ввів поняття неперервних та інфінітезимальних перетворень. Хоча поставленої мети досягнуто не було, створена теорія розвинулась у важливу самостійну галузь математики — симетрійний аналіз диференціальних рівнянь, що охоплює широке коло проблем, пов'язаних із дослідженням ліївських, точкових і вищих симетрій, законів збереження, гамільтонових структур, операторів редукції, пошуком точних розв'язків диференціальних рівнянь тощо. Від другої половини двадцятого сторіччя в цій галузі працюють науковці по всьому світу. Своя школа симетрійного аналізу, заснована В.І. Фущичем, є і в Україні. Її центром є Інститут математики НАН України.

У багатьох застосуваннях природно розглядати не окремі системи диференціальних рівнянь, а множини таких систем, параметризованих довільними елементами — сталими або функціями, що задовольняють певні, можливо диференціальні, умови. Ці множини називають класами диференціальних рівнянь, а процедуру пошуку ліївських симетрій систем заданого класу залежно від значень довільних елементів — груповою класифікацією. Фізична мотивація дослідження таких класів полягає в тому, що природні процеси часто описують системами диференціальних рівнянь із параметрами, які відповідають незалежним від процесів факторам, як-от топографія дна чи коефіцієнти теплопровідності або дифузії. Крім того, ті самі системи можуть моделювати геть різні фізичні процеси, а тому доцільно вивчати математичну модель незалежно від природи явища. Наприклад, рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами описують різноманітні процеси турбулентності, акустики, статистичної фізики й фізики конденсованих систем, а також теорію заторів.

Задачі симетрійного аналізу постійно ускладнюються, а тому є нагальна потреба в покращенні наявних і створенні нових методів для їхнього розв'язання.

Так, нормалізований клас загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза r-го порядку, який параметризовано $r+2$ функціями двох змінних, $r \geqslant 2$, є надкласом для багатьох класів еволюційних рівнянь, розглянутих у літературі з погляду симетрійного аналізу, і він значно ширший за них, а тому розв'язання задачі його групової класифікації в дисертації суттєво узагальнює багато наявних результатів. За допомогою калібрувань довільних елементів перетвореннями еквівалентності класу цю задачу можна дещо спростити. Проте з урахуванням кількості довільних елементів класу постає питання оптимального калібрування. Критерієм добору калібрувань є збереження властивості нормалізованості, оскільки саме нормалізовані класи найзручніші для застосування алгебраїчного методу групової класифікації. З огляду на неможливість визначення апріорі калібрування, асоційованого з нормалізованим підкласом, у дисертації проаналізовано різні можливості для калібрувань.

Наслідком цього дослідження стали перші приклади узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь із несталими довільними елементами й перша строга побудова розширених узагальнених груп еквівалентності для класів рівнянь з частинними похідними через накриття допоміжних систем на довільні елементи. Останнє особливо актуальне з огляду на сучасний нелокальний тренд у симетрійному аналізі. Поняття узагальненої групи еквівалентності ввів С.В. Мелешко 1994 року як узагальнення класичного поняття звичайної групи еквівалентності. Водночас донедавна всі відомі випадки таких груп були тривіальними, тобто їхні параметри залежали щонайбільше від сталих довільних елементів відповідних класів. У симетрійній спільноті навіть почала циркулювати думка, що нетривіальних узагальнених груп еквівалентності взагалі не існує. Пошук розширеної узагальненої групи еквівалентності підкласу рівнянь із залежними лише від часу коефіцієнтами показав, що узагальнена група еквівалентності може містити власну підгрупу, яка породжує той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності, що й уся група. Мінімальні серед підгруп з описаною властивістю названо (нетривіальними) ефективними узагальненими групами еквівалентності. Наразі ще не знайдено класу з єдиною такою групою.

Метод розгалуженого розщеплення ефективно застосовували до групової класифікації низки класів, довільні елементи яких залежать від одного чи двох аргументів. Водночас, у дисертації вперше формалізовано цей метод для загального класу рівнянь, а також продемонстровано ефективність його багатокрокової версії.

Незважаючи на інтенсивність досліджень, існує небагато прикладів вичерпного опису узагальнених симетрій або законів збереження для систем диференціальних рівнянь, які допускають такі структури як завгодно високого порядку. Вивчені в дисертації система гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік, і рівняння Клейна–Гордона саме цього типу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках теми "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059).

Мета й завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є удосконалення наявних і розробка нових методів й алгоритмів групової класифікації класів диференціальних рівнянь, а також дослідження властивостей узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь.

Основну увагу в дисертації зосереджено на задачах групової класифікації класу рівнянь реакції–дифузії та класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза і його підкласів, а також на задачі вичерпного симетрійного аналізу системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Ці класи диференціальних рівнянь і ця система гідродинамічного типу становлять *об'єкт дослідження* дисертації.

Предметом дослідження є групи, групоїди й алгебри еквівалентності класів диференціальних рівнянь, особливо узагальнені й ефективні узагальнені групи еквівалентності, а також ліївські та вищі симетрії, косиметрії, закони збереження, гамільтонові структури й точні розв'язки диференціальних рівнянь.

Методи дослідження. Алгебраїчний метод групової класифікації, метод розгалуженого розщеплення, розбиття класів на підкласи з кращими трансформаційними властивостями, відображення між класами, породжені сім'ями точкових перетворень, класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова, прямий метод обчислення групоїдів і груп еквівалентності, репараметризація та побудова накриттів класів диференціальних рівнянь, процедура калібрування довільних елементів підкласів, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності перетвореннями еквівалентності всього класу, прямий і алгебраїчний методи знаходження повних груп точкових симетрій, узагальнений метод годографа, метод Керстена–Красильщика–Вербовецького побудови гамільтонових операторів, а також прямий метод і метод характеристик знаходження законів збереження.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Строго побудовано узагальнені й розширені узагальнені групи еквівалентності низки класів диференціальних рівнянь. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності, знайдено приклади таких груп і досліджено їхні основні властивості.

2. Знайдено групоїди еквівалентності класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза і його підкласів рівнянь із коефіцієнтами, залежними лише від просторової або лише від часової змінних. Алгебраїчним методом проведено групову класифікацію загального класу, з якої виокремлено класифікації підкласів.

3. Метод розгалуженого розщеплення формалізовано для загальних класів диференціальних рівнянь. За допомогою його двокрокової версії проведено групову класифікацію певного класу рівнянь реакції–дифузії.

4. Вивчено допустимі перетворення й ліївські симетрії класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Його групову класифікацію проведено комбінацією алгебраїчного методу, методу відображення класів сім’ями точкових перетворень і розбиття класу на нормалізовані підкласи.

5. Обґрунтовано процедуру калібрування перетвореннями еквівалентності класу довільних елементів підкласів, рівняння з яких допускають розширення ядра алгебр інваріантності.

6. Проведено розширений груповий аналіз системи гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Знайдено її максимальну алгебру інваріантності, повну групу точкових симетрій, алгебри вищих симетрій і косиметрій, простір законів збереження й нескінченну сім’ю гамільтонових структур, а також отримано загальний розв’язок у неявному вигляді, параметризований розв’язком рівняння Клейна–Гордона.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати й розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях моделей сучасної математичної й теоретичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, здобувач одержав самостійно. У роботах, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий. У статтях [1,2,4–6] Р.О. Поповичу належить постановка задач і загальний план досліджень, В.М. Бойку й А. Біло — перевірка доведень та одержаних результатів, а А.Г. Сергєєву — ідея розширення дослідження у [2,6] на структури вищих порядків.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародному симпозіумі “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Ларнака, Кіпр, 2018), на міжнародних семінарах “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Київ, 2016) і “Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017” (Сент-Джонс, Канада, 2017), на міжнародних конференціях “Geometry and Algebra of PDEs – 2017” (Тромсе, Норвегія, 2017), “Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability” (Трієст, Італія, 2018), “The Second JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019” (Сантьяго, Чилі, 2019), “International Conference of Young Mathematicians Dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)” (Київ, 2017), на наукових семінарах відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), відділу математичної фізики Центру математичних досліджень Монреальського університету (Канада, 2018), кафедри математики університету Лафборо (Сполучене Королівство, 2019), науковому семінарі “Generalized functions” математичного факультету Віденського університету (Австрія, 2019).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в роботах [1–13]. Статті [1–4] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук і зараховуються як сім фахових публікацій згідно з п. 2 Наказу №1220 МОН України від 23.09.2019, оскільки статті [1,2,4] опубліковано у виданнях, що належать до квартилів Q1–Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, а тому кожна з них прирівнюється до двох публікацій. Статтю [3] опубліковано без співавторів, а [7–13] — тези конференцій. Статті [1–6] проіндексовано у міжнародних наукометричних базах даних, а саме: [1,2,4] — у Web of Science, [1,2,4,5,6] — у Scopus і MathSciNet, а [1,3,4] — у Zentralblatt MATH.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 119 найменувань, і двох додатків. Повний обсяг дисертації становить 196 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження й коротко викладено результати роботи.

Основну частину роботи становлять чотири розділи. На початку кожного розділу подано огляд літератури, стан проблеми та результати інших авторів, а також стисло описано результати розділу.

Перший розділ дисертації присвячено теорії групового аналізу класів диференціальних рівнянь. Наведено означення класу диференціальних рівнянь, його групоїда і груп еквівалентності різних типів, а також класів, нормалізованих у відповідних сенсах. Зокрема, введено строге означення узагальненої, розширеної узагальненої й ефективної узагальненої груп еквівалентності.

Також для загальних класів систем диференціальних рівнянь описано алгебраїчний метод і метод розгалуженого розщеплення групової класифікації та процедуру калібрування перетвореннями еквівалентності параметрів підкласів систем, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності.

У **другому** розділі дисертації виконано груповий аналіз класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза вигляду

$$u_t + C(t,x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t,x)u_k + B(t,x) \qquad (1)$$

і його різноманітних підкласів. Тут A^k, B, C — довільні гладкі функції від (t,x), причому $A^rC \neq 0$, $u_k := \partial^k u/\partial x^k$, $k = 0,\dots,r$, а r — довільне фіксоване натуральне число, більше за одиницю. Так, у § 2.1 доведено, що загальний клас нормалізований у звичайному сенсі, а довільні елементи цього класу можна відкалібрувати сім'ями перетворень еквівалентності зі збереженням нормалізаційних властивостей. Показано, що найкращим із погляду подальшої групової класифікації є калібрування $(C, A^1) = (1, 0)$.

Теорема 2.1. *Клас* $\mathcal{B}_0$ *зведених* (1+1)*-вимірних загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза* r*-го порядку, виокремлених з класу* (1) *калібруванням* $(C, A^1) = (1, 0)$*, нормалізований у звичайному* *сенсі. Його звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde u = \frac{X^1}{T_t}u + \frac{X^1_t}{T_t}x + \frac{X^0_t}{T_t},$$
$$\tilde A^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j, \quad j = 2,\dots,r, \quad \tilde A^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + 2\frac{X^1_t}{X^1} - \frac{T_{tt}}{T_t}\right),$$
$$\tilde B = \frac{X^1}{(T_t)^2}B + \frac{1}{T_t}\left(\frac{X^1_t}{T_t}\right)_t x + \frac{1}{T_t}\left(\frac{X^0_t}{T_t}\right)_t - \left(\frac{X^1_t}{T_t}x + \frac{X^0_t}{T_t}\right)\tilde A^0,$$

де T, X^1, X^0 — довільні гладкі функції від t, причому $T_tX^1 \neq 0$.

Отже, групову класифікацію класу (1) зведено до групової класифікації класу $\mathcal{B}_0$, яку проведено алгебраїчним методом. Для будь-якого фіксованого значення набору κ довільних елементів класу $\mathcal{B}_0$ відповідну максимальну алгебру інваріантності $\mathfrak{g}_\kappa$ містить проєкція $\mathfrak{g}_{\langle\,\rangle} = \langle D(\tau), S(\zeta), P(\chi)\rangle$ алгебри еквівалентності класу $\mathcal{B}_0$ на простір змінних. Тут $D(\tau) = \tau\partial_t - \tau_t u\partial_u$, $S(\zeta) = \zeta x\partial_x + (\zeta u + \zeta_t x)\partial_u$, $P(\chi) = \chi\partial_x + \chi_t\partial_u$, причому τ, ζ, χ пробігають множину гладких функцій від t. Підалгебру алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\,\rangle}$ назвемо придатною, якщо вона збігається з деякою $\mathfrak{g}_\kappa$. Важливим етапом класифікації є дослідження властивостей придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\,\rangle}$. Для їхнього опису введено $G^{\sim}$-інваріантні цілі числа

$$k_1 := \dim\big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle P(\chi)\rangle\big),$$
$$k_2 := \dim\big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle\big) - k_1,$$
$$k_3 := \dim\mathfrak{g}_\kappa - \dim\big(\mathfrak{g}_\kappa \cap \langle S(\zeta), P(\chi)\rangle\big) = \dim\mathfrak{g}_\kappa - k_1 - k_2.$$

Лема 2.2. *Для будь-якого набору довільних елементів κ*

1) $(k_1, k_2) \in \{(0,0), (0,1), (2,0)\}$;

2) проєкція $\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa$ на $\langle\partial_t\rangle$ є алгеброю Лі, а $\dim\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa = k_3 \leqslant 3$, причому $\varpi_*\mathfrak{g}_\kappa \in \{0, \langle\partial_t\rangle, \langle\partial_t, t\partial_t\rangle, \langle\partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t\rangle\}$ з точністю до приєднаної дії відповідної проєкції групи $G^{\sim}$;

3) $\dim\mathfrak{g}_\kappa \leqslant 5$.

У § 2.2 розглянуто клас $\mathcal{K}_3$ загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза

$$u_t + C(t)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(t)u_k + B(t)$$

із залежними лише від часової змінної коефіцієнтами. Групоїд еквівалентності цього класу знайдено як обмеження на нього групоїда еквівалентності класу (1). З'ясувалося, що для зручної інтерпретації допустимих перетворень класу $\mathcal{K}_3$ необхідно розширити набір його довільних елементів нелокальними довільними елементами Y^1, Y^2, визначеними рівняннями $Y^1_t = \mathrm{e}^{A^0}$, $Y^2_t = C\mathrm{e}^{Y^1}$. Доведено, що отриманий у такий спосіб клас $\bar{\mathcal{K}}_3$ нормалізований в узагальненому сенсі.

Теорема 2.3. *Клас $\bar{\mathcal{K}}_3$ нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнену групу еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_3}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = \bar{T}(t, Y^1, Y^2), \quad \tilde{x} = \bar{X}^1 x + \bar{X}^0(t, Y^1, Y^2), \quad \bar{X}^1 := \frac{1}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0},$$
$$\tilde{u} = \bar{U}^1(t, Y^1, Y^2)(u - \varepsilon_1 \bar{X}^1 \mathrm{e}^{Y^1} x) + \bar{U}^{00}(t, Y^1, Y^2),$$
$$\tilde{A}^j = \frac{(\bar{X}^1)^j}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} A^j, \; j = 2, \dots, r, \; \tilde{A}^1 = \frac{\bar{X}^1}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} \left(A^1 + \frac{\bar{U}^{00}}{\bar{U}^1} C - \frac{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{X}^0}{\bar{X}^1} \right),$$
$$\tilde{A}^0 = \frac{1}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} \left(A^0 + \frac{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{U}^1}{\bar{U}^1} - \varepsilon_1 C \bar{X}^1 \mathrm{e}^{Y^1} \right),$$
$$\tilde{B} = \frac{\bar{U}^1}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} B + \frac{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{U}^{00}}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} + \varepsilon_1 \bar{U}^1 \bar{X}^1 \mathrm{e}^{Y^1} \frac{A^1}{\bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} - \bar{U}^{00} \tilde{A}^0,$$
$$\tilde{C} = \frac{\bar{X}^1}{\bar{U}^1 \bar{\mathrm{D}}_t \bar{T}} C, \quad \tilde{Y}^1 = Y^1 + \ln(\delta \bar{U}^1 \bar{X}^1), \quad \tilde{Y}^2 = \frac{\varepsilon_1' Y^2 + \varepsilon_0'}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0}.$$

Тут $\bar{T}$, $\bar{X}^0$, $\bar{U}^1$, $\bar{U}^{00}$ — довільні гладкі функції від (t, Y^1, Y^2), причому $\bar{T}_t \bar{U}^1 \neq 0$; ε_0, ε_1, ε_0', ε_1' — довільні константи з $\delta := \varepsilon_0 \varepsilon_1' - \varepsilon_0' \varepsilon_1 \neq 0$ і $\delta \bar{U}^1 \bar{X}^1 > 0$, а $\bar{\mathrm{D}}_t = \partial_t + A^0 \partial_{Y^1} + C\mathrm{e}^{Y^1} \partial_{Y^2}$.

Якщо позбутися залежності параметрів групи від нелокальних довільних елементів, то отримана множина точкових перетворень усе ще генеруватиме весь групоїд еквівалентності класу $\mathcal{K}_3$, але не буде групою. Водночас, для генерування групоїда еквівалентності довільна залежність від нелокальних довільних елементів надлишкова, а тому її можна позбутися, хоча й у нетривіальний спосіб. Показано, що група $\bar{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{K}}_3}$ має власну підгрупу, що є ефективною узагальненою групою еквівалентності класу $\bar{\mathcal{K}}_3$, і цю групу можна вважати розширеною узагальненою групою еквівалентності класу $\mathcal{K}_3$.

Наслідок 2.4. *Клас $\mathcal{K}_3$ нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Як його розширену узагальнену групу еквівалентнос-*

ті $\bar G^{\sim}_{\bar{\mathcal K}_3}$ *можна взяти ефективну узагальнену групу еквівалентності класу* $\bar{\mathcal K}_3$*, яку складають точкові перетворення вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X^1\big(x + X^{01}(t)Y^2 + X^{00}(t)\big), \quad X^1 := \frac{1}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0},\\
&\tilde u = V(t)\left(\frac{u}{X^1} - \mathrm{e}^{Y^1}(\varepsilon_1 x - \varepsilon_0 X^{01} + \varepsilon_1 X^{00})\right), \quad \tilde A^j = \frac{(X^1)^j}{T_t}A^j,\\
&\tilde A^1 = \frac{X^1}{T_t}\left(A^1 - X^{01}_t Y^2 - X^{00}_t\right), \quad \tilde A^0 = \frac{1}{T_t}\left(A^0 + \frac{V_t}{V}\right),\\
&\tilde B = \frac{V}{T_t}\left(\frac{B}{X^1} - \mathrm{e}^{Y^1}(\varepsilon_1 A^1 - \varepsilon_0 X^{01}_t + \varepsilon_1 X^{00}_t)\right),\\
&\tilde C = \frac{(X^1)^2}{T_t V}C, \quad \tilde Y^1 = Y^1 + \ln(\delta V), \quad \tilde Y^2 = \frac{\varepsilon_1' Y^2 + \varepsilon_0'}{\varepsilon_1 Y^2 + \varepsilon_0},
\end{aligned}
$$

де $j = 2, \dots, r$*;* T*,* X^{00}*,* X^{01}*,* V *— довільні гладкі функції від* t *з* $T_t V \neq 0$*;* ε_0*,* ε_1*,* ε_0'*,* ε_1' *— довільні константи, що задовольняють* $\delta := \varepsilon_0\varepsilon_1' - \varepsilon_0'\varepsilon_1 \neq 0$ *і* $\delta V > 0$.

У § 2.3 прокласифіковано допустимі перетворення класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза з довільними елементами, залежними лише від просторової змінної:

$$u_t + C(x)uu_x = \sum_{k=0}^{r} A^k(x)u_k + B(x).$$

Цей клас не нормалізований у жодному сенсі, але перетвореннями еквівалентності знову ж таки можна відкалібрувати довільні елементи (C, A^1) до $(1, 0)$. Групоїд еквівалентності отриманого класу $\mathcal F$ індуковано наведеними нижче групами.

Теорема 2.5. *Список максимальних умовних груп еквівалентності класу* $\mathcal F$ *вичерпують узагальнені групи еквівалентності підкласів* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},1}$*,* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},01}$*,* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},00}$*,* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{II},1}$*,* $\mathcal F_{\mathrm{III}}$*,* $\mathcal F_{\mathrm{IV},1}$*,* $\mathcal F^{r>2}_{\mathrm{IV},0}$*,* $\mathcal F^{r=2}_{\mathrm{IV},0}$ *і звичайні групи еквівалентності підкласу* $\hat{\mathcal F}_{\mathrm{II},0}$ *і класу* $\mathcal F$*. Тут*

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},1}\colon u_t + uu_x = {}&\left(\alpha + 2b_1 a_{01}^{-1} + a_{01}|x+\beta|^{\alpha}\right)u + a_j(x+\beta)^j|x+\beta|^{\alpha}u_j\\
&+ (x+\beta)\left(b_2|x+\beta|^{2\alpha} + b_1|x+\beta|^{\alpha} - b_1^2(\alpha+1)a_{01}^{-2}\right),\\
\hat{\mathcal F}_{\mathrm{I},01}\colon u_t + uu_x = {}& a_j(x+\beta)^{j-2}|x+\beta|^{\alpha}u_j + a_{00}u\\
&+ (x+\beta)\left(b_2|x+\beta|^{2\alpha-4} - (\alpha-1)a_{00}^2\alpha^{-2}\right),
\end{aligned}
$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{I},00}\colon u_t + uu_x = a_j(x+\beta)^{j-2}u_j + b_0(x+\beta) + b_2(x+\beta)^{-5},$$
$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{II},0}\colon u_t + uu_x = a_j(x+\beta)^{j}u_j + a_{00}u + b_0,$$
$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathrm{II},1}\colon u_t + uu_x = a_j(x+\beta)^{j}u_j + (a_{01}\ln|x+\beta| + a_{00})u$$
$$-\tfrac{1}{4}(x+\beta)\bigl(a_{01}^2(\ln|x+\beta|)^2 - \bigl(a_{01}^2 + 2a_{00}a_{01}\bigr)\ln|x+\beta| + b_0\bigr),$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{III}}\colon u_t + uu_x = a_j\mathrm{e}^{\alpha x}u_j + (a_{01}\mathrm{e}^{\alpha x} + a_{00})u + b_2\mathrm{e}^{2\alpha x}$$
$$-\tfrac{1}{2}a_{00}\alpha^{-1}(2a_{01}\mathrm{e}^{\alpha x} - a_{00} - 1),$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{IV},1}\colon u_t + uu_x = a_ju_j + a_0u + b_1x + b_0,$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{IV},0}^{r>2}\colon u_t + uu_x = a_ru_r + a_0u + a_0^2(r-1)(r-2)^{-2}x + b_0,$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{IV},0}^{r=2}\colon u_t + uu_x = a_2u_2 + b_1x + b_0,$$

причому за повторюваним індексом j йде підсумовування від двох до r, $\alpha a_r a_{01} \neq 0$, а для підкласу $\mathcal{F}_{\mathrm{IV},1}$ довільні елементи $a_2, \ldots, a_{r-1}$ не мають одночасно дорівнювати нулю.

У § 2.4 розглянуто клас $\mathcal{L}$ узагальнених рівнянь Бюргерса

$$u_t + C(t,x)uu_x = A^2(t,x)u_{xx},$$

який не можна отримати за допомогою перетворень еквівалентності з класу (1) для $r=2$. Клас $\mathcal{L}$ можна відобразити у клас $\hat{\mathcal{L}}$,

$$\hat{\mathcal{L}}\colon u_t + uu_x = A^2(t,x)u_{xx} + A^1(t,x)u_x,$$

зручніший для групового аналізу. Хоча клас $\hat{\mathcal{L}}$ не нормалізований, він є диз'юнктним об'єднанням двох нормалізованих класів $\hat{\mathcal{L}}_0$ і $\hat{\mathcal{L}}_1$, виокремлених відповідно умовами $A^1_{xx} = 0$ і $A^1_{xx} \neq 0$, причому клас $\hat{\mathcal{L}}_0$ нормалізований у розширеному узагальненому сенсі.

Теорема 2.6. *Клас $\hat{\mathcal{L}}_0$ нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його розширену узагальнену групу еквівалентності $\breve{G}_0^{\sim}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T, \quad \tilde{x} = T_t(c_1Y^1 + c_0)\bigl(x + \mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0\bigr),$$
$$\tilde{u} = (c_1Y^1 + c_0)u - c_1\mathrm{e}^{Y^0}x + c_2 - c_1Y^2,$$
$$\tilde{A}^{10} = (c_1Y^1 + c_0)\left(A^{10} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0A^{11} - \mathrm{e}^{-Y^0/2}\breve{X}^0_t\right)$$
$$+ c_1\mathrm{e}^{Y^0/2} + c_2 - c_1Y^1,$$

$$\tilde{A}^{11} = \frac{1}{T_t}\left(A^{11} - \frac{T_{tt}}{T_t} - \frac{2c_1\mathrm{e}^{Y^0}}{c_1Y^1 + c_0}\right), \quad \tilde{A}^2 = T_t(c_1Y^1 + c_0)^2A^2,$$
$$\tilde{Y}^0 = Y^0 + \ln\frac{\delta}{(c_1Y^1 + c_0)^2T_t}, \quad \tilde{Y}^1 = \frac{c_1'Y^1 + c_0'}{c_1Y^1 + c_0},$$
$$\tilde{Y}^2 = \frac{\delta Y^2}{c_1Y^1 + c_0} - \frac{\delta\check{X}^0\mathrm{e}^{Y^0/2}}{c_1Y^1 + c_0} - c_2\frac{c_1'Y^1 + c_0'}{c_1Y^1 + c_0} + c_3,$$

де $\delta := c_1'c_0 - c_0'c_1$, T, $\check{X}^0$ *— довільні гладкі функції від* t, *а* c_0, c_1, c_2, c_3, c_0', c_1' *— довільні сталі, причому* $\delta T_t > 0$. *Нелокальні довільні елементи визначено диференціальними рівняннями*

$$Y^0_t = A^{11}, \quad Y^1_t = \mathrm{e}^{Y^0}, \quad Y^2_t = A^{10}\mathrm{e}^{Y^0}.$$

Розбиття класу $\hat{\mathcal{L}}$ на підкласи відповідає розбиттю $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \bigsqcup \mathcal{L}_1$, де підкласи $\mathcal{L}_0$ і $\mathcal{L}_1$ класу $\mathcal{L}$ виокремлено набагато складнішими диференціальними умовами, а саме

$$\mathcal{L}_0\colon \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x = 0 \quad \text{та} \quad \mathcal{L}_1\colon \left(\frac{C_t}{C} - C\left(A^2\frac{C_x}{C^2}\right)_x\right)_x \neq 0.$$

Групову класифікацію класу $\hat{\mathcal{L}}_1$ проведено алгебраїчним методом і відображено у групову класифікацію класу $\mathcal{L}_1$ з точністю до точкової еквівалентності. Клас $\hat{\mathcal{L}}_0$ зведено до нормалізованого підкласу $\mathcal{L}_{0'}\colon u_t + uu_x = A^2(t,x)u_{xx}$ класу $\mathcal{L}$, чия групова класифікація наявна в літературі. Групову класифікацію класу $\mathcal{L}$ з точністю до точкової еквівалентності отримано за допомогою об'єднання класифікаційних списків підкласів $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_{0'}$.

У **третьому** розділі двокроковим методом розгалуженого розщеплення проведено групову класифікацію класу $\mathcal{R}$ рівнянь реакції–дифузії

$$u_t = f(u_x)u_{xx} + g(u),$$

де $f = f(u_x)$ і $g = g(u)$ — гладкі функції своїх аргументів із $f \neq 0$. Показано, що з погляду перетворень еквівалентності цей клас зручно представити як $\mathcal{R} = \mathcal{H} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$, де підклас $\mathcal{H}$ нелінійних рівнянь теплопровідності виокремлено умовою $f_{u_x} \neq 0$, підклас лінеаризовних рівнянь $\mathcal{L}$ — умовою $({u_x}^2 f)_{u_x} = 0$, підклас $\mathcal{F}$ рівнянь нелінійної фільтрації – умовою $g_u = 0$, а підклас $\mathcal{C}$ є доповненням об'єднання перших трьох підкласів у класі $\mathcal{R}$. Саме на останньому підкласі зосереджено увагу, оскільки коректні класифікації інших підкласів можна отримати з наведених у літературі.

Інший цікавий результат цього розділу — знаходження узагальненої й ефективної узагальненої груп еквівалентності класу $\mathcal{F}$.

Теорема 3.1. *Узагальнену групу еквівалентності $\bar{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}
&\tilde{t} = \bar{T}^1 t + \bar{T}^0, \quad \tilde{x} = \bar{X}^1 x + \bar{X}^2 u - g\bar{X}^2 t + \bar{X}^0,\\
&\tilde{u} = \bar{U}^1 x + \bar{U}^2 u + (\bar{T}^1\bar{F} - g\bar{U}^2)t + \bar{U}^0,\\
&\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{\bar{U}^1 + \bar{U}^2 u_x}{\bar{X}^1 + \bar{X}^2 u_x}, \quad \tilde{f} = \frac{(\bar{X}^1 + \bar{X}^2 u_x)^2}{\bar{T}^1} f, \quad \tilde{g} = \bar{F},
\end{aligned}$$

де $\bar{T}$, $\bar{X}$, $\bar{U}$, $\bar{F}$ — довільні функції від g з $\bar{T}^1(\bar{X}^1\bar{U}^2 - \bar{X}^2\bar{U}^1)\bar{F}_g \neq 0$.

Теорема 3.2. *Ефективну узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складають точкові перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}
&\tilde{t} = T_1 t + T_0, \quad \tilde{x} = X_1 x + X_2 u - X_2 g t + X_0,\\
&\tilde{u} = U_1 x + U_2 u + (1 - U_2) g t + U_3 t + \frac{T_0}{T_1} g + U_0,\\
&\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{U_1 + U_2 u_x}{X_1 + X_2 u_x}, \quad \tilde{f} = \frac{(X_1 + X_2 u_x)^2}{T_1} f, \quad \tilde{g} = \frac{g + U_3}{T_1},
\end{aligned}$$

де T, X і U — довільні сталі, причому $T_1(X_1U_2 - X_2U_1) \neq 0$.

Клас $\mathcal{F}$ виокремлено з-поміж усіх відомих класів із нетривіальною узагальненою групою еквівалентності такою властивістю.

Теорема 3.3. *Будь-яка ефективна узагальнена група еквівалентності класу $\mathcal{F}$ не містить його звичайної групи еквівалентності.*

У **четвертому** розділі виконано розширений симетрійний аналіз системи $\mathcal{S}$ гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік:

$$\begin{aligned}
&\rho^1_t + u\rho^1_x + u_x\rho^1 = 0,\\
&\rho^2_t + u\rho^2_x + u_x\rho^2 = 0,\\
&(\rho^1 + \rho^2)(u_t + uu_x) + a^2(\rho^1_x + \rho^2_x) = 0.
\end{aligned}$$

Цю систему можна записати в еквівалентній діагоналізованій формі в інваріантах Рімана $(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2, \mathfrak{r}^3)$:

$$\mathfrak{r}^1_t + V^1\mathfrak{r}^1_x = 0, \quad \mathfrak{r}^2_t + V^2\mathfrak{r}^2_x = 0, \quad \mathfrak{r}^3_t + V^3\mathfrak{r}^3_x = 0,$$

де $\mathfrak{r}^1 = \big(u + \ln(\rho^1 + \rho^2)\big)/2$, $\mathfrak{r}^2 = \big(u - \ln(\rho^1 + \rho^2)\big)/2$, $\mathfrak{r}^3 = \rho^1/\rho^2$, а також $V^1 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1$, $V^2 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 - 1$, $V^3 = \mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2$.

З використанням того факту, що система частково зачеплена, а її суттєва підсистема лінеаризується до рівняння Клейна–Гордона, побудовано загальний розв'язок цієї системи.

Теорема 4.1. *Довільний розв'язок системи $\mathcal{S}$ (локально) належить до однієї з таких сімей (нижче c — довільна стала, $\varepsilon = \pm 1$, Θ^1 — довільна функція від $\mathfrak{r}^1$, Θ^2 — від $\mathfrak{r}^2$, W — від своїх аргументів, а функція $\Psi = \Psi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння $\Psi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = -\Psi/4$, причому $\Psi \notin \langle\, \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}, \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}, (\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2} \,\rangle$):*

1) регулярної сім'ї, де обидва інваріанти Рімана $\mathfrak{r}^1$ s $\mathfrak{r}^2$ не сталі (загальний розв'язок):

$$
\begin{aligned}
&t = -\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}(\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi_{\mathfrak{r}^2}),\\
&x = \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\big((2\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi) - (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2 + 1)(\Psi_{\mathfrak{r}^1} + \Psi_{\mathfrak{r}^2})\big),\\
&\mathfrak{r}^3 = W\big(\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(\Psi_{\mathfrak{r}^1} - \Psi_{\mathfrak{r}^2} - \Psi)\big);
\end{aligned}
$$

2) сингулярної сім'ї, де один із інваріантів Рімана $\mathfrak{r}^1$ або $\mathfrak{r}^2$ стала:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{r}^1 = c, \quad x = (\mathfrak{r}^2 + c - 1)t + \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2}\Theta^2_{\mathfrak{r}^2}, \quad \mathfrak{r}^3 = W(\mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^2}t - \Theta^2_{\mathfrak{r}^2} - \Theta^2);\\
&\mathfrak{r}^2 = c, \quad x = (\mathfrak{r}^1 + c + 1)t + \mathrm{e}^{-\mathfrak{r}^1}\Theta^1_{\mathfrak{r}^1}, \quad \mathfrak{r}^3 = W(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1}t + \Theta^1_{\mathfrak{r}^1} - \Theta^1);
\end{aligned}
$$

3) ультрасингулярної сім'ї зі сталими $\mathfrak{r}^1$ і $\mathfrak{r}^2$, а $\mathfrak{r}^3 = W(x - (\mathfrak{r}^1 + \mathfrak{r}^2)t)$.

Стандартними методами знайдено вищі симетрії та закони збереження порядку, не більшого за одиницю.

Теорема 4.2. *Алгебра симетрій системи $\mathcal{S}$, порядку не більшого за одиницю, є лінійною оболонкою узагальнених векторних полів*

$$
\begin{aligned}
&\check{\mathcal{D}} = \big(x - V^1t\big)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1} + \big(x - V^2t\big)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + \big(x - V^3t\big)\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},\\
&\check{\mathcal{G}}_2 = \partial_{\mathfrak{r}^1} - \partial_{\mathfrak{r}^2},\ \check{\mathcal{G}}_1 = (t\mathfrak{r}^1_x - 1)\partial_{\mathfrak{r}^1} + t\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + t\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},\\
&\check{\mathcal{W}}(\Omega) = \Omega\partial_{\mathfrak{r}^3},\ \check{\mathcal{P}}(\Phi) = (\Phi + \Phi_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1} + (\Phi - \Phi_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2} + \Phi\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},
\end{aligned}
$$

де параметр-функція $\Omega = \Omega\big(\omega^0, \omega^1\big)$ пробігає множину гладких функцій від $(\omega^0, \omega^1) := (\mathfrak{r}^3, \mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathfrak{r}^3_x)$, а параметр-функція $\Phi = \Phi(\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2)$ — множину розв'язків рівняння $2\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2} = \Phi_{\mathfrak{r}^1} - \Phi_{\mathfrak{r}^2}$.

Теорема 4.3. *Простір законів збереження нульового порядку системи $\mathcal{S}$ є лінійною оболонкою трансляційно неінваріантного закону збереження, що містить збережений струм*

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\big(x-V^3t, V^3(x-V^3t)-t\big),$$

і простору гідродинамічних законів збереження, ізоморфного простору збережених струмів вигляду

$$\big(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega+\Psi_{\mathfrak{r}^1}-\Psi_{\mathfrak{r}^2},\ V^3\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega+V^1\Psi_{\mathfrak{r}^1}-V^2\Psi_{\mathfrak{r}^2}\big).$$

Тут параметр-функція $\Omega=\Omega(\mathfrak{r}^3)$ пробігає множину гладких функцій від $\mathfrak{r}^3$, а параметр-функція $\Phi=\Phi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ — множину розв'язків рівняння $2\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=\Phi_{\mathfrak{r}^1}-\Phi_{\mathfrak{r}^2}$.

Завдяки зв'язку між системою $\mathcal{S}$ і рівнянням Клейна–Гордона їхні локальні закони збереження пов'язані. Зокрема показано, що будь-який локальний закон збереження рівняння Клейна–Гордона можна продовжити до локального закону збереження системи $\mathcal{S}$. Хоча їхні узагальнені симетрії теж пов'язані, для деяких з них аналогічне продовження нелокальне. У подальшому використано позначення

$$\tilde{\mathcal{D}}_y:=-\frac{1}{\mathfrak{r}^1_x}\big(\mathcal{D}_t+V^2\mathcal{D}_x\big),\quad \tilde{\mathcal{D}}_z:=-\frac{1}{\mathfrak{r}^2_x}\big(\mathcal{D}_t+V^1\mathcal{D}_x\big),$$
$$\tilde{\mathfrak{J}}:=\frac{\mathfrak{r}^1}{2}\tilde{\mathcal{D}}_y+\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\tilde{\mathcal{D}}_z,\quad \tilde{q}:=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}\big(x-V^1t\big),$$
$$\omega^\kappa:=(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\mathcal{D}_x)^\kappa\mathfrak{r}^3,\ \kappa\in\mathbb{N}_0,$$

де $\mathcal{D}_t$, $\mathcal{D}_x$ — оператори повного диференціювання відповідно по t й x на многовиді системи $\mathcal{S}$.

Теорема 4.4. *Алгебра узагальнених симетрій системи $\mathcal{S}$ натурально ізоморфна алгебрі, яка є лінійною оболонкою узагальнених векторних полів $\check{\mathcal{W}}(\Omega)=\Omega\partial_{\mathfrak{r}^3}$,*

$$\check{\mathcal{P}}(\Phi)=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\left((\Phi+2\Phi_{\mathfrak{r}^1})\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\Phi-2\Phi_{\mathfrak{r}^2})\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\Phi\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\right),$$
$$\check{\mathcal{D}}=\big(x-V^1t\big)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+\big(x-V^2t\big)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+\big(x-V^3t\big)\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3},$$
$$\check{\mathcal{R}}(\Gamma)=\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1)/2}\Big((\tilde{\mathcal{D}}_y\Gamma+\Gamma)\mathfrak{r}^1_x\partial_{\mathfrak{r}^1}+(\tilde{\mathcal{D}}_z\Gamma+\Gamma)\mathfrak{r}^2_x\partial_{\mathfrak{r}^2}+2\Gamma\mathfrak{r}^3_x\partial_{\mathfrak{r}^3}\Big),$$

де Γ пробігає множину $\{\tilde{\mathfrak{J}}^\kappa\tilde{q},\ \tilde{\mathcal{D}}_y^\iota\tilde{\mathfrak{J}}^\kappa\tilde{q},\ \tilde{\mathcal{D}}_z^\iota\tilde{\mathfrak{J}}^\kappa\tilde{q},\ \kappa\in\mathbb{N}_0,\ \iota\in\mathbb{N}\}$, функція $\Phi=\Phi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ — множину розв'язків рівняння Клейна–Гордона $\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=-\Phi/4$, а функція Ω — множину гладких функцій від скінченної кількості ω^κ, $\kappa\in\mathbb{N}_0$.

Теорема 4.5. *Простір законів збереження системи $\mathcal{S}$ натурально ізоморфний лінійній оболонці таких її збережених струмів:*

1. $\bigl(\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega,\ V^3\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}\Omega\bigr)$, *де функція Ω пробігає множину гладких функцій від скінченної кількості ω^κ, $\kappa\in\mathbb{N}_0$.*
2. $\bigl(\mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(2\Phi_{\mathfrak{r}^1}+\Phi),\ \ \mathrm{e}^{(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2)/2}(2V^1\Phi_{\mathfrak{r}^1}+V^2\Phi)\bigr)$, *де функція $\Phi=\Phi(\mathfrak{r}^1,\mathfrak{r}^2)$ пробігає множину розв'язків рівняння Клейна–Гордона $\Phi_{\mathfrak{r}^1\mathfrak{r}^2}=-\Phi/4$.*
3. $\bigl(\mathfrak{r}^2_x\tilde\rho+\mathfrak{r}^1_x\tilde\sigma,\ V^2\mathfrak{r}^2_x\tilde\rho+V^1\mathfrak{r}^1_x\tilde\sigma\bigr)$, *де $\tilde\rho=-\tilde q\tilde{\mathfrak{D}}_z\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde q$, $\tilde\sigma=(\tilde{\mathfrak{D}}_y\tilde q)\tilde{\mathfrak{Q}}\tilde q$, а оператор $\tilde{\mathfrak{Q}}$ пробігає множину*

   $$\bigl\{\tilde{\mathfrak{J}}^{\kappa'},\ (\tilde{\mathfrak{J}}+\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}_y^\iota,\ (\tilde{\mathfrak{J}}-\iota/2)^\kappa\tilde{\mathfrak{D}}_z^\iota\bigr\}_{\kappa',\kappa+\iota\in2\mathbb{N}_0+1,\,(\kappa,\iota)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}}.$$

Для глибшого розуміння взаємозв'язку симетрій і законів збереження системи $\mathcal{S}$, розглянуто також її гамільтонові структури.

Теорема 4.6. *Система $\mathcal{S}$ допускає нескінченну сім'ю узгоджених гамільтонових структур $\mathfrak{H}_\Theta$, параметризованих гладкою функцією Θ від $\mathfrak{r}^3$:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_\Theta&=\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\,\mathrm{diag}\bigl(-1,1,\Theta(\mathfrak{r}^3)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\bigr)\mathrm{D}_x\\&\quad-\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}}{2}\begin{pmatrix}\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x&\mathfrak{r}^1_x-\mathfrak{r}^2_x&-2\mathfrak{r}^3_x\\\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x&\mathfrak{r}^1_x-\mathfrak{r}^2_x&-2\mathfrak{r}^3_x\\2\mathfrak{r}^3_x&2\mathfrak{r}^3_x&-2f^{33}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

а відповідну сім'ю гамільтоніанів $\mathcal{H}_{c_0,\Xi}=\int H_{c_0,\Xi}\mathrm{d}x$ визначають їхні густини

$$H_{c,\Xi}=\left(\frac14(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2)^2+\frac12\bigl(\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2\bigr)+\Xi(\mathfrak{r}^3)\right)\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^1-\mathfrak{r}^2}+c(\mathfrak{r}^1+\mathfrak{r}^2).$$

Тут $f^{33}:=\mathrm{e}^{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^1}\bigl((\mathfrak{r}^2_x-\mathfrak{r}^1_x)\Theta+\frac12\mathfrak{r}^3_x\Theta_{\mathfrak{r}^3}\bigr)$, c — довільна стала, а функція Ξ від $\mathfrak{r}^3$ задовольняє допоміжне рівняння $\Xi_{\mathfrak{r}^3\mathfrak{r}^3}\Theta+\frac12\Theta_{\mathfrak{r}^3}\Xi_{\mathfrak{r}^3}=2c$.

Основні результати дисертації підбито у висновках. У додатку А вичерпно описано узагальнені симетрії і закони збереження (1+1)-вимірного рівняння Клейна–Гордона $u_{xy}=u$. Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку Б.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації такі:

• Прокласифіковано ліївські симетрії класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза довільного фіксованого порядку, а також його підкласів із довільними елементами, залежними лише від часової чи лише від просторової змінних. Показано, що цей клас нормалізований у звичайному сенсі, а задачу його групової класифікації зведено до задачі групової класифікації його підкласу, яку проведено алгебраїчним методом. Показано важливість правильного вибору порядку калібрувань довільних елементів.

• Знайдено перші приклади узагальнених груп еквівалентності з параметрами, що залежать від несталих довільних елементів. Також уперше строго побудовано розширені узагальнені групи еквівалентності класів рівнянь з частинними похідними. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності і проаналізовано основні властивості таких груп.

• Комбінуванням кількох методів ефективно проведено групову класифікацію класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Спочатку використано метод відображень, щоб отримати клас, зручніший із погляду групового аналізу. Зручність полягає в тому, що відображений клас можна розбити на два підкласи, інваріантні під дією допустимих перетворень усього класу. Вона особливо помітна на тлі відповідної умови для розбиття вихідного класу. Показано, що отримані підкласи нормалізовані відповідно в узагальненому й розширеному узагальненому сенсах. Для першого підкласу групову класифікацію проведено алгебраїчним методом, а класифікацію другого зведено до відомої у літературі. Об'єднання побудованих класифікаційних списків відображено у класифікаційний список для вихідного класу.

• Вперше наведено формалізований опис методу розгалуженого розщеплення для загальних класів диференціальних рівнянь. За допомогою його двокрокової версії прокласифіковано ліївські симетрії рівнянь реакції–дифузії з певного класу. Також виокремлено підклас цього класу з нетривіальною скінченновимірною узагальненою групою еквівалентності й доведено, що жодна ефективна узагальнена група еквівалентності виокремленого підкласу не містить його звичайної групи еквівалентності.

• Для загальних груп еквівалентності, включно з нескінченновимірними, строго формалізовано процедуру вибору представника множини еквівалентних рівнянь, що допускають розширення ядра алгебр інваріантності, тобто процедуру докаліровування довільних елементів такого підкласу рівнянь перетвореннями еквівалентності.

• Проведено розширений симетрійний аналіз системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Показано, що її можна звести до рівняння Клейна–Гордона. За допомогою цього зв'язку описано її загальний розв'язок, знайдено алгебри Лі її вищих симетрій та косиметрій, простір законів збереження, а також побудовано нескінченну сім'ю гамільтонових структур.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Opanasenko S., Boyko V. and Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusivity, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, 30 pp., arXiv:1804.08776.
2. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **402** (2020), 132188, 29 pp., arXiv:1705.09277.
3. Opanasenko S., Equivalence groupoid of a class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, 131–154, arXiv:1909.00036.
4. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 40 pp., arXiv:1703.06932.
5. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Equivalence groupoid and group classification of a class of variable-coefficient Burgers equations, *J. Math. Anal. Appl.* **490** (2020), 124215, 22 pp., arXiv:1910.13500.
6. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O. and Sergyeyev A., Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian structures of an isothermal no-slip drift flux model, *Phys. D* **411** (2020), 132546, 19 pp., arXiv:1908.00034.
7. Opanasenko S., Symmetries and exact solutions of isothermal no-slip drift flux model, International workshop in honour of Wilhelm Fushchych “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical

Physics" (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, December 17–20, 2016), https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Opanasenko.pdf

8. Opanasenko S., Group classification a class of nonlinear reaction–diffusion equations, "International Conference of Young Mathematicians Dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917–2008)" (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 7–10, 2017), https://www.imath.kiev.ua/~young/conf2/index.php?module=4&lang=ua.
9. Opanasenko S., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, International conference "Geometry and Algebra of PDEs – 2017" (UiT the Arctic University of Norway, Tromsø, Norway, June 6–10, 2017), Book of abstracts, p. 4, http://serre.mat-stat.uit.no/pdes2017/Abstracts-GAPDE2017.pdf.
10. Opanasenko S., Algebraic method of finding the complete point symmetry group of a system of differential equations, Workshop "Combinatorics of Group Actions and its Applications – 2017" (Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, Canada, August 28–September 1, 2017), Book of abstracts, p. 12, https://www.mun.ca/aac/Workshops/PastWork/CGAA2017/.
11. Opanasenko S., Effective generalized equivalence groups, International workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018), Book of abstracts, p. 33, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2018/Opanasenko.html.
12. Opanasenko S., Higher symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation, International conference "Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability" (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italy, October 8–12, 2018), Abstract, https://gdeq.org/Opanasenko_S._Generalized_symmetries_and_conservation_laws_of_(1%2B1)-dimensional_Klein-Gordon_equation_(abstract).
13. Opanasenko S., Symmetry analysis of an isothermal no-slip drift flux model, "Second JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics – 2019" (Universidad de Santiago, Santiago, Chile, May 25 – June 6, 2018), Book of abstracts, p. 46, http://www.dmcc.usach.cl/JNMP-Conference-2019/images/Abstracts-Alf-2019.pdf.

АНОТАЦІЯ

Опанасенко С.В. Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 "математична фізика" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено розвитку методів групової класифікації класів диференціальних рівнянь і дослідженню їхніх узагальнених груп еквівалентності. Вивчено допустимі перетворення й ліївські симетрії класу рівнянь реакції–дифузії і класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза та його підкласів рівнянь із коефіцієнтами, залежними лише від часової чи лише від просторової змінних, а також класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Вперше строго побудовано узагальнені й розширені узагальнені групи еквівалентності. Введено поняття ефективної узагальненої групи еквівалентності. Знайдено кілька прикладів таких груп і досліджено їхні основні властивості. Формалізовано метод розгалуженого розщеплення. Проведено розширений симетрійний аналіз системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік, для якої знайдено всі локальні розв'язки, узагальнені симетрії, косиметрії, локальні закони збереження й нескінченну сім'ю узгоджених гамільтонових структур.

Ключові слова: груповий аналіз диференціальних рівнянь, ліївська симетрія, узагальнена група еквівалентності, розширена узагальнена група еквівалентності, групоїд еквівалентності, закон збереження, узагальнена симетрія, косиметрія, гамільтонова структура, метод розгалуженого розщеплення.

ABSTRACT

Opanasenko S. Generalized equivalence groups and extended symmetry analysis of differential equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 "Mathematical Physics" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to generalized equivalence groups of classes of differential equations and their properties as well as to various techniques of symmetry analysis.

The complete group classification of the class of (1+1)-dimensional rth order general variable-coefficient Burgers–Korteweg–de Vries equations is carried out for arbitrary values of r greater than or equal to two using the algebraic method. We also study numerous subclasses thereof including the classes of equations with coefficients depending at most on the time or the space variable as well as a class of variable-coefficient Burgers equations. Studying various gaugings of the arbitrary elements of the above classes allows us to find for the first time classes of differential equations with nontrivial generalized equivalence groups, where equivalence-transformation components corresponding to equation variables locally depend on nonconstant arbitrary elements. We also compute nontrivial extended generalized equivalence groups in a rigorous way via constructing coverings of the associated auxiliary systems for arbitrary elements. The new notion of effective generalized equivalence group is introduced. It is shown that such groups may or may not be proper subgroups of the corresponding generalized equivalence groups, may or may not be finite-dimensional and may and may not contain the usual equivalence group of the class, and, in general, they are not unique.

The penultimate property is discovered when studying a class of (1+1)-dimensional nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusivity. Moreover, we rigorously formalize the method of furcate splitting for general classes of differential equations and use the two-step version of this method to carry out the group classification of the above class.

We carry out the extended symmetry analysis of a system of differential equations modeling an isothermal no-slip drift flux. The maximal Lie invariance algebra thereof is proved to be infinite-dimensional. We find its complete point symmetry group, including discrete symmetries, using the megaideal-based version of the algebraic method. The essential subsystem of the system under study is linearized to the Klein–Gordon equation. We employ both the linearization and the generalized hodograph method for constructing the general solution of the entire system. We exhaustively describe generalized symmetries, cosymmetries and local conservation laws of this system. A generating set of local conservation laws under the action of generalized symmetries is proved to consist of two zeroth-order conservation laws. We also construct an

infinite family of Hamiltonian structures involving an arbitrary function of a single argument. For each of the constructed Hamiltonian operators, we find the associated algebra of Hamiltonian symmetries.

Key words: group analysis of differential equations, Lie symmetry, generalized equivalence group, extended generalized equivalence group, equivalence groupoid, conservation law, generalized symmetry, cosymmetry, Hamiltonian structure, algebraic method of group classification, method of furcate splitting.

Підписано до друку 1.10.2020. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,31. Умов. друк. арк. 1,22.
Наклад 100 пр. Зам. 43.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.