

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
**Опанасенка Станіслава Вікторовича**  
“Узагальнені групи еквівалентності та  
розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь”,  
представлену на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Дисертаційну роботу Опанасенка Станіслава Вікторовича присвячено дослідженню узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь, проведенню групової класифікації низки таких класів та розширеному симетрійному аналізу системи диференціальних рівнянь, що моделює ізотермічний дрейфовий потік.

**Актуальність роботи.** Груповий аналіз диференціальних рівнянь є класичною галуззю математики, що має більш ніж сторічну історію й у якій наразі працюють багато вчених у всьому світі, зокрема, в Іспанії, Канаді, Китаї, Польщі, Сполученому Королівстві, США, Росії, Туреччині, Чехії. Україну в цій галузі представляє школа, заснована в Інституті математики НАН України В.І. Фуцичем. Одним з найдієвіших шляхів знаходження точних розв'язків систем диференціальних рівнянь (що має велике прикладне значення, якщо досліджувані системи моделюють явища реального світу) є дослідження симетрій цих систем і пов'язаних з ними об'єктів, що є задачею групового аналізу. У дисертації зроблено значний внесок у теорію групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема, розглянуто широкі класи рівнянь, отриманих узагальненням класичних рівнянь Бюргерса, Кортевега-де Фріза та рівнянь реакції-дифузії, які містять багато фізично важливих диференціальних рівнянь, а також систему, що моделює ізотермічний дрейфовий потік і є дещо спрощеною моделлю відповідного фізичного процесу. З огляду на зазначене, актуальність теми дисертації не викликає жодних сумнівів.

**Аналіз результатів дисертації.** Головні результати цієї дисертації можна умовно розділити на три частини: 1) розвиток і формалізація

методів групового аналізу, 2) їхнє застосування до задач групової класифікації класів диференціальних рівнянь і 3) розширений симетрійний аналіз системи гідродинамічного типу.

1. Знайдено перші нетривіальні приклади узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь. Усі приклади, отримані до появи статей, що увійшли в дисертацію, були тривіальними в тому сенсі, що в них параметри узагальнених груп еквівалентності залежали лише від сталих довільних елементів відповідних класів диференціальних рівнянь. Водночас, залежність узагальнених перетворень еквівалентності від деяких довільних елементів може бути надлишковою з точки зору генерування допустимих перетворень класу. Інакше кажучи, можуть існувати власні підгрупи узагальненої групи еквівалентності, що породжують той самий підгрупоїд групоїда еквівалентності, що й вся група. Пошук таких груп є складним з огляду на його неалгоритмічність. Мінімальні з таких груп названо у дисертації ефективними узагальненими групами еквівалентності. Відзначено, що так само, як і замикання відносно композиції перетворень, питання про існування мінімальних груп з необхідними властивостями є нетривіальним, а всі відомі приклади узагальнених груп еквівалентності насправді були прикладами ефективних узагальнених груп еквівалентності.

Ще одним здобутком дисертації є строге знаходження розширених узагальнених груп еквівалентності. Ситуація із ними була схожа: існувало багато прикладів, але для правильної інтерпретації таких груп було необхідно зробити додатковий крок. Цим кроком є побудова накриттів класів диференціальних рівнянь (точніше, накриттів відповідних систем допоміжних рівнянь на довільні елементи). Розширені узагальнені групи еквівалентності є узагальненими групами еквівалентності класів, отриманих деякими спеціальними накриттями, а тому природно також ввести поняття ефективно розширеної узагальненої групи еквівалентності. Побудова накриттів диференціальних рівнянь є спільною рисою визначення нелокальних симетрій диференціальних рівнянь і розширених узагальнених груп еквівалентності класів диференціальних рівнянь. У дисертації знайдено близько п'ятнадцяти нетривіальних узагальнених груп еквівалентності (включно з їхніми розширеними аналогами), а також їхні підгрупи, що є ефективними (розширеними) узагальненими групами екви-

валентності відповідних класів.

Мабуть, найбільш цікавим питанням щодо ефективних (розширених) узагальнених груп еквівалентності є питання про їхню єдиність. У всіх побудованих прикладах такі групи або не є нормальними підгрупами відповідних узагальнених груп еквівалентності, і тому всі спряжені до них підгрупи також є ефективними (розширеними) узагальненими групами еквівалентності, або співпадають зі своїми надгрупами і тому є єдиними. Питання, чи завжди єдиність таких груп еквівалентна умові їхньої нормальності, залишається відкритим.

У дисертації формалізовано метод розгалуженого розщеплення для загального класу диференціальних рівнянь, а для розв'язання задачі групової класифікації певного класу рівнянь реакції–дифузії запропоновано його двокрокову версію. Також описано метод калібрування параметрів підкласів, що допускають розширення ядра ліівських симетрій, за допомогою перетворень еквівалентності.

2. Розв'язано задачі групової класифікації для кількох класів диференціальних рівнянь. Зупинюся тут лише на найцікавіших моментах. Прокласифіковано ліівські симетрії дуже широкого класу загальних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза довільного порядку  $r \geq 2$  за допомогою добре відомого алгебраїчного методу. Особливістю його підкласу рівнянь із стаціонарними коефіцієнтами є те, що випадки розширення допустимих перетворень у ньому співпадають із випадками розширення ліівських симетрій, хоча цей клас навіть не є напівнормалізованим. На прикладі підкласу рівнянь із коефіцієнтами, залежними від часу, вперше продемонстровано строгу побудову нетривіальної розширеної узагальненої групи еквівалентності. Для проведення групової класифікації класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами його представлено — за допомогою неочевидного диференціального зв'язку — як диз'юнктивне об'єднання двох підкласів, що є слабо подібними до нормалізованих класів. Групові класифікації цих нормалізованих класів відображено у групові класифікації підкласів вихідного класу, які разом дають групову класифікацію всього класу відносно загальної точкової еквівалентності. Розв'язання дисертантом задачі групової класифікації певного класу рівнянь реакції–дифузії призвело до знаходження особливого випадку розширення ліівських симетрій, чия особливість полягає у тому, що відпо-

відна алгебра ліївської інваріантності не є проєктивною на простір незалежних змінних. Також знайдено клас диференціальних рівнянь, жодна з чийх ефективних груп еквівалентності не містить його звичайну групу еквівалентності.

**3.** Проведено розширений груповий аналіз системи гідродинамічного типу, що моделює ізотермічний дрейфовий потік. Він є справді розширеним, оскільки крім стандартного пошуку ліївських симетрій і класифікації ліївських редукцій знайдено також повну групу точкових симетрій, загальний розв'язок у неявному вигляді, всі узагальнені симетрії, косиметрії й локальні закони збереження (які можуть бути як завгодно високого порядку). До того ж, показано, що завдяки своїй виродженості система допускає нескінченну сім'ю узгоджених гамільтонових операторів, параметризовану функцією однієї змінної, що є першим прикладом такої системи гідродинамічного типу. Відомо, що істинно нелінійні системи гідродинамічного типу допускають лише скінченну кількість таких операторів. Настільки вичерпний аналіз не проведено навіть для деяких класичних моделей математичної фізики, і зазвичай результати такого аналізу розкидано в часі й по працях багатьох науковців.

Майже для всіх зазначених вище результатів спільним значною мірою є використання певних алгебраїчних методів або технік, що дозволило щонайменше суттєво спростити обчислення та їхні доведення.

**Зауваження та пропозиції.** До змісту та оформлення дисертації є кілька зауважень і побажань:

- Текст дисертації дуже насичений математичними означеннями; для полегшення його сприйняття, було б доцільно ретельніше будувати речення, з використанням необхідних розділових знаків.
- Дисертація містить багато тверджень, і не завжди зроблено необхідні акценти на основні твердження, що також ускладнює сприйняття матеріалу.
- Було б доцільно на початку кожного розділу вказувати, в яких роботах дисертанта висвітлені результати розділу, а також навести невеликі висновки наприкінці кожного розділу.

Втім, ці зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

**Висновки.** Робота має теоретичний характер. Отримані результати й запропоновані методи можна використати в подальших дослідженнях симетричних властивостей рівнянь математичної фізики, а також при розв'язанні прикладних задач, що описують реальні явища й процеси різної природи. Дисертант започаткував нову область досліджень у груповому аналізі диференціальних рівнянь, пов'язану з ефективними узагальненими групами еквівалентності класів диференціальних рівнянь. Він не тільки відповів на низку питань, пов'язаних з властивостями таких груп, а й сформулював кілька цікавих проблем, які ще чекають на своє вивчення. Особливістю дисертації є те, що в ній побудовано значну кількість інтуїтивно неочевидних прикладів, як-то:

- перший приклад нетривіальної узагальненої групи еквівалентності, параметри якої залежать від несталих довільних елементів;
- клас диференціальних рівнянь, усі ефективні узагальнені групи еквівалентності якого не містять його звичайної групи еквівалентності;
- клас диференціальних рівнянь зі скінченновимірною ефективною узагальненою групою еквівалентності;
- унікальний випадок розширення ліївських симетрій у класі рівнянь реакції-дифузії, що не є проєктовним на відповідний простір незалежних змінних;
- нетривіальна диференціальна умова розбиття ненормалізованого класу на ненормалізовані підкласи, що слабо подібні до нормалізованих класів;
- ненормалізований у жодному сенсі клас, чиї випадки розширення допустимих перетворень співпадають з випадками розширень ліївської симетрії, як для напівнормалізованого класу;
- нескінченна сім'я узгоджених гамільтонових структур для системи гідродинамічного типу.

Усі результати, включені в дисертацію, одержано автором самостійно. Вони є новими й достовірними та пройшли достатню апробацію на наукових семінарах та конференціях. Основні результати роботи опубліковано у провідних журналах з математичної фізики та прикладної математики. Автореферат дисертації правильно і повно відображає зміст роботи.

Вважаю, що дисертація “Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь” задовольняє вимогам пп. 9, 11, 12, 13, 14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затверджених постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів № 656 від 19.08.2015, № 1159 від 30.12.2015, № 567 від 27.07.2016, № 943 від 20.11.2019, № 607 від 15.07.2020) щодо кандидатських дисертацій, а її автор — Опанасенко Станіслав Вікторович — заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент  
провідний науковий співробітник  
Фізико-технічного інституту низьких температур  
імені Б.І. Веркіна НАН України, м.Харків,  
доктор фіз.-мат. наук,  
старший науковий співробітник

Д.Г. Шепельський

