

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
Опанасенка Станіслава Вікторовича  
“Узагальнені групи еквівалентності та  
розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь”,  
представлену на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Дослідження геометричних об'єктів, пов'язаних із диференціальними рівняннями, як-от симетрій, законів збереження та гамільтонових операторів, складають невід'ємну частину сучасної математичної фізики. Такі дослідження зокрема відкривають нові шляхи інтегрування диференціальних рівнянь, а тому мають важливе прикладне значення.

Дисертаційну роботу С.В. Опанасенка присвячено розробці нових методів і дослідженню низки важливих проблем групового аналізу диференціальних рівнянь. Основну увагу в дисертації зосереджено на задачах групової класифікації та методах їхнього розв'язання.

Дисертація має загальний обсяг у 196 сторінок і складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, двох додатків і списку використаних джерел із 119 найменувань.

У першому розділі описано об'єкти групового аналізу, про які йде мова у дисертації: клас (систем) диференціальних рівнянь, його групоїд еквівалентності, його групи та алгебри еквівалентності різного типу, група точкових симетрій і алгебра лівської інваріантності системи з класу тощо. Серед зазначених об'єктів необхідно виокремити узагальнені, розширені узагальнені та ефективні узагальнені групи еквівалентності, результати щодо яких є головним здобутком цієї дисертації. Визначено також поняття нормалізованості таких класів у різних сенсах, яке суттєво задіяно у дисертації. Що стосується використаних у дисертації

методів групового аналізу, то поряд із описом добре відомих алгебраїчно-го методу групової класифікації і алгебраїчного методу пошуку повної групи точкових симетрій системи диференціальних рівнянь, дисертант формалізував метод розгалуженого розщеплення і теоретично обґрунтував метод калібрування перетвореннями еквівалентності класу диференціальних параметрів його підкласів, що допускають розширення ядра ліївських симетрій. Перший метод вже неодноразово і ефективно застосовано у літературі до конкретних класів диференціальних рівнянь, але його загальне формулювання було відсутнє. Другий метод, який просто обґрунтувати у рамках класичної теорії Лі в скінченновимірному випадку, розширено на нескінченновимірні групи еквівалентності.

У другому розділі проведено груповий аналіз класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза довільного порядку  $r \geq 2$ , та його різних підкласів. Показано, що надклас є нормалізованим у звичайному сенсі. Розглянуто декілька калібрувань його довільних елементів і обрано найкраще з точки зору групової класифікації, яку проведено за допомогою алгебраїчного методу. Альтернативні калібрування використано також із іншою метою, а саме для побудови першого прикладу класу із нетривіальною узагальненою групою еквівалентності. Вивчено також підкласи рівнянь із коефіцієнтами, що відповідно залежать лише від часової або лише від просторової змінних. Обидва класи багаті на нетривіальні узагальнені групи еквівалентності. Ще один вивчений підклас складають рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Показано, що хоча цей підклас виглядає набагато простішим за свій надклас загальних рівнянь Бюргерса, для яких  $r = 2$ , його групова класифікація є значно складнішою за рахунок його ненормалізованості. Щоб її ефективно провести, необхідно комбінувати алгебраїчний метод, метод відображення між класами сім'ями точкових перетворень, а також метод розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи. Як результат, виконано групову класифікацію підкласу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами з точністю до загальної точкової еквівалентності, що є оптимальним вибором для цього підкласу.



Третій розділ присвячено груповій класифікації класу рівнянь реакції–дифузії, що параметризовано двома унарними функціями — коефіцієнтами реакції і дифузії, залежними відповідно від невідомої функції і від її просторової похідної. Показано, що найбільш ефективним шляхом групової класифікації цього класу є виокремлення трьох підкласів, які можна відобразити у класи, добре досліджені у літературі з точки зору групового аналізу диференціальних рівнянь, з подальшим зведенням задачі до групової класифікації четвертого (регулярного) підкласу, який є доповненням до об'єднання трьох зазначених класів. На прикладі останньої класифікації продемонстровано перевагу методу розгалуженого розщеплення над прямим методом групової класифікації для класів із довільними елементами, залежними від невеликої кількості аргументів. Насправді ж, групову класифікацію виконано оригінальною двокроковою версією цього методу, де на кожному кроці розгалужене розщеплення проводилось за одним довільним елементом. Для одного з трьох згаданих вище підкласів доведено, що він допускає скінченновимірну ефективну узагальнену групу еквівалентності, і жодна його ефективна узагальнена група еквівалентності не містить його звичайної групи еквівалентності.

У четвертому розділі проведено розширений симетрійний аналіз гідродинамічної системи, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Помічено, що система напівзачеплена, а її підсистему можна лінеаризувати до  $(1+1)$ -вимірного рівняння Клейна–Гордона. З використанням стандартних методів знайдено її лівські симетрії, узагальнені симетрії та закони збереження порядку, не більшого за одиницю, а алгебраїчним методом — її повну групу точкових симетрій. За допомогою лінеаризації підсистеми знайдено загальний розв'язок усієї системи у неявному вигляді, а також вичерпно описано всі її симетрії, косиметрії і закони збереження, а також побудовано нескінченну сім'ю узгоджених гамільтонових структур.

У висновках дисертант сформулював положення, висунуті на захист.

Результати дисертації є новими, всі твердження чітко сформульовано і строго доведено, що забезпечує достовірність основних положень та висновків дисертації.

До дисертації можна зробити такі пропозиції і зауваження:

- Дисертантом досліджено ліївські симетрії загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза, але не менш цікавим питанням є вивчення їхніх законів збереження. Як відомо, рівняння Бюргерса має одновимірний простір законів збереження, а рівняння Кортевега–де Фріза — нескінченновимірний, причому закони збереження можуть бути як завгодно високого порядку. Для еволюційних рівнянь фіксованого парного порядку множина порядків їхніх законів збереження обмежена зверху. Чи можна описати закони збереження всіх загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза?
- Очевидно, що підклас загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза, що допускають принаймні один закон збереження з характеристикою порядку  $-\infty$ , виокремлено з усього класу таких диференціальних рівнянь єдиним диференціальним зв'язком. Наступним кроком дослідження можна зробити груповий аналіз потенціальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза, пов'язаних із цим законом збереження.
- Дисертант включив у дисертацію не всі опубліковані ним результати. Водночас, дисертація все одно перенасичена результатами і, залишаючись в межах формальних вимог, є великою за обсягом. На мою думку, один із розділів дисертації, наприклад четвертий, можна було б виключити, що ніяк не знизило її високу якість.

Звичайно ж, ці пропозиції та зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації, і більш того, пропозиції можна розглядати як побажання для урахування дисертантом у подальших дослідженнях.

*Загальний висновок:*

Дисертація С.В. Опанасенка є актуальним і важливим дослідженням із застосування теорії симетрій до аналізу та інтегрування диференціальних рівнянь. Введені поняття, отримані результати та розвинуті в



дисертації методи мають значні перспективи щодо подальшого їх використання в теорії групового аналізу диференціальних рівнянь.

Оформлення дисертації задовольняє всім вимогам, що висуваються до рукописів на здобуття наукових ступенів. Результати досить повно опубліковано у журнальних публікаціях, збірнику наукових праць і тезах конференцій. Зі статей у співавторстві в дисертацію включені результати, отримані особисто дисертантом, що відзначено окремо по кожній роботі. Результати дисертації відомі спеціалістам і добре цитуються. Дисертант доповідав їх на багатьох семінарах, українських та міжнародних конференціях. Автореферат дисертації правильно і повно відображає зміст роботи.

Враховуючи все сказане вище, вважаю, що дисертація “Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь” містить важливі наукові результати з теорії та застосування симетрії диференціальних рівнянь, задовольняє вимогам пп. 9, 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” Постанови Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів № 656 від 19.08.2015, № 1159 від 30.12.2015, № 567 від 27.07.2016, № 943 від 20.11.2019, № 607 від 15.07.2020) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Станіслав Вікторович Опанасенко заслуговує на присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент

завідувач кафедри вищої математики

Національного університету харчових технологій

кандидат фізико-математичних наук, професор



І.І. Юрик

