

Національна академія наук України  
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**Майко Наталія Валентинівна**

УДК 519.6

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

### **Вагові оцінки точності функціонально-дискретних методів розв'язування крайових задач**

01.01.07 – обчислювальна математика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів

мають посилання на відповідне джерело \_\_\_\_\_ Н. В. Майко

Науковий консультант

**Макаров Володимир Леонідович,**  
доктор фізико-математичних наук,  
професор, академік НАН України

Київ – 2020

## АНОТАЦІЯ

**Майко Н. В. Вагові оцінки точності функціонально-дискретних методів розв'язування крайових задач.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено побудові і дослідженню наближених методів розв'язування задач математичної фізики та одержанню вагових апіорних оцінок точності цих методів з урахуванням впливу крайових і початкових умов за Макаровим. Вплив крайового ефекту означає, що внаслідок крайової умови Діріхле для диференціального рівняння в канонічній області точність наближеного розв'язку поблизу межі області є вищою порівняно з точністю далі від межі. Аналогічна ситуація спостерігається і для нестационарних рівнянь у тих вузлах сітки, де задано початкову умову. Кількісною характеристикою крайового і початкового ефектів є апіорні оцінки похибки з відповідною ваговою функцією, яка характеризує відстань точки до межі просторово-часової області, в певних сіткових нормах. Ідея таких оцінок уперше анонсована В. Л. Макаровим<sup>1</sup> для еліптичного рівняння у випадку розв'язків із просторів Соболева та узагальнена для квазілінійних стаціонарних і нестационарних рівнянь. У дисертації продовжено відомі та виконано нові дослідження впливу початкової і крайової умов на точність трьох наближених методів: методу скінчених різниць для еліптичних і параболічних рівнянь, сіткового методу розв'язування рівнянь з дробовими похідними та методу перетворення Келі для абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах. Розроблена у ній методика одержання вагових оцінок може бути застосована для дослідження точних і наближених розв'язків нових класів задач. Водночас врахування початково-крайового ефекту має не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки, зокрема, надає змогу використовувати поблизу

---

<sup>1</sup> Makarov V. L. On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences)*. 1989. Vol. 42, № 5. P. 41–44.

межі області більший крок сітки. Розглянуті в дисертації різницеві та сіткові схеми внаслідок їх універсальності та зручній реалізації можуть бути застосовані для розв'язування широкого кола прикладних задач фізики, техніки, хімії, біології, фінансів тощо.

Основна частина дисертації складається із вступу, п'яти розділів і висновків. У вступі викладено загальну характеристику роботи: обґрунтовано актуальність теми та її зв'язок з науковими програмами; визначено об'єкт і предмет дослідження та сформульовано його мету і завдання; наведено методи дослідження; охарактеризовано наукову новизну та теоретичне і практичне значення одержаних результатів; прокоментовано особистий внесок здобувача, повноту викладу матеріалу в публікаціях та ступінь його апробації; описано структуру та обсяг дисертації. У першому розділі описано три наближені методи, які вивчатимуться далі, дано їх історико-бібліографічний огляд і охарактеризовано сучасний стан розвитку, окреслено ряд малодосліджених питань, а також наведено низку позначень, термінів і допоміжних тверджень.

Другий розділ присвячено дослідженню точності різницевої схеми для стаціонарних і нестаціонарних рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов за Макаровим. Одержано вагову апріорну оцінку точності різницевої схеми для двовимірного рівняння Пуассона в одиничному квадраті з умовою Неймана на лівій стороні квадрата та умовою Діріхле на трьох інших його сторонах. Для першої крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутнику за допомогою теореми порівняння знайдено вагову апріорну оцінку похибки різницевої схеми підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні, яка свідчить, що в нормі  $C(\omega)$  похибка схеми є величиною  $O(|h|^5)$  поблизу сторін та  $O(|h|^6 \ln |h|^{-1})$  – поблизу вершин прямокутника, тоді як далі від них дорівнює  $O(|h|^4)$ . Для одновимірного рівняння теплопровідності з умовою Неймана на лівому кінці проміжку та умовою Діріхле на його правому кінці одержано вагову апріорну оцінку, яка враховує крайовий ефект і демонструє, що поблизу правої сторони просторово-часового прямокутника точність схеми дорівнює  $O(h(\tau + h))$ , тоді як далі від неї є величиною  $O(\tau + h)$ . Окрім того, знайдено вагову апріорну оцінку, яка враховує початковий ефект і

показує, що точність цієї схеми поблизу нижньої сторони просторово-часового прямокутника є величиною  $O\left(\sqrt{\tau(2 + \ln^2 \tau)}(\tau + h)\right)$ . Одержано вагову оцінку точності різницевої схеми для двовимірного рівняння теплопровідності в прямокутнику з крайовою умовою Неймана на лівій стороні та умовою Діріхле на трьох інших сторонах, яка свідчить про те, що точність наближеного розв'язку поблизу тих граней просторово-часового паралелепіпеда, де задано крайову умову Діріхле, є вищою, ніж далі від них. Точніше, похибка методу у певній ваговій нормі є величиною  $O\left(\sqrt{h_1}(h_1 + h_2^2 + \tau)\right)$  поблизу грані  $x_1 = 1$  та  $O\left(\sqrt{h_2}(h_1 + h_2^2 + \tau)\right)$  – поблизу граней  $x_2 = 0$  і  $x_2 = 1$ , тоді як далі від них дорівнює  $O(h_1 + h_2^2 + \tau)$ . Знайдено вагові оцінки точності різницевої схеми для двовимірного параболічного рівняння в одиничному квадраті з урахуванням ефекту від початкової умови та крайової умови Діріхле. Перша оцінка демонструє, що в рівномірній сітковій нормі похибка методу поблизу бічних граней і бічних ребер просторово-часового паралелепіпеда має порядок точності відповідно  $O(h(\tau + h^2))$  і  $O(h^2 \ln h^{-1}(\tau + h^2))$ , тоді як далі від них є величиною  $O(\tau + h^2)$ . Друга оцінка свідчить про те, що в нормі  $L_2(\omega)$  похибка схеми поблизу дна просторово-часового паралелепіпеда має порядок  $O(\tau(\tau + h^2))$ , тоді як далі від нього є величиною  $O(\tau + h^2)$ .

У третьому розділі досліджено точність сіткових методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку. Для слабкого розв'язку першої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною порядку  $\alpha \in (0,1)$  знайдено шкалу вагових оцінок у просторах Гельдера, які враховують вплив крайової умови Діріхле, побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано узгоджені в сенсі Самарського – Лазарова – Макарова<sup>1</sup> вагові апріорні оцінки похибки з урахуванням крайового ефекту (вагові оцінки свідчать, що

---

<sup>1</sup> Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987.

точність наближеного розв'язку в примежових вузлах сітки вища, ніж в її внутрішніх вузлах, та узгоджуються з результатами тестових обчислень). Для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною порядку  $\alpha \in (0,1)$  і сталими коефіцієнтами знайдено достатню умову належності

розв'язку першої крайової задачі простору  $\overset{\circ}{H}^1(0,1)$  та одержано вагову оцінку в нормі  $C[0,1]$  з ваговою функцією  $\rho^{-1/2}(x)$ , де  $\rho(x) = \min(x, 1-x)$  характеризує відстань незалежної змінної  $x$  до кінців проміжку  $(0,1)$ . Для такого ж рівняння зі змінними коефіцієнтами у випадку крайової умови Діріхле і функції  $\rho(x)$

знайдено остатню умову належності розв'язку простору  $\overset{\circ}{W}_\infty^1(0,1)$  та одержано вагову оцінку в нормі  $C[0,1]$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x)$ ; знайдено достатню

умову належності розв'язку простору  $\overset{\circ}{H}^1(0,1)$  та одержано вагову оцінку в нормі  $C[0,1]$  з ваговою функцією  $\rho^{-1/2}(x)$ ; знайдено достатню умову належності

розв'язку множині  $\overset{\circ}{H}^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H}^1(0,1)$  та одержано вагову оцінку в нормі  $C[0,1]$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x)$ . Для цієї задачі побудовано сіткову схему, для похибки  $z$  якої знайдено оцінку в сітковій нормі  $\|z_{\bar{x}}\|$  та вагову оцінку в сітковій нормі  $C(\omega)$ , яка враховує крайовий ефект і свідчить про те, що похибка схеми у примежових вузлах має порядок  $O(h\sqrt{h})$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h)$ .

Окрім того, у випадку першої крайової задачі для двовимірного рівняння Пуассона в одиничному квадраті з дробовою похідною по одній із змінних одержано вагову оцінку розв'язку в нормі  $C(\bar{\Omega})$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , де  $\rho(x, y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y, 1-y\}$ ,  $\sigma > 0$  – як завгодно близьке до  $1/2$  знизу число; побудовано сіткову схему першого порядку апроксимації та знайдено вагову апріорну оцінку точності в сітковій нормі  $C(\omega)$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , яка свідчить, що похибка сіткової схеми у примежових вузлах має порядок  $O(h^{1+\sigma})$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h)$ ; побудовано сіткову

схему другого порядку апроксимації та доведено вагову апriorну оцінку точності в сітковій нормі  $C(\omega)$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , яка свідчить, що похибка сіткової схеми у примежових вузлах має порядок  $O(h^{2+\sigma})$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h^2)$ .

Для задачі Гурса для диференціального рівняння з дробовими похідними і змінними коефіцієнтами одержано: оцінку слабкого розв'язку  $u(x, y)$  та оцінку його мішаної похідної  $u''_{xy}(x, y)$  в нормі  $C(\bar{\Omega})$ ; вагову оцінку слабкого розв'язку  $u(x, y)$  в нормі  $C(\bar{\Omega})$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , де  $\rho(x, y) = xy$ , та оцінку його мішаної похідної  $u''_{xy}(x, y)$  в просторі  $C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$ ; побудовано сіткову схему, для похибки якої знайдено оцінку в сітковій нормі  $\|z_{\bar{x}\bar{y}}\|$  та вагові апriorні оцінки в сітковій нормі  $C(\omega)$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , які свідчать, що похибка сіткової схеми має порядок  $O(h^{2-\alpha})$  у примежових вузлах поблизу сторін  $x = 0$  і  $y = 0$  та порядок  $O(h^{3-\alpha})$  поблизу вершини  $(0, 0)$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h^{1-\alpha})$ .

У четвертому і п'ятому розділах дисертації досліджено метод перетворення Келі для конструктивного зображення точних і наближених розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах, запропонований уперше в працях Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка і В. Л. Макарова. Однією з переваг цього методу є автоматична залежність його точності від гладкості вхідних даних. Це означає, що метод перетворення Келі належить до методів без насичення точності за Бабенком<sup>1</sup>, а отже, у певному сенсі є оптимальним. Побудова таких методів є актуальним напрямом чисельного аналізу.

Четвертий розділ присвячено дослідженню точності методу перетворення Келі для розв'язування абстрактної задачі Коші. Для диференціального рівняння 1-го порядку із самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі у випадку скінченної та нескінченної гладкості початкового вектора знайдено майже (з точністю до логарифма) непокрощувану степеневу та

---

<sup>1</sup> Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.

непокрещувану експоненціальну оцінку швидкості збіжності методу відповідно. Для диференціального рівняння 1-го порядку із щільно заданим логарифмічно секторіальним оператором у банаховому просторі за допомогою методу перетворення Келі одержано зображення точного розв'язку у вигляді ряду, побудовано наближений розв'язок та доведено оцінку його точності, яка автоматично залежить від гладкості початкового вектора. Доведено обернені теореми наближення операторних експоненти і косинуса про гладкість початкового вектора залежно від порядку точності методу перетворення Келі. Застосовано метод перетворення Келі на етапі реалізації паралельного методу довільного порядку точності для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором у гільбертовому просторі.

У п'ятому розділі для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з однорідними крайовими умовами Діріхле і самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі за допомогою перетворення Келі цього оператора, операторної функції Гріна, поліномів Майкснера від незалежної змінної  $x \in (0,1)$  та розкладу в тригонометричний ряд Фур'є правої частини рівняння побудовано точний розв'язок у вигляді ряду та знайдено оцінки з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x)$ , де  $\rho(x) = \min(x, 1-x)$ , що враховує вплив крайової умови Діріхле як у випадку скінченної, так і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Окрім того, побудовано наближені розв'язки та доведено вагові апріорні оцінки з тією ж ваговою функцією, які враховують вплив крайової умови Діріхле і свідчать про степеневу та експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Ці результати узагальнено на випадок однорідного і неоднорідного рівнянь з відповідно неоднорідними та однорідними крайовими умовами Діріхле у випадку сильно позитивного щільно заданого оператора в банаховому просторі залежно від гладкості вхідних даних задачі.

**Ключові слова:** різницева схема, рівняння Пуассона, параболічне рівняння, крайова умова Діріхле, вагова апріорна оцінка, початково-крайовий ефект, похідна дробового порядку, сіткова схема, банахів простір, гільбертів простір, абстрактна крайова задача, перетворення Келі, алгоритм без насичення точності, степенева швидкість збіжності, експоненціальна швидкість збіжності.

## ABSTRACT

**Mayko N. V. The weighted estimates of the functional-discrete methods for solving boundary value problems.** – Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.07 – Computational Mathematics. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the construction and study of the approximate methods for solving the problems of mathematical physics and deals with obtaining weighted a priori accuracy estimates of these methods, taking into account the influence of boundary and initial conditions according to Makarov<sup>1</sup>. The boundary effect means that due to the Dirichlet boundary condition for a differential equation in a canonical domain, the accuracy of the approximate solution near the boundary of the domain is higher compared to the accuracy away from the boundary. A similar situation is observed for non-stationary equations in the nodes of the mesh where the initial condition is given. The boundary and initial effects are quantitatively described by means of a priori error estimates in certain mesh norms with a suitable weight function which characterizes the distance of a point to the boundary of the space-time domain. The idea of such estimates was first announced by V. L. Makarov for the elliptic equation in the case of generalized solutions from Sobolev spaces and then transferred to quasilinear stationary and non-stationary equations. The dissertation develops the aforementioned approach and presents the new research into the impact of the initial and boundary conditions on the accuracy of the following three methods: the finite-difference method for elliptic and parabolic equations, the grid method of solving equations with fractional derivatives and the Cayley transform method for abstract differential equations in Hilbert and Banach spaces. The proposed methodology of obtaining weighted estimates can be further employed for investigating exact and approximate solutions to a number of new classes of problems. At the same time, taking

---

<sup>1</sup> Makarov V. L. On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences)*. 1989. Vol. 42, № 5. P. 41–44.



into account the boundary and initial effects is not only of theoretical but also of practical importance because it justifies for example the use of a coarser mesh (i.e. a larger mesh step) near the boundary of the domain. Moreover, the presented approximations are universal and convenient for implementation and therefore can be utilized for solving a wide range of applied problems in physics, engineering, chemistry, biology, finance, etc.

The main part of the dissertation consists of the introduction, five sections and conclusions. The introduction provides a general description of the work: the relevance of the topic and its connection with certain scientific programs are substantiated; the object, subject, aim and tasks of the research are defined; the methodology, scientific novelty, theoretical and practical value of the obtained results are characterized; the applicant's personal contribution, the completeness of the material in the publications and the appropriate level of its approbation are demonstrated; the structure and the volume of the dissertation are described. The first section covers the three specific approximation methods that will be considered next: a brief historical and biographical review is given and the current state of development is outlined; some less explored issues are featured; the terminology, notation and a few auxiliary statements are listed.

The second section focuses on the accuracy of the finite-difference schemes for stationary and non-stationary equations with allowance for the influence of boundary and initial conditions in the sense of Makarov. The weighted error estimate of the finite-difference approximation for Poisson's equation in a unit square with the Neumann boundary condition on the left-hand side of the square and the Dirichlet boundary condition on the other three sides is obtained. By means of the comparison theorem (the corollary of the discrete maximum principle), we get the weighted error estimate for the finite-difference scheme with the higher order of accuracy on a nine-node template for Poisson's equation in a rectangle with the Dirichlet boundary condition on its sides. The estimate indicates that in the discrete norm of  $C(\omega)$  the accuracy of the scheme is  $O(|h|^5)$  and  $O(|h|^6 \ln |h|^{-1})$  near the sides and the vertices of the rectangle, respectively, whereas it is  $O(|h|^4)$  inside the domain. Next, for a finite-difference approximation of the one-dimensional heat equation with the

Neumann boundary condition at the left-hand end of the interval and the Dirichlet boundary condition at its right-hand end, the weighted error estimate with allowance for the boundary effect is obtained. The analysis demonstrates that the accuracy of the scheme is  $O(h(\tau+h))$  near the right-hand side of the space-time rectangle, otherwise it is  $O(\tau+h)$ . In addition, we get the accuracy estimate that takes into account the impact of the initial condition and shows that close to the bottom of the space-time rectangle the convergence rate of the scheme is  $O((\tau+h)\sqrt{\tau(2+\ln^2\tau)})$ . We then develop the technique of obtaining the weighted accuracy estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional heat equation in a rectangle with the mixed boundary condition (namely, the Neumann boundary condition on its left-hand side and the Dirichlet boundary condition on the other three sides). The estimate indicates that the accuracy of the approximate solution in a certain discrete norm is higher in the nodes near the faces of the space-time parallelepiped where the Dirichlet boundary condition is given than it is inside the domain. More precisely, the convergence rate of the scheme is  $O(\sqrt{h_1}(h_1+h_2^2+\tau))$  close to the face  $x_1=1$  and  $O(\sqrt{h_2}(h_1+h_2^2+\tau))$  close to the faces  $x_2=0$  and  $x_2=1$  whereas it equals  $O(h_1+h_2^2+\tau)$  away from them. We also obtain two weighted error estimates of the finite-difference scheme for the two-dimensional parabolic equation in a unit square with regard to the Dirichlet boundary condition and the initial condition. The first estimate is derived by involving the comparison theorem and demonstrates that in the uniform discrete norm the accuracy order of the approximate solution is  $O(h(\tau+h^2))$  and  $O(h^2\ln h^{-1}(\tau+h^2))$  near the side faces and the side edges of the space-time parallelepiped, respectively, whereas it equals  $O(\tau+h^2)$  otherwise. The second estimate indicates that in the discrete norm of  $L_2(\omega)$  the accuracy order of the scheme is  $O(\tau(\tau+h^2))$  and  $O(\tau+h^2)$  near and far from the bottom of the space-time parallelepiped, respectively.

The third section is devoted to the study of the accuracy of some grid methods for solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives. We obtain the scale of weighted estimates in the Hölder space for a weak

solution of the first boundary value problem for the second-order ODE with the fractional derivative of the order  $\alpha \in (0,1)$  taking into account the influence of the Dirichlet boundary condition. For treating this problem numerically, we construct the grid schemes of the first and second order of approximation and get the weighted error estimates with regard to the boundary effect (the estimates reveal that the accuracy of the approximate solution increases in the nodes close to the boundary, compared to the accuracy in the inner nodes, which is supported by the test results). Moreover, the error estimates are consistent in the sense of Samarskii – Lazarov – Makarov<sup>1</sup>. Then we move on to a more general second-order ODE with constant coefficients and the fractional derivative of the order  $\alpha \in (0,1)$ . We find the sufficient condition for the solution of the Dirichlet boundary problem to belong to the Sobolev space  $\overset{\circ}{H}^1(0,1)$  and obtain the weighted estimate in the norm of the space  $C[0,1]$  with the weight function  $\rho^{-1/2}(x)$  (here  $\rho(x) = \min(x, 1-x)$  characterizes the distance of the independent variable  $x$  to the ends of the interval  $(0,1)$ ). Then we consider a similar equation under the Dirichlet boundary condition but now with variable coefficients. First, we find the sufficient condition for its solution to belong to the space  $\overset{\circ}{W}_\infty^1(0,1)$  and obtain the weighted estimate in the norm of  $C[0,1]$  with the weight function  $\rho^{-1}(x)$ . Second, we find the sufficient condition for the solution to belong to the space  $\overset{\circ}{H}^1(0,1)$  and get the weighted estimate in the norm of  $C[0,1]$  with the weight function  $\rho^{-1/2}(x)$ . Third, we find the sufficient condition for the solution to belong to  $\overset{\circ}{H}^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H}^1(0,1)$  and derive the weighted estimate in the norm of  $C[0,1]$  with the weight function  $\rho^{-1}(x)$ . To solve the problem numerically, we construct a grid scheme and obtain the accuracy estimate in the discrete norm  $\|z_{\bar{x}}\|$  and the weighted error estimate in the uniform discrete norm

---

<sup>1</sup> Samarskii A. A. Lazarov R. D., Makarov V. L. Finite-difference schemes for differential equations with generalized solutions. M.: Vysshaya shkola, 1987. 296 p. (In Russian).

of the space  $C(\omega)$ . The latter one clearly displays the boundary effect, namely, it indicates that the accuracy of the scheme is equal to  $O(h\sqrt{h})$  in the nodes close to the ends of the interval  $(0,1)$  whereas it is  $O(h)$  in the inner ones.

Next, we focus on the first boundary value problem for Poisson's equation in a unit square  $\bar{\Omega} = [0,1]^2$  with the fractional derivative in the variable  $x$ . The weighted estimate for the solution in the norm of  $C(\bar{\Omega})$  with the weight function  $\rho^{-1}(x, y)$  is obtained (here  $\rho(x, y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y, 1-y\}$  and the number  $\sigma > 0$  is arbitrarily close to  $1/2$  from below). To deal with the problem numerically, the grid scheme of the first order of approximation is developed and the weighted error estimate with the weight function  $\rho^{-1}(x, y)$  in the discrete norm of the space  $C(\omega)$  is obtained, which suggests that the accuracy of the scheme is  $O(h^{1+\sigma})$  near the boundary of the domain and it is  $O(h)$  otherwise. In addition, the grid scheme of the second order of approximation is constructed and the weighted error estimate with the same weight function  $\rho^{-1}(x, y)$  in the uniform discrete norm of the space  $C(\omega)$  is obtained. This estimate means that the accuracy of the scheme is equal to  $O(h^{2+\sigma})$  in the nodes next to the boundary and it is  $O(h^2)$  in the other inner nodes of the domain  $\Omega$ .

Finally in this section, we consider the Goursat problem for a differential equation with variable coefficients and fractional derivatives of the order  $\alpha \in (0,1)$ . First, we get the estimate for the weak solution  $u(x, y)$  and its mixed derivative  $u''_{xy}(x, y)$  in the norm of  $C(\bar{\Omega})$ . Second, we obtain the weighted estimate for the weak solution  $u(x, y)$  in the norm of  $C(\bar{\Omega})$  with the weight function  $\rho^{-1}(x, y)$  where  $\rho(x, y) = xy$  characterizes the distance from a point inside the domain to the positive coordinate semiaxes. Third, the previous result is improved by obtaining the estimate for the mixed derivative  $u''_{xy}(x, y)$  in the Hölder space  $C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$ . After that, the grid scheme for solving the problem approximately is constructed and examined. Namely, we find the estimate for the norm  $\|z_{\bar{x}\bar{y}}\|$  of the error  $z$  and get a number of weighted error estimates in  $C(\omega)$  with the

weight function  $\rho^{-1}(x, y)$ . It follows from these inequalities that the accuracy order of the scheme is  $O(h^{2-\alpha})$  in the nodes next to the sides  $x=0$  and  $y=0$  of the domain,  $O(h^{3-\alpha})$  in the node near the vertex  $(0,0)$  and  $O(h^{1-\alpha})$  otherwise.

The fourth and fifth sections of the dissertation are devoted to the study of the Cayley transform method for the constructive representation of exact and approximate solutions of the abstract differential equations in Banach and Hilbert spaces. The Cayley transform method was first proposed and developed by D. Z. Arov, I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov. One of its most valuable advantages is the automatic dependence of the accuracy order on the smoothness properties of the input data. This means that the Cayley transform method is a method without saturation of accuracy according to Babenko<sup>1</sup> and therefore is optimal in a certain sense. The construction of such methods is an important problem of numerical analysis.

The fourth section presents the research on the accuracy of the Cayley transform method for solving the abstract Cauchy problem. We begin with a first-order differential equation with a self-adjoint positive definite operator in a Hilbert space. In the case of the finite (in a certain sense) smoothness of the initial vector, the Cayley transform method has a power rate of convergence which is nearly (accurate to logarithm) unimprovable in order. If the smoothness of the initial vector is infinite (in some sense), the method has an exponential rate of convergence which is (completely) unimprovable in order. Next, the abstract Cauchy problem for a first-order differential equation with a logarithmically sectorial operator in a Banach space is considered. Making use of the Cayley transform method, we represent the exact solution in the form of an infinite series and write down the approximate solution as a partial sum of this series. After that, we obtain the error estimate indicating that the proposed method is a non-saturating one (i. e. the accuracy order of the method automatically depends on the smoothness of the initial vector). As a useful supplement to the main results, we prove the inverse approximation theorems (the first one is for the operator exponential function and the second one is for the operator cosine function) revealing how

---

<sup>1</sup> Babenko K. I. The fundamentals of numerical analysis. M.: Nauka, 1986. 744 p. (In Russian).

smoothness of the initial vector follows from the accuracy order of the method. At the end of the section we apply the Cayley transform method for implementing the parallel method of an arbitrary order of accuracy for solving the evolution equation with the variable operator in a Hilbert space.

In the fifth section we study the inhomogeneous second-order differential equation under the homogeneous Dirichlet boundary conditions with a self-adjoint positive definite operator in a Hilbert space. By means of the Cayley transform of the operator, the Meixner-type polynomials of the independent variable  $x \in (0,1)$  and the trigonometric Fourier series representation for the right-hand side of the equation, the exact solution of the problem is represented in the form of an infinite series. In both cases of finite and infinite smoothness of the input data, the weighted estimates for the solution with the weight function  $\rho^{-1}(x)$ ,  $\rho(x) = \min(x, 1-x)$ , are derived. By taking partial sums of the infinite series, we construct the approximate solutions and obtain the weighted error estimates with the weight function  $\rho^{-1}(x)$ . Besides reflecting the influence of the Dirichlet boundary condition, these estimates suggest that the Cayley transform methods have either a power rate of convergence (in the case of finitely smooth right-hand side of the equation) or an exponential rate of convergence (if the input data are infinitely smooth in some sense). These results are generalized for homogeneous and inhomogeneous equations under the inhomogeneous and homogeneous Dirichlet boundary conditions, respectively, in the case of a strongly positive operator in a Banach space with taking into account both the boundary effect and smoothness of the input data.

**Keywords:** finite-difference scheme, Poisson's equation, parabolic equation, Dirichlet boundary condition, weighted error estimate, initial-boundary effect, fractional derivative, grid scheme, Banach space, Hilbert space, abstract boundary value problem, Cayley transform, algorithm without saturation of accuracy (non-saturating algorithm), power rate of convergence, exponential rate of convergence.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Макаров В. Л., Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2002. №4. С. 192–197.
2. Рябічев В. Л., Майко Н. В. Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2004. №1. С. 270–278.
3. Майко Н. В., В. Л. Рябичев Точность приближения решения абстрактной задачи Коши. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. №3. С. 145–152.  
Mayko N. V., Ryabichev V. L. Accuracy of approximation of a solution to an abstract Cauchy problem. *Cybernet. Systems Anal.* 2005. Vol. 41, Iss. 3. P. 437–444. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0077-9>
4. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Реалізація паралельного методу довільного порядку точності для еволюційного рівняння зі змінним оператором. *Вісник Київського університету*. 2006. №2. С. 204–210.
5. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Теоремы приближения операторных экспоненты и косинуса. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 145–152.  
Mayko N. V., Ryabichev V. L. Approximation theorems for operator exponential and cosine functions. *Cybernet. Systems Anal.* 2009. Vol. 45, Iss. 5. P. 800–807. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-009-9145-x>
6. Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2013. № 3(113). P. 91–106.
7. Майко Н. В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 154–163.  
Mayko N. V. Error estimates of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation with allowance for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. Vol. 50, No. 5. P. 788–796. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9669-6>

8. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 5. С. 113–124.  
Mayko N. V., Ryabichev V. L. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for Poisson's equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2016. Vol. 52, Iss. 5. P. 758–769. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9877-3>
9. Майко Н. В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 1. С. 99–107.  
Mayko N. V. Improved accuracy estimates of the difference scheme for the two-dimensional parabolic equation with regard for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2017. Vol. 53, Iss. 1. P. 83–91. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9909-7>
10. Майко Н. В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 1. С. 145–153.  
Mayko N. V. A weighted error estimate for a finite-difference scheme of increased approximation order for a two-dimensional Poisson equation with allowance for the Dirichlet Boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 1. P. 130–138. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0014-3>
11. Майко Н. В. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с учетом влияния краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4. С. 122–134.  
Mayko N. V. The finite-difference scheme of higher order of accuracy for the two-dimensional Poisson equation in a rectangle with regard for the effect of the Dirichlet boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 4. P. 624–635. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0063-7>
12. Makarov V. L., Mayko N. V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. Vol. 19, Iss. 2. P. 379–394. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0002>



13. Макаров В. Л., Майко Н. В. Крайовий ефект в оцінці точності сіткового методу для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. № 1. С. 80–95.
- Makarov V. L., Mayko N. V. Boundary effect in accuracy estimate of the grid method for solving fractional differential equations. *Cybernet. Systems Anal.* 2019. Vol. 55, Iss. 1. P. 65–80. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00113-y>
14. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates for boundary value problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0305>
15. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Comput. Methods Appl. Math.* 2020. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120>
16. Майко Н. В. Суперекспоненціальна швидкість збіжності методу перетворення Келі для абстрактного диференціального рівняння. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. № 3. С. 171–183.
- Mayko N. V. Super-exponential rate of convergence of the Cayley transform method for an abstract differential equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2020. Vol. 56, Iss. 1. P.492–503. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00265-2>
17. Макаров В. Л., Майко Н. В. Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 3–9. <https://doi.org/10.15407/dopovid2020.05.003>
- Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for boundary value problems in a Banach space. arXiv:2007.01410
18. Макаров В. Л., Майко Н. В., Рябічев В. Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса. *Теорія еволюційних рівнянь. П'яті Боголюбівські читання: Праці 5 міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 22–24 травня 2002): Кам'янець-Подільський, 2002. С. 111.*
19. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Паралельний метод високого порядку точності для еволюційного рівняння першого порядку. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Праці 10 всеукр. наук. конф. (Львів, 23–23 вересня 2003). Львів, 2003. С. 90.*

20. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Реалізація методу апроксимації еволюційного оператора для розв'язування абстрактної задачі Коші. *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування*: Праці міжнар. наук. конф. (Ужгород, 18–23 вересня 2006). Ужгород, 2006. С. 67.
21. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Пряма і обернена теорема наближення операторної експоненти. Матеріали 12 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008). Київ, 2008. С. 252.
22. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Обернена теорема наближення операторного косинуса. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: Праці 15 міжнар. наук. конф. (Львів, 23–25 вересня 2008). Львів, 2008. С. 24.
23. Boyko M. V., Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for parabolic equation. *Електроніка та прикладна фізика*: Праці 7 міжнар. наук. конф. (Київ, 24–27 жовтня 2012). Київ, 2012. С. 189–190.
24. Mayko N. V. The effect of the boundary conditions in the accuracy estimate of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XV international scientific conf.* (Kyiv, 29–31 May, 2013). Kyiv, 2013. С. 40.
25. Mayko N. V. The error estimate with the boundary effect of the finite-difference scheme for the two-dimensional parabolic equation. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 23–24.
26. Майко Н. В., Сопотницька М. В. Оцінка точності різницевої схеми для одновимірного параболічного рівняння з урахуванням впливу початкової умови. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
27. Mayko N. V. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional heat equation allowing for the effect of the initial condition. Матеріали 7 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
28. Mayko N. V., Ryabichev V. L. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation allowing for the effect of the boundary condition. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XVII international scientific conf.* (Kyiv, 27–29 May, 2015). Kyiv, 2015. P. 68.

29. Майко Н. В., Максимчук М. А. Оцінка швидкості збіжності різницевої схеми для рівняння Пуассона з урахуванням впливу крайової умови. Матеріали 8 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015). Київ, 2015. С. 59–60.
30. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Покращені оцінки точності різницевої схеми для двовимірного параболічного рівняння з урахуванням ефекту від крайових умов. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМСС: Праці 22 Всеукр. наук. конф.* (Львів, 5–7 жовтня 2016). Львів, 2016. С.119–120.
31. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність скінченно-різницевої схеми для рівняння Пуассона в прямокутнику з урахуванням крайового ефекту. *Інформаційні технології та взаємодії: Матеріали 4 міжнар. наук.-практ. конф.* (Київ, 8–10 лист. 2017). Київ, 2017. С. 34–35.
32. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Зважена оцінка точності сіткової схеми для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XIX international scientific conf.* (Kyiv, 22–24 May, 2019). Kyiv, 2019. P. 106–108.
33. Майко Н. В. Вагові оцінки точності сіткового методу для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти (до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. Можара В. І).* Матеріали всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. (Київ, 26–27 травня 2020). Київ, НУХТ, 2020. С. 33–34.

## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....   | 24 |
| ВСТУП.....   | 26 |
| РОЗДІЛ 1. Огляд літератури та вихідні положення .....  | 35 |
| 1.1. Метод скінченних різниць для розв'язування крайових<br>і початково-крайових задач.....  | 35 |
| 1.2. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь<br>з похідними дробового порядку .....                                   | 62 |
| 1.3. Метод перетворення Келі наближеного розв'язування<br>абстрактних диференціальних рівнянь .....                                  | 62 |
| РОЗДІЛ 2. Точність різницевих схем для стаціонарних і нестаціонарних<br>рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов..... | 71 |
| 2.1. Вагова апіорна оцінка точності стандартної різницевої схеми<br>для рівняння Пуассона з мішаною крайовою умовою .....            | 71 |
| 2.1.1. Дискретизація вихідної задачі .....   | 71 |
| 2.1.2. Властивості різницевого оператора .....   | 72 |
| 2.1.3. Різницева функція Гріна та вагова оцінка похибки методу .....   | 76 |
| 2.1.4. Висновки .....  | 84 |
| 2.2. Вагова апіорна оцінка точності дев'ятиточкової<br>різницевої схеми для рівняння Пуассона .....                                  | 84 |
| 2.2.1. Дискретизація вихідної задачі .....   | 84 |
| 2.2.2. Властивості різницевих операторів .....   | 86 |
| 2.2.3. Оцінка різницевої функції Гріна .....   | 89 |
| 2.2.4. Вагова оцінка точності методу .....   | 92 |
| 2.2.5. Висновки .....  | 95 |
| 2.3. Схема підвищеного порядку точності для двовимірного<br>рівняння Пуассона .....  | 95 |
| 2.3.1. Дискретизація вихідної задачі .....   | 95 |
| 2.3.2. Допоміжні результати .....  | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.3.3. Априорна оцінка похибки методу .....                         | 105 |
| 2.3.4. Висновки .....   | 108 |
| 2.4. Вагові оцінки точності різницевих апроксимацій                 |     |
| одновимірного параболічного рівняння .....                          | 108 |
| 2.4.1. Дискретизація вихідної задачі .....                          | 108 |
| 2.4.2. Оцінка похибки з урахуванням крайової умови .....            | 110 |
| 2.4.3. Оцінка похибки з урахуванням початкової умови .....          | 115 |
| 2.4.4. Висновки .....   | 118 |
| 2.5. Вагові оцінки точності різницевих апроксимацій                 |     |
| двовимірного рівняння теплопровідності .....                        | 119 |
| 2.5.1. Дискретизація вихідної задачі .....                          | 119 |
| 2.5.2. Різницева функція Гріна.....                                 | 120 |
| 2.5.3. Оцінка похибки з урахуванням крайової умови .....            | 124 |
| 2.5.4. Висновки .....   | 135 |
| 2.6. Покращені вагові оцінки точності різницевих схем               |     |
| для двовимірного рівняння теплопровідності .....                    | 135 |
| 2.6.1. Дискретизація вихідної задачі .....                          | 135 |
| 2.6.2. Оцінка похибки методу з урахуванням крайового ефекту .....   | 137 |
| 2.6.3. Оцінка похибки методу з урахуванням початкового ефекту ..... | 143 |
| 2.6.4. Висновки .....   | 144 |
| РОЗДІЛ 3. Точність сіткових методів розв'язування крайових задач    |     |
| для диференціальних рівнянь з дробовими похідними .....             | 145 |
| 3.1. Крайовий ефект в априорній оцінці точності методу сіток        |     |
| для диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами              |     |
| і похідною порядку $\frac{1}{2}$ .....                              | 145 |
| 3.1.1. Вагова оцінка розв'язку крайової задачі .....                | 145 |
| 3.1.2. Вагові оцінки точності сіткових методів.....                 | 147 |
| 3.1.3. Висновки .....   | 152 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2. Оцінки точності з урахуванням крайового ефекту<br>для сіткових методів розв'язування диференціальних рівнянь<br>зі сталими коефіцієнтами і похідною порядку $\alpha \in (0,1)$ ..... | 152 |
| 3.2.1. Шкала вагових оцінок для розв'язку диференціальної задачі.....   | 152 |
| 3.2.2. Шкала вагових оцінок точності сіткових методів.....  | 163 |
| 3.2.3. Числовий приклад.....  | 169 |
| 3.2.4. Висновки .....   | 170 |
| 3.3. Вагові оцінки похибки сіткового методу для звичайного<br>диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами<br>і дробовою похідною .....  | 171 |
| 3.3.1. Диференціальні властивості розв'язку крайової задачі .....   | 171 |
| 3.3.2. Точність сіткової схеми.....   | 184 |
| 3.3.3. Висновки .....   | 187 |
| 3.4. Вагові оцінки похибки сіткового методу для диференціального<br>рівняння з частинною дробовою похідною.....   | 188 |
| 3.4.1. Вагова оцінка розв'язку диференціальної крайової задачі .....  | 188 |
| 3.4.2. Сіткова схема першого порядку точності .....   | 193 |
| 3.4.3. Сіткова схема другого порядку точності.....  | 196 |
| 3.4.4. Висновки .....   | 200 |
| 3.5. Вагові оцінки похибки сіткового методу<br>для задачі Гурса з дробовою похідною .....   | 200 |
| 3.5.1. Властивості розв'язку диференціальної крайової задачі .....  | 200 |
| 3.5.2. Точність сіткової схеми.....   | 214 |
| 3.5.3. Висновки .....   | 226 |
| РОЗДІЛ 4. Точність наближених розв'язків абстрактної задачі Коші.....   | 227 |
| 4.1. Оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі<br>для наближення операторної експоненти.....  | 227 |
| 4.1.1. Непокращувані оцінки в гільбертовому просторі .....  | 227 |
| 4.1.2. Непокращувані вагові оцінки в гільбертовому просторі.....  | 236 |
| 4.1.3. Обернені теореми для операторних експоненти і косинуса.....  | 241 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.1.4. Оцінки точності в банаховому просторі.....                    | 247 |
| 4.1.5. Висновки .....  | 256 |
| 4.2. Паралельний метод довільного порядку точності                   |     |
| для еволюційного рівняння зі змінним оператором.....                 | 257 |
| 4.2.1. Аналіз похибки методу та дослідження його на стійкість .....  | 257 |
| 4.2.2. Реалізація методу і числовий приклад.....                     | 259 |
| 4.2.3. Висновки .....  | 265 |
| РОЗДІЛ 5. Точність методу перетворення Келі для розв'язування        |     |
| абстрактних диференціальних рівнянь.....                             | 266 |
| 5.1. Вагові оцінки похибки для абстрактної крайової задачі           |     |
| з неоднорідним рівнянням у гільбертовому просторі.....               | 266 |
| 5.1.1. Допоміжні результати .....                                    | 266 |
| 5.1.2. Абстрактна крайова задача та вагові оцінки її розв'язку ..... | 272 |
| 5.1.3. Вагові оцінки похибки методів без насичення точності.....     | 281 |
| 5.1.4. Вагові оцінки похибки методів                                 |     |
| із суперекспоненціальною швидкістю збіжності .....                   | 287 |
| 5.1.5. Висновки.....   | 293 |
| 5.2. Вагові оцінки похибки методу перетворення Келі                  |     |
| для абстрактної крайової задачі у банаховому просторі .....          | 294 |
| 5.2.1. Крайова задача для однорідного рівняння.....                  | 294 |
| 5.2.2. Крайова задача для неоднорідного рівняння .....               | 302 |
| 5.2.3. Висновки .....  | 313 |
| ВИСНОВКИ.....  | 315 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....                                      | 317 |
| ДОДАТОК. Список публікацій здобувача за темою дисертації .....       | 335 |

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  – межа області  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  – замикання області  $\Omega$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – точка в  $\mathbb{R}^n$ ;

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  –  $n$ -вимірний мультиіндекс, де  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – невід'ємні цілі числа;  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ;

$$D^\alpha u(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ – похідна порядку } |\alpha|;$$

$C^m(\bar{\Omega})$  – множина функцій, неперервних в  $\bar{\Omega}$  разом із похідними до порядку  $m$ ,  $\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})}$  – норма в  $C^m(\bar{\Omega})$ :

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{k=0,1,\dots,m} |u|_{C^k(\bar{\Omega})}, \text{ де } |u|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha|=k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|;$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$  – множина функцій з  $C^m(\bar{\Omega})$ , які задовольняють умову Гельдера з показником  $\lambda$ :  $|u|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} \equiv \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ (x \neq y)}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|} < \infty$ , де  $|x - y|$  –

нижня грань довжин кривих, які лежать в  $\bar{\Omega}$  і сполучають точки  $x, y \in \bar{\Omega}$ ;

$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})}$  і  $|u|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})}$  – відповідно норма і півнорма в  $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ :

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})};$$

$L_p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) – сепарабельний банахів простір вимірних (за Лебегом)

$$\text{функцій зі скінченною нормою } \|u\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, & p = +\infty; \end{cases}$$

зокрема,  $L_2(\Omega)$  – дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком і нормою:

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2(x)dx \right)^{1/2};$$

$W_p^m(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq +\infty, m \geq 0$ ) – простір Соболева, тобто банахів простір функцій  $u \in L_p(\Omega)$ , у яких всі узагальнені похідні  $D^\alpha u(x)$  при  $|\alpha| \leq m$  належать простору  $L_p(\Omega)$ ;  $\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$  і  $|u|_{W_p^m(\Omega)}$  – відповідно норма і півнорма в  $W_p^m(\Omega)$ :



$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{|\alpha|}u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{|\alpha|}u\|_{L_\infty(\Omega)}, & p = +\infty; \end{cases}$$

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^{|\alpha|}u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{|\alpha|=k} \|D^{|\alpha|}u\|_{L_\infty(\Omega)}, & p = +\infty; \end{cases}$$

зокрема, при  $p=2$   $W_2^k(\Omega) \equiv H^k(\Omega)$  – дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком  $(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{|\alpha|}u, D^{|\alpha|}v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{|\alpha|}u(x) D^{|\alpha|}v(x) dx$  і

нормою  $\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{|\alpha|}u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^{|\alpha|}u(x))^2 dx \right)^{1/2}$ ;

$\mathbb{R}_h^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, \dots, n\}$  – сітка в  $\mathbb{R}^n$ ;  $h_\alpha > 0$  –

крок уздовж координатної осі  $Ox_\alpha$ ;  $h = \max(h_1, \dots, h_n)$ ,  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$ ;

$y = y(x)$  – сіткова функція, задана на  $\mathbb{R}_h^n$ ;  $y^{(\pm 1_\alpha)}(x) = y(x_1, \dots, x_\alpha \pm h_\alpha, \dots, x_n)$ ;

$y_{x_\alpha}(x) = \frac{y^{(+1_\alpha)}(x) - y(x)}{h_\alpha}$ ,  $y_{\bar{x}_\alpha}(x) = \frac{y(x) - y^{(-1_\alpha)}(x)}{h_\alpha}$  – відповідно права і

ліва різнищеві похідні;

$y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) = \frac{y^{(+1_\alpha)}(x) - 2y(x) + y^{(-1_\alpha)}(x)}{h_\alpha^2}$  – різнищева похідна другого

порядку;

$\omega_\alpha = \{i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha (N_\alpha \in \mathbb{N})\}$  – сітка на інтервалі  $(0, l_\alpha)$ ,

$\omega_\alpha^- = \omega_\alpha \cup \{0\}$ ,  $\omega_\alpha^+ = \omega_\alpha \cup \{1\}$ ,  $\bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0; 1\}$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ ;

$\omega = \omega_1 \times \omega_2 \times \dots \times \omega_n = \mathbb{R}_h^n \cap \Omega$  – сітка в одиничному кубі  $\Omega = (0, 1)^n$ ,

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \times \dots \times \bar{\omega}_n = \mathbb{R}_h^n \cap \bar{\Omega}$ ,  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ ;

$H$  – простір сіткових функцій, заданих на сітці  $\bar{\omega}$ ;

$H_0$  – простір сіткових функцій, які задані на сітці  $\bar{\omega}$  і перетворюються на нуль на  $\gamma$ , зі скалярним добутком  $(y, v) \equiv (y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x)h_1 h_2 \dots h_n$  і

нормою  $\|y\| \equiv \|y\|_{L_2(\omega)} = \left( \sum_{x \in \omega} y^2(x)h_1 h_2 \dots h_n \right)^{1/2}$ .

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Переважна більшість задач математичної фізики не може бути розв'язана точно і потребує застосування відповідних наближених методів. Важливою характеристикою будь-якого наближеного методу є його точність. Для оцінки точності традиційно використовують певний параметр дискретизації: крок сітки, кількість доданків частинної суми ряду тощо. Однак і з теоретичних, і з практичних міркувань важливим є також урахування впливу інших факторів, наприклад, *крайового і початкового ефектів за Макаровим*. Так, вплив крайового ефекту означає, що внаслідок крайової умови Діріхле для диференціального рівняння в канонічній області точність наближеного розв'язку поблизу межі області є вищою порівняно з точністю далі від межі. Аналогічна ситуація спостерігається і для нестационарних рівнянь у тих вузлах сітки, де задано початкову умову.

Кількісною характеристикою крайового і початкового ефектів є апіорні оцінки похибки з відповідною ваговою функцією, яка характеризує відстань точки до межі просторово-часової області, в певних сіткових нормах. Ідея таких оцінок уперше анонсована В. Л. Макаровим<sup>1</sup> для еліптичного рівняння у випадку узагальнених розв'язків з просторів Соболева та розвинута в публікаціях Л. І. Демківа і В. Л. Макарова для квазілінійних стаціонарних і нестационарних рівнянь. Близькими за тематикою є роботи Є. Ф. Галби, проте в них використано припущення про класичну гладкість розв'язків і нестационарні задачі не розглядаються. У дисертації продовжено відомі та розпочато нові дослідження впливу початкової і крайової умов на точність трьох чисельних методів: методу скінченних різниць (МСР) для еліптичних і параболічних рівнянь, сіткового методу розв'язування рівнянь з дробовими похідними та методу перетворення Келі для абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах.

МСР є історично одним із перших і найбільш визнаних чисельних методів розв'язування задач математичної фізики завдяки його універсальності та простоті реалізації. Останнім часом він набув значної популярності внаслідок зростання інтересу до вивчення нелінійних процесів у різних областях фізики,

---

<sup>1</sup> Makarov V. L. On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences)*. 1989. Vol. 42, № 5. P. 41–44.

хімії, сейсмології, екології тощо. Математичні моделі таких явищ будують за допомогою нелінійних рівнянь з частинними похідними. Так, в аеро- і гідродинаміці виникає одновимірне квазілінійне параболічне рівняння Бюргерса як адекватна математична модель турбулентностей. Окремим випадком рівняння Бюргерса є квазілінійне рівняння переносу (рівняння Гопфа) – найпростіше рівняння, що описує розривні течії або течії з ударними хвилями. В біології, екології, фізіології, теорії горіння, теорії кристалізації, фізиці плазми тощо важливе значення має рівняння Фішера – Колмогорова – Петровського – Піскунова (рівняння Фішера – КПП) – найпростіше напівлінійне параболічне рівняння. Еволюцію хвиль малої амплітуди у дисперсійних середовищах часто моделюють за допомогою рівняння Кортевега–де Вріза (рівняння КдВ). Чимало публікацій присвячено різницеvim схемам розв'язування задач для еліптичних і параболічних рівнянь з динамічними умовами спряження на межі контакту (які пов'язані з наявністю в теплопровідному середовищі зосереджених теплоємностей) і/або динамічними крайовими умовами (які моделюють теплопровідність у тілі, що перебуває в контакті з флюїдом, а також процеси у напівпровідникових приладах). В математичному моделюванні деяких процесів екології, фізики та техніки, коли неможливо задати точні значення шуканого розв'язку на межі області, виникають задачі з нелокальними крайовими умовами. Ці та багато інших прикладів демонструють, що МСР активно розвивається та широко застосовується для розв'язання актуальних науково-технічних задач.

Про актуальність наближених методів для рівнянь із похідними дробового порядку свідчать величезна кількість публікацій і тематика багатьох наукових конференцій. З'ясувалося, що апарат диференціального та інтегрального числення дозволяє будувати адекватні математичні моделі у фізиці і техніці, хімії, біології, фінансах тощо. Завдяки здатності моделювати спадкові явища з довгою пам'яттю дробовий аналіз широко використовується в задачах в'язкопружності. Ефективним є також застосування дробових похідних у моделях аномальної дифузії (наприклад, субдифузії), теорії керування, електродинаміки, нелінійної гідроакустики, для обробки багатовимірних сигналів у радіофізиці та радіолокації тощо. Однак точні розв'язки таких задач можна знайти лише в небагатьох (переважно лінійних) випадках. Інтегральна природа дробової похідної (на відміну від класичної похідної, природа якої локальна) ускладнює побудову, дослідження і реалізацію наближених методів.

Так, однією з проблем реалізації є помітне зростання витрат, пов'язаних зі збереженням великих масивів даних внаслідок розв'язання системи лінійних рівнянь з великими щільно заповненими матрицями. Це потребує адаптації відомих і застосування нових підходів в області дробового чисельного аналізу, що активно розвивається і постійно оновлюється.

Актуальність методу перетворення Келі зумовлена тим, що математичні моделі багатьох процесів, які досліджуються в науці і техніці, можна записати як операторно-диференціальні рівняння у гільбертовому і банаховому просторах. Так, за певних умов задача Коші для диференціальних рівнянь 1-го і 2-го порядків з операторним коефіцієнтом перетворюється відповідно на класичні початково-крайові задачі для параболічного і гіперболічного рівнянь, а крайова задача для рівняння 2-го порядку – на задачу Діріхле для рівняння Пуассона. Окрім того, актуальним питанням чисельного аналізу є побудова методів *без насичення точності за Бабенком*<sup>1</sup>, тобто методів, точність яких автоматично залежить від гладкості вхідних даних. Запропонована в дисертації методика доведення оцінок похибки методу перетворення Келі відповідає на обидва виклики врахування як крайового ефекту, так і гладкості вхідних даних задачі.

Таким чином, тема дисертації є актуальною для розвитку теорії чисельних методів та запитів природничих наук і техніки.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.** Дисертаційну роботу виконано у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України в рамках наукової теми *Чисельно-аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та обробка інформаційних даних* (номер державної реєстрації 0101U000371) і наукової теми *Експоненціально збіжні методи для розв'язування спектральних задач, задач для квазілінійних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та раціональні апроксимації функцій багатьох змінних* (номер державної реєстрації 0116U003063).

**Мета дослідження** – одержати нові апріорні оцінки точності наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов.

---

<sup>1</sup> Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.

**Завдання дослідження** полягають у наступному: виявити ряд властивостей різницевих операторів, одержати оцінку різницевої функції Гріна та похибки апроксимації різницевої схеми на узагальнених розв'язках вихідної задачі; одержати апріорні оцінки точності різницевих схем для розв'язування еліптичних і параболічних рівнянь з урахування впливу крайових і початкових умов; дослідити гладкість розв'язків диференціальних рівнянь з дробовими похідними та одержати для них вагові оцінки з урахуванням впливу крайової умови Діріхле; побудувати для цих задач сіткові схеми інтерполяційного типу та знайти вагові оцінки точності, які враховують крайових ефект; одержати вагові оцінки для точних розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь 2-го порядку в гільбертовому і банаховому просторах з урахуванням впливу крайової умови; для наближеного розв'язування цих рівнянь побудувати метод перетворення Келі без насичення точності зі степеневою та експоненціальною швидкістю збіжності залежно від гладкості вхідних даних та знайти вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови; довести ряд допоміжних тверджень, зокрема, одержати оцінки для поліномів типу Майкснера.

**Об'єктом дослідження** є математичні моделі процесів і явищ, які вивчаються у природничих і суспільних науках. **Предметом дослідження** є наближені методи розв'язування крайових і початково-крайових задач для диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, використаних для побудови цих моделей.

**Методи досліджень.** У дисертаційній роботі використано методи дійсного і комплексного аналізу, елементи теорії дробового інтегродиференціювання, елементи чисельного аналізу, теорію різницевих схем, елементи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і теорії інтегральних рівнянь, методи функціонального аналізу, елементи теорії лінійних операторів у гільбертових і банахових просторах.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Одержані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для двовимірного рівняння Пуассона в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

2. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для одно- і двовимірного рівняння теплопровідності в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням початково-крайового ефекту.

3. Побудовано шкалу вагових оцінок у просторах Гельдера, які враховують вплив крайової умови Діріхле, для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною і сталими коефіцієнтами. Для наближеного розв'язування цього рівняння побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано узгоджені в розумінні Самарського – Лазарова – Макарова вагові апріорні оцінки похибки з урахуванням крайового ефекту.

4. Для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною у випадку як сталих, так і змінних коефіцієнтів знайдено ряд достатніх умов про належність розв'язку певним функціональним просторам та одержано вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле. Для наближеного розв'язування цієї задачі побудовано різницеві схеми та одержано вагові апріорні оцінки похибки в різних сіткових нормах з урахуванням крайового ефекту.

5. Для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною в одиничному квадраті одержано вагову оцінку розв'язку в рівномірній нормі з ваговою функцією, яка враховує відстань точки до межі області. Побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано вагові апріорні оцінки похибки в рівномірній дискретній нормі з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

6. Одержано оцінки розв'язку задачі Гурса для диференціального рівняння з дробовими похідними і змінними коефіцієнтами в різних функціональних просторах. Побудовано сіткову схему, для похибки якої одержано ряд оцінок у певних дискретних нормах. Вагова функція в оцінках точного і наближеного розв'язків характеризує відстань точки до двох суміжних сторін прямокутника, де задано додаткові умови.

7. Для методу перетворення Келі наближеного розв'язування диференціального рівняння 1-го порядку із самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі у випадку скінченної та нескінченної

гладкості початкового вектора одержано майже (з точністю до логарифма) непокрещувану степеневу та непокрещувану експоненціальну оцінки швидкості збіжності відповідно. Застосовано метод перетворення Келі на етапі реалізації паралельного методу довільного порядку точності для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором у гільбертовому просторі. Доведено обернені теореми наближення операторних експоненти і косинуса про гладкість початкового вектора залежно від порядку точності методу перетворення Келі.

8. Для диференціального рівняння 1-го порядку із щільно заданим логарифмічно секторіальним оператором у банаховому просторі за допомогою методу перетворення Келі одержано зображення точного розв'язку у вигляді ряду, побудовано наближений розв'язок та знайдено оцінку його точності, яка автоматично залежить від гладкості початкового вектора.

9. Для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з однорідними крайовими умовами Діріхле і самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі побудовано точний розв'язок та одержано вагові оцінки з урахуванням впливу крайової умови та припущень про скінченну і нескінченну (у певному сенсі) гладкість вхідних даних. На основі зображення точного розв'язку побудовано наближені розв'язки та одержано вагові апріорні оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле і свідчать про степеневу та експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Ці результати узагальнено на випадок однорідного і неоднорідного рівнянь з відповідно неоднорідними та однорідними крайовими умовами Діріхле у випадку сильно позитивного щільно заданого оператора в банаховому просторі.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертація є теоретичною роботою в області чисельного аналізу. Розроблена у ній методика одержання вагових оцінок може бути застосована для дослідження нових класів задач. Водночас врахування початково-крайового ефекту має не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки, наприклад, надає змогу використовувати поблизу межі області більший крок сітки. Запропоновані в дисертації різниці

й сіткові схеми та методи без насичення точності внаслідок їх універсальності та зручній реалізації можуть бути застосовані для розв'язування широкого кола прикладних задач фізики, техніки, хімії, біології, фінансів тощо.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статті [1], написаній у співавторстві з В. Л. Макаровим і В. Л. Рябічевим, В. Л. Макарову належить постановка задачі та контроль за правильністю викладення результатів, а внесок В. Л. Рябічева і дисертанта рівноцінний. У статтях [2–5, 8], написаних у співавторстві з В. Л. Рябічевим, внесок обох авторів рівноцінний. У статтях [12, 13, 17], написаних у співавторстві з В. Л. Макаровим, та у статтях [14, 15], написаних у співавторстві з І. П. Гаврилюком і В. Л. Макаровим, В. Л. Макарову і І. П. Гаврилюку належать постановки задач і загальне керівництво дослідженням, а дисертантові – перевірка робочих гіпотез і докладне доведення лем і теорем. Статті [6, 7, 9–11, 16] є одноосібними публікаціями дисертанта.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу обчислювальної математики, відділу математичних проблем механіки та теорії керування, відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на засіданнях кафедри математики та теоретичної радіофізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, у відділі чисельних методів та комп'ютерного моделювання Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, на кафедрі обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також на конференціях:

– П'ятій міжнародній науковій конференції *Теорія еволюційних рівнянь. П'яті Боголюбівські читання* (Кам'янець-Подільський, 22–24 травня 2002 р.);

– Десятій всеукраїнській науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* (Львів, 23–23 вересня 2003 р.);

– Міжнародній науковій конференції *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування* (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);



- Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.);
- П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* (Львів, 23–25 вересня 2008 р.);
- Сьомій міжнародній конференції *Електроніка та прикладна фізика* (Київ, 24–27 жовтня 2012 р.);
- XV International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 29–31 May, 2013);
- П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені акад. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014 р.);
- Сьомій міжнародній науковій конференції імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014 р.);
- XVII International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 27–29 May, 2015);
- Восьмій міжнародній науковій конференції імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015 р.);
- Двадцять другій всеукраїнській науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС* (Львів, 5–7 жовтня 2016 р.);
- Четвертій міжнародній науково-практичній конференції *Інформаційні технології та взаємодії* (Київ, 8–10 лист. 2017 р.);
- XIX International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 22–24 May, 2019);
- Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти (до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. В. І. Можара Національного університету харчових технологій)* (Київ, 26–27 травня 2020 р.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 17 статтях [1–17], що з урахуванням класифікації SCImago Journal & Country Rank дорівнює 40 публікаціям, зокрема: 3 статті [12, 14, 15] опубліковано у виданнях, які належать до квартиля Q1, 8 статей [5, 7–11, 13, 16] – до квартиля Q2, одна стаття [3] – до квартиля Q3; 14 статей [1–11, 13, 16, 17] опубліковано в журналах, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 12 статей [3, 5, 7–16] – у виданнях, внесених до наукометричних баз даних Scopus і Web of Science.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, розбитих на 18 підрозділів, висновків, списку використаних джерел із 262 найменувань та одного додатка. Загальний обсяг дисертації становить 339 сторінок, основну частину викладено на 291 сторінці.

Висловлюю глибоку і щирю вдячність моєму вчителеві й науковому консультантові академіку Володимирі Леонідовичу Макарову за розширення кола моїх наукових інтересів, постановку задач, конструктивні обговорення і поради та постійну увагу до роботи.

## РОЗДІЛ 1

### Огляд літератури та вихідні положення

Наближеним методам розв'язування задач математичної фізики присвячено велику кількість робіт: як ґрунтовних монографій і навчальних посібників, так і періодичних публікацій, праць конференцій та онлайн ресурсів. Даний короткий огляд не претендує на повноту і включає джерела та відомості, які безпосередньо стосуються теми дисертаційного дослідження. У ньому розглянуто: різницеві схеми для еліптичних і параболічних рівнянь, сіткові методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з дробовими похідними та функціонально-дискретні методи для абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах.

#### **1.1. Метод скінченних різниць для розв'язування крайових і початково-крайових задач**

Методи скінченних різниць (скорочено МСР) розв'язування рівнянь з частинними похідними були запропоновані понад 100 років тому. Однією з перших робіт була стаття 1917 р. [232] американського математика Р. Ричардсона (R. G. D. Richardson), у якій за допомогою різницевих рівнянь було доведено існування нескінченної множини власних значень першої крайової задачі у квадраті для спеціального типу лінійного диференціального рівняння 2-го порядку з частинними похідними та одержано низку результатів для крайових задач, пов'язаних з гіперболічними рівняннями.

Ці та деякі інші дослідження МСР лишалися невідомими більшості науковців та інженерів, а МСР не був належно оцінений до появи знаменитої статті Р. Куранта (R. Courant), К. Фрідрікса (K. O. Friedrichs) і Г. Леві (H. Lewy) 1928 р. [61], де було розглянуто крайові задачі та задачі на власні значення для еліптичних

різницевих рівнянь, задачу Коші для параболічних і гіперболічних різницевих рівнянь та ін. Ці методи знайшли важливе практичне застосування 15 років по тому завдяки появі та швидкому розвитку перших електронних обчислювальних машин (для задач, пов'язаних із рухом рідин і газів, дифузією і переносом нейтронів, переносом променистої енергії, термоядерними реакціями тощо).

Подальший розвиток теорії та застосувань різницевих схем відбувався завдяки працям Дж. Шортлі (G. H. Shortley) і Р. Веллера (R. Weller) [239], Дж. Кренка (J. Crank) і Ф. Ніколсон (P. Nicolson) [116], Ф. Джона (F. John) [157], Д. Пісмена (D. W. Peaceman) [226], Г. Речфорда (H. H. Rachford, Jr.) і Дж. Дугласа (J. Douglas, Jr.) [123], П. Лакса (P. D. Lax), Б. Вендроффа (B. Wendroff), Р. Ріхтмайера (R. D. Richtmyer) [169], В. Вазова (W. R. Wasow), Дж. Форсайта (G. E. Forsythe) [37], В. С. Рябенського, О. Ф. Філіппова (О. Ф. Филиппов) [85], С. К. Годунова [47], М. Ліса (M. Lees) [170], Г. Стренга (W. G. Strang) [240], Г. Келлера (H. V. Keller) [163], Г.-О. Крайсса (H.-O. Kreiss) [166], В. Томе (V. Tomée) [247], Є. Г. Дьяконова (Е. Г. Дьяконов) [54], М. Б'юкенен (M. L. Buchanan), О. Відлунда (O. V. Widlund) [253], М. М. Яненка (Н. Н. Яненко) [99], Г. І. Марчука (Г. И. Марчук) [76], А. М. Тихонова (А. Н. Тихонов) і О. А. Самарського (А. А. Самарский) [86] та їхніх учнів, Ю. І. Шокіна (Ю. И. Шокин), Т. Дюпонта (T. Dupont), Р. Скотта (R. Scott), Р. Д. Лазарова, Б. Йовановича (B. S. Jovanović), Л. Івановича (L. Ivanović), Л. Волкова (L. Vulkov), Е. Сюлі (E. Süli), І. П. Гаврилюка (I. P. Gavrilyuk), Г. К. Берікелашвілі, П. М. Вабищевича (П. Н. Вабищевич), П. П. Матуса та багатьох інших. Значні результати належать українським математикам: В. Л. Макарову та його учням (М. В. Кутніву, Р. В. Слоньовському, Г. А. Шинкаренку, Р. С. Хапку, П. Ф. Жуку, Н. О. Росохатій, І. І. Лазурчаку, В. Б. Василюку та іншим), І. М. Молчанову, Є. Ф. Галбі О. М. Хімічу, В. Г. Приказчикову, М. М. Москалькову та іншим.

У 1960–80-х рр. актуальним питанням теорії та практики МСР було присвячено чимало конференцій, а досягнення підсумовано в оглядових працях [122] та відомих монографіях, наприклад, В. Вазова і Дж. Форсайта [37], М. М. Яненка [99], Р. Ріхтмайера і К. Мортонна [84], С. К. Годунова і В. С. Рябенського [47], Г. Келлера (H. V. Keller) [163], А. М. Тихонова і О. А. Самарського та їхніх учнів [86, 87, 88].

Наприкінці 1980-х – початку 1990-х рр. теорія МСР поповнилася новими вагомими результатами, які дали змогу розв'язати цілу низку науково-технічних проблем. З появою в 1950-х рр. методу скінченних елементів (МСЕ) обидва методи розвивалися паралельно. Питання точності МСР і МСЕ, без сумніву, було (і є) основним питанням як теорії, так і застосувань. Для випадків, коли розв'язок вихідної задачі є достатньо гладким, в теорії МСР було чимало достатньо повних досліджень збіжності та оцінок точності. Однак реальні фізичні процеси відбуваються, як правило, в гетерогенних середовищах, а отже, вхідні дані є негладкими функціями. Тому вже на початку розвитку теорії МСР важливого значення набуло питання про точність різницевих схем залежно від гладкості шуканого розв'язку. Відповіддю на цей виклик стала розроблена в 1950–60-х роках А. М. Тихоновим і О. А. Самарський теорія однорідних різницевих схем, у якій для одновимірних задач знайдено необхідні і достатні умови збіжності в класі розривних коефіцієнтів. Однак перенесення цього підходу на багатовимірний випадок виявилось недостатньо ефективним і дозволяло одержувати лише занижені оцінки точності. І якщо в МСЕ завдяки його ідейній основі та застосуванню результатів конструктивної теорії функцій було швидко досягнуто успіхів і вдалося одержати оцінки збіжності для еліптичних рівнянь з узагальненими розв'язками, то в теорії МСР це питання певний час лишалося відкритим.

Для усунення цього недоліку МСР довелося, по-перше, відмовитися від класичного (точкового) означення похибки апроксимації та застосувати належні його узагальнення, наприклад, зображення похибки апроксимації в т. з. дивергентній формі, а по-друге, оцінювати складові такого зображення як лінійні обмежені функціонали на узагальнених розв'язках із класів Соболева  $H^k \equiv W_2^k$  за допомогою леми Брембла–Гільберта [108] (а не традиційної формули Тейлора). Побудова різницевої схеми за допомогою операторів усереднення Стеклова або операторів точних різницевих схем, нова трактовка похибки апроксимації та застосування леми Брембла–Гільберта з масштабуванням

півнорм у просторах Соболева і стали основою нового підходу в теорії МСР для одержання оцінок точності різницевих схем, узгоджених з гладкістю розв'язку вихідної диференціальної задачі, тобто оцінок вигляду [90]

$$\|y - u\|_{W_p^s(\omega)} \leq M |h|^{k-s} \|u\|_{W_p^k(\Omega)},$$

де  $W_p^k(\Omega)$  і  $W_p^s(\omega)$  – простори Соболева відповідно неперервного і дискретного аргументів,  $|h|$  – характерний розмір сітки,  $s$  і  $k$  – дійсні числа,  $0 \leq s \leq k$ . Перші в теорії МРС оцінки такого типу (при  $p = 2, s = 1, k = 2$  і  $k = 3$ ) були одержані в [251], де досліджено збіжність різницевої схеми для рівняння Пуассона в дискретній енергетичній нормі  $W_2^1(\omega)$  на узагальнених розв'язках із класів  $W_2^2(\Omega)$  і  $W_2^3(\Omega)$ . У роботі [75] вперше було застосовано оператори точних різницевих схем для побудови схем методу прямих для рівнянь з частинними прохідними. Була встановлена швидкість збіжності наближеного розв'язку при природніх вимогах на гладкість розв'язку вихідної задачі, що забезпечує його існування (узгоджені оцінки точності). Ідеї цієї роботи стали поштовхом до заснування нового напрямку в теорії МСР. Цілою низкою публікацій (див., напр., [38, 39, 41, 45, 62, 63, 64, 73]) і монографією [90] було не тільки розв'язано важливу проблему теорії різницевих схем і побудовано міст між МСР і МСЕ, але й закладено основи нової сучасної теорії Самарського–Лазарова–Макарова (див., напр., монографію [160] і цитовану в ній літературу).

За останні 20 років МСР присвячено оглядові статті [248], перевидані та нові книги [150, 213, 219, 241, 237,], збірники праць і матеріали конференцій (див., напр., [132]). Сучасний етап розвитку теорії та застосувань МСР пов'язаний з дослідженням моделей складних явищ у природничих і суспільних науках та новими потужними можливостями обчислювальної техніки.

Останнім часом можна спостерігати значний інтерес до вивчення нелінійних процесів у різних областях фізики, хімії, сейсмології, екології тощо. Математичні моделі таких явищ будують за допомогою нелінійних рівнянь з частинними похідним. Так, в аеро- та гідродинаміці виникає одновимірне

квазілінійне параболічне рівняння Бюргерса (окремий випадок рівняння Нав'є–Стокса) як адекватна математична модель турбулентностей. У статті [77] для початково-крайової задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T] \quad (\mu = \text{const} > 0), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, l], \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

за допомогою регуляризації Самарського побудовано монотонну різницеву схему з другим порядком апроксимації щодо  $x$  (зі стандартними позначеннями [86]):

$$\begin{aligned} y_{t,i} &= \alpha_i \hat{y}_{\bar{x}x,i} - y_i \hat{y}_{\bar{x},i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ y_i^0 &= u_{0,i}, \quad i = \overline{0, N}, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \end{aligned}$$

де  $\alpha_i = \mu^2 / (\mu + 0,5hy_i)$  при  $y_i \geq 0$ , та досліджено її стійкість за допомогою принципу максимуму. Як зазначає автор статті, вибір принципу максимуму як апарату дослідження не є випадковим, оскільки безпосереднє застосування методу енергетичних нерівностей виявляється неефективним внаслідок нелінійності задачі для збурення.

Тій самій початково-крайовій задачі для рівняння Бюргерса присвячено статтю [161]. За допомогою відомого перетворення Гопфа–Коула (E. Hopf, J.D. Cole) рівняння Бюргерса перетворено до одновимірного рівняння теплопровідності, для розв'язання якого застосовано схему Кренка–Ніколсон. В [250] міститься огляд публікацій, присвячених наближеному розв'язуванню рівняння Бюргерса та запропоновано метод типу Кренка–Ніколсон, у якому для частини рівняння  $\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  використано класичну дискретизацію, а для  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  – спеціального вигляду дискретизацію за допомогою центральних різниць.

При  $\mu = 0$  рівняння Бюргерса перетворюється на квазілінійне рівняння переносу (рівняння Гопфа) – найпростіше рівняння, що описує розривні течії або течії з ударними хвилями. В [199] для задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad u(0, t) = \mu_1, \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

побудовано різницеву схему

$$y_t + u\hat{y}_{\bar{x}} = 0,$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1, \quad y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = \overline{0, N},$$

для якої доведено оцінку  $\rho$ -стійкості відносно початкових даних та апріорну оцінку швидкості збіжності

$$\|z^{n+1}\|_C \leq M(h + \tau).$$

Аналогічно досліджено стійкість розв'язку диференціальної задачі для квазілінійного рівняння переносу загального вигляду  $\frac{\partial u}{\partial t} + f(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

В біології, екології, фізіології, теорії горіння, теорії кристалізації, фізиці плазми та інших областях важливе значення має рівняння Фішера–Колмогорова–Петровського–Піскунова (Фішера–КПП) – найпростіше напівлінійне параболічне рівняння [56, 28]. В [199] для початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1-u), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T] \quad (\lambda = \text{const}),$$

$$u(0, t) = \mu_1, \quad u(l, t) = \mu_2, \quad t \in [0, T], \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l],$$

побудовано лінеаризовану різницеву схему

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}} + \lambda y(1 - \hat{y}),$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1, \quad \hat{y}_N = \mu_2, \quad y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = \overline{0, N},$$

та доведено її безумовну стійкість відносно вхідних даних.

Така ж методика із застосуванням принципу максимуму використана для аналізу стійкості різницевої схеми

$$y_t = u\hat{y}_{\bar{x}},$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1, \quad \hat{y}_N = \mu_2, \quad y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = \overline{0, N},$$

яка апроксимує початково-крайову задачу для найпростішого квазілінійного параболічного рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T] \quad (\lambda = \text{const}),$$

$$u(0, t) = \mu_1, \quad u(l, t) = \mu_2, \quad t \in [0, T], \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l].$$



Еволюцію хвиль малої, але скінченної амплітуди у дисперсійних середовищах часто моделюють за допомогою рівняння Кортевега–де Вріза (рівняння КдВ). Уперше для його чисельного розв'язання в [257] була використана явна тришарова різницева схема з порядком апроксимації  $O(h^2 + \tau^2)$ , а пізніше – різницеві схеми з покращеними властивостями. В роботі [65] для рівняння КдВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

в прямокутнику  $\{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  розглянуто задачу Коші з періодичними умовами щодо  $x$ :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u(x, t) = u(x + l, t), \quad t \geq 0.$$

Для цієї задачі побудовано явні та неявні різницеві схеми та досліджено їх консервативність і стійкість з точки зору виконання для дискретних розв'язків сіткових аналогів законів збереження.

Як уже зазначено вище, в задачах гідродинаміки, тепло- і масопереносу та інших областях важливу роль відіграють монотонні різницеві схеми (тобто схеми, для яких виконується дискретний принцип максимуму), оскільки вони дозволяють одержувати наближений розв'язок без осциляцій навіть у випадку негладких вхідних даних. В [36] інтегроінтерполяційним методом (методом балансу) побудовано монотонні різницеві схеми на довільних неструктурованих сітках (на основі триангуляції Делоне) для розв'язування стаціонарних крайових задач для рівняння конвекції–дифузії з дивергентними і недивергентними конвективними доданками.

У статті [200] для квазілінійного рівняння конвекції–дифузії побудовано монотонні різницеві схеми 2-го порядку точності на рівномірних і нерівномірних сітках та доведено апіорні оцінки точності в рівномірній дискретній нормі. Базуючись на принципі максимуму, автори доводять двосторонні оцінки для дискретних розв'язків без яких-небудь припущень про знаковизначеність вхідних даних та наводять числові розрахунки, які підтверджують теоретичні результати.

Безумовно монотонну (без обмежень на кроки  $\tau$  і  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , але з умовою на відношення  $h_1/h_2$  кроків просторової сітки, вираженою через вхідні дані) суто неявну різницеву схему для початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in G = (0, l_1) \times (0, l_2), \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t),$$

де оператор  $Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(u) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right)$  задовольняє умову еліптичності

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(u) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \quad \forall u \in \bar{D}_u \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\bar{D}_u = \{u(x, t) : m_1 \leq u(x, t) \leq m_2, (x, t) \in \bar{G} \times [0, T] \quad (m_1, m_2 - \text{const})\},$$

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0 - \text{const},$$

досліджено в [78]. За допомогою принципу максимуму для дискретного розв'язку  $y(x, t)$  одержано двосторонні нерівності, які повністю узгоджуються з аналогічними оцінками розв'язку диференціальної задачі, та апіорну оцінку в нормі  $C$ , а у випадку  $k_{\alpha\beta}(u) \leq 0$ ,  $u \in \bar{D}_u$ ,  $\alpha \neq \beta$ , доведено оцінку точності схеми порядку  $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$  в сітковій нормі  $L_2$ .

Чимало публікацій присвячено різницеvim схемам розв'язування задач для еліптичних та параболічних рівнянь з динамічними умовами спряження на межі контакту і/або динамічними крайовими умовами. Такі задачі моделюють теплові процеси в неоднорідних середовищах та розглядаються в теорії тепло- і масопереносу, гідрогеології та інших областях [128]. Так, у [34] побудовано однорідні різницеві схеми для одновимірного параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad x \in (0, \xi) \cup (\xi, 1), \quad 0 < t < T \quad (0 < k_0 \leq k(x), \quad 0 < \xi < 1),$$

з крайовими та початковими умовами

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, \xi) \cup (\xi, 1),$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} [u]_{x=\xi} &\stackrel{\text{def}}{=} u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\xi} &= K \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = 0, \quad 0 < t < T \quad (K = \text{const} > 0) \end{aligned}$$

(які пов'язані з наявністю в теплопровідному середовищі зосереджених теплоємностей). Для цієї задачі сформульовано класичну та узагальнену постановки, побудовано однорідну різницеву схему з вагами, для якої одержано умови стійкості, які базуються на спектральних задачах з розривними коефіцієнтами та спектральним параметром в умові спряження, доведено оцінку похибки

$$\|y - u\|_C \leq M(\tau^{m_\sigma} + h^2), \quad m_\sigma = \begin{cases} 2, & \text{якщо } \sigma = 1/2, \\ 1, & \text{якщо } \sigma \neq 1/2, \end{cases}$$

та зазначено, як узагальнити одержані результати на випадок динамічних крайових умов

$$\begin{aligned} K_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - k(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \varphi_0(t), \quad 0 < t < T \quad (K_0 = \text{const} > 0), \\ K_1 \frac{\partial u(1,t)}{\partial t} + k(1) \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= \varphi_1(t), \quad 0 < t < T \quad (K_1 = \text{const} > 0), \end{aligned}$$

які моделюють теплопровідність у тілі, що перебуває в контакті з флюїдом, а також процеси в напівпровідникових приладах.

В [158] розглянуто слабко параболічну задачу (для еліптичного рівняння з оператором Лапласа у двох суміжних областях та нестационарною умовою спряження на межі контакту)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega^- \cup \Omega^+, \quad t \in (0, T), \\ [u]_S &\equiv u(x_1, x_2 + 0, t) - u(x_1, x_2 - 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \right]_S + g(x,t), \quad x \in S, \quad t \in (0, T), \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad u(x,t) = u_0(x), \quad x \in S, \\ \Omega &= (0, l_1) \times (0, l_2), \quad x_2^0 \in (0, l_2), \quad S = (0, l_1) \times x_2^0, \\ \Omega^- &= (0, l_1) \times (0, x_2^0), \quad \Omega^+ = (0, l_1) \times (x_2^0, l_2), \end{aligned}$$

для якої доведено існування узагальненого розв'язку з різними припущеннями про гладкість вхідних даних, побудовано різницеву схему з усередненням правої

частини та одержано в спеціальних дискретних соболевських нормах апріорну оцінку точності, яка майже (з точністю до логарифмічного множника) узгоджена з гладкістю розв'язку вихідної задачі.

Ці дослідження продовжено в [42], де побудовано різницеву схему для двовимірного рівняння Пуассона в прямокутнику з нестационарною крайовою умовою на частині межі та доведено оцінку швидкості збіжності, майже (з логарифмічним множником) узгоджену з розв'язком диференціальної задачі.

В математичному моделюванні деяких процесів екології, фізики та техніки, коли неможливо задати точні значення шуканого розв'язку на межі області, виникають задачі з нелокальними крайовими умовами. У статті [31] для еліптичного рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами в одиничному квадраті  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_k < 1, k = 1, 2\}$  з межею  $\Gamma = \partial\Omega$  і правою стороною  $\Gamma_* = \{(1, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$  розглянуто нелокальну крайову задачу типу Біцадзе–Самарського:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a_0 u = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_*, \quad u(1, x_2) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k, x_2), \quad 0 < x_2 < 1,$$

де  $\alpha_k, k = \overline{1, m}$ , – довільні дійсні числа,  $\xi_k \in (0, 1), k = \overline{0, m+1}$ , – фіксовані точки такі, що  $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m < \xi_{m+1} = 1$ ,

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} t_i t_j \geq c(t_1^2 + t_2^2), \quad c > 0, \quad a_{ij}, a_0 - \text{const}, \quad a_0 \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \sqrt{\xi_k} < 1.$$

а функція  $f(x)$  забезпечує однозначну розв'язність цієї задачі в класі Соболева–Слободецького  $W_2^s(\Omega), 1 < s \leq 4$ . На квадраті  $\Omega$  введено квадратну сітку  $\bar{\omega}$  з кроком  $h = 1/n$  в обох напрямках, позначено  $\xi_k = (n_k + \theta_k)h, 0 \leq \theta_k < 1, k = \overline{1, m}$ , де  $n_k$  – невід'ємні цілі числа такі, що  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m < 1$ , та використано оператори усереднення  $T_1, T_2$  [90, с. 58]. Вихідну задачу апроксимовано різницевою схемою

$$L_h y \equiv \sum_{i=1}^2 \alpha_{ii} y_{\bar{x}_i x_i} + a_{12} (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) - a_0 y = T_1 T_2(x), \quad x \in \omega,$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma_0 = \Gamma_0 \cap \bar{\omega},$$

$$y(1, x_2) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \{ (1 - \theta_k) y(n_k h, x_2) + \theta_k y((n_k + 1)h, x_2) \}, \quad x_2 = jh, \quad j = \overline{1, n-1},$$

для швидкості збіжності якої доведено оцінку

$$\|y - u\|_{W_2^k(\omega, r)} \leq Ch^{s-k} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad s \in (k, k+2], \quad k = 1, 2,$$

$C$  – не залежна від  $h$  і  $u(x)$  стала,  $r = 1 - x_1$ .

Різницеву схему для рівняння Пуассона з умовами Діріхле та Неймана на парі суміжних сторін прямокутника та інтегральними умовами

$$\int_0^{l_k} u(x_1, x_2) dx_k = 0, \quad 0 < x_{3-k} < l_{3-k} \quad k = 1, 2, \quad \text{на двох інших сторонах побудовано в}$$

[105]. Якщо  $u(x) \in W_2^s, 1 < s \leq 3$ , то різницева схема збігається в енергетичній нормі зі швидкістю  $O(|h|^{s-1})$ . В [106] аналогічну апріорну оцінку доведено для різницевої схеми, яка апроксимує крайову задачу для рівняння Пуассона в прямокутнику з цілком нелокальними крайовими умовами інтегрального типу на внутрішній смузі, яка прилягає зсередини до сторін прямокутника.

Двошарову різницеву схему для одновимірного рівняння теплопровідності з нелокальною початковою умовою досліджено в [198].

Ще одним важливим питанням теорії та практики МСР є вплив крайових і початкових умов на точність наближеного розв'язку. Оскільки, наприклад, сітковий розв'язок крайової задачі для еліптичного рівняння в канонічній області задовольняє умову Діріхле точно, то слід очікувати, що точність різницевої схеми буде вищою поблизу межі області, ніж далі від межі. Інакше кажучи, похибка методу залежить не лише від параметра дискретизації (кроку сітки), а й від відстані до межових точок області. Урахування цього впливу має не тільки важливе теоретичне, а й практичне значення, оскільки, наприклад, надає змогу брати поблизу межі області більший крок сітки.

Кількісною характеристикою крайового ефекту є оцінки похибки з ваговою функцією, яка характеризує відстань точки до межі області, в певних сіткових нормах. Ідея таких оцінок уперше анонсована В. Л. Макаровим в [188]. Зокрема, для задачі

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega,$$

$$v \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v > 0, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad q(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad q(x) \geq 0,$$

де  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$  – одиничний квадрат, побудовано різницеву схему

$$Ay \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left[ \left( a_{ij}^{-0,5i} y_{\bar{x}_j} \right)_{x_i} + \left( a_{ij}^{+0,5i} y_{x_j} \right)_{\bar{x}_i} \right] + qy = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де  $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ ,  $\omega_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha = 1/N_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $\gamma$  – межа сіткової множини  $\omega$ . За допомогою другої фундаментальної нерівності для еліптичних операторів в  $L_2$ -нормі, основної леми [90, с. 54], зображення різницевої  $\delta$ -функції через функцію Гевісайда та леми Брембла–Гільберта доведено такий результат.

**Теорема** ([188, Theorem 4]). *Нехай  $\varphi(x), f(x), a_{ij}(x) \in W_2^3(\Omega)$ ,  $u(x) \in W_2^4(\Omega)$ . Тоді існує  $h_0 > 0$  таке, що для всіх  $h \in (0, h_0]$  точність різницевої схеми характеризується оцінкою*

$$\left\| \rho^{-1/2}(x) [y(x) - u(x)] \right\|_{C(\omega)} \leq M h^2 \|u\|_{W_2^4(\Omega)},$$

де  $\rho(x) = \min \{x_1 x_2, x_1(1-x_2), (1-x_1)x_2, (1-x_1)(1-x_2)\}$ .

Ідеї [188] використано і розвинуто в низці робіт, присвячених як стаціонарним, так і нестаціонарним рівнянням. Наприклад, точність скінченно-різницевої апроксимації

$$Ay \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) y_{\bar{x}_i \bar{x}_j} = F(x), \quad x \in \omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

першої крайової задачі

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f_0(x, u) - f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1)^2, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$f(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$|f_0(x, u) - f_0(x, v)| \leq L |u - v|, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

для двовимірного квазілінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами  $a_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$ , які задовольняють згадану вище умову еліптичності, з урахуванням ефекту від крайової умови Діріхле досліджено в [191]. Точніше, якщо  $u(x) \in W_2^4(\Omega)$  і  $L^2 \mu^2 / (4\nu^4) < 1$ , то швидкість збіжності методу в сітковій нормі  $L_2(\omega)$  характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \rho^{-1/2}(x) [y(x) - u(x)] \right\| \leq M |h|^2 |u|_{W_2^4(\Omega)}, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

де  $|u|_{W_2^4(\Omega)}$  – півнорма в  $W_2^4(\Omega)$ ,  $M$  – стала, не залежна від  $u(x)$  і  $h_1, h_2$ .

Питання про вплив як крайових, так і початкових умов на порядок точності традиційних скінченно-різницевих апроксимацій початково-крайової задачі з умовою Діріхле для одно- та двовимірного рівняння теплопровідності розглянуто в [18]. В одновимірному випадку за припущення  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \in L_2((0, 1) \times (0, T))$

доведено апріорні оцінки

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \frac{z(x, \eta)}{x(1-x)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq M(h^2 + \tau), \quad \|z(\cdot, t)\| \leq M \sqrt{t(2 + \ln^2 t)} (h^2 + \tau),$$

які характеризують вплив відповідно крайової та початкової умов, у двовимірному – апріорні оцінки

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{(z(x, \eta))^2}{\rho(x)} \right)^{1/2} \leq M(|h|^2 + \tau), \quad \|z(\cdot, t)\| \leq M \sqrt{t(2 + \ln^2 t)} (|h|^2 + \tau).$$

З доведеного випливає, що точність схеми вища поблизу сторін і дна просторово-часового прямокутника в одновимірному випадку та бічних граней і дна просторово-часового паралелепіпеда – у двовимірному.

Аналогічні результати одержано в [190] для одновимірного квазілінійного параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами та умовою Діріхле:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T),$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1],$$

де

$$|f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)| \leq L |u_1 - u_2|, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Точність різницевої схеми

$$y_t = (y^+)_{\bar{x}x} + Tf(x, t + \tau/2, y^+), \quad (x,t) \in \omega \times \omega_\tau,$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$

де  $y^+ = (\hat{y} + y)/2$ , характеризується ваговими апіорними оцінками

$$\left( \sum_{\eta=0}^{t-\tau} \tau \left( \frac{z^+(x,\eta)}{x(1-x)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq M(\tau^2 + h^2), \quad \|z(\cdot, t)\| \leq M \sqrt{t(2 + \ln^2 t)} (\tau^2 + h^2),$$

які враховують початково-крайовий ефект.

Зазначимо, що в роботах [188, 191, 18] важливим етапом одержання вагових апіорних оцінок, які враховують вплив крайової умови, є доведення нерівності для різницевої функції Гріна за допомогою наступного твердження.

**Лема** (основна лема [90, с. 54]). *Нехай виконуються умови: 1)  $A$  – самоспряжений оператор, що діє в гільбертовому просторі  $H$ ; 2)  $B$  – лінійний оператор, що діє з  $H^*$  в  $H$  ( $H \subseteq H^*$ ); 3) існує обернений оператор  $A^{-1}$ ; 4)  $\|B^*v\|_* \leq \gamma \|Av\| \quad \forall v \in H$ , де  $B^*: H \rightarrow H^*$  – оператор, спряжений до оператора  $B: H^* \rightarrow H$ ;  $(y, v)_*$  і  $\|v\|_* = \sqrt{(v, v)_*}$  – відповідно скалярний добуток і норма в  $H^*$ . Тоді справджується оцінка  $\|A^{-1}Bv\| \leq \gamma \|v\|_* \quad \forall v \in H^*$ .*



Окрім того, для аналізу похибки апроксимації на розв'язках з просторів Соболева використано лему Брембла–Гільберта [108, 109] (див. також [90, с. 29]), яка є окремим випадком апроксимаційної теореми Дюпонта–Скотта [125].

**Лема** (лема Брембла–Гільберта). *Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – відкрита опукла обмежена множина діаметра  $d$  а лінійний функціонал  $l(u)$  обмежений у просторі  $W_2^m(\Omega)$ , де  $0 < m = \bar{m} + \lambda$ ,  $\bar{m}$  – ціле невід'ємне число,  $0 < \lambda \leq 1$ , тобто*

$$|l(u)| \leq M \left\{ \sum_{j=0}^{\bar{m}} d^{2j} |u|_{W_2^j(\Omega)}^2 + d^{2m} |u|_{W_2^m(\Omega)}^2 \right\}^{1/2},$$

*та перетворюється на нуль на многочленах степеня  $\bar{m}$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тоді існує стала  $\bar{M}$ , залежна від  $\Omega$  і не залежна від  $u(x)$ , така, що виконується нерівність*

$$|l(u)| \leq M \bar{M} d^m |u|_{W_2^m(\Omega)}.$$

Близькою до [188, 191, 18, 190] є публікація Є. Ф. Галби [46], в якій досліджено точність різницевої схеми для рівняння Пуассона в одиничному кубі  $\Omega$  з мішаною крайовою умовою (з умовою Неймана на нижній грані  $\Gamma_2$  і умовою Діріхле на інших гранях) та доведено оцінку (неузгодженого типу)

$$|z(x)| \leq C(1 - x_3)h^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \omega \cup \gamma_2,$$

яка демонструє, що точність схеми на одиницю порядку для  $h$  вища поблизу грані  $x_3 = 1$ . Цей результат підсилено в [193], де за допомогою іншої методики (із застосуванням теореми порівняння [86, с. 247]) доведено оцінку

$$|z(x)| \leq Ch^2 v(x) |u|_{C^4(\bar{\Omega})}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \omega \cup \gamma_2,$$

зі сталою  $C$ , яка не залежить від кроку  $h$  і розв'язку  $u(x)$ , та функцією  $v(x)$ , яка є величиною  $O(h)$  поблизу граней куба  $\Omega$ ,  $O\left(h^2 \ln^2 \frac{1}{h}\right)$  – поблизу його ребер і  $O\left(h^2 \ln \frac{1}{h}\right)$  – поблизу вершин.

Окрім того, в [193] для рівняння Пуассона в одиничному квадраті з крайовою умовою Діріхле одержано оцінку

$$|z(x)| \leq Ch^2 v(x) |u|_{W_\infty^4(D)}, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega,$$

де функція  $v(x)$  є величиною  $O(h)$  поблизу сторін квадрата і величиною  $O\left(h^2 \ln \frac{1}{h}\right)$  – поблизу його вершин.

У розд. 2 даної дисертації результати [188, 191, 18, 190] і [193] доповнено новими ваговими оцінками.

Таким чином, тематика робіт, представлених у цьому короткому огляді, та проведення регулярних спеціалізованих конференцій (наприклад, [261, 262]) демонструють, що МСР перебуває в стані активного розвитку та широко використовується для розв'язання актуальних науково-технічних задач, а дослідження початково-крайового ефекту є важливим питанням теорії та практики МСР. Водночас існує порівняно небагато публікацій, присвячених впливу крайової та початкової умов на точність дискретного розв'язку. Ця дисертація у відповідній її частині є певним кроком до заповнення цього пробілу.

## **1.2. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку**

Дослідження впливу крайових і початкових умов становить значний інтерес і для нових класів задач, пов'язаних із застосуванням дробового інтегро-диференціювання. Цей розділ класичного аналізу майже триста років (з 1695 р. і донедавна) був не більше ніж абстрактною математичною теорією (див. історичну довідку і перелік джерел в оглядових працях Б. Росса (B. Ross) [233], Х. Машаду (J. A. T. Machado), В. Кірякової (V. Kiryakova), Ф. Майнарді (F. Mainardi) [184], Х. Машаду (J. A. T. Machado), А. Гальяно (A. M. S. F. Galhano), Х. Трухільйо (J. J. Trujillo) [183]). Однак за декілька останніх десятиліть дробовий аналіз (fractional calculus) знайшов широке застосування в моделюванні багатьох природних і соціальних явищ, про що свідчить величезна кількість публікацій, комп'ютерних програм, конференцій, практикумів (найважливішим подіям у сфері дробового аналізу за період 1974–2011 рр. присвячено огляд [184], див. спеціальні випуски [154, 162], а також довідник [237]).

З'ясувалося, що апарат диференціального та інтегрального числення довільного дійсного (і комплексного) порядку дозволяє якнайкраще будувати адекватні математичні моделі у фізиці і техніці [100, 152, 186, 196, 197, 235, 246, 252, 258, 35, 40], хімії [222], біології [80, 185], фінансовій справі [231] та ін. Прикладом областей, де дробовий аналіз застосовується найбільш інтенсивно завдяки здатності моделювати спадкові явища з довгою пам'яттю, є лінійна в'язкопружність (наприклад, [118, 165, 187]). Ефективним є також використання дробових похідних у моделях аномальної дифузії (наприклад, субдифузії) [216, 218], теорії керування [227, 228], електродинаміки, нелінійної гідроакустики, для обробки багатовимірних сигналів у радіофізиці та радіолокації тощо [227].

У застосуваннях дробового інтегро-диференціювання найчастіше використовують дробові похідні Рімана–Ліувілля, Капуто і Грюнвальда–Летнікова. Нагадаємо деякі означення та зв'язок між ними [227].

**Означення 1.1.** Дробовим інтегралом Рімана–Ліувілля порядку  $\alpha > 0$  від функції  $f(x)$  називається вираз

$${}^{RL}D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

**Означення 1.2.** Вирази

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} {}^{RL}D_x^{-(n-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

$${}^{RL}D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

де  $n = [\alpha] + 1$ , називаються відповідно *лівою та правою дробовими похідними Рімана–Ліувілля порядку  $\alpha > 0$*  від функції  $f(x)$ .

**Означення 1.3.** Вирази

$${}^C D_x^\alpha f(x) = {}^{RL}D_x^{-(n-\alpha)} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

$${}^C D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

де  $n = [\alpha] + 1$ , називаються відповідно *лівою та правою дробовими похідними Капуто порядку  $\alpha > 0$*  від функції  $f(x)$ .

Відомо [92], що за умови  $f \in C^{n-1}[a, x]$  і  $f^{(n)} \in R[a, x]$  виконується рівність

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = {}^C D_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}$$

(формула зв'язку між похідними Капуто і Рімана–Ліувілля).

**Означення 1.4.** Вирази

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{x-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh),$$

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{b-x}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x+jh)$$

називаються відповідно *лівою та правою дробовими похідними Грюнвальда–Летнікова порядку  $\alpha > 0$*  від функції  $f(x)$ .

Відомо [92], що при  $f \in C^n[a, x]$  виконується рівність

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = {}^{RL}D_x^\alpha f(x)$$

(формула зв'язку між похідними Рімана–Ліувілля і Грюнвальда–Летнікова).

Для аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь з дробовими похідними (ДДР) використовують методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Мелліна, метод функції Гріна та ін., однак тільки в небагатьох (деяких лінійних) випадках розв'язки ДДР можна знайти у замкнутій формі [92, 228]. Тому актуальним питанням є розробка ефективних і надійних наближених методів розв'язування ДДР [121, 133]. Оскільки ДДР є узагальненням (в певному сенсі) класичних диференціальних рівнянь (ДР), то для їх розв'язування використовують традиційні напіваналітичні та чисельні методи: МСР [95, 97, 172], МСЕ [259], спектральні методи [112, 173], метод декомпозиції Адомяна (ADM) [153] та ін. (див. посилання в [131]). Відмінність дробової похідної (природа якої інтегральна) від класичної похідної (яка визначається точково, локально) ускладнює побудову і дослідження наближених методів для ДДР,

особливо нелінійних (аналіз результатів щодо збіжності наближених методів для крайових задач з дробовими похідними див. у [159]). Порівняно з класичними ДР зростають також витрати, пов'язані з обчисленнями і збереженням даних. Для зменшення цих витрат застосовують принцип короткої пам'яті в сенсі [227], екстраполяцію Ричардсона, методи високого порядку точності та ін. (див. посилання в [172]).

Важливим етапом побудови ефективного наближеного методу розв'язування ДДР є дискретизація дробової похідної. Найуживаніші апроксимації дробових похідних умовно поділяються на дві групи. До першої групи належать квадратурні формули типу згортки, до другої – схеми типу L1 і L2. У кожній групі є свої переваги і недоліки (див. обговорення та посилання в [155]). Так, квадратурні формули є гнучкими, зручними для аналізу, мають хороші властивості щодо стійкості, але застосовні переважно на рівномірних сітках. Сильними рисами методів типу L1 і L2 є гнучкість, легка реалізація та можливість узагальнення на нерівномірні сітки, а недоліком – складний аналіз та перший порядок точності (у випадку прямого застосування без належної корекції). Розглянемо ці апроксимації ближче.

Квадратурні формули типу згортки уперше запропоновані, а пізніше розвинуті Крістіаном Любіхом (С. Lubich) у низці публікацій [177–181] для дискретизації інтегральних рівнянь Вольтерри. Так, для наближення правої та лівої похідних Рімана–Ліувілля використовують окремі випадки цих формул, які відомі в літературі під назвою відповідно правої та лівої *стандартних формул Грюнвальда–Летнікова*:

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x_k) \approx \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x_{k-j}),$$

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x_k) \approx \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x_{k+j}),$$

де  $\tau = (b-a)/N$ ,  $x_k = \tau k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , і які мають перший порядок точності для будь-якого  $\alpha > 0$  [227]. Відомо [214], що при  $1 < \alpha < 2$  побудовані на основі цих формул схеми є нестійкими. Для усунення цього недоліку застосовують *зміщені*

праву та ліву формули Грюнвальда–Летнікова, які у випадку зсуву на один крок задаються формулами

$$RL_a D_x^\alpha f(x_k) \approx \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x_{k-j+1}),$$

$$RL_a D_x^\alpha f(x_k) \approx \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x_{k+j-1})$$

і теж мають перший порядок точності. Питанням корекції квадратурних формул та дослідженню їх точності присвячено недавню публікацію [156] (див. також [155]).

Схема L1 [222, 167] призначена для апроксимації похідної Капуто порядку  $\alpha \in (0,1)$ , базується на кусково-поліноміальній інтерполяції і, наприклад, для лівої похідної будується так:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha u(t_k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t_k} (t_k - s)^{-\alpha} u'(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_k - s)^{\alpha} u'(s) ds \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_k - s)^{-\alpha} ds = \\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ (k-j)^{1-\alpha} - (k-j-1)^{1-\alpha} \right] \left[ u(t_{j+1}) - u(t_j) \right] = \\ &= \tau^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \left[ u(t_{k-j}) - u(t_{k-j-1}) \right] = \\ &= \tau^{-\alpha} \left[ b_0 u(t_k) - b_{k-1} u(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j-1}) u(t_{k-j}) \right] =: L_1^k(u). \end{aligned}$$

В [167, 242, 173] доведено, що при  $t_0 = 0$  і  $u \in C^2[0, T]$  точність такого наближення характеризується оцінкою

$$\left| {}^C D_t^\alpha u(t_k) - L_1^k(u) \right| \leq c \tau^{2-\alpha},$$

де стала  $c$  не залежить від кроку  $\tau$ , але залежить від  $\alpha$  і  $\|u\|_{C^2[0, T]}$ . Як зазначено

в [155], з часу своєї першої появи схема L1 широко використовується на практиці та є однією з найбільш успішних і ефективних схем для чисельного розв'язування ДДР. Нові результати щодо її точності обговорюються в [155]. Аналогічно [222,

182] одержують схему L2 для апроксимації правої і лівої похідних Капуто порядку  $\alpha \in (1,2)$ .

Розглянемо детальніше деякі приклади дискретизації задачі Коші та початково-крайових задач для ДДР.

У декількох публікаціях 1999 р. та пізніше в [121, 120] Кай Дітхельм (K. Diethelm) і Алан Д. Фрід (A. D. Freed) запропонувати та дослідили метод Адамса–Бешфорта–Моултона (the Adams–Bashforth–Moulton method) типу предиктор-коректор для задачі Коші

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in (0, T], \\ u^{(j)}(0) &= u_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . Звівши цю задачу до еквівалентного їй рівняння Вольтерри

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} u_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds,$$

та поклавши в ньому  $t = t_{k+1}$ , інтеграл подають у вигляді суми

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds,$$

та апроксимують за допомогою формул

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds &\approx f(t_j, u_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} ds, \\ &\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \approx \\ &\approx f(t_j, u_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} \frac{t_{j+1} - s}{t_{j+1} - t_j} ds + f(t_{j+1}, u_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} \frac{s - t_j}{t_{j+1} - t_j} ds. \end{aligned}$$

Так одержують схему

$$\begin{cases} y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j), \\ y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right], \end{cases}$$

$$\text{де } b_{j,k+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} ds = \frac{\tau^\alpha}{\alpha} [(k-j+1)^\alpha - (k-j)^\alpha], \quad j=0, \dots, k;$$

$$a_{j,k+1} = \frac{\tau^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j=0, \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & j=1, \dots, k, \\ 1, & j=k+1, \end{cases}$$

де  $y_j$  – апроксимація для  $u(t_j)$ ,  $t_j = j\tau$ ,  $y_{k+1}^p$  – предиктор,  $y_{k+1}$  – коректор.

Точність методу характеризується оцінками [171]

$$\max_{t_j \in [\varepsilon, T]} |u(t_j) - y_j| = O(\tau^{1-\alpha}), \quad \varepsilon > 0; \quad \max_{t_j \in [0, T]} |u(t_j) - y_j| = O(1).$$

Будують також предиктор на основі кусково-квадратичної інтерполяції (див. посилання в [172]), що дозволяє одержати метод підвищеного порядку точності. Зазначимо, що при  $\alpha=1$  розглянутий метод перетворюється на класичний метод типу предиктор-коректор для розв'язування ЗДР першого порядку.

**Зауваження 1.1.** Якщо функція  $f(t, u)$  неперервна в деякому прямокутнику  $D = \{(t, u) : 0 \leq t \leq T, |u - u_0| \leq U\}$  і задовольняє умову Ліпшица

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall (t, u_1), (t, u_2) \in D,$$

то задача (1.1) має єдиний розв'язок [119, 92, 165].

**Зауваження 1.2.** При  $0 < \alpha \leq 1$  і  $f(t, u) = \lambda u + g(t)$ , де  $\lambda \in \mathbb{R}$ , задача Коші

$${}^C D_t^\alpha u(t) = \lambda u(t) + g(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

є однозначно розв'язною і її розв'язок  $u(t)$  має вигляд

$$u(t) = u_0 E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds, \quad t > 0,$$



де  $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$  – функція Міттаг-Леффлера [227]. Зокрема, при

$\alpha = 1, g(t) \equiv 0$  одержуємо  $u(t) = u_0 E_{1,1}(\lambda t) = u_0 e^{\lambda t}$ .

Велика кількість публікацій присвячена наближеним методам розв'язування ДДР з частинними похідними. Такі рівняння умовно поділяють на три типи: з дробовими похідними по часовій, просторовій та одночасно обох змінних. Розглянемо спочатку приклади дискретизації одновимірних рівнянь.

Одновимірне рівняння з дробовою похідною по часовій змінній  $t$  у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = {}^{RL}D_t^{1-\gamma} \left( k_\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \quad (1.2)$$

де  $k_\gamma > 0, 0 < \gamma < 1$ , або в еквівалентній формі

$${}^{RL}D_t^\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = k_\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \quad (1.3)$$

є поширеною моделлю аномальної дифузії (субдифузії) і розглядається Р. Метцлером і Дж. Клафтером в [217]. Зокрема, при  $k_\gamma = 1, f(x, t) \equiv 0$  для задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= {}^{RL}D_t^{1-\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \end{aligned}$$

Т. Ленглендс (Т. А. М. Langlands) і Б. Генрі (В. І. Henry) [167] (див. також недавню публікацію [223]) із застосуванням L1 схеми для апроксимації дробової похідної побудували неявний метод та експериментально дослідили його точність і стійкість (теоретичне обґрунтування абсолютної стійкості запропоновано в [172]).

У статті [114] для задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= {}^{RL}D_t^{1-\gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T], \\ u(0, t) &= \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad u(x, 0) = w(x), \quad x \in [0, L], \end{aligned} \quad (1.4)$$

де  $0 < \gamma \leq 1$ , з використанням стандартної формули Грюнвальда–Летнікова побудовано неявну схему

$$y_{t,i}^k = \tau^{\gamma-1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{1-\gamma}{j} y_{xx,i}^{k-j} + f_i^k, \quad k=1, \dots, M, \quad i=1, \dots, N-1,$$

$$y_0^k = \varphi(t_k), \quad y_N^k = \psi(t_k), \quad k=1, \dots, M, \quad y_i^0 = w(x_i), \quad i=1, \dots, N,$$

$$x_i = ih, \quad i=0, \dots, N; \quad t_k = k\tau, \quad k=0, \dots, M; \quad h = L/N, \quad \tau = T/M.$$

За допомогою перетворення Фур'є доведено, що цей метод є абсолютно стійким і має точність  $O(\tau + h^2)$ .

Чисельні методи розв'язування рівняння (1.2) можна поширити і на інші типи рівнянь, одним із яких є рівняння реакції–субдифузії. Наприклад, для задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}^{RL}D_t^{1-\gamma} \left[ k_\gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - ku(x,t) \right] + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T],$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(L,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = w(x), \quad x \in [0,L],$$

де  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $k_\gamma > 0$ ,  $k > 0$ , в [113] побудовано неявну та явну схеми, перша з яких має вигляд

$$y_{t,i}^k = k_\gamma \tau^{\gamma-1} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{1-\lambda}{m} y_{xx,i}^{k-m} - k \tau^{\gamma-1} \sum_{j=0}^k (-1)^m \binom{1-\lambda}{m} y_i^{k-m},$$

$$i=1, \dots, N-1, \quad k=1, \dots, M,$$

$$y_0^k = \varphi(t_k), \quad y_N^k = \psi(t_k), \quad k=1, \dots, M, \quad y_i^0 = w(x_i), \quad i=1, \dots, N.$$

Застосовуючи метод Фур'є, автори довели, що обидва методи мають точність  $O(\tau + h^2)$ , неявний метод є абсолютно стійким, а явний – умовно стійким при  $k_\gamma \tau^\gamma h^{-2} + k \tau^\gamma \leq 1$ .

В [260] запропоновано неявний метод розв'язування рівняння субдифузії типу (1.2) з початково-крайовими умовами (1.4). Енергетичним методом доведено його абсолютну стійкість та збіжність зі швидкістю  $O(\tau + h^2)$  і  $O(\tau^2 + h^2)$  у випадку кусково-сталого і кусково-лінійної інтерполяції відповідно. Цей метод використаний для апроксимації ДДР у низці робіт: в [175] – для апроксимації дробового кабельного рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}^{RL}D_t^{1-\gamma_1} \left( k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) - \mu^2 {}^{RL}D_t^{1-\gamma_2} u(x,t) + f(x,t) \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)),$$

яке моделює динаміку нейронів, у [254] – для апроксимації дробового рівняння Фоккера–Планка

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = {}^{RL}D_t^{1-\gamma_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( d(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + f(x,t) \quad (0 < \gamma_1 \leq 1).$$

ДДР з дробовою похідною по  $t$  у формі (1.3) розглянуто в [242]. Точніше, початково-крайову задачу для дробового дифузійно-хвильового рівняння ( $1 < \gamma < 2$ ) (див. також [238])

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} {}^C D_t^\alpha u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{K} f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

де  $c$  і  $K$  – додатні сталі,  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , апроксимовано стійкою різницевою схемою, точність якої в  $C$ -метриці є величиною  $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ .

Збіжність різницевих схем для рівняння дифузії дробового порядку вивчалася також у роботах В. Шогенова, С. Кумикова, М. Шханукова-Лафішева [97], А. Бечелової [32], Ф. Таукенової і М. Шханукова-Лафішева [95] та інших.

Зазначимо, що важливим результатам (розв'язність, єдиність розв'язку, обернені задачі, поведінка розв'язку при  $t \rightarrow +\infty$  тощо) для рівняння субдифузії ( $0 < \alpha < 1$ ) вигляду

$${}^C D_t^\alpha u(x,t) = (Lu)(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T),$$

присвячено оглядову статтю [220]. Тут  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – обмежена область з гладкою межею  $\partial\Omega$ ,  $L$  – симетричний рівномірно еліптичний оператор:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - c(x)u(x), \quad x \in \Omega, \\ a_{ij}(x) &= a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Зокрема, А. Н. Кочубей в [57, 58] застосував теорію півгруп у банахових просторах, а в [126] С. Д. Ейдельман і А. Н. Кочубей побудували фундаментальний розв'язок в  $\mathbb{R}^n$  та довели принцип максимуму для задачі Коші.

Прикладом ДДР з дробовою похідною по просторовій змінній  $x$  є рівняння адвекції–дисперсії вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -v(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + d(x) {}^{RL}D_x^\alpha u(x,t) + f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0,$$

де  $v(x) \geq 0$ ,  $d(x) \geq 0$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ . В [214] для такого рівняння та початково-крайових умов

$$u(a,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} u(b,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b,$$

досліджено явну ( $\sigma = 0$ ), неявну ( $\sigma = 1$ ) та симетричну ( $\sigma = 1/2$ ) схеми з дискретизацією дробової похідної за допомогою стандартної формули Грюнвальда–Летнікова та доведено, що всі три методи є нестійкими. Якщо ж для дискретизації дробової похідної використано зміщену формулу Грюнвальда–Летнікова, то неявна і симетрична схеми є абсолютно стійкими. Пізніше в публікації [244] у випадку  $v(x) \equiv 0$  та крайових умов Діріхле  $u(a,t) = 0$ ,  $u(b,t) = \varphi(t)$ ,  $t \geq 0$ , для симетричної схеми Кренка–Ніколсон ( $\sigma = 1/2$ ) з дискретизацією дробової похідної за зміщеними формулами Грюнвальда–Летнікова доведено абсолютну стійкість і збіжність зі швидкістю  $O(\tau^2 + h)$  та одержано асимптотичний розклад похибки, який дозволяє побудувати схему порядку  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Початково-крайову задачу для ДДР з дробовими похідними одночасно по часовій і просторовій змінних

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) &= {}^{RL}D_x^\beta u(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

де  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $1 < \beta \leq 2$ , розглянуто в [176] (див. також [149, 189]). Для дискретизації похідної Рімана–Ліувілля використано зміщену формулу

Грюнвальда–Летнікова, а похідної Капуто – схему L1. Доведено, що побудована схема є абсолютно стійкою та збіжною зі швидкістю  $O(\tau + h)$ .

Значну кількість публікацій присвячено наближеним методам розв'язування багатовимірних ДДР. Наприклад, різні аспекти дискретизації багатовимірного рівняння субдифузії на прикладі модельної задачі з оператором Лапласа

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) &= \Delta u(x, y) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) &= f(x), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &= v(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

розглянуто в огляді [155] та цитованих там джерелах.

Відомо, що реалізація чисельних методів для багатовимірних ДДР є обчислювально затратною процедурою, оскільки потребує розв'язання системи лінійних рівнянь з великими щільно заповненими матрицями. З метою оптимізації обчислень в [243] для двовимірного рівняння супердифузії запропоновано підхід, який об'єднує метод ADI (the alternating directions implicit method), схему Кренка–Ніколсон та екстраполяцію Ричардсона.

Окрім розв'язання згаданих типів рівнянь, актуальним питанням теорії та практики чисельного аналізу є розробка методів для нелінійних ДДР, ДДР зі змінним порядком похідної, ДДР в необмежених областях, обернених задач, задач на власні значення, задач оптимального керування тощо [154].

Зазначимо також, що в теорії крайових задач важливе значення має задача Діріхле для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовими похідними типу [92, с. 605]:

$$\begin{aligned} Lu \equiv u'' + a_0(x)u'(x) + \sum_{k=1}^m a_k(x)D^{\alpha_k}(\omega_k(x)u(x)) + a_0(x)u(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned}$$

де  $D^{\alpha_k} \equiv {}^R L_0 D_x^{\alpha_k}$  – ліва похідна Рімана – Ліувілля порядку  $\alpha_k \in (0, 1)$ , та задача Діріхле для дробового аналога рівняння Пуассона. До важливих задач фізики і техніки належить також задача Гурса для лінійних і нелінійних рівнянь з мішаними похідними [115, 134, 255], дробовий аналог якої досліджується,

наприклад, у статтях Р. Пшибіхової [81]. В [224] обговорюється різницева схема для задачі Гурса в традиційній постановці. Водночас автору дисертації не відомі публікації, присвячені наближеним методам розв'язування таких задач у випадку дробових похідних. Для усунення цього пробілу в підрозд. 3.1–3.3 побудовано і досліджено сітковий метод для дробових ЗДР 2-го порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами. Аналогічні результати одержано для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною по одній із змінних та дробової задачі Гурса у підрозд. 3.4 та підрозд. 3.5 відповідно.

Таким чином, наближені методи розв'язування ДДР є молодим розділом чисельного аналізу, який активно розвивається і постійно оновлюється. Переважна кількість публікацій присвячена задачам прикладного характеру і порівняно мало таких, де задачі становлять самостійний інтерес для розвитку самої теорії. У деяких публікаціях стійкість і збіжність методу доведено емпірично без належного теоретичного обґрунтування. Огляд джерел свідчить про те, що вплив початкових і крайових умов на точність наближеного розв'язку раніше не досліджувався. Дана дисертація є кроком до розв'язання цієї проблеми.

### **1.3. Метод перетворення Келі наближеного розв'язування абстрактних диференціальних рівнянь**

Математичні моделі багатьох процесів, які досліджуються в науці та техніці, можна записати у вигляді абстрактних диференціальних задач у банаховому просторі  $E$  (гільбертовому просторі  $H$ ): задачі Коші для диференціальних рівнянь 1-го і 2-го порядків

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= f(t), \quad x \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) &= f(t), \quad x \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{aligned} \tag{1.6}$$

та крайової задачі

$$\begin{aligned} u''(x) - Au(x) &= -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= u_0, \quad u(1) = u_1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $A$  – щільно заданий замкнений лінійний оператор з областю визначення  $D(A) \subset E$  (щільно заданий самоспряжений додатно визначений оператор з областю визначення  $D(A) \subset H$ ), і  $u(\cdot)$  і  $f(\cdot)$  – відповідно шукана і задана функції зі значеннями в  $E$  (або  $H$ ),  $u_0, u_1$  – задані вектори з  $E$  (або  $H$ ).

Так, у випадку гільбертового простору  $H = L_2(0,1) = \left\{ u(x) : \int_0^1 u^2(x) dx < \infty \right\}$  і

оператора  $Au(x) = -u''(x)$ ,  $D(A) = H^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H^1}(0,1)$ , задачі Коші (1.6) і (1.7) перетворюються на початково-крайові задачі для параболічного і гіперболічного рівнянь відповідно:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in (0,1), \quad x \in (0,T], \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) &= u_0, \quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_{tt}(x,t) &= u''_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in (0,1), \quad x \in (0,T], \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) &= u_0, \quad u'_t(x,0) = u_1, \quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

а для гільбертового простору  $H = L_2(0,1) = \left\{ u(x) : \int_0^1 u^2(x) dx < \infty \right\}$  і оператора

$$Au(y) = -u''(y), \quad D(A) = H^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H^1}(0,1),$$

крайова задача (1.7) перетворюється на задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x) + u''_{yy} &= -f(x), \quad x \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Абстрактним диференціальним рівнянням і методам їх розв'язування присвячено чимало робіт, багато з яких стали класичними. Так, еволюційне рівняння (1.6) досліджено в працях Е. Гілле (E. Hille), Р. С. Філліпса (R. S. Phillips) [96], К. Йосіди (K. Yosida) [256], Т. Като (T. Kato) [55], П. Лакса (P. Lax) і Ріхтмайера (R. Richtmayer) [169], Г. Троттера (H. F. Trotter) [249],

Г. Танабе (H. Tanabe) [245], А. Квартероні (A. Quarteroni) [230], Дж. Саваре (G. Savaré) [236], Г. О. Фатторіні (H. O. Fattorini) [130], Г. Фуджіта (H. Fujita), Н. Саїто (N. Saito), Т. Сузукі (T. Suzuki) [135], К. Кануто та ін. (C. Canuto etc.) [112], А. Рау [225], М. Крейна [53], С. Крейна [60], М. Красносельського [59], П. Соболевського [93], Ю. Далецького [53], М. Соломяка [94], М. Горбачука [49], В. Горбачук [48], В. Городецького [50], М. Городнього [4] О. Кашпіровського, Ю. Митника, В. Василика, В. Рябічева, С. Торби та багатьох інших.

До наближених методів розв'язування абстрактного еволюційного рівняння належать: абстрактний МСР, запропонований П. Лаксом [169] і досліджений, наприклад, у працях Л. Якут [98] і М. Гудовича (Н. Гудович) [52]; метод апроксимації півгруп Г. Троттера [249, 225]; метод декомпозиції за часом (див., напр., [112, 236]).

Важливим етапом побудови наближених методів розв'язування абстрактної задачі Коші (1.6) став *метод перетворення Келі* (A. Cayley), запропонований у працях Д. Арова, І. Гаврилюка, В. Макарова (див., напр., [102]). Основними перевагами методу є декомпозиція еволюційної задачі на рекурентну послідовність стаціонарних задач та автоматична залежність точності від гладкості вхідних даних (а отже, даний метод є методом без насичення точності в сенсі К. Бабенка [29]). Для його побудови застосовано відоме в теорії операторів перетворення Келі оператора  $A$  [96]:  $T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A)$ , де  $I$  – тотожний оператор,  $\gamma$  – будь-яке дійсне або комплексне число.

Так, у статті [101] доведено, що для випадку гільбертового простору  $H$  і обмеженого оператора  $A$  розв'язок  $x(t)$  задачі

$$\begin{aligned} x'(t) + Ax(t) &= 0, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

можна подати у вигляді ряду

$$x(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) [y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}], \tag{1.10}$$



де  $\gamma > 0$ ,  $L_p^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^p \binom{p+\alpha}{p-k} \frac{(-t)^k}{k!}$  – поліноми Лагерра [30], а члени

послідовності  $\{y_{\gamma,p}, p = 0, 1, \dots\}$  задовольняють рекурентне співвідношення

$$y_{\gamma,p+1} = T_{\gamma} y_{\gamma,p} = T_{\gamma}^{p+1} y_{\gamma,0}, \quad p = 0, 1, \dots, \quad y_{\gamma,0} = x_0,$$

і можуть бути знайдені з рекурентної послідовності операторних рівнянь (з однаковим оператором і різними правими частинами)

$$(\gamma I + A) y_{\gamma,p+1} = (\gamma I - A) y_{\gamma,p}, \quad p = 0, 1, \dots, \quad y_{\gamma,0} = x_0.$$

За наближений розв'язок задачі (1.9) береться частинна сума ряду (1.10):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) [y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}]. \quad (1.11)$$

Доведено, що точність такого наближення характеризується оцінкою

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{q_{\gamma}^{N+1}}{1 - q_{\gamma}} \|x_0\| \quad (0 < q_{\gamma} < 1),$$

яка свідчить про експоненціальну швидкість збіжності методу.

Зазначимо, що, окрім зображення розв'язку  $x(t) = T(t)x_0$  у вигляді ряду, формула (1.10) розв'язує важливу задачу теорії півгруп – конструктивне зображення  $C_0$ -півгрупи  $T(t) = e^{-tA}$  через її інфінітезимальний генератор  $A$ :

$$T(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) [T_{\gamma}^p + T_{\gamma}^{p+1}], \quad T_{\gamma} = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A).$$

Одержані в [101] результати узагальнено в [102, 141] на випадок самоспряженого додатно визначеного оператора  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 \geq 0$ , який діє в гільбертовому просторі  $H$  і має щільну в  $H$  область визначення  $D(A)$ . Доведено, що у випадку скінченної гладкості початкового вектора  $x_0 \in D(A^{\sigma})$ ,  $\sigma > 1$ , розв'язок  $x(t)$  задачі (1.9) зображується рядом (1.10), а точність методу перетворення Келі (1.11) характеризується оцінкою

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{C}{N^{\sigma}} \|A^{\sigma} x_0\|, \quad (1.12)$$

де  $C$  – не залежна від  $N$  та  $x_0$  стала.

В [101] зазначено, що оскільки ряд (1.10) є збіжним в  $H$  рівномірно по  $t \geq 0$  при  $x_0 \in D(A^\sigma)$  і у випадку  $\sigma > 0$ , то його сума  $x(t)$  є неперервною функцією при  $t \geq 0$  і може розглядатися як слабкий розв'язок задачі (1.9).

Дослідження праць [102, 141] продовжено у статті В. Л. Макарова, В. Б. Василика і В. Л. Рябічева [74], де у випадку скінченної гладкості початкового вектора  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , одержано інтегральну оцінку точності наближеного розв'язку (1.11)

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \|A^\sigma x_0\| \quad (1.13)$$

і за умов  $\lambda_0 = \gamma \leq 1$ ,  $\frac{2\gamma}{1+\sigma} \leq 1$  доведено її майже (з точністю до логарифма) непокращуваність за порядком  $N$ .

Нехай  $L > 0$ ,  $\mu = (M_n)_{n=0}^\infty$  – неспадна послідовність додатних чисел. Позначимо  $\mathfrak{R}(A, \mu, L)$  множину елементів  $x \in H$  таких, що

$$\|x\|_{\mathfrak{R}(A, \mu, L)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq n < \infty} \frac{\|A^n x\|}{L^n M_n} < \infty.$$

Відомо [49], що  $\mathfrak{R}(A, \mu, L)$  є неперервно вкладеним в  $H$  банаховим простором.

В [74] доведено, що у випадку нескінченної гладкості початкового вектора в сенсі  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$  і дискретного спектра оператора  $A$

$$\gamma(1 + \sqrt{2}) = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$$

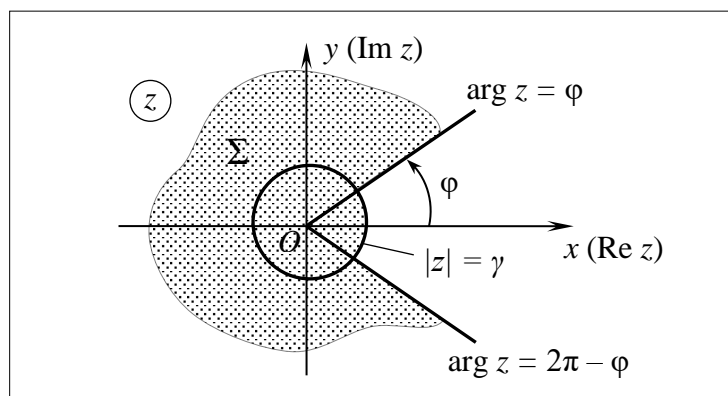
метод перетворення Келі (1.11) є експоненціально збіжним і характеризується оцінкою, яка непокращувана за порядком  $N$ .

Результати [102, 141] узагальнені в [142] на випадок банахового простору  $E$  за умови, що лінійний оператор  $A$  є сильно позитивним [44, 142, 93]. Позначимо  $\rho(A)$  його резольвентну множину і нагадаємо наступне означення.

**Означення 1.5** (рис. 1). Лінійний оператор  $A$  називається *сильно позитивним*, якщо існують  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ,  $\gamma > 0$  і  $L > 0$  такі, що

$$\Sigma \equiv \{z \in \mathbb{C} : \varphi \leq \arg z \leq 2\pi - \varphi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \gamma\} \subset \rho(A),$$

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{L}{1 + |z|} \quad \forall z \in \Sigma.$$

Рис. 1. Множина  $\Sigma$ 

В [142] доведено, що при  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 3/4$ , для розв'язку задачі (1.9) справджується зображення (1.10), а точність наближеного розв'язку (1.11) характеризується оцінкою

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{C}{N^{\sigma-\varepsilon}} \|A^\sigma x_0\|,$$

де  $C$  – не залежна від  $N$  та  $x_0$  стала,  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число.

У статті В. Л. Макарова і І. П. Гаврилюка [143] метод перетворення Келі уперше застосовано до задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку в гільбертовому просторі  $H$ :

$$\begin{aligned} x''(t) + Ax(t) &= 0, \quad t \in (0, T], \\ x(0) &= x_0, \quad x'(0) = 0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

де  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , – самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$ .

Доведено, що за умови скінченної гладкості початкового вектора  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 5/4$ , розв'язок  $x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0$  задачі (1.14) зображується рядом

$$x(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) u_n, \tag{1.15}$$

де  $\delta < 1/2$  – довільна стала,  $L_n^{(0)}(t)$  – поліном Лагерра, а члени послідовності  $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$  задовольняють рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned} (A + (\delta - 1)^2 I) u_{n+1} &= 2(A + \delta(\delta - 1)I) u_n - (A + \delta^2 I) u_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u_0 &= x_0, \quad u_1 = (A + \delta(\delta - 1)I) (A + (\delta - 1)^2 I)^{-1} x_0, \end{aligned}$$

(яке, що важливо зазначити, не містить  $\sqrt{A}$ ).

За наближений розв'язок береться частинна сума ряду (1.15):

$$x_N(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^N \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) u_n. \quad (1.16)$$

Для точності такого наближення в [143] доведено оцінку

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{C}{N^{\sigma-1/4}} \|A^\sigma x_0\|$$

зі сталою  $C$ , не залежною від  $N$  і  $x_0$ .

У статті В. Л. Макарова и В. Л. Рябічева [23] цей результат доповнено інтегральною оцінкою похибки та досліджено її непокращуваність за порядком у випадку скінченної та нескінченної гладкості початкового вектора. Наведемо ці результати у наступних чотирьох твердженнях.

**Твердження 1.1** [23]. *Нехай самоспряжений додатно визначений оператор  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , діє в гільбертовому просторі  $H$  і має щільну в  $H$  область визначення  $D(A)$ . Якщо  $0 < \lambda_0 < 1$ , то для всіх  $\delta \in [0, 1/2)$  таких, що  $\delta(1-\delta) \leq \lambda_0 \leq 1-\delta(1-\delta)$ , і для всіх натуральних  $N \geq 4\sigma(\delta^2 - \delta - 1)/(1-2\delta)$  для швидкості збіжності методу перетворення Келі (1.16) справджується оцінка*

$$z_N^2 \equiv \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-(1-2\delta)t} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \leq \frac{2^{4\sigma-1} \sigma^{2\sigma-1}}{(1-2\delta)^{2\sigma}} \frac{1}{N^{2\sigma}} \|A^\sigma x_0\|^2. \quad (1.17)$$

*Якщо  $\lambda_0 \geq 1$ , то ця оцінка виконується для всіх  $\delta \in [0, 1/2)$  і всіх натуральних  $N \geq 2\sigma(\lambda_0 + \delta^2 - \delta - 1)/(1-2\delta)$ .*

**Твердження 1.2** [23]. *Нехай оператор  $A$  задовольняє умови твердження 1.2 і має дискретний спектр  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_i = i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\delta \in [0, 1/2)$ . Тоді для всіх натуральних  $N$  виконується оцінка*

$$z_N^2 \equiv \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-(1-2\delta)t} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \geq \frac{C}{N^{2\sigma} \ln^{1+\varepsilon}(5N)},$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $C = 9 \exp \left\{ \frac{2\delta - 1}{2(1 + \delta^2)^{1/2}} \right\} \frac{1}{5^{2(1+\sigma)} 2^{4+\varepsilon}}$ , тобто оцінка (1.17) майже (з точністю до логарифма) непокрашувана за порядком.

**Твердження 1.3** [23]. Нехай самоспряжений додатно визначений оператор  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , діє в гільбертовому просторі  $H$  і має щільну в  $H$  область визначення  $D(A)$ . Тоді при  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$  і  $\delta \in [1/4, 1/2)$  метод перетворення Келі (1.16) має експоненціальну швидкість збіжності, яка характеризується оцінкою

$$z_N^2 \leq \frac{1}{N+1} \left( \frac{\lambda_0 + \delta^2}{\lambda_0 + (\delta - 1)^2} \right)^{N+1} \frac{\lambda_0 + (\delta - 1)^2}{1 - 2\delta} \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}^2. \quad (1.18)$$

**Твердження 1.4** [23]. Нехай оператор  $A$  задовольняє умови твердження 1.3 і має дискретний спектр  $\lambda_0 = \delta(1 - \delta) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ;  $\delta \in (0, 1/2)$ ,  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$ . Тоді для всіх  $n \in \mathbb{N}$  справджується нерівність

$$z_N^2 \geq \frac{1}{N+1} \left( \frac{\lambda_0 + \delta^2}{\lambda_0 + (\delta - 1)^2} \right)^{N+1} (x_0, e_0)^2,$$

тобто оцінка (1.18) непокрашувана за порядком.

Зазначимо, що побудові наближених розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою поліномів від оберненого оператора присвячена стаття О. І. Кашпіровського і Ю. В. Митника [5]. Апроксимації розв'язків лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі досліджено М. Ф. Городнім (див., напр., [3, 4]). Прямі та обернені теореми наближених методів розв'язування абстрактної задачі Коші доведено С. М. Торбою [27].

У статті В. Л. Макарова і І. П. Гаврилюка [143] запропоновано і досліджено метод перетворення Келі для абстрактної крайової задачі

$$\begin{aligned} u''(x) - Au(x) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = u_1, \end{aligned} \quad (1.19)$$

у гільбертовому і банаховому просторах.

Доведено [143], що у випадку самоспряженого додатно визначеного щільно заданого в гільбертовому просторі  $H$  оператора  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , і початкового вектор  $u_1 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ , розв'язок  $u(x)$  можна подати у вигляді ряду

$$u(x) = \text{sh}^{-1}(\sqrt{A}) \text{sh}(x\sqrt{A})u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)u_k, \quad (1.20)$$

де  $u_k = (I + A)^{-1} A u_{k-1} = \left[ (I + A)^{-1} A \right]^k u_1$ , а функції  $v_k(x)$  визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x, \xi) v_{k-1}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1], \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$v_0(x) = x, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3!} x(1-x^2),$$

де  $G_0(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x, \end{cases}$  – функція Гріна крайової задачі

$$Lv(x) = -v''(x), \quad x \in (0, 1), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

За наближений розв'язок задачі (1.19) береться відрізок ряду (1.20), точність якого характеризується оцінкою

$$\sup_{x \in [0, 1]} \|u(x) - u_N(x)\| \leq \frac{C}{N^{\sigma-\varepsilon}} \|A^\sigma x_1\|,$$

де  $C$  – не залежна від  $N$  і  $x_1$  стала,  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число.

Із застосуванням інтеграла Данфорда–Коші ці результат узагальнено на випадок, коли  $A$  є сильно позитивним і щільно заданим оператором у банаховому просторі  $E$ .

В [143] виявлено, що поліноми  $v_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , тісно пов'язані з поліномами Майкснера [215] і відіграють таку саму роль, що і поліноми Лагерра у зображенні розв'язків (1.10) і (1.15). Властивостям поліномів Майкснера присвячено публікацію В. Л. Макарова [16].

У даній дисертації продовжено дослідження методу перетворення Келі для конструктивного зображення точних і наближених розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах та доведено нові вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле та гладкість вхідних даних задачі.

## РОЗДІЛ 2

# Точність різницевих схем для стаціонарних і нестаціонарних рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов

### 2.1. Вагова апріорна оцінка точності стандартної різницевої схеми для рівняння Пуассона з мішаною крайовою умовою

**2.1.1. Дискретизація вихідної задачі.** Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \quad x \in D, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_{-1}, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$  – одиничний

квадрат,  $\Gamma = \partial D$  – межа квадрата  $D$ ,  $\Gamma_{-1} = \{x = (0, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$  – ліва сторона,  $f(x)$  – задана функція,  $\sigma = \text{const} \geq 0$ .

Для побудови та дослідження дискретного аналога задачі (2.1) використовуємо традиційні позначення теорії різницевих схем [86].

Введемо сіткові множини:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h, i_\alpha = \overline{1, N-1}, h = 1/N\}, \quad N \geq 2 \text{ – ціле число,} \\ \omega_\alpha^- &= \omega_\alpha \cup \{0\}, \quad \omega_\alpha^+ = \omega_\alpha \cup \{1\}, \quad \bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\}, \\ \omega &= \omega_1 \times \omega_2, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \quad \gamma = \bar{\omega} \setminus \omega; \\ \gamma_{-\alpha} &= \{x_\alpha = 0, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \quad \gamma_{+\alpha} = \{x_\alpha = 1, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

За допомогою операторів точних різницевих схем

$$(T_2 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) v(x_1, \xi_2) d\xi_2, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1};$$

$$(T_1 v)(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) v(\xi_1, x_2) d\xi_1, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) v(\xi_1, x_2) d\xi_1, & x \in \gamma_{-1}, \end{cases}$$

для яких виконуються співвідношення [90]

$$T_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad x \in \omega,$$

$$T_1 1 = 1, \quad T_1 x_1 = \frac{h_1}{3}, \quad T_1 x_2 = x_2, \quad T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{2}{h_1} \left( u_{x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad x \in \gamma_{-1},$$

апроксимуємо задачу (2.1) різницевою схемою

$$\begin{aligned} -\Lambda y(y) &= \varphi(x), \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \\ y(x) &= 0, \quad x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $\varphi(x) = (T_1 T_2 f)(x)$ ,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,

$$\Lambda_1 y(x) = \begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y), & x \in \gamma_{-1}, \end{cases} \quad \Lambda_2 y(x) = \begin{cases} y_{\bar{x}_2 x_2}, & x \in \omega, \\ \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2 x_2}, & x \in \gamma_{-1}. \end{cases}$$

Для похибки  $z(x) = y(x) - u(x)$  маємо задачу

$$\begin{aligned} -\Lambda z(x) &= \psi(x), \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \\ z(x) &= 0, \quad x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $\psi(x)$  – похибка апроксимації:

$$\psi(x) = T_1 T_2 f(x) + \Lambda u(x) = -\Lambda_1 \eta_1(x) - \eta_2 \bar{x}_2 x_2(x), \quad (2.4)$$

$$\eta_1(x) = (T_2 u)(x) - u(x), \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \quad \eta_2(x) = \begin{cases} (T_1 u)(x) - u(x), & x \in \omega, \\ (T_1 u)(x) - u(x) - \frac{h_1}{3} \sigma u(x), & x \in \gamma_{-1}. \end{cases}$$

**2.1.2. Властивості різницевого оператора.** На множині  $H$  сіткових функцій, визначених на  $\bar{\omega}$  і рівних нулю на  $\gamma \setminus \gamma_{-1}$ , задамо скалярний добуток і норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y(x) v(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y(x) v(x),$$



$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 v^2(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Уведемо різницеві оператори

$$A_\alpha, A: H \rightarrow H, \quad A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad A = A_1 + A_2 = -\Lambda,$$

(у разі потреби задані на сітці  $\omega$  функції до визначаються нулем при  $x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}$  і будь-яким значенням – при  $x \in \gamma_{-1}$ ).

Тоді різницеву схему (2.2) можна записати як операторне рівняння

$$Ay = \varphi, \quad y, \varphi \in H, \quad (2.5)$$

а задачу (2.3) – як операторне рівняння  $Az = \psi$ ,  $z, \psi \in H$ .

**Лема 2.1.** *Різницевий оператор  $A$  є симетричним і додатно визначеним в  $H$ .*

Доведення. У просторі  $H$  різницеві оператори  $A_1$  і  $A_2$  є симетричними і додатно визначеними:

$$\begin{aligned} (A_1 y, v) &= \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_1 x_1}) v + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \frac{-2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) v = \\ &= \sum_{x \in \omega_1^+ \times \omega_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1} + \sigma \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y v, \end{aligned}$$

звідки одержуємо

$$\begin{aligned} (A_1 y, y) &= \sum_{x \in \omega_1^+ \times \omega_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1}^2 + \sigma \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y^2 \geq \sum_{x \in \omega_1^+ \times \omega_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1}^2 = \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 y_{\bar{x}_1}^2 \geq \\ &\geq \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \frac{2}{l_1^2} \left( \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 y^2(x) + \frac{h_1}{2} y(0, x_2) \right) = 2 \|y\|^2 \quad (\text{при } l_1 = 1), \end{aligned}$$

аналогічно

$$\begin{aligned} (A_2 y, v) &= \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_2 x_2}) v + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( 1 + \frac{h_1 \sigma}{3} \right) (-y_{\bar{x}_2 x_2}) v = \\ &= \sum_{x \in \omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2} + \left( 1 + \frac{h_1 \sigma}{3} \right) \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1 = 0)}} h_2 y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2}, \end{aligned}$$

звідки маємо

$$(A_2 y, y) = \sum_{x \in \omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2}^2 + \left( 1 + \frac{h_1 \sigma}{3} \right) \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1 = 0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2^+} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \geq \\
&\geq \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \frac{8}{l_2^2} \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 y^2(x) + \frac{h_1}{2} \frac{8}{l_2^2} \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 y^2(0, x_2) = 8 \|y\|^2 \quad (\text{при } l_2 = 1).
\end{aligned}$$

Тоді різницевий оператор  $A$  теж є симетричним і додатно визначеним в  $H$ .  $\square$

З леми 2.1 випливає, що існує обернений оператор  $A^{-1}$ , а отже, задача (2.5) однозначно розв'язна.

Застосовуючи формули підсумовування частинами і  $\varepsilon$ -нерівність при  $\varepsilon = 1/(4\sigma)$ , знайдемо

$$\begin{aligned}
&\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A_1y + A_2y, A_1y + A_2y) = \|A_1y\|^2 + \|A_2y\|^2 + 2(A_1y, A_2y) \geq \\
&\geq 2(A_1y, A_2y) = 2 \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} + 2 \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \frac{2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2 x_2} = \\
&= 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 x_2} y_{x_2} + 2\sigma \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 \geq \\
&\geq 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \left( \frac{1}{4\sigma} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 x_2}^2 + \sigma \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 \right) + \\
&\quad + 2\sigma \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 = \\
&= 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \frac{1}{4\sigma} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 x_2}^2 + 2\sigma \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 \geq \\
&\geq 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 - \frac{h_1}{6} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^- \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 x_2}^2 \geq \left(2 - \frac{1}{6}\right) \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 = \frac{11}{6} \|B_1^* y\|_*^2,
\end{aligned}$$

де  $B_1^* : H \rightarrow H_1^*$ ,  $B_1^* y = -y_{x_1 x_2}$ ,  $x \in \omega_1^- \times \omega_2^-$ , – різницевий оператор, який діє з  $H$  у

простір  $H_1^*$  сіткових функцій, визначених на множині вузлів  $\omega_1^- \times \omega_2^-$ , зі скалярним добутком і нормою

$$(y, v)_{1*} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{1*} = \sqrt{(y, y)_{1*}} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y^2(x).$$

Використовуючи формули підсумовування частинами, знайдемо

$$(B_1^* y, w)_* = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 (-y_{x_1 x_2}) w = - \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2} = (y, B_1 w),$$

де  $B_1 : H_1^* \rightarrow H$  – оператор, спряжений до оператора  $B_1^* : H \rightarrow H_1^*$ ,

$$B_1 w = - \begin{cases} w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2}, & x \in \gamma_{-1}. \end{cases}$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned} \|Ay\|^2 &= \|A_1 y\|^2 + \|A_2 y\|^2 + 2(A_1 y, A_2 y) \geq 2(A_1 y, A_2 y) = \\ &= 2 \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} + 2 \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \frac{2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2 x_2} = \\ &= 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 \bar{x}_2} y_{\bar{x}_2} + 2\sigma \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \geq \\ &\geq 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \left( \frac{1}{4\sigma} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 + \sigma \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \right) + \\ &\quad + 2\sigma \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 = \\ &= 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 - 2 \frac{h_1 \sigma}{3} \frac{1}{4\sigma} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 + 2\sigma \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \geq \\ &\geq 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 - \frac{h_1}{6} \sum_{\substack{x_2 \in \omega_2^+ \\ (x_1=0)}} h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 \geq \left(2 - \frac{1}{6}\right) \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 = \frac{11}{6} \|B_2^* y\|_*^2, \end{aligned}$$

де  $B_2^* : H \rightarrow H_2^*$ ,  $B_2^* y = -y_{x_1 \bar{x}_2}$ ,  $x \in \omega_1^- \times \omega_2^+$ , – різницевий оператор, який діє з  $H$

у простір  $H_2^*$  сіткових функцій, визначених на множині вузлів  $\omega_1^- \times \omega_2^+$ , зі

скалярним добутком і нормою

$$(y, v)_{2^*} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{2^*} = \sqrt{(y, y)_{2^*}} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y^2(x).$$

Знайдемо

$$(B_2^* y, w)_{2^*} = - \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2} w = - \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1 x_2} - \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{x_2} = (y, B_2 w),$$

де  $B_2 : H_2^* \rightarrow H$  – оператор, спряжений до оператора  $B_2^* : H \rightarrow H_2^*$ ,

$$B_2 w = - \begin{cases} w_{\bar{x}_1 x_2}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} w_{x_2}, & x \in \gamma_{-1}. \end{cases}$$

Застосовуючи до операторів  $A, B_1, B_2$  лему [90, с. 54], одержимо оцінку

$$\|A^{-1} B_k v\| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \|v\|_{k^*} \quad \forall v \in H_k^* \quad (k=1, 2). \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Різницєва функція Гріна та вагова оцінка похибки методу.

Нехай  $G(x, \xi)$  – функція Гріна різницєвої крайової задачі (2.3):

$$-G_{\bar{\xi}_1 \xi_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \xi_2}(x, \xi) = \frac{\delta(x_1, \xi_1) \delta(x_2, \xi_2)}{h_1 h_2}, \quad \xi \in \omega, \quad (2.7)$$

$$-\frac{2}{h_1} (G_{\xi_1}(x, \xi) - \sigma G(x, \xi)) - \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) G_{\bar{\xi}_2 \xi_2}(x, \xi) = \frac{2}{h_1} \frac{\delta(x_1, \xi_1) \delta(x_2, \xi_2)}{h_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1},$$

$$G(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1},$$

де  $\delta(m, n)$  – символ Кронекера,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ .

**Лема 2.2.** Для похибки  $z(x)$  справджується оцінка

$$|z(x)| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \rho(x) \|\psi\|, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1},$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \sqrt{(1-x_1)x_2} \right\}$ .

Доведення. За допомогою функції Гевісайда  $H(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$  задачу (2.7)

можна записати так:

$$\begin{aligned}
-G_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2}(x, \xi) &= (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega, \\
-\frac{2}{h_1} G_{\xi_1}(x, \xi) &= \frac{2}{h_1} (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2))_{\xi_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1}, \\
G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1},
\end{aligned}$$

або в операторному вигляді

$$A_{\xi} G(x, \xi) = -B_{1\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2)).$$

Тоді з урахуванням (2.6) маємо

$$\begin{aligned}
\|G(x, \cdot)\| &= \|-A_{\xi}^{-1} B_{1\xi} (H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2))\| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \|H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2)\|_{1*} = \\
&= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi_1=0}^{1-h_1} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=0}^{1-h_2} h_2 H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=x_2}^{1-h_2} h_2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{6}{11}} \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Задачу (2.7) можна записати по-іншому:

$$\begin{aligned}
-G_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2}(x, \xi) &= -(H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega, \\
-\frac{2}{h_1} G_{\xi_1}(x, \xi) &= -\frac{2}{h_1} (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2))_{\xi_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1}, \\
G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1},
\end{aligned}$$

або в операторній формі

$$A_{\xi} G(x, \xi) = B_{2\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2)).$$

Звідси дістаємо

$$\begin{aligned}
\|G(x, \cdot)\| &= \|A_{\xi}^{-1} B_{2\xi} (H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot))\| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \|H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot)\|_{2*} = \\
&= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi_1=0}^{1-h_1} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=h_2}^1 h_2 H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} =
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{11}} \left( \sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{6}{11}} \sqrt{(1-x_1)x_2}.$$

З оцінок (2.8) і (2.9) випливає оцінка

$$\|G(x, \cdot)\| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \rho(x),$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \sqrt{(1-x_1)x_2} \right\}$ , що разом з нерівністю

$$|z(x)| = |(G(x, \cdot), \psi(\cdot))| \leq \|G(x, \cdot)\| \cdot \|\psi\|$$

доводить лему.  $\square$

**Лема 2.3.** Нехай розв'язок  $u(x)$  задачі (2.1) задовольняє умову  $u \in W_2^4(D)$ .

Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x)$  справджується оцінка

$$\|\psi\| \leq 16(h_1^2 + h_2^2) \left( \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}.$$

Доведення. Для похибки апроксимації (2.4) маємо

$$\|\psi\| \leq (\|\Lambda_1 \eta_1\| + \|\eta_2 \bar{x}_2 x_2\|).$$

Оцінимо окремо кожен доданок  $\|\Lambda_1 \eta_1\|$  і  $\|\eta_2 \bar{x}_2 x_2\|$ . Для  $\eta_1(x)$  при  $x \in \omega \cup \gamma_{-1}$  знайдемо

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= (T_2 u)(x) - u(x) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) u(x_1, \xi) d\xi - u(x_1, x_2) = \\ &= \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) (u(x_1, \xi) - u(x_1, x_2)) d\xi = \\ &= \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} \frac{\partial u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} \left( \frac{\partial u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_2} \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \frac{\partial u(x_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) d\xi_1 = \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_2^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \left( \frac{\partial u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(x_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 = \\
&= \frac{1}{h_2^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_3)}{\partial \xi_2^2} d\xi_3.
\end{aligned}$$

Звідси з урахуванням співвідношення  $\left( T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) (x) = u_{\bar{x}_1 x_1} (x)$ ,  $x \in \omega$ , виводимо

$$\begin{aligned}
\eta_{1\bar{x}_1 x_1} (x) &= \frac{1}{h_1^2 h_2^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \times \\
&\quad \times \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_4|) \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} d\xi_4, \quad x \in \omega,
\end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
|\eta_{1\bar{x}_1 x_1} (x)| &\leq \frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_1 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right| d\xi_4 \leq \\
&\leq \frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3} 2h_2 \cdot 2h_2 \cdot h_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right| d\xi_4 \leq \quad (2.11) \\
&\leq \frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3} 2h_2 \cdot 2h_2 \cdot h_2 \sqrt{2h_2 \cdot 2h_1} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 \right)^{1/2} = \\
&= 8 \sqrt{\frac{h_2^3}{h_1}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 \right)^{1/2}, \quad x \in \omega.
\end{aligned}$$

З формули (2.10) унаслідок співвідношення  $T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{2}{h_1} \left( u_{x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)$ ,  $x \in \gamma_{-1}$ ,

дістаємо зображення

$$\frac{2}{h_1}(\eta_{1x_1}(x) - \sigma\eta_1(x)) = \frac{2}{h_1^2 h_2^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \times \\ \times \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_3 \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_4) \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} d\xi_4, \quad x \in \gamma_{-1},$$

звідки

$$\left| \frac{2}{h_1}(\eta_{1x_1}(x) - \sigma\eta_1(x)) \right| \leq 8 \sqrt{\frac{2h_2^3}{h_1}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_0^{h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 \right)^{1/2}, \quad x \in \gamma_{-1}. \quad (2.12)$$

Тепер з нерівностей (2.11) і (2.12) одержимо

$$\| \Lambda_1 \eta_1 \|^2 = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 \eta_{1\bar{x}_1 x_1}^2(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( \frac{2}{h_1} \eta_{1x_1}(x) - \sigma\eta_1(x) \right)^2 \leq \\ \leq 64h_2^4 \sum_{x \in \omega} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 + 64h_2^4 \sum_{x_2 \in \omega_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int_0^{h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 \leq \\ \leq 4 \cdot 64h_2^4 \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_3 d\xi_4 = 256h_2^4 \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2,$$

що веде до оцінки

$$\| \Lambda_1 \eta_1 \| \leq 16h_2^2 \left( \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Розглянемо тепер доданок  $\| \eta_{2\bar{x}_2 x_2} \|$ . Для  $x \in \omega$  маємо

$$\eta_2(x) = (T_1 u)(x) - u(x) = \frac{1}{h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) u(\xi, x_2) d\xi - u(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{h_1^3} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) d\xi \int_{x_1}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, x_2)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3,$$

звідки впливає зображення



$$\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x) = \frac{1}{h_2^2 h_1^3} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) d\xi \int_{x_1}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_2 \times \\ \times \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_3 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_4|) \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_4^2} d\xi_4, \quad x \in \omega,$$

а отже, як і в (2.11), дістаємо нерівність

$$|\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)| \leq 8 \sqrt{\frac{h_1^3}{h_2}} \left( \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_3 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_3^2 \partial \xi_4^2} \right|^2 d\xi_4 \right)^{1/2}, \quad x \in \omega. \quad (2.14)$$

Для вузла  $x \in \gamma_{-1}$  маємо

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= (T_1 u)(x) - u(x) - \frac{h_1}{3} \sigma u(x) = \\ &= \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) (u(\xi, x_2) - u(0, x_2)) d\xi - \frac{h_1}{3} \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} = \\ &= \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^{\xi} \frac{\partial u(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 - \frac{h_1}{3} \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} = \\ &= \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^{\xi} \left( \frac{\partial u(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} \right) d\xi_1 = \\ &= \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_2, x_2)}{\partial \xi_2^2} d\xi_2, \end{aligned}$$

звідки внаслідок формули  $\left( T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)(x) = u_{\bar{x}_2x_2}(x)$ ,  $x \in \omega \cup \gamma_{-1}$ , одержуємо

$$\begin{aligned} \eta_{2\bar{x}_2x_2}(x) &= \\ &= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_3|) \frac{\partial^4 u(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_3^2} d\xi_3, \quad x \in \gamma_{-1}. \end{aligned}$$

Звідси випливає ланцюжок нерівностей

$$|\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)| \leq \frac{2h_1 h_2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} d\xi \int_0^{h_1} d\xi_1 \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_3^2} \right| d\xi_3 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2h_1h_2}{h_1^2h_2^2} h_1^2 \sqrt{h_1 \cdot 2h_2} \left( \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_3 \right)^{1/2} = \\
&= 2\sqrt{\frac{2h_1^3}{h_2}} \left( \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_3 \right)^{1/2}, \quad x \in \gamma_{-1}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

З (2.14) і (2.15) тепер виводимо

$$\begin{aligned}
\| \eta_{2\bar{x}_2x_2} \|^2 &= \sum_{x \in \omega} h_1h_2 \eta_{2\bar{x}_2x_2}^2(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \eta_{2\bar{x}_2x_2}^2(x) \leq \\
&\leq 64h_1^4 \sum_{x \in \omega} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_3 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_3^2 \partial \xi_4^2} \right|^2 d\xi_4 + 4h_1^4 \sum_{x_2 \in \omega_2} \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_3^2} \right|^2 d\xi_3 \leq \\
&\leq 4 \cdot 64h_1^4 \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_3^2 \partial \xi_4^2} \right|^2 d\xi_3 d\xi_4 = 256h_1^4 \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

що дає оцінку

$$\| \eta_{2\bar{x}_2x_2} \| \leq 16h_1^2 \left( \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Беручи до уваги оцінки (2.13) і (2.16), остаточно дістаємо

$$\| \psi \| \leq (\| \Lambda_1 \eta_1 \| + \| \eta_{2\bar{x}_2x_2} \|) \leq 16(h_1^2 + h_2^2) \left( \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2},$$

що й доводить лему.  $\square$

З лем 2.2 і 2.3 випливає наступне твердження.

**Теорема 2.1.** *Нехай розв'язок  $u(x)$  задачі (2.1) задовольняє умову  $u \in W_2^4(D)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.2) характеризується ваговою апріорною оцінкою*

$$\| \rho^{-1} z \| \leq 16\sqrt{\frac{6}{11}} |h|^2 |u|_{W_2^4(D)},$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \sqrt{(1-x_1)x_2} \right\}$ ,  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ .

Доведення. Застосовуючи лему 2.2 і лему 2.3, маємо

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq \sqrt{\frac{6}{11}} \rho(x) \|\psi\| \leq \sqrt{\frac{6}{11}} \rho(x) 16(h_1^2 + h_2^2) \left( \iint_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 16 \sqrt{\frac{6}{11}} \rho(x) |h|^2 |u|_{W_2^4(D)}, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \end{aligned}$$

звідки випливає твердження теореми.  $\square$

**Зауваження 2.1.** Функціонали  $\eta_1$  і  $\eta_2$  в (2.13) і (2.16) можна також оцінювати за допомогою леми Брембла–Гільберта [90], однак у таких оцінках були б невизначені сталі (не залежні від  $|h|$  і  $u(x)$ ).

Зазначимо також, що традиційна дискретизація задачі (2.1) різницевою схемою

$$\begin{aligned} -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} &= (T_1 T_2 f)(x), \quad x \in \omega, \\ -\frac{2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) - y_{\bar{x}_2 x_2} &= (T_1 T_2 f)(x), \quad x \in \gamma_{-1}, \\ y &= 0, \quad x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned}$$

має порядок  $O(|h|^{3/2})$ , що означає втрату половини порядку внаслідок апроксимації крайової умови з частинною похідною.

Аналог доведеної вище теореми 2.1 можна одержати й у випадку неоднорідної умови третього роду:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \quad x \in D, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma u(x) &= g(x), \quad x \in \Gamma_{-1}, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}. \end{aligned}$$

Як різницевий аналог цієї задачі можна взяти схему (2.2), покладаючи в ній

$$\varphi(x) = (T_1 T_2 f)(x) + \frac{2}{h_1} T_2 g - \frac{h_1}{3} (S_2 g)_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \gamma_{-1}.$$

Тоді для похибки  $z(x) = y(x) - u(x)$  маємо задачу (2.3), у якій

$$\eta_2(x) = (T_1 u)(x) - \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) u(x) + \frac{h_1}{3} (S_2 g)(x), \quad x \in \gamma_{-1}.$$

Застосовуючи лему Брембла–Гільберта і міркуючи, як [90, с. 165], одержимо вагову апіорну оцінку

$$\|\rho^{-1}z\| \leq M|h|^2\|u\|_{W_2^4(D)}$$

зі сталою  $M$ , яка не залежить від  $|h|$  і  $u$ .

**2.1.4. Висновки.** Доведена в теоремі 2.1 вагова апіорна оцінка свідчить, що внаслідок крайової умови Діріхле похибка різницевої схеми (2.2) є величиною  $O(\sqrt{h_1}|h|^2)$  поблизу сторони  $\Gamma_{+1}$  та  $O(\sqrt{h_2}|h|^2)$  – поблизу сторін  $\Gamma_{\pm 2}$  квадрата  $D$ , тоді як далі від них дорівнює  $O(|h|^2)$ , де  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ .

Результати підрозд. 2.1 опубліковано в [72, 212] та доповідалися на конференції [8].

## 2.2. Вагова апіорна оцінка точності дев'ятиточкової різницевої схеми для рівняння Пуассона

Нижче розглянуто різницеву схему підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні для рівняння Пуассона в прямокутнику з крайовою умовою Діріхле, досліджено вплив крайової умови на точність наближеного розв'язку в приміжових вузлах сітки та доведено апіорну оцінку похибки у ваговій нормі. Для цього використано зображення наближеного розв'язку за допомогою різницевої функції Гріна, для оцінки якої в сітковій нормі застосовано основну лему (див. підрозд. 1.1). Оцінку похибки апроксимації на узагальнених розв'язках вихідної задачі одержано звичайним способом за допомогою леми Брембла–Гільберта.

### 2.2.1. Дискретизація вихідної задачі. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in D, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2.17}$$

де  $x = (x_1, x_2)$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  – прямокутник,  $\Gamma = \partial D$  – межа прямокутника  $D$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа в ПДСК.

Введемо сіткові множини [90]:

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}, \quad N_\alpha \geq 2 \text{ – ціле число,}$$

$$\bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$\omega = \omega_1 \times \omega_2$  – множина внутрішніх вузлів,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ ,  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ ,

$$\gamma_{-\alpha} = \{x \in \gamma : x_\alpha = 0, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \quad \gamma_{+\alpha} = \{x \in \gamma : x_\alpha = 1, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\},$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_{-\alpha} \cup \gamma_{+\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

За допомогою операторів [90] точних різницевих схем

$$T_1 v(x) = \frac{1}{h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) v(\xi, x_2) d\xi, \quad x \in \omega,$$

$$T_2 v(x) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) v(x_1, \xi) d\xi, \quad x \in \omega,$$

апроксимуємо задачу (2.17) різницевою схемою

$$\Lambda y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y(x) = -T_1 T_2 f(x), \quad x \in \omega, \quad (2.18)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\Lambda_\alpha y(x) = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x)$ ,  $x \in \omega$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Для похибки  $z(x) = y(x) - u(x)$  маємо задачу

$$\Lambda z(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 z(x) = -\psi(x), \quad x \in \omega, \quad (2.19)$$

$$z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де  $\psi(x)$  – похибка апроксимації:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= T_1 T_2 f(x) + \Lambda u(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u(x) = \\ &= \Lambda_1 u + \Lambda_2 u + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u - \Lambda_1 (T_2 u) - \Lambda_2 (T_1 u) = \\ &= \Lambda_1 \left( u - T_2 u + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 u \right) + \Lambda_2 \left( u - T_1 u + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 u \right) = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2, \end{aligned}$$

$$\eta_\alpha(x) = u(x) - T_{3-\alpha}u(x) + \frac{h_{3-\alpha}^2}{12} \Lambda_{3-\alpha}u(x), \quad x \in \omega \quad (\alpha=1,2).$$

Тут використано співвідношення  $\Lambda_1(T_2u) + \Lambda_2(T_1u) = -T_1T_2f$ , отримане внаслідок застосування оператора  $T = T_1T_2$  до рівняння (2.17) у вузлах  $x \in \omega$  з

урахуванням формули  $T_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(x) = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $x \in \omega$  ( $\alpha=1,2$ ).

**2.2.2. Властивості різницевих операторів.** Уведемо простір сіткових функцій  $H^0$ , визначених на  $\bar{\omega}$  і рівних нулю на  $\gamma$ , зі скалярним добутком і нормою:

$$(y, v) = (y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y(x) v(x),$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Сіткова функція  $\eta_\alpha(x)$  задана у вузлах  $x \in \omega \cup \gamma_\alpha$  і дорівнює нулю у вузлах  $x \in \gamma_\alpha$ . Довизначимо її (а в разі потреби – інші функції теж) нулем для решти

вузлів сіткової множини  $\gamma$ . Тоді  $\eta_\alpha \in H^0$ , а отже, задачу (2.19) можна записати як операторне рівняння

$$A'z = A_1\eta_1 + A_2\eta_2, \quad z, \eta_\alpha \in H^0, \quad (2.20)$$

де  $A_\alpha u = -\Lambda_\alpha u$ ,  $\alpha=1,2$ ,  $A = A_1 + A_2$ ,  $A' = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2$ ,

$$A_\alpha, A, A' : H^0 \rightarrow H^0, \quad \alpha=1,2.$$

Надалі нам потрібні властивості деяких різницевих операторів.

**Лема 2.4.** *Оператор  $A'$  є самоспряженим і додатно визначеним в  $H^0$ . Для нього виконуються оцінки*

$$\frac{2}{3}A \leq A' \leq A, \quad (2.21)$$

$$\frac{2}{3}\|Ay\| \leq \|A'y\| \leq \|Ay\| \quad \forall y \in H^0. \quad (2.22)$$

Доведення. Оператори  $A_1$  і  $A_2$  самоспряжені:  $A_\alpha^* = A_\alpha$ , оскільки

$(A_\alpha y, v) = (-y_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}, v) = (y, -v_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}) = (y, A_\alpha v) \quad \forall y, v \in H^0 \quad (\alpha = 1, 2);$   
переставні:  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , оскільки

$$A_1 A_2 y = (y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} = (y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_2 x_2} = A_2 A_1 y \quad \forall y \in H^0;$$

задовольняють нерівності [86]

$$(A_\alpha y, y) \leq \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \|y\|^2 \leq \frac{4}{h_\alpha^2} \|y\|^2 \quad \forall y \in H^0,$$

$$(A_\alpha y, y) \geq \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \|y\|^2 \geq \frac{8}{l_\alpha^2} \|y\|^2 \quad \forall y \in H^0,$$

тобто  $\frac{8}{l_\alpha^2} I \leq A_\alpha \leq \frac{4}{h_\alpha^2} I$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $I$  – тотожний оператор; звідси, як наслідок,

впливає їх додатна визначеність.

Тоді оператор  $A_1 A_2$  є самоспряженим:  $(A_1 A_2)^* = A_1 A_2$ , оскільки

$$(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* = A_2 A_1 = A_1 A_2;$$

і додатно визначеним:  $A_1 A_2 \geq \frac{64}{l_1^2 l_2^2} I$ , оскільки

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 y, y) &= (A_1 A_2^{1/2} A_2^{1/2} y, y) = (A_2^{1/2} A_1 A_2^{1/2} y, y) = (A_1 A_2^{1/2} y, A_2^{1/2} y) \geq \\ &\geq \frac{8}{l_1^2} (A_2^{1/2} y, A_2^{1/2} y) = \frac{8}{l_1^2} (A_2 y, y) \geq \frac{8}{l_1^2} \cdot \frac{8}{l_2^2} \|y\|^2 \quad \forall y \in H^0. \end{aligned}$$

Звідси впливає самоспряженість операторів  $A_1$  і  $A_2$ , додатна визначеність оператора  $A$ , а також нерівність  $A' \leq A$  в (2.21).

Доведемо тепер оцінку  $\frac{2}{3} A \leq A'$  в (2.21):

$$\begin{aligned} A' &= A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2 = A_1 \left( I - \frac{h_2^2}{12} A_2 \right) + A_2 \left( I - \frac{h_1^2}{12} A_1 \right) \geq \\ &\geq A_1 \left( I - \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{4}{h_2^2} I \right) + A_2 \left( I - \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{4}{h_1^2} I \right) = \frac{2}{3} (A_1 + A_2) = \frac{2}{3} A. \end{aligned}$$

Звідси впливає додатна визначеність оператора  $A'$ .

З оцінок (2.21) виводимо нерівності (2.22):

$$\begin{aligned}\|Ay\|^2 &= (Ay, Ay) = (AA^{1/2}y, A^{1/2}y) \leq \frac{3}{2}(A'A^{1/2}y, A^{1/2}y) = \\ &= \frac{3}{2}(A'y, Ay) \leq \frac{3}{2}\|A'y\| \cdot \|Ay\|,\end{aligned}$$

звідки  $\frac{2}{3}\|Ay\| \leq \|A'y\|$ ; аналогічно  $\|A'y\| \leq \|Ay\|$ . Лему доведено.  $\square$

З леми випливає існування оберненого оператора  $A'^{-1}$  та однозначна розв'язність задачі (2.20).

Одержимо тепер важливі надалі оцінки. Маємо

$$\begin{aligned}\|A'y\|^2 &\geq \frac{4}{9}\|Ay\|^2 = \frac{4}{9}(A_1y + A_2y, A_1y + A_2y) = \\ &= \frac{4}{9}(\|A_1y\|^2 + \|A_2y\|^2 + (A_1y, A_2y)) \geq \frac{8}{9}(A_1y, A_2y) = \\ &= \frac{8}{9} \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{8}{9} \|B_k^* y\|_k^2 \quad \forall y \in \overset{0}{H},\end{aligned}$$

де позначено:

1)  $B_1^* : \overset{0}{H} \rightarrow H_1$ ,  $B_1^* y = -y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$ ,  $H_1$  – простір сіткових функцій, визначених

на множині вузлів  $\tilde{\omega} = \omega_1^+ \times \omega_2^+$ ;

2)  $B_2^* : \overset{0}{H} \rightarrow H_2$ ,  $B_2^* y = -y_{x_1 x_2}$ ,  $H_2$  – простір сіткових функцій, визначених

на множині вузлів  $\tilde{\omega} = \omega_1^- \times \omega_2^-$ ;

3)  $B_3^* : \overset{0}{H} \rightarrow H_3$ ,  $B_3^* y = -y_{\bar{x}_1 x_2}$ ,  $H_3$  – простір сіткових функцій, визначених

на множині вузлів  $\tilde{\omega} = \omega_1^+ \times \omega_2^-$ ;

4)  $B_4^* : \overset{0}{H} \rightarrow H_4$ ,  $B_4^* y = -y_{x_1 \bar{x}_2}$ ,  $H_4$  – простір сіткових функцій, визначених

на множині вузлів  $\tilde{\omega} = \omega_1^- \times \omega_2^+$ ;

$$(y, v)_k = \sum_{x \in \tilde{\omega}} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_k = \sqrt{(y, y)_k} = \left( \sum_{x \in \tilde{\omega}} h_1 h_2 y(x) v(x) \right)^{1/2}$$

– відповідно скалярний добуток і норма в просторі  $H_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ .



Для спряженого до  $B_k^* : H \rightarrow H_k$  оператора  $B_k : H_k \rightarrow H$  маємо:

$$(B_k y, v) = (y, B_k^* v)_k \quad \forall y \in H_k \quad \forall v \in H,$$

де  $B_1 y = -y_{x_1 x_2}$ ,  $B_2 y = -y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$ ,  $B_3 y = -y_{x_1 \bar{x}_2}$ ,  $B_4 y = -y_{\bar{x}_1 x_2}$ .

Застосовуючи лему [90, с. 54] до операторів

$$A' : H \rightarrow H, \quad B_k : H_k \rightarrow H, \quad B_k^* : H \rightarrow H_k \quad (k = \overline{1,4}),$$

з нерівності

$$\|B_k^* y\|_k \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|A' y\| \quad \forall y \in H$$

одержимо оцінку

$$\|(A')^{-1} B_k y\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|y\|_k \quad \forall y \in H_k. \quad (2.23)$$

**2.2.3. Оцінка різницевої функції Гріна.** Позначимо  $G(x, \xi)$  функцію Гріна різницевої крайової задачі

$$\Lambda_\xi G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x, \xi) = -\frac{\delta(x_1, \xi_1) \delta(x_2, \xi_2)}{h_1 h_2}, \quad \xi \in \omega, \quad (2.24)$$

$$G(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

де  $\delta(m, n)$  – символ Кронекера.

**Лема 2.5.** Для функції Гріна  $G(x, \xi)$  справджується оцінка

$$\|G(x, \cdot)\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \rho(x), \quad x \in \omega,$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 (l_2 - x_2)}, \sqrt{(l_1 - x_1) x_2}, \sqrt{(l_1 - x_1) (l_2 - x_2)} \right\}$ .

Доведення. Позначимо  $H(s)$  функцію Гевісайда  $H(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$

Запишемо задачу (2.24) інакше:

$$\Lambda_\xi G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x, \xi) = -(H(x_1 - \xi_1) H(x_2 - \xi_2))_{\xi_1 \xi_2}, \quad \xi \in \omega,$$

$$G(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

або як операторне рівняння

$$A'_\xi G(x, \xi) = -B_{1\xi} (H(x_1 - \xi_1)H(x_2 - \xi_2)).$$

Звідси з урахуванням оцінки (2.23) дістаємо

$$\begin{aligned} \|G(x, \cdot)\| &= \|-A'_\xi^{-1} B_{1\xi} (H(x_1 - \cdot)H(x_2 - \cdot))\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|H(x_1 - \cdot)H(x_2 - \cdot)\|_1 = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 H^2(x_1 - \xi_1) H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 \in \omega_1^+} h_1 H^2(x_1 - \xi_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 \in \omega_2^+} h_2 H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \quad (2.25) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=h_1}^{x_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Задачу (2.24) можна записати і так:

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x, \xi) &= -(H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega, \\ G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma, \end{aligned}$$

тобто

$$A'_\xi G(x, \xi) = -B_{2\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2)).$$

Застосовуючи оцінку (2.23), одержимо

$$\begin{aligned} \|G(x, \cdot)\| &= \|-A'_\xi^{-1} B_{2\xi} (H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2))\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2)\|_2 = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \quad (2.26) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 \in \omega_1^-} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 \in \omega_2^-} h_2 H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=x_1}^{l_1-h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=x_2}^{l_2-h_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{(l_1 - x_1)(l_2 - x_2)}. \end{aligned}$$

Подамо тепер (2.24) по-іншому:

$$\Lambda_{\xi} G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x, \xi) = (H(x_1 - \xi_1)H(\xi_2 - x_2))_{\xi_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega,$$

$$G(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

що в операторній формі набуває вигляду

$$A'_{\xi} G(x, \xi) = B_{3\xi} (H(x_1 - \xi_1)H(\xi_2 - x_2)).$$

Звідси за допомогою нерівності (2.23) виводимо

$$\begin{aligned} \|G(x, \cdot)\| &= \|A'_{\xi}{}^{-1} B_{3\xi} (H(x_1 - \cdot)H(\cdot - x_2))\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|H(x_1 - \cdot)H(\cdot - x_2)\|_3 = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^+ \times \omega_2^-} h_1 h_2 H^2(x_1 - \xi_1) H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 \in \omega_1^+} h_1 H^2(x_1 - \xi_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 \in \omega_2^-} h_2 H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \quad (2.27) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 = h_1}^{x_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 = x_2}^{l_2 - h_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{x_1(l_2 - x_2)}. \end{aligned}$$

Тепер запишемо задачу (2.24) так:

$$\Lambda_{\xi} G(x, \xi) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_{1\xi} \Lambda_{2\xi} G(x, \xi) = (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2))_{\bar{\xi}_1 \xi_2}, \quad \xi \in \omega,$$

$$G(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

тобто

$$A'_{\xi} G(x, \xi) = B_{4\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2)).$$

Тоді внаслідок оцінки (2.23) дістанемо

$$\begin{aligned} \|G(x, \cdot)\| &= \|A'_{\xi}{}^{-1} B_{4\xi} (H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot))\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \|H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot)\|_4 = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 \in \omega_1^-} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 \in \omega_2^+} h_2 H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \quad (2.28) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1 = x_1}^{l_1 - h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2 = h_2}^{x_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{(l_1 - x_1)x_2}. \end{aligned}$$

Твердження леми випливає тепер з оцінок (2.25)–(2.28).  $\square$

**2.2.4. Вагова оцінка точності методу.** Доведемо наступне допоміжне твердження.

**Лема 2.6.** Нехай розв'язок  $u(x)$  задачі (2.17) задовольняє умову  $u \in W_2^6(D)$ .

Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x)$  справджується оцінка

$$\|\psi\| \leq M |h|^4 |u|_{W_2^6(D)},$$

де  $M$  – не залежна від  $u(x)$ ,  $h_1, h_2$  стала;  $|u|_{W_2^6(D)}$  – півнорма в  $W_2^6(D)$ :

$$|u|_{W_2^6(D)} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0)}} \iint_D \left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx_1 dx_2 \right\}^{1/2}.$$

Доведення. Оцінимо кожен доданок  $\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)$  і  $\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x)$  похибки апроксимації  $\psi(x)$  в (2.19):

$$\psi(x) = \eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x) + \eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x),$$

де  $\eta_1(x) = u(x) - T_2 u(x) + \frac{h_2^2}{12} u_{\bar{x}_2 x_2}(x)$ ,  $\eta_2(x) = u(x) - T_1 u(x) + \frac{h_1^2}{12} u_{\bar{x}_1 x_1}(x)$ .

Розглянемо, наприклад, функціонал  $\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)$ . За допомогою лінійної заміни

$$\frac{\xi_\alpha - x_\alpha}{h_\alpha} = s_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

відобразимо комірку  $e(x) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : |\xi_\alpha - x_\alpha| < h_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  на квадрат

$$E = \{s = (s_1, s_2) : |s_\alpha| < 1, \alpha = 1, 2\}$$

і покладемо  $u(\xi_1, \xi_2) = u(x_1 + h_1 s_1, x_2 + h_2 s_2) = U(s_1, s_2)$ . Функціонал  $\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)$  набуде вигляду

$$\begin{aligned} \eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x) = & -\frac{1}{h_1^2} \left[ \int_{-1}^1 (1 - |s_2|) (U(1, s_2) - 2U(0, s_2) + U(-1, s_2)) ds_2 - \right. \\ & \left. - (U(1, 0) - 2U(0, 0) + U(-1, 0)) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} (U(1, 1) - 2U(1, 0) + U(1, -1)) + \frac{1}{6} (U(0, 1) - 2U(0, 0) + U(0, -1)) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} (U(-1, 1) - 2U(-1, 0) + U(-1, -1)) \right]. \end{aligned}$$

Цей функціонал обмежений у просторі  $W_2^6(E)$  внаслідок вкладення  $W_2^6(E) \subset C(\bar{E})$  та перетворюється на нуль на поліномах 5-го степеня. Наприклад, для полінома  $x_2^2$  маємо

$$\begin{aligned} \eta_{1\bar{x}_1x_1}(x) &= - \left( \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |\xi - x_2|) \xi^2 d\xi - x_2^2 - \frac{h_2^2}{12} (x_2^2)_{\bar{x}_2x_2} \right)_{\bar{x}_1x_1} = \\ &= - \left( \frac{h_2^2}{6} + x_2^2 - x_2^2 - \frac{h_2^2}{12} \cdot 2 \right)_{\bar{x}_1x_1} = 0. \end{aligned}$$

Тоді за лемою Брембла–Гільберта [90, с. 29] дістаємо оцінку

$$|\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)| \leq \frac{M}{h_1^2} |U|_{W_2^6(E)},$$

де  $M$  – не залежна від  $U(s_1, s_2)$ ,  $h_1, h_2$  стала,  $|U|_{W_2^6(E)}$  – півнорма в  $W_2^6(E)$ :

$$|U|_{W_2^6(E)}^2 = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0)}} \iint_E \left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} U(s_1, s_2)}{\partial s_1^{\alpha_1} \partial s_2^{\alpha_2}} \right)^2 ds_1 ds_2.$$

Вертаючись до змінних  $\xi_1$  і  $\xi_2$  та беручи до уваги співвідношення

$$ds_1 ds_2 = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{h_1 h_2}, \quad \frac{\partial U}{\partial s_\alpha}(s_1, s_2) = h_\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}(\xi_1, \xi_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

маємо

$$|\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)| \leq \frac{M}{h_1^2} \frac{|h|^6}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))},$$

звідки за умови  $0 < C_1 \leq h_1/h_2 \leq C_2$  випливає нерівність

$$|\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x)| \leq M_1 \frac{|h|^4}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))}, \quad x \in \omega. \quad (2.29)$$

Аналогічно оцінюємо функціонал  $\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)$ :

$$|\eta_{1\bar{x}_2x_2}(x)| \leq M_2 \frac{|h|^4}{\sqrt{h_1 h_2}} |u|_{W_2^6(e(x))}, \quad x \in \omega. \quad (2.30)$$

У нерівностях (2.29) і (2.30) сталі  $M_1$  і  $M_2$  не залежать від  $h_1, h_2$  і  $u(x)$ , а

$|u|_{W_2^6(e(x))}$  – півнорма в  $W_2^6(e(x))$ . З оцінок (2.29) і (2.30) маємо

$$\begin{aligned} \|\psi\| &= \|\eta_{1\bar{x}_1x_1} + \eta_{2\bar{x}_2x_2}\| \leq \|\eta_{1\bar{x}_1x_1}\| + \|\eta_{2\bar{x}_2x_2}\| \leq \\ &\leq M_1 |h|^4 \left( \sum_{x \in \omega} |u|_{W_2^6(e(x))}^2 \right)^{1/2} + M_2 |h|^4 \left( \sum_{x \in \omega} |u|_{W_2^6(e(x))}^2 \right)^{1/2} = \tilde{M} |h|^4 |u|_{W_2^6(D)}, \end{aligned}$$

що доводить лему.  $\square$

З лем 2.5 і 2.6 випливає наступне твердження.

**Теорема 2.2.** *Нехай розв'язок  $u(x)$  задачі (2.17) задовольняє умову  $u \in W_2^6(D)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.18) характеризується ваговою оцінкою*

$$\|\rho^{-1}z\| \leq M |h|^4 |u|_{W_2^6(D)},$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1(l_2 - x_2)}, \sqrt{(l_1 - x_1)x_2}, \sqrt{(l_1 - x_1)(l_2 - x_2)} \right\}$ ,  $M$  – не залежна від  $u(x)$ ,  $h_1, h_2$  стала,  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ ,  $|u|_{W_2^6(D)}$  – півнорма в  $W_2^6(D)$ :

$$|u|_{W_2^6(D)} = \left( \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0)}} \iint_D \left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}.$$

Доведення. Розв'язок  $z(x)$  задачі (2.19) можна подати так:

$$z(x) = (G(x, \cdot), \psi(\cdot)) = \sum_{\xi \in \omega} h_1 h_2 G(x, \xi) \psi(\xi), \quad x \in \omega.$$

Застосовуючи леми 2.5 і 2.6, дістаємо

$$\begin{aligned} |z(x)| &= |(G(x, \cdot), \psi(\cdot))| \leq \|G(x, \cdot)\| \cdot \|\psi\| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \rho(x) \tilde{M} |h|^4 |u|_{W_2^6(D)} = \\ &= M \rho(x) |h|^4 |u|_{W_2^6(D)}, \quad x \in \omega, \end{aligned}$$

звідки остаточно випливає оцінка

$$\|\rho^{-1}z\| \leq M |h|^4 |u|_{W_2^6(D)}.$$

Теорему доведено.  $\square$

Зазначимо, що аналогічно можна довести шкалу оцінок

$$\|\rho^{-1}z\| \leq M |h|^{p-2} |u|_{W_2^p(D)}, \quad 4 \leq p \leq 6.$$

**2.2.5. Висновки.** Доведена в теоремі 2.2 вагова апіорна оцінка свідчить, що внаслідок крайової умови Діріхле похибка різницевої схеми (2.18) є величиною  $O(\sqrt{h_\alpha} |h|^4)$  поблизу сторін  $\Gamma_{\pm\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) та  $O(\sqrt{h_1 h_2} |h|^4)$  – поблизу вершин прямокутника  $D$ , тоді як далі від них дорівнює  $O(|h|^4)$ .

Результати підрозд. 2.2 опубліковано в [68, 207].

## 2.3. Схема підвищеного порядку точності для двовимірного рівняння Пуассона

До розв'язування рівняння Пуассона зводяться, як відомо, важливі класи прикладних задач, однією з яких є задача про закручення призматичного стержня з прямокутним поперечним перерізом. Нижче розглянуто стандартну схему підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні для двовимірного рівняння Пуассона з крайовою умовою Діріхле на сторонах прямокутника. За допомогою різницевого аналога цієї задачі та теореми порівняння одержано апіорну оцінку похибки методу з урахуванням крайового ефекту. Аналогічна схема розглянута в підрозд. 2.2, де із застосуванням іншої техніки отримано оцінку для похибки в нормі з вагою.

**2.3.1. Дискретизація вихідної задачі.** Застосуємо інший підхід для дослідження різницевого аналога крайової задачі (2.17), розглянутої в підрозд. 2.2. Для зручності наведемо скорочено основні позначення і формулювання. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in D, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2.31}$$

де  $x = (x_1, x_2)$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  – прямокутник,  $\Gamma = \partial D$  –

його межа,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа в прямокутній декартовій системі

координат.

Уведемо сіткові множини

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1\}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, N_\alpha \geq 2 - \text{ціле число,}$$

$$\omega_\alpha^+ = \omega_\alpha \cup \{l_\alpha\}, \omega_\alpha^- = \omega_\alpha \cup \{0\}, \bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{l_\alpha\}, \alpha = 1, 2,$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2, \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$$

і апроксимуємо задачу (2.31) різницевою схемою

$$\Lambda y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y(x) = -T_1 T_2 f(x), \quad x \in \omega, \quad (2.32)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $x \in \omega$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $T = T_1 T_2$  – оператор усереднення,

$T_1, T_2$  – оператори точних різницевих схем [90].

Для похибки  $z(x) = y(x) - u(x)$  маємо задачу

$$\Lambda z(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 z(x) = -\psi(x), \quad x \in \omega, \quad (2.33)$$

$$z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де  $\psi(x)$  – похибка апроксимації:

$$\psi(x) = \Lambda_1 \eta_1(x) + \Lambda_2 \eta_2(x),$$

$$\eta_\alpha(x) = u(x) - T_{3-\alpha} u(x) + \frac{h_{3-\alpha}^2}{12} \Lambda_{3-\alpha} u(x), \quad x \in \omega, \quad \alpha = 1, 2.$$

0

На множині  $H$  сіткових функцій, які задані на  $\bar{\omega}$  та рівні нулю на  $\gamma$ , введемо скалярний добуток і норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Скористаємося також позначенням

$$\|v\|_{C(\omega)} = \max_{x \in \omega} |v(x)|.$$

Введемо різницеві оператори

$$A_1, A_2, A, A' : H \rightarrow H,$$

де  $A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $A = A_1 + A_2$ ,  $A' = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2$ .



**2.3.2. Допоміжні результати.** Відомо (див., наприклад, [86]), що одновимірна спектральна задача

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha} w^{(\alpha)} + \lambda^{(\alpha)} w^{(\alpha)} &= 0, \quad x_{\alpha} \in \omega_{\alpha}, \\ w^{(\alpha)}(0) &= w^{(\alpha)}(l_{\alpha}) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

має власні значення

$$\lambda_{k_{\alpha}}^{(\alpha)} = \frac{4}{h_{\alpha}^2} \sin^2 \frac{k_{\alpha} \pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}}, \quad k_{\alpha} = 1, \dots, N_{\alpha} - 1,$$

та відповідні їм власні функції

$$\begin{aligned} w_{k_{\alpha}}^{(\alpha)} = w_{k_{\alpha}}^{(\alpha)}(x_{\alpha}) &= \sqrt{\frac{2}{l_{\alpha}}} \sin \frac{k_{\alpha} \pi x_{\alpha}}{l_{\alpha}}, \quad \sum_{x_{\alpha} \in \omega_{\alpha}} h_{\alpha} \left( w_{k_{\alpha}}^{(\alpha)}(x_{\alpha}) \right)^2 = 1, \\ k_{\alpha} &= 1, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Власні значення  $\lambda_{k_{\alpha}}^{(\alpha)}$  мають такі властивості:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(\alpha)} &< \lambda_2^{(\alpha)} < \dots < \lambda_{N_{\alpha}-1}^{(\alpha)}, \\ \lambda_1^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_{\alpha}^2} \sin^2 \frac{\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}} \geq \frac{8}{l_{\alpha}^2}, \quad \lambda_{N_{\alpha}-1}^{(\alpha)} = \frac{4}{h_{\alpha}^2} \sin^2 \frac{(N_{\alpha}-1)\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}} = \frac{4}{h_{\alpha}^2} \cos^2 \frac{\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}} \leq \frac{4}{h_{\alpha}^2}, \\ \frac{4k_{\alpha}^2}{l_{\alpha}^2} &\leq \lambda_{k_{\alpha}}^{(\alpha)} \leq \frac{4}{h_{\alpha}^2}, \quad k_{\alpha} = 1, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Для оператора  $A'$  виконується лема 2.4, внаслідок якої задача (2.32) однозначно розв'язна.

Нагадаємо також, що двовимірна спектральна задача

$$\begin{aligned} \Lambda w + \lambda w &= 0, \quad x \in \omega, \\ w &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (2.35)$$

має власні значення

$$\lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}$$

та відповідні їм власні функції

$$\begin{aligned} w_{k_1 k_2}(x) &= w_{k_1}^{(1)}(x_1) w_{k_2}^{(2)}(x_2) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2}, \quad \|w_{k_1 k_2}\| = 1, \\ k_{\alpha} &= 1, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Для функцій  $w_{k_1 k_2}$  виконуються корисні надалі співвідношення:

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha w_{k_1 k_2} &= \Lambda_\alpha \left( w_{k_\alpha}^{(\alpha)} w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)} \right) = w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)} \Lambda_\alpha \left( w_{k_\alpha}^{(\alpha)} \right) = \\ &= w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)} \left( -\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} w_{k_\alpha}^{(\alpha)} \right) = -\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} w_{k_1 k_2}, \quad \alpha = 1, 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \Lambda_2 w_{k_1 k_2} &= \Lambda_1 \Lambda_2 \left( w_{k_1}^{(1)} w_{k_2}^{(2)} \right) = \\ &= \Lambda_1 \left( -w_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} w_{k_2}^{(2)} \right) = \lambda_{k_1}^{(1)} w_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} w_{k_2}^{(2)} = \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} w_{k_1 k_2}.\end{aligned}$$

Розглянемо тепер допоміжну задачу

$$\begin{aligned}\Lambda v(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 v(x) &= -1, \quad x \in \omega, \\ v(x) &= 0, \quad x \in \gamma.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Її розв'язок  $v(x)$  шукаємо у вигляді суми

$$v(x) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2}(x).\tag{2.37}$$

Очевидно,  $v(x) = 0$  при  $x \in \gamma$ . З принципу максимуму [86] випливає, що  $v(x) \geq 0$   $\forall x \in \bar{\omega}$ . Для відшукування коефіцієнтів  $v_{k_1 k_2}$  скористаємося зображенням

$$1 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2}(x),\tag{2.38}$$

де

$$\begin{aligned}c_{k_1 k_2} &= (1, w_{k_1 k_2}) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 w_{k_1 k_2}(x) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2} = \\ &= \frac{2 h_1 h_2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sin \frac{k_1 \pi i h_1}{l_1} \cdot \sum_{j=1}^{N_2-1} \sin \frac{k_2 \pi j h_2}{l_2} = \\ &= \frac{2 h_1 h_2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{\sin \frac{(N_1-1) k_1 \pi h_1}{2 l_1} \sin \frac{N_1 k_1 \pi h_1}{2 l_1} \sin \frac{(N_2-1) k_2 \pi h_2}{2 l_2} \sin \frac{N_2 k_2 \pi h_2}{2 l_2}}{\sin \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2}} = \\ &= \frac{2 h_1 h_2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{\cos \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} - \cos \left( \frac{N_1 k_1 \pi h_1}{l_1} - \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} \right) \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2} - \cos \left( \frac{N_2 k_2 \pi h_2}{l_2} - \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2} \right)}{2 \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} 2 \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2h_1h_2}{\sqrt{l_1l_2}} \frac{\cos \frac{k_1\pi h_1}{2l_1} - (-1)^{k_1} \cos \frac{k_1\pi h_1}{2l_1}}{h_1\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}} \cdot \frac{\cos \frac{k_2\pi h_2}{2l_2} - (-1)^{k_2} \cos \frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{h_2\sqrt{\lambda_{k_2}^{(2)}}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{l_1l_2}} \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1\pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}};
\end{aligned}$$

тут використано формулу  $\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ ,  $\theta \notin \{2\pi m, m \in \mathbb{Z}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Підставляючи суми (2.37) і (2.38) у рівняння (2.36), маємо

$$\sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left[ \left( -\lambda_{k_1k_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \right) v_{k_1k_2} + c_{k_1k_2} \right] w_{k_1k_2}(x) = 0, \quad x \in \omega.$$

Звідси дістаємо

$$v_{k_1k_2} = \frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}}, \quad k_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

оскільки

$$\begin{aligned}
\lambda_{k_1k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} &= \lambda_{k_1}^{(1)} \left( 1 - \frac{h_2^2}{12} \lambda_{k_2}^{(2)} \right) + \lambda_{k_2}^{(2)} \left( 1 - \frac{h_1^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \right) \geq \\
&\geq \lambda_{k_1}^{(1)} \left( 1 - \frac{h_2^2}{12} \frac{4}{h_2^2} \right) + \lambda_{k_2}^{(2)} \left( 1 - \frac{h_1^2}{12} \frac{4}{h_1^2} \right) = \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)}) > 0.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$v(x) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}} w_{k_1k_2}(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (2.39)$$

де  $\lambda_{k_1}^{(1)}$ ,  $\lambda_{k_2}^{(2)}$ ,  $w_{k_1k_2}(x)$ ,  $\lambda_{k_1k_2}$ ,  $c_{k_1k_2}$  визначені в (2.34), (2.35) і (2.38).

Дослідимо властивості функції  $v(x)$ .

**Лема 2.7.** Для функції  $v(x)$  виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \frac{l_1 l_2 \pi^4}{48} = \text{const}, \quad x \in \omega, \\ v(x_1, x_2) &\leq M_1 |h|, \quad x_\alpha \in \{h_\alpha, l_\alpha - h_\alpha\}, \quad x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \\ v(x_1, x_2) &\leq M_2 |h|^2 \ln \frac{M_3}{|h|}, \quad x_\alpha \in \{h_\alpha, l_\alpha - h_\alpha\} \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.40)$$

де сталі  $M_1, M_2, M_3$  не залежать від  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ . Оцінка (2.40) є непокривуваною відносно  $|h|$ .

Доведення. Враховуючи нерівність  $\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)} \geq 2\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}$  та оцінки

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} &\geq \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)}), \quad \lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} \geq \frac{4k_\alpha^2}{l_\alpha^2}, \\ k_\alpha &= 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

для всіх  $x \in \omega$  маємо

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \left( \lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \right)}} \times \\ &\quad \times \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2} \leq \quad (2.41) \\ &\leq \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)})}} \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} = \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)})}} = \\ &\leq \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} 2\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}} \sqrt{\lambda_{k_2}^{(2)}}}} = \frac{12}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}} \leq \\ &\leq \frac{12}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{4k_1^2}{l_1^2} \frac{4k_2^2}{l_2^2}} = \\ &= \frac{3l_1 l_2}{4} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \frac{1}{k_1^2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2^2} \leq \frac{3l_1 l_2}{4} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} = \frac{3l_1 l_2}{4} \left( \frac{\pi^2}{6} \right)^2 = \frac{l_1 l_2 \pi^4}{48} = \text{const}. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер  $v(x)$  у примежових вузлах поблизу сторін прямокутника  $D$ :  $(h_1, x_2)$ ,  $(l_1 - h_1, x_2)$ ,  $x_2 \in \omega_2$ ,  $(x_1, h_2)$ ,  $(x_1, l_2 - h_2)$ ,  $x_1 \in \omega_1$ .

Наприклад, для  $(h_1, x_2)$ ,  $x_2 \in \omega_2$ , маємо

$$\begin{aligned}
v(h_1, x_2) &= \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \left( \lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \right)}} \times \\
&\quad \times \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2} \leq \\
&\leq \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)})}} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} = \\
&= \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2 \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1}}{\frac{2}{h_1} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \frac{2}{h_2} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \frac{2}{3} \left( \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \right)} \leq \\
&\leq h_1 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{2}{h_2} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \left( \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \right)} \leq \\
&\leq h_1 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{2k_2}{l_2} \left( \frac{4k_1^2}{l_1^2} + \frac{4k_2^2}{l_2^2} \right)} < h_1 3l_1 \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + \left( \frac{k_2 l_1}{l_2} \right)^2} = \\
&= h_1 3l_1 \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2} \frac{\frac{\pi k_2 l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2} - 1}{2 \left( \frac{k_2 l_1}{l_2} \right)^2} = h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left( \frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2}}{k_2^2} - \frac{1}{k_2^3} \right) < \\
&< h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left( \frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2}}{k_2^2} - \frac{1}{k_2^3} \right) = h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \left( \frac{\pi l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} - \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^3} \right) = \\
&= M_1 h_1 < M_1 |h|,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

де  $M_1 = \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \left( \frac{l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\pi^3}{6} - \zeta(3) \right)$ ,  $\cdot \zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана.

Знайдемо тепер оцінку для  $v(x)$  поблизу кутових точок прямокутника  $D$ .  
Наприклад, у вузлі  $(h_1, h_2)$  маємо

$$\begin{aligned}
v(h_1, h_2) &= \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \left( \lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \right)}} \times \\
&\quad \times \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{l_2} \leq \\
&\leq \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)})}} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{l_2} = \\
&= \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2 \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} 2 \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}}{\frac{2}{h_1} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \frac{2}{h_2} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \frac{2}{3} \left( \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \right)} \leq \\
&\leq h_1 h_2 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}} \leq \\
&\leq h_1 h_2 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{4k_1^2}{l_1^2} + \frac{4k_2^2}{l_2^2}} < h_1 h_2 \frac{6l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + \left( \frac{k_2 l_1}{l_2} \right)^2} = \\
&= h_1 h_2 \frac{6l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{\frac{\pi k_2 l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2} - 1}{2 \left( \frac{k_2 l_1}{l_2} \right)^2} < h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2} = \\
&= h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \left( 1 + \sum_{k_2=2}^{N_2} \frac{1}{k_2} \right) \leq h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \left( 1 + \int_1^{N_2} \frac{dx}{x} \right) = h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} (1 + \ln N_2) =
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
&= h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{e l_2}{h_2} = h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{e l_2 \sqrt{1 + (h_1/h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \\
&\leq (h_1^2 + h_2^2) \frac{3}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{e l_2 \sqrt{6}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = M_2 |h|^2 \ln \frac{M_3}{|h|},
\end{aligned}$$

де  $M_2 = \frac{3}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2}$ ,  $M_3 = \sqrt{6} e l_2$ .

Дослідимо непокращуваність оцінки для  $v(x)$  в кутових вузлах сітки  $\omega$ . Розглянемо, наприклад, вузол  $(h_1, h_2)$ . Позначимо  $U(x)$  розв'язок задачі (2.31) при  $f(x) \equiv 1$  (задача про закручення призматичного стержня з прямокутним поперечним перерізом  $D$ ):

$$\begin{aligned}
\Delta U(x) &= -1, \quad x \in D, \\
U(x) &= 0, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Відомо [29, с. 683], що в околі вершини  $(0,0)$  функцію  $U(x)$  можна подати у вигляді

$$U(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1 x_2}{\pi} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2} + w(x_1, x_2), \tag{2.45}$$

де  $w(x_1, x_2)$  – регулярна функція в околі точки  $(0,0)$ .

Застосовуючи теорему 3.1 і теорему 8.1 з [43], дістаємо, що функція  $w(x)$  не впливає на поведінку функції  $U(x)$  в околі вершини  $(0,0)$ . Це означає, що оцінка для функції  $v(x)$  в околі точки  $(0,0)$  є непокращеною і визначається першими двома доданками формули (2.45).

Аналогічні міркування можна застосувати до кожної з решти вершин прямокутника  $D$ , приймаючи її за початок координат та виконуючи належну лінійну заміну змінних.  $\square$

Наступні розрахунки підтверджують правильність оцінок. Справді, нехай

$$l_1 = l_2 = 1, \quad N_1 = N_2 = N, \quad h_1 = l_1/N_1 = 1/N, \quad h_2 = l_2/N_2 = 1/N,$$

$$v(x) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}} w_{k_1 k_2}(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

$$c_{k_1 k_2} = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}}} =$$

$$= \frac{2(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi}{2N} \cos \frac{k_2 \pi}{2N}}{2N \sin \frac{k_1 \pi}{2N} \sin \frac{k_2 \pi}{2N}},$$

$$\lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} = 4N^2 \left( \sin^2 \frac{k_1 \pi}{2N} + \sin^2 \frac{k_2 \pi}{2N} \right),$$

$$w_{k_1 k_2}(x) = w_{k_1}^{(1)}(x_1) w_{k_2}^{(2)}(x_2) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2} = \sin(k_1 \pi x_1) \sin(k_2 \pi x_2),$$

$$\|w_{k_1 k_2}\| = 1, \quad k_\alpha = 1, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 2.$$

Табл. 2.1

| $N$  | $v(h_1, h_2)$                   | $\frac{v(h_1, h_2)}{(h_1^2 + h_2^2) \ln(h_1^2 + h_2^2)^{-1}}$ |
|------|---------------------------------|---|
| 10   | 0.0130864621104213381157633     | 0.167259523937655218325540                                    |
| 20   | 0.00437472918667352612869399    | 0.165136547474269275574177                                    |
| 30   | 0.00223113044205542753312851    | 0.164342447301937599331952                                    |
| 40   | 0.00136947578792366180178461    | 0.163895926191833831035287                                    |
| 50   | 0.000933287517571130904926526   | 0.163599207438963417220672                                    |
| 100  | 0.000277448995286490531166830   | 0.162875837761968364897204                                    |
| 200  | 0.0000803940287646078939473448  | 0.162354985227441907329565                                    |
| 300  | 0.0000385987583919198584238664  | 0.162112787192414687115354                                    |
| 400  | 0.0000228564521920499670499109  | 0.161962045799329448839502                                    |
| 500  | 0.0000151963597902583162624470  | 0.161855300198607123329541                                    |
| 600  | 0.0000108754429320726790476134  | 0.161773927580717771067540                                    |
| 700  | 0.00000819039760458596327787628 | 0.161708859033569418727886                                    |
| 750  | 0.00000721283031535618447437853 | 0.161680772318785019420208                                    |
| 800  | 0.00000640359929847374423236743 | 0.161655052485697002556906                                    |
| 850  | 0.00000572581091206048546482205 | 0.161631365007197347711585                                    |
| 900  | 0.00000515220563008799116657702 | 0.161609439314878735780303                                    |
| 950  | 0.00000466227902766628442251355 | 0.161589053744132017490335                                    |
| 1000 | 0.00000424036114786574463001509 | 0.161570024617947668474767                                    |

**Лема 2.8.** Нехай  $F(x)$  – довільна сіткова функція, задана на  $\omega$ , а кроки  $h_1$  і  $h_2$  задовольняють умову

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}. \quad (2.46)$$



Тоді для розв'язку  $Y(x)$  задачі

$$\Lambda Y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 Y(x) = -F(x), \quad x \in \omega, \quad (2.47)$$

$$Y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

справджується оцінка

$$|Y(x)| \leq \nu(x) \|F\|_{C(\omega)}, \quad x \in \omega. \quad (2.48)$$

Доведення. Перепишемо задачу (2.47) так:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y(x) &= \frac{1}{6} \left( \frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (y(x_1 + h_1, x_2) + y(x_1 - h_1, x_2)) + \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) (y(x_1, x_2 + h_2) + y(x_1, x_2 - h_2)) + \\ &+ \frac{1}{12} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (y(x_1 + h_1, x_2 + h_2) + y(x_1 - h_1, x_2 + h_2) + \\ &+ y(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + y(x_1 - h_1, x_2 - h_2)) + F(x), \quad x \in \omega, \\ V(x) &= 0, \quad x \in \gamma. \end{aligned}$$

При  $1/\sqrt{5} \leq h_1/h_2 \leq \sqrt{5}$  виконані умови теореми порівняння [86], з якої випливає оцінка (2.48).  $\square$

Зазначимо, що у випадку квадратної сітки ( $h_1 = h_2$ ) умова (2.46) виконується.

**2.3.3. Априорна оцінка похибки методу.** Дослідимо швидкість збіжності різницевої схеми (2.32) в сітковій нормі  $C(\omega)$  у випадку, коли розв'язок вихідної диференціальної задачі належить класу  $W_\infty^m(D)$ ,  $2 < m \leq 6$ .

**Лема 2.9.** Нехай розв'язок  $u(x_1, x_2)$  задачі (2.31) задовольняє умову  $\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2}, \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \in L_\infty(D)$ . Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x)$  справджується оцінка

$$|\psi(x)| \leq \frac{7}{720} |h|^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} \right\|_{L_\infty(D)} + \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)} \right\}, \quad x \in \omega. \quad (2.49)$$

Доведення. Розглянемо похибку апроксимації  $\psi(x) = \Lambda_1 \eta_1(x) + \Lambda_2 \eta_2(x)$  в (2.33). Для доданка  $\eta_1(x)$  маємо

$$\eta_1(x) = u(x) - T_2 u(x) + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 u(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) \left[ u(x_1, x_2) - u(x_1, \xi) + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi)}{\partial \xi^2} \right] d\xi = \\
&= \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) \left[ -\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} (\xi - x_2) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} (\xi - x_2)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^3} (\xi - x_2)^3 - \frac{1}{3!} \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1)^3 \frac{\partial^4 u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1^4} d\xi_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_2^2}{12} \left( \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^3} (\xi - x_2) + \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1) \frac{\partial^4 u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1^4} d\xi_1 \right) \right] d\xi.
\end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) (\xi - x_2) d\xi &= 0, \quad \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) (\xi - x_2)^3 d\xi = 0, \\
\frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) (\xi - x_2)^2 d\xi &= \frac{h_2^2}{6},
\end{aligned}$$

одержимо

$$\begin{aligned}
\eta_1(x) &= -\frac{1}{6h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1)^3 \frac{\partial^4 u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1^4} d\xi_1 + \\
&\quad + \frac{1}{12h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1) \frac{\partial^4 u(x_1, \xi_1)}{\partial \xi_1^4} d\xi_1.
\end{aligned}$$

Звідси випливає зображення

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1 \eta_1(x) = \\
&= -\frac{1}{6h_1^2 h_2^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1)^3 \frac{\partial^6 u(\xi_2, \xi_1)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1^4} d\xi_1 + \\
&\quad + \frac{1}{12h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \times \\
&\quad \times \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1) \frac{\partial^6 u(\xi_2, \xi_1)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1^4} d\xi_1, \quad x \in \omega.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
|\Lambda_1 \eta_1(x)| &\leq \left[ \frac{1}{6h_1^2 h_2^2} h_1^2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \left| \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1)^3 d\xi_1 \right| + \right. \\
&+ \frac{1}{12h_1^2} h_1^2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \left| \int_{x_2}^{\xi} (\xi - \xi_1) d\xi_1 \right| \left. \right] \cdot \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)} = \\
&= \left[ \frac{1}{6h_1^2 h_2^2} h_1^2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) \frac{(x_2 - \xi)^4}{4} d\xi + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{12h_1^2} h_1^2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) \frac{(x_2 - \xi)^2}{2} d\xi \right] \cdot \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)} = \quad (2.50) \\
&= \left( \frac{1}{6h_1^2 h_2^2} h_1^2 \frac{h_2^6}{60} + \frac{1}{12h_1^2} h_1^2 \frac{h_2^4}{12} \right) \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)} = \frac{7}{720} h_2^4 \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)}, \quad x \in \omega.
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо оцінку

$$|\Lambda_2 \eta_2(x)| \leq \frac{7}{720} h_1^4 \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} \right\|_{L_\infty(D)}, \quad x \in \omega. \quad (2.51)$$

З нерівностей (2.50) і (2.51) виводимо

$$\begin{aligned}
|\psi(x)| &= |\Lambda_1 \eta_1(x) + \Lambda_2 \eta_2(x)| \leq |\Lambda_1 \eta_1(x)| + |\Lambda_2 \eta_2(x)| \leq \\
&\leq \frac{7}{720} h_2^4 \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right\|_{L_\infty(D)} + \frac{7}{720} h_1^4 \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} \right\|_{L_\infty(D)},
\end{aligned}$$

звідки випливає твердження леми.  $\square$

З доведених вище лем випливає наступний основний результат.

**Теорема 2.3.** *Нехай розв'язок  $u(x_1, x_2)$  задачі (2.31) задовольняє умову  $\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2}, \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \in L_\infty(D)$ , а для кроків  $h_1, h_2$  виконується нерівність  $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}$ . Тоді точність різницевої схеми (2.32) характеризується оцінкою*

$$|z(x)| \leq M v(x) \|u\|_{W_\infty^6(D)} |h|^4, \quad x \in \omega,$$

де  $M$  – не залежна от  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$  стала, а для функції  $v(x)$  виконуються співвідношення  $v(x) = O(|h|)$  и  $v(x) = O\left(|h|^2 \ln \frac{1}{|h|}\right)$  поблизу сторін і вершин прямокутника  $D$  відповідно.

Доведення. Застосовуючи лему 2.8 до задачі (2.33) при  $F(x) = \psi(x)$ , дістаємо оцінку

$$|z(x)| \leq v(x) \|\psi\|_{C(\omega)}, \quad x \in \omega.$$

Твердження теореми тепер випливає з лем 3.7 і 3.9.  $\square$

**Зауваження 2.2.** Користуючись методами [90], можна довести оцінку

$$|z(x)| \leq M v(x) \|u\|_{W_\infty^m(D)} |h|^{m-2}, \quad x \in \omega \quad (2 < m \leq 6),$$

де  $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}$ , стала  $M$  не залежить від  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ , а для функції  $v(x)$  виконуються співвідношення  $v(x) = O(|h|)$  и  $v(x) = O(|h|^2 \ln |h|^{-1})$  поблизу сторін і вершин прямокутника  $D$  відповідно.

**2.3.4. Висновки.** Доведена в теоремі 2.3 апріорна оцінка свідчить, що в нормі  $C(\omega)$  похибка схеми (2.32) є величиною  $O(|h|^5)$  поблизу сторін та  $O(|h|^6 \ln |h|^{-1})$  – поблизу вершин прямокутника  $D$ , тоді як далі від них дорівнює  $O(|h|^4)$ .

Результати підрозд. 2.3 опубліковано в [69, 208] та доповідалися на конференції [13].

## 2.4. Вагові оцінки точності різницевих апроксимацій одновимірного параболічного рівняння

**2.4.1. Дискретизація вихідної задачі.** Розглянемо початково-крайову задачу для одновимірного рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Уведемо сіткові множини:

$$\begin{aligned} \omega &= \{x_i = ih, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad h = 1/N\}, \quad N \geq 2 - \text{ціле}, \\ \omega^- &= \omega \cup \{0\}, \quad \omega^+ = \omega \cup \{1\}, \quad \bar{\omega} = \omega \cup \{0\} \cup \{1\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \tau = T/M, \quad M \geq 2 - \text{ціле}\}, \quad \omega_{Q_T} = \omega^- \times \omega_\tau. \end{aligned}$$

Застосовуючи оператор (див. оператори точних різницевоїх схем [90])

$$(Tv)(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) v(\xi) d\xi, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h^2} \int_0^h (h - \xi) v(\xi) d\xi, & x = 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

та враховуючи його властивості

$$\left( T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)(x) = \begin{cases} u_{\bar{x}x}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} u_x, & x = 0, \end{cases}$$

апроксимуємо задачу (2.1) різницевою схемою

$$\begin{aligned} \bar{y}_t(x,t) - (\Lambda y)(x,t) &= (Tf)(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{Q_T} = \omega^- \times \omega_\tau, \\ y(1,t) &= 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \omega^-. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\text{де } (\Lambda y)(x) = \begin{cases} y_{\bar{x}x}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} y_x, & x = 0. \end{cases}$$

Для похибки  $z(x,t) = v(x,t) - u(x,t)$  одержимо задачу

$$\begin{aligned} \bar{z}_t(x,t) - (\Lambda z)(x,t) &= \psi(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{Q_T} = \omega^- \times \omega_\tau, \\ z(1,t) &= 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ z(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \omega^-, \end{aligned} \quad (2.55)$$

де  $\psi(x,t)$  – похибка апроксимації:

$$\psi(x,t) = (Tf)(x,t) - u_{\bar{t}}(x,t) + (\Lambda u)(x,t) = \frac{d(Tu)}{dt}(x,t) - u_{\bar{t}}(x,t).$$

На множині  $H$  сіткових функцій, які визначені на сітці  $\bar{\omega}$  і перетворюються на нуль при  $x=1$ , задамо скалярний добуток і норму:

$$(y,v) = \sum_{x \in \omega} hy(x)v(x) + \frac{h}{2}y(0)v(0),$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v,v)} = \left( \sum_{x \in \omega} hv^2(x) + \frac{h}{2}v^2(0) \right)^{1/2}.$$

Уведемо різницевий оператор  $A: H \rightarrow H$ ,  $Ay = -\Lambda y$  (у разі потреби задані на сітці  $\omega$  функції довизначаються нулем при  $x=1$  і будь-яким значенням – при  $x=0$ ). Тоді різницеву схему (2.54) можна записати у вигляді

$$y_{\bar{t}}(\cdot,t) + Ay(\cdot,t) = Tf(\cdot,t), \quad t \in \omega_{\tau},$$

$$y(\cdot,0) = \varphi(\cdot),$$

де  $y(\cdot,t)$ ,  $Tf(\cdot,t)$ ,  $\varphi(\cdot) \in H$ . Відомо [86], що оператор  $A$  є самоспряженим і додатно визначеним в  $H$ .

**2.4.2. Оцінка похибки з урахуванням крайової умови.** Доведемо наступне допоміжне твердження.

**Лема 2.10.** *Для похибки  $z(x,t)$  справджується оцінка*

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \frac{z(x,\eta)}{1-x} \right)^2 \leq 4 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot,\eta)\|^2, \quad (x,t) \in \omega^- \times \omega_{\tau}. \quad (2.56)$$

Доведення. За допомогою функції Гріна

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 1-\xi, & x \leq \xi, \\ 1-x, & \xi \leq x, \end{cases}$$

різницевої крайової задачі  $\Lambda y(x) = -f(x)$ ,  $x \in \omega^-$ ,  $y(1) = 0$ , розв'язок задачі (2.55) можна подати у вигляді

$$z(x,t) = (G(x,\cdot), \psi(\cdot,t) - z_{\bar{t}}(\cdot,t)) =$$

$$= \sum_{\xi \in \omega} hG(x,\xi)(\psi(\xi,t) - z_{\bar{t}}(\xi,t)) + \frac{h}{2}G(x,0)(\psi(0,t) - z_{\bar{t}}(0,t)), \quad (x,t) \in \omega^- \times \omega_{\tau}.$$

Звідси випливає нерівність

$$|z(x,t)| \leq \sum_{\xi \in \omega} hG(x,\xi)(|\psi(\xi,t)| + |z_{\bar{t}}(\xi,t)|) + \frac{h}{2}G(x,0)(|\psi(0,t)| + |z_{\bar{t}}(0,t)|) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq (1-x) \left( \sum_{\xi \in \omega} h(|\psi(\xi, t)| + |z_{\bar{t}}(\xi, t)|) + \frac{h}{2} (|\psi(0, t)| + |z_{\bar{t}}(0, t)|) \right) \leq \\ &\leq (1-x) (\|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|), \quad (x, t) \in \omega^- \times \omega_{\tau}, \end{aligned}$$

тоді

$$\frac{|z(x, t)|}{1-x} \leq \|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|, \quad (x, t) \in \omega^- \times \omega_{\tau}. \quad (2.57)$$

Оцінимо другий доданок у правій частині. Для цього знайдемо квадрат норми в  $H$  лівої та правої частин рівняння (2.55):

$$\|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|^2 + 2(z_{\bar{t}}(\cdot, t), -\Lambda z(\cdot, t)) + \|\Lambda z(\cdot, t)\|^2 = \|\psi(\cdot, t)\|^2, \quad t \in \omega_{\tau}.$$

Звідси з урахуванням перетворень

$$\begin{aligned} &\sum_{\eta=\tau}^t \tau 2(z_{\bar{t}}(\cdot, \eta), -\Lambda z(\cdot, \eta)) = -2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \sum_{\xi \in \omega} h z_{\bar{\eta}}(\xi, \eta) z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) + \frac{h}{2} z_{\bar{\eta}}(0, \eta) \frac{2}{h} z_{\xi}(0, \eta) \right) = \\ &= -2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( - \sum_{\xi \in \omega^+} h z_{\bar{\eta}}(\xi, \eta) z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) + z_{\bar{\eta}}(1, \eta) z_{\bar{\xi}}(1, \eta) - \right. \\ &\quad \left. - z_{\bar{\eta}}(0, \eta) z_{\bar{\xi}}(h, \eta) + \frac{h}{2} z_{\bar{\eta}}(0, \eta) \frac{2}{h} z_{\xi}(0, \eta) \right) = 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{\xi \in \omega^+} h z_{\bar{\eta}}(\xi, \eta) z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) = \\ &= 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{\xi \in \omega^+} h \frac{z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) - z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta - \tau)}{\tau} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left[ \left( z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) - z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta - \tau) \right) + \left( z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta - \tau) + z_{\bar{\xi}}(\xi, \eta) \right) \right] = \\ &= \tau \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{\xi \in \omega^+} h z_{\bar{\eta}}^2(\xi, \eta) + \sum_{\xi \in \omega^+} h \sum_{\eta=\tau}^t \left( z_{\bar{\xi}}^2(\xi, \eta) - z_{\bar{\xi}}^2(\xi, \eta - \tau) \right) = \\ &= \tau \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{\xi \in \omega^+} h z_{\bar{\eta}}^2(\xi, \eta) + \sum_{\xi \in \omega^+} h z_{\bar{\xi}}^2(\xi, t) \geq 0 \end{aligned}$$

одержимо оцінку

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \|z_{\bar{\eta}}(\cdot, \eta)\|^2 \leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2, \quad t \in \omega_{\tau}.$$

Тоді з нерівності (2.57) виводимо

$$\begin{aligned} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \frac{z(x,t)}{1-x} \right)^2 &\leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|)^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\|\psi(\cdot, t)\|^2 + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|^2) \leq 4 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2. \end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

**Лема 2.11.** Нехай розв'язок  $u(x,t)$  задачі (2.52) задовольняє умови  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L_2(Q_T)$ . Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x,t)$  справджується оцінка

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \leq 8\tau^2 \int_0^t d\xi \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + 8h^2 \int_0^t d\xi_1 \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta. \quad (2.58)$$

Доведення. Для  $x \in \omega$  з урахуванням (2.53) маємо

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \frac{d}{dt} T(u(\cdot, t)) - u_{\bar{t}}(x,t) = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\xi - \frac{u(x,t) - u(x, t - \tau)}{\tau} = \\ &= \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\eta - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \\ &= \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_x^{\xi} \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} d\xi_1, \end{aligned}$$

звідки дістаємо оцінку

$$|\psi(x,t)| \leq \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{t-\tau}^t \left| \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right| d\eta_1 +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\tau h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x-h}^{x+h} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right| d\xi_1 \leq \\
& \leq \frac{1}{\tau h^2} h\tau \sqrt{2h\tau} \left( \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \\
& \quad + \frac{1}{\tau h^2} h^2 \sqrt{2h\tau} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x-h}^{x+h} \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 \right)^{1/2} = \\
& = \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{h}} \left( \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{\tau}} \left( \int_{x-h}^{x+h} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Для вузла  $x = 0$  внаслідок (2.53) маємо

$$\begin{aligned}
\psi(0, t) &= \frac{d}{dt} T(u(\cdot, t)) - u_{\bar{t}}(0, t) = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h - \xi) \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\xi - \frac{u(0, t) - u(0, t - \tau)}{\tau} = \\
&= \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} d\eta - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{\partial u(0, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \\
&= \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(0, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \\
&= \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(0, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \\
&= \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} d\xi_1,
\end{aligned}$$

звідки виводимо

$$\begin{aligned}
|\psi(0, t)| &\leq \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{t-\tau}^t \left| \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right| d\eta_1 + \\
&\quad + \frac{2}{\tau h^2} \int_0^h (h - \xi) d\xi \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^h \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right| d\xi_1 \leq \\
&\leq \frac{2}{\tau h^2} h\tau \sqrt{h\tau} \left( \int_0^h d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\tau h^2} \frac{h^2}{2} \sqrt{h\tau} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^h \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 \right)^{1/2} = \\
& = \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}} \left( \int_0^h d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}} \left( \int_0^h d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Знайдемо тепер

$$\begin{aligned}
& \|\psi(\cdot, t)\|^2 = \sum_{x \in \omega} h \psi^2(x, t) + \frac{h}{2} \psi^2(0, t) \leq \\
& \leq 4\tau \sum_{x \in \omega} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + \frac{4h^2}{\tau} \sum_{x \in \omega} \int_{x-h}^{x+h} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta + \\
& \quad + 4\tau \int_0^h d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + \frac{h^2}{\tau} \int_0^h d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \leq \\
& \leq 8\tau \int_0^h d\xi \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + \frac{8h^2}{\tau} \int_0^h d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta,
\end{aligned}$$

що й доводить лему.  $\square$

З леми 2.10 і леми 2.11 випливає наступне твердження.

**Теорема 2.4.** *Нехай розв'язок  $u(x, t)$  задачі (2.52) задовольняє умову  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L_2(Q_T)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.54) характеризується ваговою апріорною оцінкою*

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \frac{z(x, \eta)}{1-x} \right)^2 \right)^{1/2} \leq 4\sqrt{2} \left\{ \tau \left( \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\cdot, \eta) \right\|^2 d\eta \right)^{1/2} + h \left( \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta}(\cdot, \eta) \right\|^2 d\eta \right)^{1/2} \right\},$$

$(x, t) \in \omega^- \times \omega_\tau$ .

Доведення. Використовуючи нерівність  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , з оцінок (2.56) і (2.58) маємо

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \frac{z(x, \eta)}{1-x} \right)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2 \left\{ 8\tau^2 \int_0^1 d\xi \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + 8h^2 \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right\}^{1/2}$$

$$\leq 4\sqrt{2}\tau \left( \int_0^1 d\xi \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + 4\sqrt{2}h \left( \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}. \quad \square$$

**2.4.3. Оцінка похибки з урахуванням початкової умови.** Розпочнемо з доведення наступного твердження.

**Лема 2.12.** Для похибки  $z(x, t)$  справджується оцінка

$$\left\| \frac{z(\cdot, t)}{[(2 + \ln^2 t)t]^{1/2}} \right\| \leq 2\pi/\sqrt{2} \left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \right)^{1/2}, \quad t \in \omega_\tau.$$

Доведення. Помножимо рівняння (2.55) скалярно в  $H$  на  $z(\cdot, t)$ :

$$\sum_{x \in \omega} h z_{\bar{t}}(x, t) z(x, t) + \frac{h}{2} z_{\bar{t}}(0, t) z(0, t) - \sum_{x \in \omega} h z_{\bar{x}x}(x, t) z(x, t) - \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{h} z_x(0, t) z(0, t) =$$

$$= \sum_{x \in \omega} h \psi(x, t) z(x, t) + \frac{h}{2} \psi(0, t) z(0, t).$$

Перетворимо перші два доданки в лівій частині цієї рівності:

$$\sum_{x \in \omega} h z_{\bar{t}}(x, t) z(x, t) + \frac{h}{2} z_{\bar{t}}(0, t) z(0, t) =$$

$$= \sum_{x \in \omega} h \frac{z(x, t) - z(x, t - \tau)}{\tau} \frac{z(x, t) - z(x, t - \tau) + z(x, t) + z(x, t - \tau)}{2} +$$

$$+ \frac{h}{2} \frac{z(0, t) - z(0, t - \tau)}{\tau} \frac{z(0, t) - z(0, t - \tau) + z(0, t) + z(0, t - \tau)}{2} =$$

$$= \sum_{x \in \omega} \frac{h\tau}{2} z_{\bar{t}}^2(x, t) + \sum_{x \in \omega} \frac{h}{2\tau} (z^2(x, t) - z^2(x, t - \tau)) +$$

$$+ \frac{h\tau}{4} z_{\bar{t}}^2(0, t) + \frac{h}{4\tau} (z^2(0, t) - z^2(0, t - \tau)),$$

для решти доданків ліворуч маємо

$$- \sum_{x \in \omega} h z_{\bar{x}x}(x, t) z(x, t) - z_x(0, t) z(0, t) =$$

$$= \sum_{x \in \omega^-} h z_{\bar{x}}^2(x, t) - z_{\bar{x}}(1, t) z(1, t) + z_{\bar{x}}(h, t) z(0, t) - z_x(0, t) z(0, t) = \sum_{x \in \omega^-} h z_{\bar{x}}^2(x, t).$$

Виконавши ці перетворення, одержимо рівність

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \omega} \frac{h\tau}{2} z_t^2(x, t) + \sum_{x \in \omega} \frac{h}{2\tau} (z^2(x, t) - z^2(x, t - \tau)) + \frac{h\tau}{4} z_t^2(0, t) + \\ + \frac{h}{4\tau} (z^2(0, t) - z^2(0, t - \tau)) + \sum_{x \in \omega^-} h z_x^2(x, t) = (\psi(\cdot, t), z(\cdot, t)), \end{aligned}$$

обидві частини якої помножимо на  $\tau$  просумуємо по  $\eta$  від  $\eta = \tau$  до  $\eta = t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|z_{\bar{\eta}}(\cdot, \eta)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \omega} h (z^2(x, t) - z^2(x, 0)) + \frac{h}{4} (z^2(0, t) - z^2(0, 0)) + \\ + \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{x \in \omega^-} h z_x^2(x, \eta) = \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\psi(\cdot, \eta), z(\cdot, \eta)), \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|z_{\bar{\eta}}(\cdot, \eta)\|^2 + \frac{1}{2} \|z(\cdot, t)\|^2 + \sum_{\eta=\tau}^t \tau \sum_{x \in \omega^-} h z_x^2(x, \eta) = \\ = \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \psi(\cdot, \eta) \sqrt{(2 + \ln^2 \eta) \eta}, \frac{z(\cdot, \eta)}{\sqrt{(2 + \ln^2 \eta) \eta}} \right). \end{aligned}$$

З урахуванням співвідношення  $(y, v) \leq \|y\| \cdot \|v\| \leq \frac{1}{2} (\|y\|^2 + \|v\|^2)$  маємо

$$\frac{1}{2} \|z(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 (2 + \ln^2 \eta) \eta + \frac{1}{2} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{\|z(\cdot, \eta)\|^2}{(2 + \ln^2 \eta) \eta}.$$

Поділивши на  $(2 + \ln^2 t)t$ , одержимо нерівність

$$\begin{aligned} \frac{\|z(\cdot, t)\|^2}{(2 + \ln^2 t)t} \leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \frac{(2 + \ln^2 \eta) \eta}{(2 + \ln^2 t)t} + \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{\|z(\cdot, \eta)\|^2}{(2 + \ln^2 \eta) \eta (2 + \ln^2 t)t} \leq \\ \leq \frac{\|z(\cdot, t)\|^2}{(2 + \ln^2 t)t} \leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 + \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{1}{(2 + \ln^2 \eta) \eta} \frac{\|z(\cdot, \eta)\|^2}{(2 + \ln^2 \eta) \eta}. \end{aligned}$$

Увівши позначення  $Z(t) = \frac{\|z(\cdot, t)\|^2}{(2 + \ln^2 t)t}$  і  $g(t) = \frac{1}{(2 + \ln^2 t)t}$ , перепишемо її у вигляді

$$Z(t) \leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 + \sum_{\eta=\tau}^t \tau g(\eta) Z(\eta). \quad (2.59)$$

Для розв'язання (2.59) розглянемо допоміжне рівняння

$$v(t) = \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 + \sum_{\eta=\tau}^t \tau g(\eta) v(\eta), \quad v(0) = 0.$$

Звідси виводимо

$$v(t) - v(t - \tau) = \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2 + \tau g(t) v(t),$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v(t - \tau)}{1 - \tau g(t)} + \frac{\tau}{1 - \tau g(t)} \|\psi(\cdot, t)\|^2 \leq 4^{\tau g(t)} \left( v(t - \tau) + \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2 \right) \leq \\ &\leq 4^{\tau g(t)} \left[ 4^{\tau g(t - \tau)} \left( v(t - \tau) + \tau \|\psi(\cdot, t - \tau)\|^2 \right) + \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2 \right] \leq \\ &\leq 4^{\tau g(t) + \tau g(t - \tau)} \left[ v(t - 2\tau) + \tau \|\psi(\cdot, t - \tau)\|^2 + \tau \|\psi(\cdot, t)\|^2 \right] \leq \dots \leq \\ &\leq 4^{\tau \sum_{\eta=\tau}^t g(\eta)} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \leq 4^{\int_0^t g(\eta) d\eta} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 = \\ &= 4^{\int_0^t \frac{d\eta}{(2 + \ln^2 \eta)\eta}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 = \\ &= 4^{\int_0^t \frac{d\eta}{(2 + \ln^2 \eta)\eta}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 = 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\ln t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \leq \\ &\leq 4^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 = 4^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 = 2^{\pi\sqrt{2}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2. \end{aligned}$$

Тут враховано зростання функції  $\varphi(x) = (1 - x)^{-1/x} = e^{-\ln(1-x)/x}$  на інтервалі  $(0, 1)$ , а також нерівності

$$e < e^{-\ln(1-x)/x} \leq e^{\ln 4} = 4 \quad (0 < x \leq 1/2),$$

$$0 < \tau g(\eta) = \frac{\tau}{(2 + \ln^2 \eta)\eta} \leq \frac{1}{2 + \ln^2 \eta} \leq \frac{1}{2} \quad (\eta \geq \tau),$$

$$(1 - \tau g(\eta))^{-1} = \left[ (1 - \tau g(\eta))^{-\frac{1}{\tau g(\eta)}} \right]^{\tau g(\eta)} \leq 4^{\tau g(\eta)} \quad (\eta \geq \tau).$$

Тоді з нерівності (2.59) випливає оцінка

$$Z(t) \leq 2^{\pi\sqrt{2}} \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2,$$

а разом з нею – і твердження леми.  $\square$

Доведемо тепер наступний результат.

**Теорема 2.5.** Нехай розв'язок  $u(x,t)$  задачі (2.52) задовольняє умову  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L_2(Q_T)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.54) характеризується ваговою апіорною оцінкою

$$\left\| \frac{z(\cdot, t)}{[(2 + \ln^2 t)t]^{1/2}} \right\| \leq 2\pi/\sqrt{2} 2\sqrt{2} \left[ \tau \left( \int_0^1 d\xi \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + h \left( \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \right], \quad t \in \omega_\tau.$$

Доведення. Застосовуючи нерівність  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , лему 2.11 і лему 2.12, дістанемо

$$\left\| \frac{z(\cdot, t)}{[(2 + \ln^2 t)t]^{1/2}} \right\| \leq 2\pi/\sqrt{2} \left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq 2\pi/\sqrt{2} \left[ 2\sqrt{2}\tau \left( \int_0^1 d\xi \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + 2\sqrt{2}h \left( \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \right].$$

Теорему доведено.  $\square$

**2.4.4. Висновки.** Доведена в теоремі 2.4 вагова апіорна оцінка свідчить про те, що точність схеми (2.54) поблизу правої сторони  $x=1$  просторово-часового прямокутника  $Q_T = (0,1) \times (0,T)$  дорівнює  $O(h(\tau+h))$ , тоді як далі від неї є величиною  $O(\tau+h)$ .

Доведена в теоремі 2.5 вагова апіорна оцінка показує, що точність схеми (2.54) поблизу нижньої сторони  $t=0$  просторово-часового прямокутника  $Q_T = (0,1) \times (0,T)$  є величиною  $O\left(\sqrt{(2 + \ln^2 \tau)\tau(\tau+h)}\right)$ , тоді як далі від неї дорівнює  $O(\tau+h)$ .

Результати підрозд. 2.4 опубліковано в [66, 203] та доповідалися на конференціях [15, 107, 202].

## 2.5. Вагові оцінки точності різницевих апроксимацій двовимірного рівняння теплопровідності

**2.5.1. Дискретизація вихідної задачі.** Розглянемо задачу з мішаними крайовими умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = Q \times (0,T), \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} &= 0, \quad (x,t) \in \Gamma_{-1} \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in (\Gamma \setminus \Gamma_{-1}) \times (0,T), \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (2.60)$$

де  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $Q = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$  – одиничний

квадрат,  $\Gamma = \partial Q$  – межа квадрата  $Q$ ,  $\Gamma_{-1} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 < x_2 < 1\}$  – ліва сторона квадрата  $Q$ .

Уведемо сіткові множини:

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha = 1/N_\alpha\}, \quad N_\alpha \geq 2 \text{ – ціле число,}$$

$$\omega_\alpha^- = \omega_\alpha \cup \{0\}, \quad \omega_\alpha^+ = \omega_\alpha \cup \{1\}, \quad \bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\},$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \quad \gamma = \bar{\omega} \setminus \omega,$$

$$\gamma_{-\alpha} = \{x_\alpha = 0, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \quad \gamma_{+\alpha} = \{x_\alpha = 1, x_{3-\alpha} \in \omega_{3-\alpha}\}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, M-1}, \tau = T/M\}, \quad M \geq 2 \text{ – ціле число, } \omega_{Q_T} = (\omega \cup \gamma_{-1}) \times \omega_\tau.$$

За допомогою операторів [90]

$$(T_2 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) v(x_1, \xi_2) d\xi_2, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1},$$

$$(T_1 v)(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) v(\xi_1, x_2) d\xi_1, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) v(\xi_1, x_2) d\xi_1, & x \in \gamma_{-1}, \end{cases}$$

апроксимуємо задачу (2.60) різницевою схемою

$$\begin{aligned}
y_{\bar{t}}(x,t) - (\Lambda y)(x,t) &= (T_1 T_2 f)(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{Q_T}, \\
y(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in (\gamma \setminus \gamma_{-1}) \times \omega_\tau, \\
y(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \omega,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\text{де } \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_1 y = \begin{cases} y_{\bar{x}_1} x_1, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} y_{x_1}, & x \in \gamma_{-1}, \end{cases} \quad \Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2} x_2, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}.$$

Для похибки  $z(x,t) = y(x,t) - u(x,t)$  маємо задачу

$$\begin{aligned}
z_{\bar{t}}(x,t) - (\Lambda z)(x,t) &= \psi(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{Q_T}, \\
z(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in (\gamma \setminus \gamma_{-1}) \times \omega_\tau, \\
z(x,0) &= 0, \quad x \in \omega,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

де  $\psi = T_1 T_2 f - u_{\bar{t}} + \Lambda u = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2 + \eta_3$  – похибка апроксимації:

$$\eta_\alpha(x,t) = u(x,t) - (T_{3-\alpha} u)(x,t), \quad \alpha = 1, 2, \quad \eta_3(x,t) = \frac{\partial(Tu)}{\partial t}(x,t) - u_{\bar{t}}(x,t).$$

**2.5.2. Різницева функція Гріна.** На множині  $H$  сіткових функцій, визначених на  $\bar{\omega}$  і рівних нулю на  $\gamma \setminus \gamma_{-1}$ , задамо скалярний добуток і норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y(x) v(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y(x) v(x),$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 v^2(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Уведемо різницевий оператор

$$A: H \rightarrow H, \quad A = A_1 + A_2, \quad A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

(у разі потреби задані на сітці  $\omega$  функції до визначаються нулем при  $x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}$  і будь-яким значенням – при  $x \in \gamma_{-1}$ ). Відомо [86, 90], що оператор  $A$  є самоспряженим і додатно визначеним в  $H$ , а отже, існує обернений оператор  $A^{-1}: H \rightarrow H$ . Знайдемо

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_1} x_1 - y_{\bar{x}_2} x_2)^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( -\frac{2}{h_1} y_{x_1} - y_{\bar{x}_2} x_2 \right)^2 =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 x_1}^2 + y_{\bar{x}_2 x_2}^2) + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( \frac{4}{h_1^2} y_{x_1}^2 + y_{\bar{x}_2 x_2}^2 \right) + \\
&\quad + \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 2 y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 2 \frac{2}{h_1} y_{x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} = \quad (2.63) \\
&= \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1}^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( \frac{2}{h_1} y_{x_1} \right)^2 + \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2 x_2}^2 + \\
&\quad + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y_{\bar{x}_2 x_2}^2 + 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2}^2 = \|A_1 y\|^2 + \|A_2 y\|^2 + 2 \|B_1^* y\|_{1*}^2,
\end{aligned}$$

де  $B_1^* : H \rightarrow H_1$ ,  $B_1^* y = -y_{x_1 x_2}$ ,  $x \in \omega_1^- \times \omega_2^-$ , – різницевий оператор, який діє з  $H$  у простір  $H_1$  сіткових функцій, визначених на множині вузлів  $\omega_1^- \times \omega_2^-$ , зі скалярним добутком і нормою

$$(y, v)_1 = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_1 = \sqrt{(y, y)_1} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y^2(x).$$

Використовуючи формули підсумовування частинами, маємо

$$\begin{aligned}
(B_1^* y, w)_1 &= - \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1 x_2} w = \\
&= - \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2} = (y, B_1 w),
\end{aligned}$$

де  $B_1 : H_1 \rightarrow H$  – оператор, спряжений до оператора  $B_1^* : H \rightarrow H_1$ ,

$$B_1 w(x) = - \begin{cases} w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2}, & x \in \gamma_{-1}. \end{cases} \quad (2.64)$$

Аналогічно знайдемо

$$\begin{aligned}
\|A y\|^2 &= (A y, A y) = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( -\frac{2}{h_1} y_{x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} \right)^2 = \\
&= \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1}^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( \frac{2}{h_1} y_{x_1} \right)^2 + \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2 x_2}^2 + \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$+\frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y_{\bar{x}_2 x_2}^2 + 2 \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2}^2 = \|A_1 y\|^2 + \|A_2 y\|^2 + 2 \|B_2^* y\|_2^2,$$

де  $B_2^* : H \rightarrow H_2$ ,  $B_2^* y = -y_{x_1 \bar{x}_2}$ ,  $x \in \omega_1^- \times \omega_2^+$ , – різницевий оператор, який діє з  $H$  у простір  $H_2$  сіткових функцій, визначених на множині вузлів  $\omega_1^- \times \omega_2^+$ , зі скалярним добутком і нормою

$$(y, v)_2 = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_2 = \sqrt{(y, y)_2} = \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y^2(x).$$

Маємо

$$(B_2^* y, w)_2 = - \sum_{x \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1 \bar{x}_2} w = - \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1 x_2} - \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{x_2} = (y, B_2 w),$$

де  $B_2 : H_2 \rightarrow H$  – оператор, спряжений до оператора  $B_2^* : H \rightarrow H_2$ ,

$$B_2 w(x) = - \begin{cases} w_{\bar{x}_1 x_2}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h_1} w_{x_2}, & x \in \gamma_{-1}. \end{cases} \quad (2.66)$$

Застосовуючи до операторів  $A, B_1, B_2$  лему [90, с. 54], одержимо оцінку

$$\|A^{-1} B_k v\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_k \quad \forall v \in H_k \quad (k=1, 2). \quad (2.67)$$

Позначимо  $G(x, \xi)$  функцію Гріна різницевої крайової задачі (2.62):

$$\begin{aligned} -G_{\bar{\xi}_1 \xi_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \xi_2}(x, \xi) &= \frac{\delta(x_1, \xi_1) \delta(x_2, \xi_2)}{h_1 h_2}, \quad \xi \in \omega, \\ -\frac{2}{h_1} G_{\xi_1}(x, \xi) &= \frac{2}{h_1} \frac{\delta(x_1, \xi_1) \delta(x_2, \xi_2)}{h_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1}, \\ G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

де  $\delta(m, n)$  – символ Кронекера,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ .

**Лема 2.13.** *Справджується нерівність*

$$\|G(x, \cdot)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x),$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \sqrt{(1-x_1)x_2} \right\}$ .

Доведення. За допомогою функції Гевісайда  $H(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$  задачу (2.68)

можна записати так:

$$\begin{aligned} -G_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2}(x, \xi) &= (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega, \\ -\frac{2}{h_1} G_{\xi_1}(x, \xi) &= \frac{2}{h_1} (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2))_{\bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1}, \\ G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned}$$

або в операторному вигляді

$$A_{\xi} G(x, \xi) = -B_{1\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(\xi_2 - x_2)).$$

Звідси з урахуванням (2.67) дістаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|G(x, \cdot)\| &= \|-A_{\xi}^{-1} B_{1\xi} (H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2))\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|H(\cdot - x_1)H(\cdot - x_2)\|_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1 \times \omega_2} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=0}^{1-h_1} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=0}^{1-h_2} h_2 H^2(\xi_2 - x_2) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=x_2}^{1-h_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Запишемо тепер задачу (2.68) інакше:

$$\begin{aligned} -G_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1}(x, \xi) - G_{\bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2}(x, \xi) &= -(H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2))_{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \omega, \\ -\frac{2}{h_1} G_{\xi_1}(x, \xi) &= -\frac{2}{h_1} (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2))_{\bar{\xi}_2}, \quad \xi \in \gamma_{-1}, \\ G(x, \xi) &= 0, \quad \xi \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{aligned}$$

або в операторному вигляді

$$A_{\xi} G(x, \xi) = B_{2\xi} (H(\xi_1 - x_1)H(x_2 - \xi_2)).$$

Звідси внаслідок (2.67) виводимо

$$\|G(x, \cdot)\| = \|A_{\xi}^{-1} B_{2\xi} (H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot))\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|H(\cdot - x_1)H(x_2 - \cdot)\|_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi \in \omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 H^2(\xi_1 - x_1) H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=0}^{1-h_1} h_1 H^2(\xi_1 - x_1) \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=h_2}^1 h_2 H^2(x_2 - \xi_2) \right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1} h_1 \right)^{1/2} \left( \sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-x_1)x_2}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

З оцінок (2.69) і (2.70) випливає твердження леми.  $\square$

**2.5.3. Оцінка похибки методу з урахуванням крайової умови.** Для доведення основної теореми будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

**Лема 2.14.** Для похибки  $z(x, t)$  справджується оцінка

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{|z(x, \eta)|^2}{\rho^2(x)} \leq 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2. \tag{2.71}$$

Доведення. За допомогою функції Гріна розв'язок  $z(x, t)$  задачі (2.62) можна подати у вигляді

$$z(x, t) = (G(x, \cdot), \psi(\cdot, t) - z_{\bar{t}}(\cdot, t)), \quad (x, t) \in \omega_{Q_T} = (\omega \cup \gamma_{-1}) \times \omega_{\tau}.$$

Застосовуючи тут лему 2.13, одержимо

$$\begin{aligned}
|z(x, t)| &= |(G(x, \cdot), \psi(\cdot, t) - z_{\bar{t}}(\cdot, t))| \leq \|G(x, \cdot)\| \cdot \|\psi(\cdot, t) - z_{\bar{t}}(\cdot, t)\| \leq \\
&\leq \|G(x, \cdot)\| \cdot (\|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x) (\|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|),
\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}
\frac{|z(x, t)|^2}{\rho^2(x)} &\leq \frac{1}{2} (\|\psi(\cdot, t)\| + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|)^2 \leq \|\psi(\cdot, t)\|^2 + \|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|^2, \\
\sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{|z(x, \eta)|^2}{\rho^2(x)} &\leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\|\psi(\cdot, \eta)\|^2 + \|z_{\bar{t}}(\cdot, \eta)\|^2).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Подібно до одновимірного випадку (див. лему 2.10) з рівняння (2.62) знайдемо

$$\|z_{\bar{t}}(\cdot, t)\|^2 - 2(z_{\bar{t}}(\cdot, t), (\Lambda z)(\cdot, t)) + \|(\Lambda z)(\cdot, t)\|^2 = \|\psi(\cdot, t)\|^2,$$

де для другого доданка в лівій частині маємо

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau (z_{\bar{\eta}}(\cdot, \eta), -(\Lambda z)(\cdot, \eta)) &= 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left[ \sum_{\xi \in \omega} h_1 h_2 z_{\bar{\eta}}(\xi, \eta) (-z_{\bar{\xi}_1 \xi_1}(\xi, \eta) - z_{\bar{\xi}_2 \xi_2}(\xi, \eta)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_1}{2} \sum_{\xi \in \gamma_{-1}} h_2 z_{\bar{\eta}}(\xi, \eta) \left( -\frac{2}{h_1} z_{\xi_1}(\xi, \eta) - z_{\bar{\xi}_2 \xi_2}(\xi, \eta) \right) \right] = \\
&= \tau \sum_{\xi \in \omega_1^+ \times \omega_2} h_1 h_2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau z_{\bar{\xi}_1 \bar{\eta}}^2(\xi, \eta) + \sum_{\xi \in \omega_1^+ \times \omega_2} h_1 h_2 z_{\bar{\xi}_1}^2(\xi, t) + \\
&\quad + \tau \sum_{\xi \in \omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau z_{\bar{\xi}_2 \bar{\eta}}^2(\xi, \eta) + \sum_{\xi \in \omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 z_{\bar{\xi}_2}^2(\xi, t) + \\
&\quad + \frac{h_1}{2} \tau \sum_{\substack{\xi_2 \in \omega_2^+ \\ (\xi_1=0)}} h_2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau z_{\bar{\xi}_2 \eta}^2(\xi, \eta) + \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{\xi_2 \in \omega_2^+ \\ (\xi_1=0)}} h_2 z_{\bar{\xi}_2}^2(\xi, t) \geq 0,
\end{aligned}$$

а отже,  $\|z_{\bar{t}}(\cdot, \eta)\| \leq \|\psi(\cdot, \eta)\|$ . Тоді з нерівності (2.72) випливає оцінка

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{|z(x, \eta)|^2}{\rho^2(x)} \leq \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\|\psi(\cdot, \eta)\|^2 + \|z_{\bar{t}}(\cdot, \eta)\|^2) \leq 2 \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2,$$

що і доводить лему.  $\square$

**Лема 2.15.** Нехай розв'язок  $u(x_1, x_2, t)$  задачі (2.60) задовольняє умови

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial t}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 x_2^2}, \frac{\partial^3 u}{x_1^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{x_2^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} \in L_2(Q_T).$$

Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x, t)$  справджується оцінка

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \leq M_1 (\tau^2 h_2^2 + h_2^4 + \tau^2 h_1^2 + h_1^4 + \tau^2 + h_1^2 h_2^2 + h_1^2),$$

де стала  $M_1$  виражається через норми зазначених вище похідних розв'язку  $u(x, t)$ .

Доведення. Для похибки апроксимації  $\psi = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2 + \eta_3$  маємо

$$\begin{aligned}
\|\psi(\cdot, t)\|^2 &= \|(\Lambda_1 \eta_1)(\cdot, t) + (\Lambda_2 \eta_1)(\cdot, t) + \eta_3(\cdot, t)\|^2 \leq \\
&\leq 3 (\|(\Lambda_1 \eta_1)(\cdot, t)\|^2 + \|(\Lambda_2 \eta_1)(\cdot, t)\|^2 + \|\eta_3(\cdot, t)\|^2),
\end{aligned}$$

тоді

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \|\psi(\cdot, \eta)\|^2 \leq 3 \sum_{\eta=\tau}^t \tau (\|(\Lambda_1 \eta_1)(\cdot, t)\|^2 + \|(\Lambda_2 \eta_1)(\cdot, t)\|^2 + \|\eta_3(\cdot, t)\|^2). \quad (2.73)$$

Оцінимо кожен доданок у правій частині цієї нерівності.

Розглянемо доданок  $\|(\Lambda_1 \eta_1)(\cdot, t)\|^2$ . Для вузла  $x \in \omega \cup \gamma_{-1}$  маємо [18]:

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= u(x, t) - (T_2 u)(x, t) = \\ &= \frac{1}{\tau h_2^3} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{\eta}^t d\eta_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1 \partial \xi_1} d\xi_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\tau h_2^3} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3, \end{aligned}$$

звідки з урахуванням співвідношення  $\left(T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)(x, t) = u_{\bar{x}_1 x_1}(x, t)$ ,  $x \in \omega$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x, t) &= \frac{1}{h_1^2 \tau h_2^3} \int_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_4|) d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \times \\ &\quad \times \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{\eta}^t d\eta_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} d\xi_1 + \\ &\quad + \frac{1}{h_1^2 \tau h_2^3} \int_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_4|) d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_2 \times \\ &\quad \times \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3, \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} |\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x, t)| &\leq 4 \sqrt{\frac{\tau h_2}{h_1}} \left( \int_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right)^{1/2} + \\ &\quad + 8 \sqrt{\frac{h_2^3}{h_1 \tau}} \left( \int_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right)^2 d\xi_3 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

що внаслідок нерівності  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  дає оцінку

$$\begin{aligned}
\left| \eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x, t) \right|^2 \leq & 2 \left[ 16 \frac{\tau h_2}{h_1} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 + \right. \\
& \left. + 64 \frac{h_2^3}{h_1 \tau} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right)^2 d\xi_3 \right], \quad x \in \omega.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Застосовуючи співвідношення  $\left( T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)(x, t) = \frac{2}{h_1} u_{x_1}(x, t)$ ,  $x \in \gamma_{-1}$ , одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{2}{h_1} \eta_{1x_1}(x, t) = & \frac{2}{h_1^2 \tau h_2^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_4) d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \times \\
& \times \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{\eta}^t d\eta_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} d\xi_1 + \\
& + \frac{2}{h_1^2 \tau h_2^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_4) d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_2 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \times \\
& \times \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3,
\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{h_1} \eta_{1x_1}(x, t) \right| \leq & \frac{4\sqrt{2\tau h_2}}{\sqrt{h_1}} \left( \int_0^{h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{8\sqrt{2h_2^3}}{\sqrt{h_1 \tau}} \left( \int_0^{h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right)^2 d\xi_3 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

а тому

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{h_1} \eta_{1x_1}(x, t) \right|^2 \leq & 2 \left[ 32 \frac{\tau h_2}{h_1} \int_0^{h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta_1 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 + \right. \\
& \left. + 128 \frac{h_2^3}{h_1 \tau} \int_0^{h_1} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right)^2 d\xi_3 \right], \quad x \in \gamma_{-1}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

З нерівностей (2.74) і (2.75) остаточно виводимо

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta=\tau}^t \tau \|(\Lambda_1 \eta_1)(\cdot, \eta)\|^2 = \\
& = \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x, \eta))^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 \left( \frac{2}{h_1} \eta_{1x_1}(x, \eta) \right)^2 \right) \leq \\
& \leq 128 \left[ \tau^2 h_2^2 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + 4h_2^4 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 \right].
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Розглянемо тепер доданок  $\|(\Lambda_2 \eta_2)(\cdot, t)\|^2$  в (2.73). Для вузла  $x \in \omega$  аналогічно (2.74) маємо

$$\begin{aligned}
|\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, t)|^2 \leq & 2 \left[ 16 \frac{\tau h_1}{h_2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \eta \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_2 + \right. \\
& \left. + 64 \frac{h_1^3}{h_2 \tau} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \right)^2 d\xi_2 \right], \quad x \in \omega.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Для вузла  $x \in \gamma_{-1}$  знайдемо

$$\begin{aligned}
\eta_2(x, t) &= u(x, t) - (T_1 u)(x, t) = -\frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) (u(\xi, x_2, t) - u(0, x_2, t)) d\xi = \\
&= -\frac{2}{h_1^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi \frac{\partial u(\xi_1, x_2, t)}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \\
&= -\frac{2}{\tau h_1^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial u(\xi_1, x_2, t)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_2, x_2, \eta)}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 - \\
&\quad - \frac{2}{\tau h_1^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \frac{\partial u(\xi_2, x_2, \eta)}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \\
&= -\frac{2}{\tau h_1^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_\eta^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, x_2, \eta_1)}{\partial \eta_1 \partial \xi_1} d\eta_1 - \\
&\quad - \frac{2}{\tau h_1^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, x_2, \eta)}{\partial \xi_3^2} d\eta_1 - \\
&\quad - \frac{2}{\tau h_1^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^\xi d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \frac{\partial u(\xi_2, x_2, \eta)}{\partial \xi_2} d\xi_2,
\end{aligned}$$



звідки з урахуванням співвідношення  $\left(T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)(x, t) = u_{\bar{x}_2 x_2}(x, t)$ ,  $x \in \omega \cup \gamma_{-1}$ ,

маємо

$$\begin{aligned} & \eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, t) = \\ & = -\frac{2}{h_2^2 \tau h_1^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_4|) d\xi_4 \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^t d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} d\xi_2 \int_{\eta}^t \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta \partial \xi_1} d\eta_1 - \\ & - \frac{2}{h_2^2 \tau h_1^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_4|) d\xi_4 \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^t d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{\xi_2} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} d\eta_1 - \\ & - \frac{2}{h_2^2 \tau h_1^3} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_4|) d\xi_4 \int_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int_0^t d\xi_1 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \frac{\partial^3 u(\xi_2, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_2} d\xi_2, \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} \left| \eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, t) \right| & \leq \frac{\sqrt{2\tau h_1}}{\sqrt{h_2}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_4 \int_0^{h_1} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \eta \partial \xi_1} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \\ & + \frac{\sqrt{2h_1^3}}{3\sqrt{\tau h_2}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} \right)^2 d\xi_3 \right)^{1/2} + \\ & + \frac{\sqrt{2h_1}}{3\sqrt{\tau h_2}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_4 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_2, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

що внаслідок нерівності  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  дає

$$\begin{aligned} \left| \eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, t) \right|^2 & \leq 3 \left[ \frac{2\tau h_1}{h_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_0^{h_1} d\xi_1 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \eta \partial \xi_1} \right)^2 d\eta + \right. \\ & + \frac{2h_1^3}{9\tau h_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \right)^2 d\xi_1 + \\ & \left. + \frac{2h_1}{9\tau h_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right], \quad x \in \gamma_{-1}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

З нерівностей (2.77) і (2.78) остаточно випливає оцінка

$$\sum_{\eta=\tau}^t \tau \|(\Lambda_2 \eta_2)(\cdot, \eta)\|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, \eta))^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 (\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x, \eta))^2 \right) = \\
&\leq 128 \left[ \tau^2 h_1^2 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + 4h_1^4 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^4 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 \right] + \\
&\quad + \frac{2h_1^2}{3} \int_0^t d\eta \iint_{D_h} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2, \tag{2.79}
\end{aligned}$$

де  $D_h = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq h_1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .

Розглянемо тепер доданок  $\|\eta_3(\cdot, t)\|^2$  в (2.73). Для вузла  $x \in \omega$ , як і в [18], знайдемо

$$\begin{aligned}
\eta_3(x, t) &= \frac{\partial(Tu)}{\partial t}(x, t) - u_t^-(x, t) = \\
&= \frac{1}{\tau h_1^2 h_2^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\tau h_1^3 h_2^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_3 \times \\
&\quad \times \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_5 \int_{\xi_5}^{\xi_3} \frac{\partial^3 u(\xi_8, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} d\xi_8 + \\
&\quad + \frac{1}{\tau h_1^3 h_2^3} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2}^{\xi_2} d\xi_4 \times \\
&\quad \times \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_6 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_7 \int_{x_6}^{x_1} \frac{\partial^3 u(\xi_9, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_9 \partial \xi_4 \partial \eta} d\xi_9 + \\
&\quad + \frac{1}{\tau h_1^3 h_2^3} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2}^{\xi_2} d\xi_4 \times \\
&\quad \times \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_6 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi_7 \int_{\xi_7}^{\xi_4} \frac{\partial^3 u(\xi_6, \xi_{10}, \eta)}{\partial \xi_{10}^2 \partial \eta} d\xi_{10},
\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}
|\eta_3(x,t)| \leq & \frac{4\sqrt{\tau}}{3\sqrt{h_1 h_2}} \left( \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{8\sqrt{h_1^3}}{\sqrt{\tau h_2}} \left( \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_8, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_8 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{4\sqrt{2h_1 h_2}}{\sqrt{\tau}} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_4 \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_9, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_9 \partial \xi_4 \partial \eta} \right)^2 d\xi_9 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{8\sqrt{2h_2^3}}{\sqrt{\tau h_1}} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_6 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_6, \xi_{10}, \eta)}{\partial \xi_{10}^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_{10} \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

звідки з урахуванням нерівності  $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$  маємо

$$\begin{aligned}
|\eta_3(x,t)|^2 \leq & 4 \left[ \frac{16\tau}{9h_1 h_2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + \right. \\
& + \frac{64h_1^3}{\tau h_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_8, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_8 + \\
& + \frac{32h_1 h_2}{\tau} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_4 \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_9, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_9 \partial \xi_4 \partial \eta} \right)^2 d\xi_9 + \\
& \left. + \frac{128h_2^3}{\tau h_1} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_6 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_6, \xi_{10}, \eta)}{\partial \xi_{10}^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_{10} \right], \quad x \in \omega.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Для вузла  $x \in \gamma_{-1}$  дістанемо

$$\eta_3(x,t) = \frac{d(Tu)}{dt}(x,t) - u_{\bar{t}}(x,t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} d\xi_2 - \\
&\quad - \frac{u(0, x_2, t) - u(0, x_2, t - \tau)}{\tau} = \\
&= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left[ \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(0, x_2, \eta)}{\partial \eta} \right] d\eta = \\
&= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} d\xi_3 + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial^2 u(0, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4 \partial \eta} d\xi_4 = \\
&= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} d\xi_3 + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \times \\
&\quad \times \int_{x_2}^{\xi_2} \left[ \frac{\partial^2 u(0, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4 \partial \eta} - \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} d\xi_5 \int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \frac{\partial^2 u(\xi_5, \xi_6, \eta)}{\partial \xi_6 \partial \eta} d\xi_6 \right] d\xi_4 = \\
&= \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} d\xi_3 + \\
&\quad + \frac{2}{h_1^3 h_2^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{x_2}^{\xi_2} d\xi_4 \int_0^{h_1} d\xi_5 \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_6 \int_{\xi_5}^0 \frac{\partial^3 u(\xi_7, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_7 \partial \xi_4 \partial \eta} d\xi_7 + \\
& + \frac{2}{h_1^3 h_2^3} \int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \times \\
& \times \int_{x_2}^{\xi_2} d\xi_4 \int_0^{h_1} d\xi_5 \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi_6 \int_{\xi_6}^{\xi_4} \frac{\partial^3 u(\xi_5, \xi_8, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} d\xi_8,
\end{aligned}$$

звідки випливає нерівність

$$\begin{aligned}
|\eta_3(x, t)| \leq & \frac{4\sqrt{2\tau}}{3\sqrt{h_1 h_2}} \left( \int_0^{h_1} d\xi_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{\sqrt{2h_1}}{\sqrt{\tau h_2}} \left( \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} \right)^2 d\xi_3 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{\sqrt{2h_1 h_2}}{\sqrt{\tau}} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_4 \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_7, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_7 \partial \xi_4 \partial \eta} \right)^2 d\xi_7 \right)^{1/2} + \\
& + \frac{\sqrt{2h_2^3}}{\sqrt{\tau h_1}} \left( \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} d\xi_5 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_5, \xi_8, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_8 \right)^{1/2}, \quad x \in \gamma_{-1},
\end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
|\eta_3(x, t)|^2 \leq & 4 \left[ \frac{32\tau}{9h_1 h_2} \int_0^{h_1} d\xi_1 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 + \right. \\
& + \frac{2h_1}{\tau h_2} \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} \right)^2 d\xi_3 + \\
& + \frac{2h_1 h_2}{\tau} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} d\xi_4 \int_0^{h_1} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_7, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_7 \partial \xi_4 \partial \eta} \right)^2 d\xi_7 + \\
& \left. + \frac{2h_2^3}{\tau h_1} \int_{t-\tau}^t d\eta \int_0^{h_1} d\xi_5 \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_5, \xi_8, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_8 \right], \quad x \in \gamma_{-1}.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

З нерівностей (2.80) і (2.81) виводимо оцінку

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta=\tau}^t \tau \| \eta_3(\cdot, \eta) \|^2 &= \sum_{\eta=\tau}^t \tau \left( \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 (\eta_3(x, \eta))^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_{-1}} h_2 (\eta_3(x, \eta))^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{4 \cdot 4 \cdot 16}{9} \tau^2 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \eta^2} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
&\quad + 4 \cdot 4 \cdot 64 h_1^4 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
&\quad + 2 \cdot 4 \cdot 32 h_1^2 h_2^2 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
&\quad + 8 \cdot 128 h_2^4 \int_0^t d\eta \iint_D \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + 8 h_1^2 \int_0^t d\eta \iint_{D_h} \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned} \tag{2.82}$$

де  $D_h = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq h_1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .

З оцінок (2.73), (2.76), (2.79), (2.82) випливає твердження леми.  $\square$

Наслідком леми 2.14 і леми 2.15 є наступний результат.

**Теорема 2.6.** Нехай розв'язок  $u(x_1, x_2, t)$  задачі (2.60) задовольняє умови

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial t}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 x_2^2}, \frac{\partial^3 u}{x_1^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{x_2^2 \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} \in L_2(Q_T).$$

Тоді точність різницевої схеми (2.61) характеризується ваговою апіорною оцінкою

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{|z(x, \eta)|^2}{\rho^2(x)} \right)^{1/2} \leq M \left( \tau^2 h_2^2 + h_2^4 + \tau^2 h_1^2 + h_1^4 + \tau^2 + h_1^2 h_2^2 + h_1^2 \right)^{1/2}, \tag{2.83}$$

$$(x, t) \in \omega_{Q_T} = (\omega \cup \gamma_{-1}) \times \omega_\tau,$$

де  $\rho(x) = \min \left\{ \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \sqrt{(1-x_1)x_2} \right\}$ , а стала  $M$  виражається через норми зазначених вище похідних від розв'язку  $u(x, t)$ .

**Зауваження 2.3.** Нехай виконуються умови теореми 2.6 й, окрім того,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} \in L_2(Q_T). \text{ Застосуємо міркування [90, с. 161] до доданків}$$

$$h_1^2 \int_0^t d\eta \iint_{D_h} \left( \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2, \quad h_1^2 \int_0^t d\eta \iint_{D_h} \left( \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2$$

відповідно у нерівностях (2.79) і (2.82). Тоді замість (2.83) дістанемо оцінку

$$\left( \sum_{\eta=\tau}^t \tau \frac{|z(x, \eta)|^2}{\rho^2(x)} \right)^{1/2} \leq M \left( \tau^2 h_2^2 + h_2^4 + \tau^2 h_1^2 + h_1^4 + \tau^2 + h_1^2 h_2^2 + h_1^3 \right)^{1/2}.$$

**2.5.4. Висновки.** Доведена в теоремі 2.6 вагова апіорна оцінка свідчить про те, що точність скінченнорізницевого методу (2.61) поблизу тих граней просторово-часового паралелепіпеда  $Q_T = Q \times (0, T)$ , де задано крайову умову Діріхле, є вищою, ніж далі від них. Точніше, похибка у ваговій нормі є величиною  $O(\sqrt{h_1}(h_1 + h_2^2 + \tau))$  поблизу грані  $x_1 = 1$  та  $O(\sqrt{h_2}(h_1 + h_2^2 + \tau))$  – поблизу граней  $x_2 = 0$  і  $x_2 = 1$ , тоді як далі від них дорівнює  $O(h_1 + h_2^2 + \tau)$ .

Результати підрозд. 2.5 опубліковано в [201] та доповідалися на [204, 205, 211].

## 2.6. Покращені вагові оцінки точності різницевих схем для двовимірного рівняння теплопровідності

### 2.6.1. Дискретизація вихідної задачі. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in D_T = D \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in D, \end{aligned} \tag{2.84}$$

де  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$  – одиничний

квадрат,  $\Gamma = \partial D$  – межа квадрата  $D$ ,  $f(x, t)$  і  $u_0(x)$  – відомі функції.

Уведемо сіткові множини:

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h, i_\alpha = \overline{1, N-1}, h = 1/N\}, \quad N \geq 2 \text{ – ціле число,}$$

$$\bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\}, \quad \omega = \omega_1 \times \omega_2, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \quad \gamma = \bar{\omega} \setminus \omega,$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{1, M}, \quad \tau = T/M\}, \quad M \geq 2 \text{ – ціле число.}$$

За допомогою операторів [90] (при  $h_1 = h_2 = h$ )

$$(T_1 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_1^2} \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) v(\xi, x_2) d\xi, \quad x \in \omega,$$

$$(T_2 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) v(x_1, \xi) d\xi, \quad x \in \omega,$$

апроксимуємо задачу (2.84) різницевою схемою

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}}(x, t) &= (\Lambda y)(x, t) + (T_1 T_2 f)(x, t), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ y(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (2.85)$$

де  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\Lambda_\alpha y(x) = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x)$ ,  $x \in \omega$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Для похибки  $z(x, t) = y(x, t) - u(x, t)$  маємо задачу

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}}(x, t) &= (\Lambda z)(x, t) + \psi(x, t), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ z(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ z(x, 0) &= 0, \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (2.86)$$

де  $\psi(x, t)$  – похибка апроксимації:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \Lambda u(x, t) + T_1 T_2 f(x, t) - u_{\bar{t}}(x, t) = \Lambda_1 \eta_1(x, t) + \Lambda_2 \eta_2(x, t) + \eta_3(x, t), \quad (2.87) \\ \eta_\alpha(x, t) &= u(x, t) - (T_{3-\alpha} u)(x, t), \quad \alpha = 1, 2, \\ \eta_3(x, t) &= \frac{\partial(Tu)}{\partial t}(x, t) - u_{\bar{t}}(x, t), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau. \end{aligned}$$

На множині  $H_h$  сіткових функцій, визначених на  $\bar{\omega}$  і рівних нулю на  $\gamma$ , задамо скалярний добуток і норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h^2 y(x) v(x), \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left( \sum_{x \in \omega} h^2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Окрім того, використовуємо такі позначення для норм:

$$\|v\|_{C(\omega)} = \max_{x \in \omega} |v(x)|, \quad \|v\|_{C(\omega \times \omega_\tau)} = \max_{(x, t) \in \omega \times \omega_\tau} |v(x, t)|.$$



### 2.6.2. Оцінка похибки методу з урахуванням крайового ефекту.

Доведемо спочатку наступні три допоміжні твердження.

**Лема 2.16.** *Для похибки  $z(x,t)$  справджується нерівність*

$$|z(x,t)| \leq v(x,t) \cdot \max_{t \in \omega_\tau} \|\psi(\cdot, t)\|_{C(\omega)}, \quad (x,t) \in \omega \times \omega_\tau, \quad (2.88)$$

де  $\psi(x,t)$  – похибка апроксимації (2.87),

$$v(x,t) = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}} w_{k_1 k_2}(x), \quad (x,t) \in \omega \times \omega_\tau,$$

$$w_{k_1 k_2}(x) = 2 \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2, \quad \|w_{k_1 k_2}\| = 1,$$

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2},$$

$$c_{k_1 k_2} = h^2 \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2}}{2 \sin \frac{k_1 \pi h}{2} \sin \frac{k_2 \pi h}{2}}, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Відомо (див., наприклад, [86]), що різницева спектральна задача

$$\begin{aligned} \Delta w(x) + \lambda w(x) &= 0, \quad x \in \omega, \\ w(x) &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (2.89)$$

має розв'язки

$$\begin{aligned} w_{k_1 k_2}(x) &= 2 \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2, \quad \|w_{k_1 k_2}\| = 1, \\ \lambda_{k_1 k_2} &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2}, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{aligned} v_f(x,t) &= (\Delta v)(x,t) + 1, \quad (x,t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ v(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ v(x,0) &= 0, \quad x \in \omega. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Шукаємо її розв'язок  $v(x,t)$  у вигляді суми

$$v(x,t) = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} v_{k_1 k_2}(t) w_{k_1 k_2}(x). \quad (2.92)$$

Очевидно, що функція  $v(x, t)$  задовольняє крайову умову (2.91). Для виконання початкової умови (2.91) покладаємо  $v_{k_1 k_2}(0) = 0$ ,  $k_1, k_2 = 1, \dots, N-1$ .

Скористаємося зображенням

$$1 = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} c_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2}(x), \quad (2.93)$$

де

$$\begin{aligned} c_{k_1 k_2} &= (1, w_{k_1 k_2}) = \sum_{x \in \omega} h^2 w_{k_1 k_2}(x) = \sum_{x \in \omega} h^2 2 \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2 = \\ &= 2h^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sin k_1 \pi i h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \sin k_2 \pi j h = \\ &= 2h^2 \frac{\sin \frac{(N-1)k_1 \pi h}{2} \sin \frac{Nk_1 \pi h}{2}}{\sin \frac{k_1 \pi h}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)k_2 \pi h}{2} \sin \frac{Nk_2 \pi h}{2}}{\sin \frac{k_2 \pi h}{2}} = \\ &= 2h^2 \frac{\left( \cos \frac{k_1 \pi h}{2} - \cos \left( Nk_1 \pi h - \frac{k_1 \pi h}{2} \right) \right)}{2 \sin \frac{k_1 \pi h}{2}} \cdot \frac{\left( \cos \frac{k_2 \pi h}{2} - \cos \left( Nk_2 \pi h - \frac{k_2 \pi h}{2} \right) \right)}{2 \sin \frac{k_2 \pi h}{2}} = \\ &= 2h^2 \frac{\left( \cos \frac{k_1 \pi h}{2} - (-1)^{k_1} \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \right)}{2 \sin \frac{k_1 \pi h}{2}} \cdot \frac{\left( \cos \frac{k_2 \pi h}{2} - (-1)^{k_2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2} \right)}{2 \sin \frac{k_2 \pi h}{2}} = \\ &= h^2 \frac{(1 - (-1)^{k_1})(1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2}}{2 \sin \frac{k_1 \pi h}{2} \sin \frac{k_2 \pi h}{2}}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Підставляючи (2.92) і (2.93) в рівняння (2.91), дістаємо

$$\sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left[ \frac{v_{k_1 k_2}(t) - v_{k_1 k_2}(t - \tau)}{\tau} + \lambda_{k_1 k_2} v_{k_1 k_2}(t) - c_{k_1 k_2} \right] w_{k_1 k_2}(x) = 0,$$

звідки маємо рівняння

$$\frac{v_{k_1 k_2}(t) - v_{k_1 k_2}(t - \tau)}{\tau} + \lambda_{k_1 k_2} v_{k_1 k_2}(t) - c_{k_1 k_2} = 0, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, N-1,$$

тобто

$$\begin{aligned} v_{k_1 k_2}(t) &= \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} v_{k_1 k_2}(t - \tau) + \frac{\tau}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} c_{k_1 k_2}, \quad t \in \omega_\tau, \\ v_{k_1 k_2}(0) &= 0, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Розв'язуючи це рекурентне співвідношення, одержуємо

$$v_{k_1 k_2}(t) = \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}}, \quad t \in \omega_\tau.$$

Таким чином,

$$v(x, t) = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}} w_{k_1 k_2}(x), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \quad (2.95)$$

де  $w_{k_1 k_2}(x)$ ,  $\lambda_{k_1 k_2}$ ,  $c_{k_1 k_2}$  визначені у формулах (2.90) і (2.94).

Застосовуючи теорему порівняння [86] до задач (2.86) і (2.91), доводимо твердження леми.  $\square$

**Лема 2.17.** *Нехай розв'язок  $u(x, t)$  задачі (2.84) задовольняє умову  $u \in W_\infty^4(D_T)$ . Тоді для похибки апроксимації  $\psi(x, t)$  справджується оцінка*

$$|\psi(x, t)| \leq M(\tau + h^2), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \quad (2.96)$$

де  $M$  – не залежна від  $h$  і  $\tau$  стала.

Доведення. Розглянемо кожен доданок похибки апроксимації (2.87). Для  $\eta_1(x, t)$  маємо

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= u(x, t) - \frac{1}{h^2} \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h - |x_2 - \xi|) u(x_1, \xi, t) d\xi = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h - |x_2 - \xi|) (u(x_1, x_2, t) - u(x_1, \xi, t)) d\xi = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} \frac{\partial u(x_1, \xi_1, t)}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \left( \frac{\partial u(x_1, \xi_1, t)}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \frac{\partial u(x_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2h^3} \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h - |x_2 - \xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} \left( \frac{\partial u(x_1, \xi_1, t)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(x_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2h^3} \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_3, t)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3,$$

звідки з урахування співвідношення  $\left( T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) (x, t) = u_{\bar{x}_1 x_1} (x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times \omega_\tau$ ,

одержимо зображення

$$\begin{aligned} \eta_{1\bar{x}_1 x_1} (x, t) &= \\ &= \frac{1}{2h^5} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_4|) d\xi_4 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi|) d\xi \int_{\xi}^{x_2} d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^4 u(\xi_4, \xi_3, t)}{\partial \xi_4^2 \partial \xi_3^2} d\xi_3. \end{aligned}$$

Тоді

$$|\eta_{1\bar{x}_1 x_1} (x, t)| \leq 4h^2 \left\| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{L_\infty(D_T)}. \quad (2.97)$$

Аналогічно виводимо оцінку

$$|\eta_{2\bar{x}_2 x_2} (x, t)| \leq 4h^2 \left\| \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{L_\infty(D_T)}. \quad (2.98)$$

Перетворимо тепер доданок  $\eta_3(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \eta_3(x, t) &= \frac{\partial(Tu)}{\partial t} (x, t) - u_{\bar{t}} (x, t) = \\ &= \frac{1}{h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} d\xi_2 - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{\partial u(x_1, x_2, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \\ &= \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x_1, x_2, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \times \\ &\quad \times \int_{t-\tau}^t d\eta \left( \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \int_{x_1}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} d\xi_3 + \int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4 \partial \eta} d\xi_4 \right) = \\ &= \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \times \\
& \quad \times \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_3 \left( \frac{\partial^2 u(\xi_3, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_3 \partial \eta} - \frac{1}{2h} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \frac{\partial^2 u(\xi_5, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_5 \partial \eta} d\xi_5 \right) + \\
& + \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \times \\
& \quad \times \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2}^{\xi_2} d\xi_4 \left( \frac{\partial^2 u(x_1, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_4 \partial \eta} - \frac{1}{4h^2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \frac{\partial^2 u(\xi_6, \xi_7, \eta)}{\partial \xi_5 \partial \eta} d\xi_7 \right) = \\
& = \frac{1}{\tau h^4} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \cdot \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{\eta}^t \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} d\eta_1 + \\
& + \frac{1}{2\tau h^5} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \times \\
& \quad \times \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_1}^{\xi_1} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{\xi_5}^{\xi_3} \frac{\partial^3 u(\xi_8, \xi_2, \eta)}{\partial \xi_8^2 \partial \eta} d\xi_8 + \\
& + \frac{1}{4\tau h^6} \int_{x_1-h}^{x_1+h} (h-|x_1-\xi_1|) d\xi_1 \int_{x_2-h}^{x_2+h} (h-|x_2-\xi_2|) d\xi_2 \times \\
& \quad \times \int_{t-\tau}^t d\eta \int_{x_2}^{\xi_2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} d\xi_6 \int_{\xi_6}^{x_1} \frac{\partial^3 u(\xi_9, \xi_4, \eta)}{\partial \xi_9 \partial \xi_4 \partial \eta} d\xi_9 + \int_{\xi_7}^{\xi_4} \frac{\partial^3 u(\xi_6, \xi_{10}, \eta)}{\partial \xi_{10}^2 \partial \eta} d\xi_{10} \Big),
\end{aligned}$$

звідки випливає нерівність

$$\begin{aligned}
|\eta_3(x, t)| & \leq \tau \left\| \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} \right\|_{L_\infty(D_T)} + \\
& + 4h^2 \left( \left\| \frac{\partial^3 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} + \left\| \frac{\partial^3 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} + \left\| \frac{\partial^3 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} \right).
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Твердження леми випливає тепер з оцінок (2.97), (2.98) і (2.99).  $\square$

У наступній лемі досліджено функцію  $v(x, t)$  в (2.88).

**Лема 2.18.** Для функції  $v(x,t)$  рівномірно по  $t \in \omega_\tau$  виконуються співвідношення  $v(x,t) = O(h)$  та  $v(x,t) = O(h^2 \ln h^{-1})$  поблизу сторін і вершин області  $D$  відповідно.

Доведення. Для вузла  $(x,t) \in \omega \times \omega_\tau$  маємо

$$|v(x,t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{h^4 (1 - (-1)^{k_1}) (1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2}}{4 \sin \frac{k_1 \pi h}{2} \sin \frac{k_2 \pi h}{2} \left( \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2} \right)} \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2 \right| \leq \\ \leq \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)} \leq \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{2k_1^2 k_2^2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k_1=1}^{N-1} \frac{1}{k_1^2} \right) \left( \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2^2} \right) < \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 = \frac{\pi^4}{72}.$$

Оцінимо  $v(x,t)$  у приміжових вузлах  $(h, x_2, t)$ ,  $(1-h, x_2, t)$ ,  $(x_1, h, t)$ ,  $(x_1, 1-h, t)$ .

Наприклад, для вузла  $(h, x_2, t)$  виконується

$$|v(h, x_2, t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{h^4 (1 - (-1)^{k_1}) (1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2}}{4 \sin \frac{k_1 \pi h}{2} \sin \frac{k_2 \pi h}{2} \left( \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2} \right)} \sin k_1 \pi h \cdot \sin k_2 \pi x_2 \right| \leq \\ \leq 2h \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2 (k_1^2 + k_2^2)} < 2h \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} = \\ = 2h \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2} \frac{\pi k_2 \operatorname{cth}(\pi k_2) - 1}{2k_2^2} < 2h \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\pi k_2 \operatorname{cth}(\pi k_2) - 1}{2k_2^3} < 4h.$$

Далі оцінимо  $v(x,t)$  поблизу кутових точок області  $D$ . Наприклад, для вузла  $(h, h, t)$  маємо

$$|v(h, h, t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{h^4 (1 - (-1)^{k_1}) (1 - (-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h}{2} \cos \frac{k_2 \pi h}{2}}{4 \sin \frac{k_1 \pi h}{2} \sin \frac{k_2 \pi h}{2} \left( \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2} \right)} \sin k_1 \pi h \cdot \sin k_2 \pi h \right| \leq \\
& \leq 4h^2 \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} < 4h^2 \sum_{k_1=1}^{N-1} \frac{\pi k_1 \operatorname{cth}(\pi k_1) - 1}{2k_1^2} < 2h^2 \pi \operatorname{cth} \pi \sum_{k_1=1}^{N-1} \frac{1}{k_1} < \\
& < 2h^2 \pi \operatorname{cth} \pi \left( 1 + \sum_{k_1=2}^N \frac{1}{k_1} \right) \leq 2h^2 \pi \operatorname{cth} \pi \left( 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} \right) = h^2 \pi \operatorname{cth} \pi (1 + \ln N) < \\
& < 2\pi \operatorname{cth} \pi h^2 \ln \frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

З лем 2.16–2.18 випливає наступне твердження.

**Теорема 2.7.** *Нехай розв'язок  $u(x, t)$  задачі (2.84) задовольняє умову  $u \in W_\infty^4(D_T)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.85) характеризується оцінкою, яка враховує вплив крайової умови:*

$$|z(x, t)| \leq M v(x, t) (\tau + h^2), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \quad (2.100)$$

де стала  $M$  не залежить від  $h$  і  $\tau$ , а для функції  $v(x, t)$  рівномірно по  $t \in \omega_\tau$  виконуються співвідношення  $v(x, t) = O(h)$  та  $v(x, t) = O(h^2 \ln h^{-1})$  поблизу сторін і вершин області  $D$  відповідно.

### 2.6.3. Оцінка похибки методу з урахуванням початкового ефекту.

Дослідимо точність наближеного розв'язку  $u(x, t)$  поблизу дна  $t = 0$  просторово-часового паралелепіпеда  $D_T$ .

**Теорема 2.8.** *Нехай розв'язок  $u(x, t)$  задачі (2.84) задовольняє умову  $u \in W_\infty^4(D_T)$ . Тоді точність різницевої схеми (2.85) характеризується оцінкою, яка враховує вплив початкової умови:*

$$\|z(\cdot, \tau)\| \leq M \tau (\tau + h^2),$$

де  $M$  – не залежна від  $h$  і  $\tau$  стала.

Доведення. Розглянемо функцію  $v(x, t)$  при  $t = \tau$ :

$$v(x, \tau) = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{\tau}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}} w_{k_1 k_2}(x), \quad x \in \omega,$$

звідки внаслідок нерівності

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2} \geq 4(k_1^2 + k_2^2) \geq 8$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, \tau)\|^2 &= \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( \frac{\tau}{1 + \tau \lambda_{k_1 k_2}} \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}} \right)^2 < \tau^2 \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left( \frac{c_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}} \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{64} \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} c_{k_1 k_2}^2 = \frac{\tau^2}{64} \|1\|^2 = \frac{\tau^2}{64} \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} h^2 = \frac{\tau^2}{64} (1-h)^2 < \frac{\tau^2}{64}. \end{aligned}$$

Звідси і з оцінки (2.100) випливає твердження теореми.  $\square$

**2.6.4. Висновки.** Доведена в теоремі 2.7 апіорна оцінка демонструє, що в нормі  $C(\omega \times \omega_\tau)$  похибка схеми (2.85) поблизу бічних граней і бічних ребер просторово-часового паралелепіпеда  $D_T = D \times (0, T)$  має порядок точності  $O(h(\tau + h^2))$  і  $O(h^2 \ln h^{-1}(\tau + h^2))$ , тоді як далі від них є величиною  $O(\tau + h^2)$ .

Доведена в теоремі 2.8 апіорна оцінка свідчить про те, що в нормі  $L_2(\omega)$  похибка схеми (2.85) поблизу дна  $t=0$  просторово-часового паралелепіпеда  $D_T = D \times (0, T)$  має порядок  $O(\tau(\tau + h^2))$ , тоді як далі від нього є величиною  $O(\tau + h^2)$ .

Результати підрозд. 2.6 опубліковано в [67, 206] та доповідалися на конференції [12].



## РОЗДІЛ 3

# Точність сіткових методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку

### 3.1. Крайовий ефект в апіорній оцінці точності методу сіток для диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і похідною порядку $\frac{1}{2}$

Для розв'язку одновимірного рівняння з дробовою похідною порядку  $1/2$  одержано вагову оцінку, яка враховує вплив крайової умови Діріхле. Для наближеного розв'язування цієї диференціальної задачі побудовано сіткові схеми першого і другого порядку апроксимації та доведено вагові оцінки для похибки з урахування крайового ефекту.

**3.1.1. Вагова оцінка розв'язку крайової задачі.** Розглянемо крайову задачу

$$u''(x) - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}} dy = -f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Другий доданок у лівій частині рівняння з точністю до сталого множника є дробовою похідною Рімана–Ліувілля порядку  $1/2$ .

Позначимо норми

$$\|w\|_{k,\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |w^{(k)}(x)|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \|w\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |w(x)|.$$

**Теорема 3.1.** Нехай параметр  $\alpha$  в рівнянні (3.1) задовольняє умову

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} K < 1, \quad (3.2)$$

де  $K = \max_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x) = 0,3046916809\dots$ ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x(1-x)} \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + (1-x) \int_0^x y \sqrt{1-y} dy \right\}.$$

Тоді для розв'язку  $u(x)$  задачі (3.1) справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u}{x(1-x)} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} K \right)^{-1} \|f\|_{\infty}.$$

Доведення. Наслідком задачі (3.1) є інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x \int_0^1 \sqrt{1-y} u(y) dy - \int_0^x \sqrt{x-y} u(y) dy \right\} = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1),$$

тобто

$$\begin{aligned} u(x) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x \int_x^1 \sqrt{1-y} u(y) dy + \int_0^x (x\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y}) u(y) dy \right\} = \\ = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1-x) & \text{при } \xi \leq x, \end{cases}$  – функція Гріна лінійної крайової задачі

$$u''(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Виконавши в (3.3) заміну

$$v(x) = \frac{u(x)}{x(1-x)},$$

одержимо рівняння

$$\begin{aligned} v(x) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x(1-x)} \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} v(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^x y(1-y) (x\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y}) v(y) dy \right\} = \int_0^1 \frac{G(x, \xi)}{x(1-x)} f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для виразу у фігурних дужках та правої частини рівняння маємо

$$\left| x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} v(y) dy + \int_0^x y(1-y) (x\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y}) v(y) dy \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + \int_0^x y(1-y) |x\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y}| dy \right\} \cdot \|v\|_\infty = \\
& = \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + (1-x) \int_0^x y(1-y) \frac{|y(1+x) - x|}{x\sqrt{1-y} + \sqrt{x-y}} dy \right\} \cdot \|v\|_\infty \leq \\
& \leq \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + (1-x) \int_0^x y\sqrt{1-y} dy \right\} \cdot \|v\|_\infty, \\
\left| \int_0^1 \frac{G(x, \xi)}{x(1-x)} f(\xi) d\xi \right| & \leq \int_0^1 \frac{G(x, \xi)}{x(1-x)} d\xi \|f\|_\infty = \left( \frac{1}{x} \int_0^x \xi d\xi + \frac{1}{1-x} \int_x^1 (1-\xi) d\xi \right) \|f\|_\infty = \frac{1}{2} \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

З (3.4) виводимо оцінку

$$\|v\|_\infty \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} K \|v\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty, \quad (3.5)$$

де

$$\begin{aligned}
K &= \max_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x) = 0,3046916809\dots, \\
\varphi(x) &= \frac{1}{x(1-x)} \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + (1-x) \int_0^x y\sqrt{1-y} dy \right\}.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\alpha$  задовольняє нерівність (3.2), то з (3.5) випливає вагова оцінка

$$\left\| \frac{u}{x(1-x)} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} K \right)^{-1} \|f\|_\infty,$$

що й доводить теорему.  $\square$

**3.1.2. Вагові оцінки точності сіткових методів.** Для розв'язування рівняння (3.3) застосуємо метод сіток. Введемо сіткову множину

$$\bar{\omega} = \{ x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N \}$$

і покладемо в (3.3)  $x = x_j$ :

$$\begin{aligned}
& u(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} u(y) dy + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y}) u(y) dy \right\} = \int_0^1 G(x_j, \xi) f(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Звідси отримаємо сіткову схему

$$\begin{aligned}
 & u^h(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} dy + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^j u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}) dy \right\} = \int_0^1 G(x_j, \xi) f(\xi) d\xi, \\
 & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Похибка  $z(x) = u^h(x) - u(x)$  є розв'язком сіткової задачі

$$\begin{aligned}
 & z(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N z(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} dy + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^j z(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}) dy \right\} = \psi(x_j), \\
 & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad z(x_N) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

де  $\psi(x_j)$  – похибка апроксимації:

$$\begin{aligned}
 \psi(x_j) = & \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} (u(y) - u(x_k)) dy + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}) (u(y) - u(x_k)) dy \right\}.
 \end{aligned}$$

Виконавши в (3.7) заміну  $Z(x) = \frac{z(x)}{x(1-x)}$ , отримаємо сіткову задачу

$$\begin{aligned}
 & Z(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi} x_j (1-x_j)} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N Z(x_k) x_k (1-x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} dy + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^j Z(x_k) x_k (1-x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}) dy \right\} = \frac{\psi(x_j)}{x_j (1-x_j)}, \\
 & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad Z(x_N) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Позначимо сіткову норму

$$\|w\|_{\infty, \bar{\omega}} = \max_{x \in \bar{\omega}} |w(x)|.$$

Дослідимо точність сіткової задачі (3.6) у ваговій нормі.

**Теорема 3.2.** Нехай розв'язок  $u(x)$  рівняння (3.3) задовольняє умову  $u \in C_{[0,1]}^1$

і для параметра  $\alpha$  задачі (3.1) виконується нерівність  $1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} > 0$ . Тоді

точність сіткової схеми (3.6) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq M h \|u\|_{1, \infty},$$

де  $M = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1} \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x)$ .

Доведення. З (3.8) маємо

$$\begin{aligned} |Z(x_j)| &\leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + \int_0^{x_j} |x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}| dy \right\} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + \int_0^{x_j} |x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j-y}| dy \right\} h \|u\|_{1, \infty} \leq \\ &\leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{|y(1+x_j) - x_j|}{x_j \sqrt{1-y} + \sqrt{x_j-y}} dy \right\} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{|y(1+x_j) - x_j|}{x_j \sqrt{1-y} + \sqrt{x_j-y}} dy \right\} h \|u\|_{1, \infty} \leq \\ &\leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy \right\} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}x_j(1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy \right\} h \|u\|_{1, \infty}, \quad (3.9) \\ &\quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Знайдемо

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x \int_0^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x) \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy}{x(1-x)} = \max_{0 \leq x \leq 1} \left( \frac{2}{3} \sqrt{1-x} + \frac{2}{1+\sqrt{1-x}} \right) = 2. \quad (3.10)$$

Тоді з (3.9) випливає нерівність

$$\|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} h \|u\|_{1, \infty}.$$

Звідси з урахуванням умови  $1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} > 0$  одержуємо

$$\|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} = \left\| \frac{z(x)}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} = \left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq h \left( 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \|u\|_{1, \infty}.$$

Теорему доведено.  $\square$

Побудуємо і дослідимо сіткову схему другого порядку апроксимації:

$$\begin{aligned} & u^h(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} L_k(y; u^h) dy + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y}) L_k(y; u^h) dy \right\} = \int_0^1 G(x_j, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.11) \\ & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0, \end{aligned}$$

де  $L_k(y; w)$  – інтерполяційний поліном Лагранжа 1-го степеня функції  $w(x)$ :

$$L_k(y; w) = \frac{y - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} w(x_k) + \frac{x_k - y}{x_k - x_{k-1}} w(x_{k-1}).$$

Для похибки  $z(x) = u^h(x) - u(x)$  маємо сіткову схему

$$\begin{aligned} & z(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} L_k(y; z) dy + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y}) L_k(y; z) dy \right\} = \psi(x_j), \\ & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad z(x_N) = 0, \end{aligned}$$

де  $\psi(x_j)$  – похибка апроксимації:

$$\psi(x_j) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} (u(y) - L_k(y; u)) dy + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y}) (u(y) - L_k(y; u)) dy \right\}.$$

Тоді функція  $Z(x) = \frac{z(x)}{x(1-x)}$  є розв'язком сіткової задачі

$$Z(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi} x_j (1-x_j)} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y} L_k(y; x(1-x)Z) dy + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y}) L_k(y; x(1-x)Z) dy \right\} = \frac{\psi(x_j)}{x_j(1-x_j)}, \quad (3.12) \\ j=1, 2, \dots, N-1, \quad Z(x_N) = 0.$$

Дослідимо точність сіткової схеми (3.11).

**Теорема 3.3.** Нехай розв'язок  $u(x)$  задачі (3.1) задовольняє умову  $u \in C_{[0,1]}^2$  і для параметра  $\alpha$  виконується умова  $1 - \alpha/\sqrt{\pi} > 0$ . Тоді точність сіткової схеми (3.11) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq M h^2 \|u\|_{2, \infty},$$

де  $M = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1} \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x)$ .

Доведення. Використовуючи формулу

$$u(x) - L_k(x; u) = \frac{u''(\bar{x}_k)}{2!} (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad \bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

з (3.12) дістаємо нерівність

$$|Z(x_j)| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi} x_j (1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy \right\} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \\ + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi} x_j (1-x_j)} \left\{ x_j \int_{x_j}^1 \sqrt{1-y} dy + (1-x_j) \int_0^{x_j} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy \right\} \frac{h^2}{2} \|u\|_{2, \infty}, \quad j=1, 2, \dots, N-1,$$

яка разом з (3.10) дає оцінку

$$\|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} h^2 \|u\|_{2, \infty}.$$

Оскільки за умовою теореми  $1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} > 0$ , звідси випливає оцінка

$$\|Z\|_{\infty, \bar{\omega}} = \left\| \frac{z(x)}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} = \left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq h^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \|u\|_{2, \infty}.$$

Теорему доведено.  $\square$

**3.1.3. Висновки.** В теоремі 3.1 доведено вагову оцінку для точного розв'язку першої крайової задачі для ЗДР з дробовою похідною порядку  $1/2$ .

Доведена в теоремі 3.2 вагова апріорна оцінка свідчить про те, що в нормі  $C(\omega)$  похибка сіткового методу (3.6) у примежових вузлах інтервалу  $(0,1)$  має порядок  $O(h^2)$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h)$ .

Доведена в теоремі 3.3 вагова апріорна оцінка свідчить про те, що в нормі  $C(\omega)$  похибка сіткового методу (3.11) у примежових вузлах інтервалу  $(0,1)$  має порядок  $O(h^3)$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h^2)$ .

Результати підрозд. 3.1 опубліковано в [194].

## 3.2. Оцінки точності з урахуванням крайового ефекту для сіткових методів розв'язування диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і похідною порядку $\alpha \in (0,1)$

Результати підрозділу 3.1 узагальнено на випадок крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з похідною порядку  $0 < \alpha < 1$ .

**3.2.1. Вагова оцінка для розв'язку диференціальної задачі.** Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} u''(x) - (D_{0+}^{\alpha} u)(x) &= -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де  $(D_{a+}^{\alpha} f)(x)$  – похідна Рімана–Ліувілля порядку  $\alpha > 0$  [92]:



$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,$$

$n = [\alpha] + 1$ ,  $[\alpha]$  – ціла частина числа  $\alpha$ ,  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функція Ейлера.

Надалі в оцінках використано стандартні позначення для норм у просторах  $C_{[0,1]}^k$  і  $C_{[0,1]}^{k,\lambda}$  [129]:

$$\|u\|_{\infty} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}} = \sup_{0 < x < 1} |u(x)|, \quad \|u\|_{k,\infty} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}^k} = \sum_{l=0}^k \|u^{(l)}\|_{C_{[0,1]}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\|u\|_{k,\lambda} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}} = \|u\|_{C_{[0,1]}^k} + |u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$|u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}} = \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|u^{(k)}(x) - u^{(k)}(y)|}{|x-y|^{\lambda}},$$

де  $|u|_{k,\lambda} \equiv |u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}}$  – півнорма в просторі Гельдера  $C_{[0,1]}^{k,\lambda}$  з показником

$\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ).

Розглянемо задачу (3.13) при  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Відомо [33], що при  $f(x) \in C_{[0,1]}$  крайова задача (3.14) має єдиний розв'язок  $u(x) \in C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$ , який також є розв'язком такого інтегрального рівняння:

$$u(x) + \int_0^1 G(x,\xi) u(\xi) d\xi = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.15)$$

де

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x, \end{cases} \quad (3.16)$$

– функція Гріна крайової задачі

$$u''(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Виконавши в (3.15) заміну

$$v(x) = \frac{u(x)}{x(1-x)},$$

одержимо рівняння

$$\begin{aligned} v(x) + \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi^2 (1-\xi) v(\xi) d\xi + x \int_x^1 \xi (1-\xi)^2 v(\xi) d\xi \right\} = \\ = \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty \leq \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi^2 (1-\xi) d\xi + x \int_x^1 \xi (1-\xi)^2 d\xi \right\} \|v\|_\infty + \\ + \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) d\xi \|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi^2 (1-\xi) d\xi + x \int_x^1 \xi (1-\xi)^2 d\xi \right\} = \\ = \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + x \left( \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} \right) \right\} = \\ = \sup_{0 < x < 1} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{(1-x)^2}{3} - \frac{(1-x)^3}{4} \right) = \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{12} (1+x-x^2) = \frac{5}{48}, \\ \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) d\xi = \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) d\xi \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

і запишемо нерівність (3.18) так:

$$\|v\|_\infty \leq \frac{5}{48} \|v\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty.$$

Звідси випливає, що для розв'язку  $u(x)$  крайової задачі (3.14) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_\infty \leq \frac{24}{43} \|f\|_\infty. \quad (3.19)$$

Розглянемо задачу (3.13) при  $\alpha = 1$ . Врахуємо, що похідна Рімана–Ліувілля при  $n = [\alpha] + 1 = 2$  набуває вигляду

$$(D_{0+}^1 u)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x u(t) dt = u'(x).$$

Тоді задача (3.13) перетворюється на таку:

$$\begin{aligned} u''(x) - u'(x) &= -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подібно до крайової задачі (3.14), крайова задача (3.20) при  $f(x) \in C_{[0,1]}$  є однозначно розв'язною в класі  $C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$ , при цьому її розв'язок  $u(x)$  є водночас розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) + \left\{ -(1-x) \int_0^x u(\xi) d\xi + x \int_x^1 u(\xi) d\xi \right\} = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.21)$$

де  $G(x, \xi)$  – функція Гріна з (3.16).

Виконуючи в (3.21) заміну  $v(x) = \frac{u(x)}{x(1-x)}$ , отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} v(x) + \frac{1}{x(1-x)} \left\{ -(1-x) \int_0^x \xi(1-\xi)v(\xi) d\xi + x \int_x^1 \xi(1-\xi)v(\xi) d\xi \right\} &= \\ = \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &\leq \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi(1-\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi)\xi d\xi \right\} \|v\|_\infty + \\ &+ \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) d\xi \|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Оскільки

$$\sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \int_0^x \xi(1-\xi) d\xi + x \int_x^1 \xi(1-\xi) d\xi \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x) \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + x \left( \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right) \right\} = \\
&= \sup_{0 < x < 1} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{3} \right) = \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{6} (1 + 4x - 4x^2) = \frac{1}{3}, \\
&\sup_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x, \xi) d\xi = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

то нерівність (3.23) можна записати так:

$$\|v\|_\infty \leq \frac{1}{3} \|v\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty. \quad (3.24)$$

Таким чином, для розв'язку  $u(x)$  крайової задачі (3.20) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_\infty \leq \frac{3}{4} \|f\|_\infty. \quad (3.25)$$

Розглянемо основний випадок – задачу (3.13) при  $0 < \alpha < 1$  [92]:

$$\begin{aligned}
Lu \equiv u''(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^\alpha} &= -f(x), \quad x \in (0,1), \\
u(0) = 0, \quad u(1) &= 0.
\end{aligned} \quad (3.26)$$

**Лема 3.1** (принцип максимуму). *Якщо  $u(x) \in C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$  – розв'язок однорідного рівняння  $Lu = 0$ , відмінний від тотожної сталої, то функція  $u(x)$  може досягати свого додатного максимуму (від'ємного мінімуму) тільки на кінцях відрізка  $[0, 1]$ .*

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай

$$\max_{0 \leq x \leq 1} u(x) = u(x_0) > 0, \quad 0 < x_0 < 1.$$

Тоді  $u'(x_0) = 0$ ,  $u''(x_0) \leq 0$ . Оскільки [92, формули (13.1), (13.2)]

$$\begin{aligned}
(D_{0+}^\alpha u)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u(x)}{x^\alpha} + \lim_{t \rightarrow x} \frac{u(t) - u(x)}{(x-t)^\alpha} + \alpha \int_0^x \frac{u(x) - u(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_0^x \frac{u(x) - u(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right), \quad x \in (0,1),
\end{aligned}$$

то  $(D_{0+}^\alpha u)(x_0) > 0$ , що разом з рівнянням (3.26) (при  $f(x) \equiv 0$ )

$$u''(x) = (D_{0+}^\alpha u)(x), \quad x \in (0,1),$$

дає нерівність  $u''(x_0) > 0$ . Отримана суперечність доводить, що у внутрішній точці відрізка  $[0,1]$  функція  $u(x)$  не може досягати свого додатного максимуму. Аналогічно можна показати, що у внутрішній точці відрізка  $[0,1]$  функція  $u(x)$  не може досягати свого від'ємного мінімуму. Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 3.1.** Однорідна крайова задача (3.26) (при  $f(x) \equiv 0$ ) у класі функцій  $C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$  має тільки тривіальний розв'язок  $u(x)$ .

**Теорема 3.4.** Якщо  $f(x) \in C_{[0,1]}$ , то крайова задача Діріхле (3.26) у класі функцій  $C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$  є однозначно розв'язною.

Доведення. Нехай  $u(x)$  розв'язок крайової задачі (3.26). З перетворень

$$\int_0^1 u''(\xi) G(x, \xi) d\xi = (1-x) \int_0^x \xi u''(\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) u''(\xi) d\xi = -u(x)$$

і

$$\begin{aligned} & \int_0^1 G(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi = (1-x) \int_0^x \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi = \\ & = (1-x) \left( \int_0^x \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} \Big|_{\xi=0}^{\xi=x} - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} \right) + x \left( (1-\xi) \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} \Big|_{\xi=x}^{\xi=1} + \int_x^1 d\xi \int_0^\xi \frac{u(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} \right) = \\ & = (1-x) \left( x \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^\alpha} - \int_0^x u(t) dt \int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^\alpha} \right) + \\ & \quad + x \left( -(1-x) \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^\alpha} + \int_0^x u(t) dt \int_x^1 \frac{d\xi}{(\xi-t)^\alpha} + \int_x^1 u(t) dt \int_t^1 \frac{d\xi}{(\xi-t)^\alpha} \right) = \\ & = -\frac{1-x}{1-\alpha} \int_0^x u(t) (x-t)^{1-\alpha} dt + \frac{x}{1-\alpha} \left( \int_0^x u(t) \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) dt + \int_x^1 u(t) (1-t)^{1-\alpha} dt \right) \end{aligned}$$

впливає, що  $u(x)$  задовольняє інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\begin{aligned}
& u(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left( -(1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u(t) dt + \right. \\
& \left. + x \int_0^x \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) u(t) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} u(t) dt \right) = \\
& = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Можна показати, що і, навпаки, розв'язок інтегрального рівняння (3.27) є розв'язком крайової задачі (3.26). Таким чином, крайова задача Діріхле (3.26) еквівалентна інтегральному рівнянню (3.27).

Оскільки однорідна крайова задача (3.26) має тільки тривіальний розв'язок  $u(x)$ , то й однорідне рівняння Фредгольма (3.27) (при  $f(x) \equiv 0$ ) має тільки тривіальний розв'язок. Внаслідок альтернативи Фредгольма звідси випливає, що неоднорідне рівняння Фредгольма (3.27) однозначно розв'язне, а тому задача Діріхле (3.26) також є однозначно розв'язною. Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 3.1.** *Метод функції Гріна (3.16) використовують також для дослідження крайової задачі*

$$\begin{aligned}
& u''(x) - a(x)(D_{0+}^\alpha u)(x) = -f(x), \quad x \in (0, 1), \\
& u(0) = 0, \quad u(1) = 0,
\end{aligned}$$

зі змінним коефіцієнтом  $a(x) \in C_{[0,1]}$ ,  $a(x) \geq 0$  (див. [92]).

Тепер отримаємо вагову оцінку типу (3.19) і (3.25) у класі функцій меншої гладкості.

Нехай  $f(x) = \varphi''(x)$ , де  $\varphi \in C_{[0,1]}$ . Знайдемо

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^1 G(x, \xi) \varphi''(\xi) d\xi = (1-x) \int_0^x \xi \varphi''(\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) \varphi''(\xi) d\xi = \\
& = (1-x) \left( \xi \varphi'(\xi) \Big|_0^x - \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi \right) + x \left( (1-\xi) \varphi'(\xi) \Big|_x^1 + \int_x^1 \varphi'(\xi) d\xi \right) = \\
& = (1-x)(x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(0)) + x(- (1-x)\varphi'(x) + \varphi(1) - \varphi(x)) = \\
& = - (1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x)).
\end{aligned}$$

**Означення 3.1.** Слабким розв'язком крайової задачі Діріхле (3.26) називатимемо розв'язок  $u(x) \in C_{[0,1]}$  інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\begin{aligned}
 u(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} & \left( -(1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u(t) dt + \right. \\
 + x \int_0^x & \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) u(t) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} u(t) dt \Big) = \\
 & = -(1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x)), \quad x \in [0,1].
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

З теорем Фредгольма випливає, що для будь-якої функції  $\varphi(x) \in C_{[0,1]}$  рівняння (3.28) має єдиний розв'язок  $u(x) \in C_{[0,1]}$ . З (3.28) виводимо нерівність

$$\begin{aligned}
 |u(x)| \leq & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sup_{0 < x < 1} \left( (1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + \right. \\
 + x \int_0^x & \left. \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) \|u\|_{C_{[0,1]}} + \\
 + \sup_{0 < x < 1} & \left| -(1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x)) \right|, \quad x \in [0,1],
 \end{aligned}$$

і оскільки

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 < x < 1} & \left( (1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + x \int_0^x \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) = \\
 = \sup_{0 < x < 1} & \frac{(1-x)x^{2-\alpha} + x(1 - (1-x)^{2-\alpha} - x^{2-\alpha}) + x(1-x)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = \\
 = \sup_{0 < x < 1} & \frac{x^{2-\alpha} + x - 2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)} \leq \frac{1}{2(2-\alpha)},
 \end{aligned}$$

то для  $u(x)$  одержуємо оцінку

$$\|u\|_{C_{[0,1]}} \leq \left( 1 - \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} 4 \|\varphi\|_{C_{[0,1]}}.$$

У наступному твердженні доведено вагову оцінку для  $u(x)$ .

**Теорема 3.5.** Нехай  $\varphi(x) \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$  і для  $\beta$  виконується умова

$$\frac{1}{\ln 4} \cdot \ln \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} < \beta \leq 1 \quad (0 < \alpha < 1). \quad (3.29)$$

Тоді слабкий розв'язок  $u(x)$  крайової задачі (3.26) задовольняє умову  $u(x) \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$  і для нього справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u(x)}{[x(1-x)]^\beta} \right\|_\infty \leq 2^\beta \left( 1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta \Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} |\varphi|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}}. \quad (3.30)$$

Доведення. Виконуючи в (3.28) заміну

$$v(x) = \frac{u(x)}{[x(1-x)]^\beta},$$

одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} v(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)[x(1-x)]^\beta} & \left( -(1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} [t(1-t)]^\beta v(t) dt + \right. \\ & \left. + x \int_0^x \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) [t(1-t)]^\beta v(t) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} [t(1-t)]^\beta v(t) dt \right) = \\ & = \frac{-(1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x))}{[x(1-x)]^\beta}, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sup_{0 < x < 1} \frac{1}{[x(1-x)]^\beta} & \left( (1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + \right. \\ & \left. + x \int_0^x \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) \frac{1}{4^\beta} \|v\|_\infty + \\ & + \sup_{0 < x < 1} \frac{|-(1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x))|}{[x(1-x)]^\beta}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Знайдемо



$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < x < 1} \frac{(1-x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + x \int_0^x \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha} \right) dt + x \int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt}{[x(1-x)]^\beta} = \\
& = \sup_{0 < x < 1} \frac{(1-x)x^{2-\alpha} + x(1-(1-x)^{2-\alpha} - x^{2-\alpha}) + x(1-x)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)[x(1-x)]^\beta} = \quad (3.33) \\
& = \sup_{0 < x < 1} \frac{x^{2-\alpha} + x - 2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)[x(1-x)]^\beta} \leq \sup_{0 < x < 1} \frac{x^{2-\alpha} + x - 2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)x(1-x)} = \sup_{0 < x < 1} \frac{x^{1-\alpha} + 1 - 2x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-x)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^{1-\alpha} + 1 - 2x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(1-\alpha)x^{1-\alpha} - (2-\alpha)2x^{1-\alpha}}{-(2-\alpha)} = \frac{3-\alpha}{2-\alpha}
\end{aligned}$$

(застосовано правило Лопіталя);

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < x < 1} \frac{|-(1-x)(\varphi(x) - \varphi(0)) + x(\varphi(1) - \varphi(x))|}{[x(1-x)]^\beta} = \\
& = \sup_{0 < x < 1} \left| -(1-x)^{1-\beta} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\beta} + x^{1-\beta} \frac{\varphi(1) - \varphi(x)}{(1-x)^\beta} \right| \leq \quad (3.34) \\
& \leq \sup_{0 < x < 1} \left( (1-x)^{1-\beta} + x^{1-\beta} \right) |\varphi|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}} \leq 2^\beta |\varphi|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}}.
\end{aligned}$$

Використовуючи оцінки (3.33) і (3.34), з нерівності (3.32) виводимо

$$\|v\|_\infty \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} \|v\|_\infty + 2^\beta |\varphi|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}}. \quad (3.35)$$

Оскільки  $\beta$  задовольняє умову (3.29), то  $\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} < 1$ . Тоді з нерівності (3.35)

випливає, що справджується оцінка (3.30).

Покажемо, що  $u(x) \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$ . Запишемо інтегральне рівняння (3.28) так:

$$\begin{aligned}
& u(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left( x \int_0^1 (1-t)^{1-\alpha} u(t) dt - \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u(t) dt \right) = \\
& = -\varphi(x) + \varphi(0) + x(\varphi(1) - \varphi(0)), \quad x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Тоді при  $x_1, x_2 \in [0,1]$ ,  $x_1 \neq x_2$ , отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_2) - u(x_1)}{|x_2 - x_1|^\beta} + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^\beta} \int_0^1 (1 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt - \\ & - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\int_0^{x_2} (x_2 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt - \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt}{|x_2 - x_1|^\beta} = \\ & = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{|x_2 - x_1|^\beta} + (\varphi(1) - \varphi(0)) \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^\beta}. \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} & \frac{|u(x_2) - u(x_1)|}{|x_2 - x_1|^\beta} \leq \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} |x_2 - x_1|^{1 - \beta} \left| \int_0^1 (1 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt \right| + \\ & + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\left| \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt - \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{1 - \alpha} u(t) dt \right|}{|x_2 - x_1|^\beta} + \\ & + \frac{|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|}{|x_2 - x_1|^\beta} + (\varphi(1) - \varphi(0)) |x_2 - x_1|^{1 - \beta}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Розглянемо другий доданок у правій частині цієї нерівності. Для функції

$$g(x) = \int_0^x (x - t)^{1 - \alpha} u(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

маємо:  $g(x) \in C_{[0,1]}^1$  і  $g'(x) = (1 - \alpha) \int_0^x (x - t)^{-\alpha} u(t) dt$ ,

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= |g'(\xi)(x_2 - x_1)| = (1 - \alpha) \left| \int_0^\xi (\xi - t)^{-\alpha} u(t) dt \right| |x_2 - x_1| \leq \\ & \leq \|u\|_{C_{[0,1]}} |x_2 - x_1| \quad (x_1 \leq \xi \leq x_2) \end{aligned}$$

Тоді з (3.36) дістаємо оцінку

$$\|u\|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}} \leq \left( \frac{1}{\Gamma(3 - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \right) \|u\|_{C_{[0,1]}} + |\varphi|_{C_{[0,1]}^{0,\beta}} + |\varphi(1) - \varphi(0)|,$$

а отже,  $u \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$ . Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 3.2.** Множина значень  $\beta$ , які задовольняють умову (3.29), не порожня, оскільки при  $0 \leq \alpha \leq 1$  виконується

$$0.2924812504\dots \leq \frac{1}{\ln 4} \cdot \ln \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \leq 0.5024543610\dots$$

**3.2.2. Вагові оцінки точності сіткових методів.** Для розв'язання рівняння (3.28) застосуємо метод сіток. Введемо сіткову множину

$\omega = \{x_j = jh, j = 1, \dots, N-1, h = 1/N\}$ ,  $\bar{\omega} = \omega \cup \{0\} \cup \{1\}$ ,  $N \geq 2$  – ціле, і покладемо в (3.28)  $x = x_j$ :

$$\begin{aligned} & u(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} u(t) dt + \right. \\ & \left. + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) u(t) dt + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} u(t) dt \right\} = \\ & = -(1-x_j)(\varphi(x_j) - \varphi(0)) + x_j(\varphi(1) - \varphi(x_j)), \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо сіткову схему

$$\begin{aligned} & u^h(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} dt + \right. \quad (3.37) \\ & \left. + x_j \sum_{k=1}^j u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) dt + x_j \sum_{k=j+1}^N u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} dt \right\} = \\ & = -(1-x_j)(\varphi(x_j) - \varphi(0)) + x_j(\varphi(1) - \varphi(x_j)), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0. \end{aligned}$$

Похибка  $z(x) = u^h(x) - u(x)$  є розв'язком сіткової задачі

$$\begin{aligned} & z(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j z(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} dt + \right. \quad (3.38) \\ & \left. + x_j \sum_{k=1}^j z(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) dt + x_j \sum_{k=j+1}^N z(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} dt \right\} = \\ & = \psi(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad z(x_N) = 0, \end{aligned}$$

де  $\psi(x_j)$  – похибка апроксимації:

$$\begin{aligned} \psi(x_j) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} & \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} (u(t)-u(x_k)) dt + \right. \\ & + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) (u(t)-u(x_k)) dt + \\ & \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} (u(t)-u(x_k)) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Позначимо сіткову норму  $\|w\|_{\infty, \omega} = \max_{x \in \omega} |w(x)|$ . Доведемо такий результат.

**Теорема 3.6.** *Нехай виконуються умови теореми 3.5. Тоді точність сіткової схеми (3.37) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:*

$$\left\| \frac{u-u^h}{[x(1-x)]^\beta} \right\|_{\infty, \omega} \leq M h^\beta |u|_{0, \beta}, \quad (3.40)$$

де  $M = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta \Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x)$ .

Доведення. Виконавши в (3.38) заміну  $Z(x) = \frac{z(x)}{[x(1-x)]^\beta}$ , отримаємо

сіткову задачу

$$\begin{aligned} Z(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)[x_j(1-x_j)]^\beta} & \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^\beta \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} dt + \right. \\ & + x_j \sum_{k=1}^j Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^\beta \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) dt + \\ & \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^\beta \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} dt \right\} = \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^\beta}, \\ & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad Z(x_N) = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Знайдемо оцінку для  $\left\| \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^\beta} \right\|_{\infty, \omega}$ , де  $\psi(x_j)$  визначена в (3.39).

Якщо  $u \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$  ( $0 < \beta \leq 1$ ), то

$$|u(t) - u(x_k)| = \left| \frac{u(t) - u(x_k)}{(x_k - t)^\beta} (x_k - t)^\beta \right| \leq h^\beta |u|_{0,\beta}; \quad (3.42)$$

якщо  $u(x) \in C_{[0,1]}^1$ , то

$$|u(t) - u(x_k)| = |u'(\bar{x}_k)(t - x_k)| \leq h \|u\|_{1,\infty} \quad (\bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k)). \quad (3.43)$$

Враховуючи нерівності (3.33), (3.42) і (3.43), з рівності (3.41) виводимо оцінки

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} h^\beta |u|_{0,\beta} \quad (0 < \beta \leq 1),$$

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} h \|u\|_{1,\infty}.$$

Звідси випливає оцінка (3.40). Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 3.3.** Якщо  $u(x) \in C_{[0,1]}^1$ , то для похибки  $z(x) = u(x) - u^h(x)$

сіткової схеми (3.37) виконується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \omega} \leq Mh \|u\|_{1,\infty}, \quad (3.44)$$

де  $M = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x)$ .

Тепер побудуємо і дослідимо сіткову схему другого порядку апроксимації

$$\begin{aligned} u^h(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} & \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j - t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt + \right. \\ & + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j - t)^{1-\alpha} \right) L_k(t; u^h) dt + \\ & \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt \right\} = \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$= -(1-x_j)(\varphi(x_j) - \varphi(0)) + x_j(\varphi(1) - \varphi(x_j)), \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0,$$

де  $L_k(t; w)$  – інтерполяційний поліном Лагранжа 1-го степеня для функції  $w(x)$ :

$$L_k(t; w) = \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} w(x_k) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} w(x_{k-1}), \quad t \in [x_{k-1}, x_k].$$

Для похибки  $z(x) = u^h(x) - u(x)$  маємо сіткову схему

$$\begin{aligned} u^h(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt + \right. \\ \left. + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) L_k(t; u^h) dt + \right. \\ \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt \right\} = \psi(x_j), \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

де  $\psi(x_j)$  – похибка апроксимації:

$$\begin{aligned} \psi(x_j) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} (u(t) - L_k(t; u)) dt + \right. \\ \left. + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) (u(t) - L_k(t; u)) dt + \right. \\ \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} (u(t) - L_k(t; u)) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

**Теорема 3.7.** Нехай слабкий розв'язок  $u(x)$  задачі (3.26) задовольняє умову  $u \in C_{[0,1]}^{k,\beta}$  ( $k=0, 1; 0 < \beta \leq 1$ ) і виконана умова (3.29). Тоді точність сіткової схеми (3.45) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u - u^h}{[x(1-x)]^\beta} \right\|_{\infty, \omega} \leq M_k h^{k+\beta} |u|_{k,\beta}, \quad (3.48)$$

де  $M_0$  і  $M_1$  – сталі, не залежні від  $h$  і  $u(x)$ ,

$$M_0 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta \Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad M_1 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta \Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)}.$$

Доведення. З (3.46) випливає, що функція  $Z(x) = \frac{z(x)}{[x(1-x)]^\beta}$  є розв'язком

сіткової задачі

$$\begin{aligned} Z(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)[x_j(1-x_j)]^\beta} & \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j-t)^{1-\alpha} L_k(t; [x(1-x)]^\beta Z) dt + \right. \\ & + x_j \sum_{k=1}^j \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( (1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha} \right) L_k(t; [x(1-x)]^\beta Z) dt + \\ & \left. + x_j \sum_{k=j+1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k(t; x(1-x)Z) dt \right\} = \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^\beta}, \\ & j = 1, 2, \dots, N-1, \quad u^h(x_N) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Знайдемо оцінку для  $\left\| \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^\beta} \right\|_{\infty, \omega}$ , де  $\psi(x_j)$  визначена в (3.47).

Якщо  $u \in C_{[0,1]}^{0,\beta}$  ( $0 < \beta \leq 1$ ), то маємо

$$\begin{aligned} |u(t) - L_k(t; u)| & = \left| u(t) - \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} u(x_k) - \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} u(x_{k-1}) \right| = \\ & = \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_k)) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_{k-1})) \right| = \\ & = \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \frac{u(t) - u(x_k)}{(x_k-t)^\beta} (x_k-t)^\beta + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} \frac{u(t) - u(x_{k-1})}{(t-x_{k-1})^\beta} (t-x_{k-1})^\beta \right| \leq h^\beta |u|_{0,\beta}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

якщо  $u \in C_{[0,1]}^1$ , то одержуємо

$$\begin{aligned} |u(t) - L_k(t; u)| & = \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_k)) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_{k-1})) \right| \leq \\ & = \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} u'(\bar{x}_k) (t-x_k) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} u'(\bar{x}_k) (t-x_{k-1}) \right| \leq \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$= \frac{2(t-x_{k-1})(x_k-t)}{x_k-x_{k-1}} \|u\|_{1,\infty} \leq \frac{h}{2} \|u\|_{1,\infty} \quad (\bar{x}_k, \bar{\bar{x}}_k \in (x_{k-1}, x_k));$$

якщо  $u \in C_{[0,1]}^{1,\beta}$  ( $0 < \beta \leq 1$ ), то дістаємо

$$\begin{aligned} |u(t) - L_k(t; u)| &= \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_k)) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} (u(t) - u(x_{k-1})) \right| = \\ &= \left| \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} u'(\bar{x}_k)(t-x_k) + \frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}} u'(\bar{\bar{x}}_k)(t-x_{k-1}) \right| = \quad (3.52) \\ &= \left| \frac{(t-x_{k-1})(x_k-t)}{x_k-x_{k-1}} \frac{u'(\bar{\bar{x}}_k) - u'(\bar{x}_k)}{(\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k)^\beta} (\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k)^\beta \right| \leq \frac{h^{\beta+1}}{4} |u|_{1,\beta} \\ &\quad (\bar{x}_k, \bar{\bar{x}}_k \in (x_{k-1}, x_k)); \end{aligned}$$

якщо  $u \in C_{[0,1]}^2$ , то з урахуванням формули [2]

$$u(t) - L_k(t; u) = \frac{u''(\bar{x}_k)}{2!} (t-x_{k-1})(t-x_k), \quad \bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

отримаємо

$$|u(t) - L_k(t; u)| \leq \frac{h^2}{8} \|u\|_{2,\infty}. \quad (3.53)$$

Враховуючи нерівності (3.33), (3.50)–(3.53), з рівняння (3.49) виводимо оцінки:

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} h^\beta |u|_{0,\beta} \quad (0 < \beta \leq 1),$$

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{h}{2} \|u\|_{1,\infty},$$

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^\beta} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{h^{1+\beta}}{4} |u|_{1,\beta} \quad (0 < \beta \leq 1),$$

$$\|Z\|_{\infty, \omega} \leq \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4} \|Z\|_{\infty, \omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{h^2}{8} \|u\|_{2,\infty},$$

з яких випливає твердження теореми.  $\square$

**Зауваження 3.4.** Якщо  $u(x) \in C_{[0,1]}^1$ , то для похибки  $z(x) = u(x) - u^h(x)$

сіткової схеми (3.45) виконується вагова оцінка



$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \omega} \leq M_1 h \|u\|_{1, \infty},$$

якщо  $u(x) \in C_{[0,1]}^2$ , то справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \omega} \leq M_2 h^2 \|u\|_{2, \infty},$$

де  $M_1$  і  $M_2$  – сталі, не залежні від  $h$  і  $u(x)$ ,

$$M_1 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{2\Gamma(3-\alpha)}, \quad M_2 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \cdot \frac{3-\alpha}{8\Gamma(3-\alpha)}.$$

**3.2.3. Числовий приклад.** Розглянемо крайову задачу (3.26) при  $\alpha = 1/2$ :

$$u''(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t) dt}{\sqrt{x-t}} = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.54)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Для її наближеного розв'язування скористаємося сітковою схемою (3.37) першого порядку апроксимації:

$$\left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j \sqrt{1-t} - \sqrt{x_j-t}) dt \right\} u^h(x_j) + \quad (3.55)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{j-1} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-t} - \sqrt{x_j-t}) dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x_j \sum_{k=j+1}^{N-1} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-t} dt =$$

$$= (1-x_j) \int_0^{x_j} \xi f(\xi) d\xi + x_j \int_{x_j}^1 (1-\xi) f(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\omega_h = \{x_j = jh, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad h = 1/N\}, \quad N \geq 2 \text{ – ціле число.}$$

При  $f(x) = 6x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2x^{1/2} - \frac{16}{5}x^{5/2}\right)$  задача (3.54) має точний розв'язок

$$u(x) = x(1-x^2).$$

Права частина системи (3.55) набуває вигляду

$$(1-x_j) \int_0^{x_j} \xi \left( 6\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{1/2} - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \xi^{5/2} \right) d\xi + x_j \int_{x_j}^1 (1-\xi) \left( 6\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{1/2} - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \xi^{5/2} \right) d\xi.$$

Оцінка (3.44) має вигляд

$$\left\| \frac{u-u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty, \omega} \leq Mh \|u\|_{1, \infty},$$

$$\text{де } M = \left( 1 - \frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} = \frac{20}{6\sqrt{\pi}-5} = 3,549420196\dots,$$

$$\|u\|_{1, \infty} = \|1-3x^2\|_{\infty} = 2.$$

Результати обчислень наведено в табл. 3.1. Для числових розрахунків використано пакет Maple 18.

Таблиця 3.1.

Числовий приклад для задачі (3.54)

| $N$ | $\text{err}_h = \left\  \frac{u^h(x) - u(x)}{x(1-x)} \right\ _{\infty, \omega_h}$ | $Mh \ u\ _{1, \infty}$ | $p = \log_2 \frac{\text{err}_h}{\text{err}_{h/2}}$ |
|-----|---|------------------------|--|
| 4   | 0.108432317883416745723216  | 1.774710098            | —  |
| 8   | 0.0547152701094182091868434   | 0.887355049            | 0.986779384943758484362501                         |
| 16  | 0.0275431416451253171904171   | 0.443677524            | 0.990250394523665314608884                         |
| 32  | 0.0138219070074192345792445   | 0.221838762            | 0.994736448571623860157041                         |
| 64  | 0.00692350462915187444833523  | 0.110919381            | 0.997382268069024220886207                         |
| 128 | 0.00346479632445953474833496  | 0.055459690            | 0.998731957725250175509775                         |
| 256 | 0.00173313158010428842310395  | 0.027729845            | 0.999389358381004698470821                         |
| 512 | 0.000866742870244009382101217   | 0.013864922            | 0.999705219593735010043082                         |

**3.2.4. Висновки.** Для крайової задачі (3.26) в теоремі 3.4 доведено однозначну розв'язність в класі  $C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$ , а в теоремі 3.5 – шкалу вагових оцінок для слабкого розв'язку  $u(x)$ .

Для наближеного розв'язування першої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та знайдено узгоджені в розумінні [90] апріорні оцінки для похибки з урахуванням крайового ефекту. Отримані в теоремах 3.6 і 3.7 вагові оцінки свідчать про те, що точність наближеного розв'язку у приміжових вузлах сітки

вища, ніж в її внутрішніх вузлах. Теоретичні висновки узгоджуються з результатами обчислень.

Результати підрозд. 3.2 опубліковано в [19, 195].

### 3.3. Вагові оцінки похибки сіткового методу для звичайного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами і дробовою похідною

#### 3.3.1. Диференціальні властивості розв'язку крайової задачі.

Скористаємося стандартними позначеннями для норм і півнорм у просторах Соболева  $W_p^k$  (при  $p = 2$   $W_2^k \equiv H^k$ ). Наприклад, для функцій, заданих на інтервалі  $\Omega = (0,1)$  маємо

$$\|u\| \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_0^1 u^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{vrai max}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left( \sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad |u|_{H^k(\Omega)} = \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{W_\infty^1(\Omega)} = \|u\|_{L_\infty(\Omega)} + \|u'\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad |u|_{W_\infty^1(\Omega)} = \|u'\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Простори  $\overset{\circ}{H}^k(\Omega)$  і  $\overset{\circ}{W}_\infty^1(\Omega)$  складаються відповідно з функцій  $u \in H^k(\Omega)$  і  $u \in W_\infty^1(\Omega)$ , які задовольняють умови  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ .

Розглянемо задачу

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k_1(x) D^\alpha u(x) + k_2(x) u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.56)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

де  $D^\alpha u(x)$  – похідна Рімана–Ліувілля порядку  $\alpha \in (0,1)$ :

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Замінімо у рівнянні  $x$  на  $\xi$  і проінтегруємо обидві його частини по  $\xi$  від  $\eta$  до  $x$ , а потім – по  $\eta$  від 0 до 1:

$$u'(x) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_1(\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi + \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_2(\xi) u(\xi) d\xi = \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x f(\xi) d\xi. \quad (3.57)$$

Перетворимо другий доданок у лівій частині цієї рівності:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_1(\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi = [\text{частинами}] = \\ & = \int_0^1 d\eta \left[ k_1(\xi) \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^\alpha} \Big|_{\eta}^x - \int_{\eta}^x k_1'(\xi) \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi \right] = \\ & = k_1(x) \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} - \int_0^1 k_1(\eta) \int_0^{\eta} \frac{u(t)dt}{(\eta-t)^\alpha} d\eta - \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_1'(\xi) \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^\alpha} d\xi = [\text{частинами}] = \\ & = -\frac{1}{1-\alpha} k_1(x) \left[ \underbrace{(x-t)^{1-\alpha} u(t)}_{=0} \Big|_0^x - \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u'(t) dt \right] + \\ & \quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 k_1(\eta) d\eta \left[ \underbrace{(\eta-t)^{1-\alpha} u(t)}_{=0} \Big|_0^{\eta} - \int_0^{\eta} (\eta-t)^{1-\alpha} u'(t) dt \right] + \\ & \quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_1'(\xi) d\xi \left[ \underbrace{(\xi-t)^{1-\alpha} u(t)}_{=0} \Big|_0^{\xi} - \int_0^{\xi} (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt \right] = \\ & = \frac{1}{1-\alpha} k_1(x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u'(t) dt - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 k_1(\eta) d\eta \int_0^{\eta} (\eta-t)^{1-\alpha} u'(t) dt - \\ & \quad - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x k_1'(\xi) d\xi \int_0^{\xi} (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt = \\ & = [\text{зміна порядку інтегрування в другому і третьому інтегралах}] = \\ & = \frac{1}{1-\alpha} k_1(x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u'(t) dt - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 u'(t) dt \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} k_1(\eta) d\eta - \\ & \quad - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x k_1'(\xi) d\xi \int_0^{\xi} d\eta \int_{\eta}^{\xi} (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt + \frac{1}{1-\alpha} \int_x^1 k_1'(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 d\eta \int_{\eta}^{\xi} (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\text{інтегрування по } \eta \text{ у двох останніх інтегралах}] = \\
&= \frac{1}{1-\alpha} k_1(x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u'(t) dt - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 u'(t) dt \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} k_1(\eta) d\eta - \\
&\quad - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x \xi k_1'(\xi) d\xi \int_0^\xi (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt + \frac{1}{1-\alpha} \int_x^1 (1-\xi) k_1'(\xi) d\xi \int_0^\xi (\xi-t)^{1-\alpha} u'(t) dt = \\
&= [\text{зміна порядку інтегрування у двох останніх інтегралах}] = \\
&= \frac{1}{1-\alpha} k_1(x) \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u'(t) dt - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 u'(t) dt \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} k_1(\eta) d\eta - \\
&\quad - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x u'(t) dt \int_t^x (\xi-t)^{1-\alpha} \xi k_1'(\xi) d\xi + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x u'(t) dt \int_t^1 (\xi-t)^{1-\alpha} (1-\xi) k_1'(\xi) d\xi + \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_x^1 u'(t) dt \int_t^1 (\xi-t)^{1-\alpha} (1-\xi) k_1'(\xi) d\xi = [\text{групування доданків по-іншому}] = \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x u'(t) dt \left[ (x-t)^{1-\alpha} k_1(x) - \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} k_1(\eta) d\eta - \int_t^x (\xi-t)^{1-\alpha} \xi k_1'(\xi) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^1 (\xi-t)^{1-\alpha} (1-\xi) k_1'(\xi) d\xi \right] + \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_x^1 u'(t) dt \left[ - \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} k_1(\eta) d\eta + \int_t^1 (\xi-t)^{1-\alpha} (1-\xi) k_1'(\xi) d\xi \right] = \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x u'(t) dt \left[ (x-t)^{1-\alpha} k_1(x) + \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (k_1(\eta)(1-\eta))' d\eta - \int_t^x (\eta-t)^{1-\alpha} k_1'(\eta) d\eta \right] + \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_x^1 u'(t) dt \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (k_1(\eta)(1-\eta))' d\eta.
\end{aligned}$$

У третьому доданку в лівій частині рівності (3.57) змінимо порядок інтегрування та виконаємо нескладні перетворення:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 d\eta \int_\eta^x k_2(\xi) u(\xi) d\xi &= \int_0^x k_2(\xi) u(\xi) d\xi \int_0^\xi d\eta - \int_x^1 k_2(\xi) u(\xi) d\xi \int_\xi^1 d\eta = \\
&= \int_0^x \xi k_2(\xi) u(\xi) d\xi - \int_x^1 (1-\xi) k_2(\xi) u(\xi) d\xi = \\
&= \int_0^x \xi k_2(\xi) d\xi \int_0^\xi u'(t) dt - \int_x^1 (1-\xi) k_2(\xi) d\xi \int_0^\xi u'(t) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x u'(t) dt \int_t^x \xi k_2(\xi) d\xi - \int_0^x u'(t) dt \int_x^1 (1-\xi) k_2(\xi) d\xi - \int_x^1 u'(t) dt \int_t^1 (1-\xi) k_2(\xi) d\xi = \\
&= \int_0^x u'(t) dt \left( \int_t^x k_2(\xi) d\xi - \int_t^1 (1-\xi) k_2(\xi) d\xi \right) - \int_x^1 u'(t) dt \int_t^1 (1-\xi) k_2(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Тоді одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно невідомої функції  $u'(x)$ :

$$u'(x) + \int_0^1 K(x,t) u'(t) dt = \int_0^x d\eta \int_\eta^x f(\xi) d\xi, \quad x \in [0,1], \quad (3.58)$$

де ядро  $K(x,t)$  має вигляд

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \begin{cases} (x-t)^{1-\alpha} k_1(x) + \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (k_1(\eta)(1-\eta))' d\eta - \\ - \int_t^x (\eta-t)^{1-\alpha} k_1'(\eta) d\eta + \int_t^x k_2(\eta) d\eta - \int_t^1 (1-\eta) k_2(\eta) d\eta, & t \leq x, \\ \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (k_1(\eta)(1-\eta))' d\eta - \int_t^1 (1-\eta) k_2(\eta) d\eta, & t \geq x. \end{cases}$$

Доведемо таке допоміжне твердження.

**Лема 3.2.** Нехай  $u(x) \in H^1(\Omega)$ . Тоді справджується вагова оцінка

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\sqrt{\rho_1(x)}} \right| \leq |u|_{H^1(\Omega)}, \quad \rho_1(x) = \min(x, 1-x). \quad (3.59)$$

Для функції  $u(x) = \rho_1(x) = \min(x, 1-x) = 0.5 - |x - 0.5| \in H^1(\Omega)$  ця нерівність перетворюється на рівність, а отже, оцінка (3.59) є непокривуваною.

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші–Буняковського до інтегралів

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) d\xi, \quad u(x) = -\int_x^1 u'(\xi) d\xi,$$

маємо

$$|u(x)| = \sqrt{x} |u|_{H^1(0,x)}, \quad x \in [0, 1/2],$$

$$|u(x)| = \sqrt{1-x} |u|_{H^1(x,1)}, \quad x \in [1/2, 1].$$

Звідси випливає оцінка (3.59).  $\square$

Розглянемо випадок сталих коефіцієнтів та доведемо теорему існування і єдиності.

**Теорема 3.8.** Нехай  $f(x) = f_0(x) + f_1'(x)$ , де  $f_0(x), f_1(x) \in L_2(0,1)$ , а коефіцієнти  $k_1 = \text{const}$  і  $k_2 = \text{const}$  задовольняють умову

$$\frac{1}{6}k_1^2 + \frac{1}{30}k_2^2 + \frac{1}{10}k_1k_2 \leq 1. \quad (3.60)$$

Тоді  $\forall \alpha \in [0,1]$  інтегральне рівняння (3.58) має єдиний розв'язок  $u'(x) \in L_2(\Omega)$ , а отже, крайова задача (3.56) має єдиний розв'язок  $u(x) \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ , і для нього справджується оцінка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q} (\sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|), \quad (3.61)$$

$$\text{де } q = \left( \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx \right)^{1/2}.$$

Доведення. Якщо коефіцієнти  $k_1(x)$  і  $k_2(x)$  диференціального рівняння (3.56) сталі, то ядро  $K(x,t)$  має вигляд

$$\begin{aligned} K(x,t) &= \frac{k_1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ (x-t)^{1-\alpha} - \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} d\eta \right] + k_2 \left[ (x-t) - \int_t^1 (1-\eta) d\eta \right] = \\ &= \frac{k_1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ (x-t)^{1-\alpha} - \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right] + k_2 \left[ (x-t) - \frac{(1-t)^2}{2} \right] = \\ &= k_1 \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] + k_2 \left[ (x-t) - \frac{(1-t)^2}{2} \right], \quad t \leq x; \\ K(x,t) &= \frac{-k_1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} d\eta - k_2 \int_t^1 (1-\eta) d\eta = \frac{-k_1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{2-\alpha} - k_2 \frac{(1-t)^2}{2} = \\ &= -k_1 \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - k_2 \frac{(1-t)^2}{2}, \quad t \geq x. \end{aligned}$$

Знайдемо  $L_2$ -норму ядра  $K(x,t)$ :

$$q^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx = \int_0^1 dx \int_0^x K^2(x,t) dt + \int_0^1 dx \int_x^1 K^2(x,t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^x \left\{ k_1 \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] + k_2 \left[ (x-t) - \frac{(1-t)^2}{2} \right] \right\}^2 dt + \\
&\quad + \int_0^1 dx \int_x^1 \left[ -k_1 \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - k_2 \frac{(1-t)^2}{2} \right]^2 dt = \\
&= k_1^2 \int_0^1 dx \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} - 2 \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] dt + \\
&\quad + k_2^2 \int_0^1 dx \int_0^x \left[ (x-t)^2 + \frac{(1-t)^4}{4} - (x-t)(1-t)^2 \right] dt + \\
&\quad + 2k_1k_2 \int_0^1 dx \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} - \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} (x-t) \right] dt + \\
&\quad + k_1^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{(1-t)^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} dt + k_2^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{(1-t)^4}{4} dt + 2k_1k_2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{(1-t)^{4-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} dt = \\
&= k_1^2 \left[ \frac{2-\alpha}{2(3-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{1}{(6-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} - \frac{2}{(5-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} \right] + \frac{k_2^2}{40} + \\
&\quad = \frac{(3-\alpha)(-2\alpha^3+11\alpha^2-17\alpha+9)}{2(3-2\alpha)(5-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} \\
&\quad + 2k_1k_2 \left[ \frac{1}{(3-\alpha)(4-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{2(6-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{1}{(5-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right] + \\
&\quad = \frac{-\alpha^3+12\alpha^2-43\alpha+36}{2\Gamma(7-\alpha)} \\
&\quad + \frac{k_1^2}{(5-2\alpha)(6-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{k_2^2}{120} + \frac{2k_1k_2}{2(5-\alpha)(6-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} = \\
&= \frac{(3-\alpha)(-2\alpha^3+11\alpha^2-19\alpha+12)}{2(3-2\alpha)(5-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} k_1^2 + \frac{k_2^2}{30} + \frac{-\alpha^3+13\alpha^2-50\alpha+48}{\Gamma(7-\alpha)} k_1k_2.
\end{aligned}$$

Оскільки при  $\alpha \in [0,1]$  виконуються нерівності

$$\frac{1}{30} \leq \frac{(3-\alpha)(-2\alpha^3+11\alpha^2-19\alpha+12)}{2(3-2\alpha)(5-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} \leq \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{15} \leq \frac{-\alpha^3+13\alpha^2-50\alpha+48}{\Gamma(7-\alpha)} \leq 0.09428271480\dots < \frac{1}{10},$$



то одержуємо оцінку

$$q^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx < \frac{1}{6} k_1^2 + \frac{1}{30} k_2^2 + \frac{1}{10} k_1 k_2.$$

Внаслідок умови (3.60) маємо  $q < 1$ , тоді методом послідовних наближень дістаємо твердження теореми і нерівність

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q} \left\| \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x f(\xi) d\xi \right\|. \quad (3.62)$$

Скориставшись зображенням [174, с. 91]

$$f(x) = f_0(x) + f_1'(x), \text{ де } f_0(x), f_1(x) \in L_2(0,1),$$

знайдемо

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x f(\xi) d\xi \right\| &= \left\| \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x [f_0(\xi) + f_1'(\xi)] d\xi \right\| = \left\| \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^x f_0(\xi) d\xi + f_1(x) - \int_0^1 f_1(\eta) d\eta \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|, \end{aligned}$$

що разом із (3.62) дає оцінку (3.61). Теорему доведено.  $\square$

З теореми 3.8 і леми 3.2 випливає наступне твердження.

**Теорема 3.9.** *Нехай виконуються умови теореми 3.8. Тоді для розв'язку  $u(x)$  задачі (3.56) справджується вагова оцінка*

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\sqrt{\rho_1(x)}} \right| \leq \frac{1}{1-q} (\sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|),$$

$$\text{де } \rho_1(x) = \min(x, 1-x), \quad q = \left( \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx \right)^{1/2}.$$

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші–Буняковського, одержимо оцінки

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(t) dt \right| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x |u'(t)|^2 dt} \leq \sqrt{x} |u|_{H^1(\Omega)}, \quad x \in [0, 1/2],$$

$$|u(x)| = \left| \int_x^1 u'(t) dt \right| \leq \sqrt{1-x} |u|_{H^1(\Omega)}, \quad x \in [1/2, 1],$$

що разом із (3.61) доводить теорему.  $\square$

Розглянемо тепер випадок змінних коефіцієнтів. Доведемо спочатку таке допоміжне твердження.

**Лема 3.3.** Нехай  $u(x) \in W_\infty^1(\Omega)$ . Тоді справджується вагова оцінка

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\rho_1(x)} \right| \leq \|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}, \quad \rho_1(x) = \min(x, 1-x),$$

яка є непокривуваною в тому сенсі, що існує задача (3.56) з розв'язком

$$u(x) = 0.5 - |0.5 - x| \in \overset{\circ}{W}_\infty^1(\Omega), \text{ на якому ця оцінка перетворюється на рівність.}$$

Доведення випливає з нерівностей

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(t) dt \right| \leq x \|u'\|_{W_\infty^1(\Omega)}, \quad x \in [0, 1/2],$$

$$|u(x)| = \left| \int_x^1 u'(t) dt \right| \leq (1-x) \|u'\|_{W_\infty^1(\Omega)}, \quad x \in [1/2, 1]. \quad \square$$

**Теорема 3.10.** Нехай

$$k_1(x) \in W_\infty^1(\Omega), \quad k_2(x) \in L_\infty(\Omega), \quad f(x) = f_0'(x), \quad f_0(x) \in L_\infty(\Omega)$$

і виконується умова

$$\frac{13}{6} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{2}{3} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} < 1. \quad (3.63)$$

Тоді  $\forall \alpha \in [0,1]$  інтегральне рівняння (3.58) має єдиний розв'язок

$$u'(x) \in L_\infty(\Omega), \text{ а отже, крайова задача (3.56) має єдиний розв'язок } u(x) \in \overset{\circ}{W}_\infty^1(\Omega),$$

і для нього справджується оцінка

$$\|u\|_{W_\infty^1(\Omega)} \leq \frac{2}{1-q} \|f_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (3.64)$$

$$\text{де } q = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,t)| dt.$$

Доведення. Знайдемо

$$|K(x,t)| \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ (x-t)^{1-\alpha} + \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (2-\eta) d\eta + \int_t^x (\eta-t)^{1-\alpha} d\eta \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \left[ (x-t) + \int_t^1 (1-\eta) d\eta \right] \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
& = \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \\
& \quad + \left[ (x-t) + \frac{(1-t)^2}{2} \right] \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \text{при } t \leq x, \\
|K(x,t)| & \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^1 (\eta-t)^{1-\alpha} (2-\eta) d\eta \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \int_t^1 (1-\eta) d\eta \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
& = \left[ \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{(1-t)^2}{2} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \text{при } t \geq x.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |K(x,t)| dt = \int_0^x |K(x,t)| dt + \int_x^1 |K(x,t)| dt \leq \tag{3.65} \\
& \leq \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] dt \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \\
& \quad + \int_0^x \left[ (x-t) + \frac{(1-t)^2}{2} \right] dt \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \\
& \quad + \int_x^1 \left[ \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] dt \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \int_x^1 \frac{(1-t)^2}{2} dt \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
& = \left[ \frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1-(1-x)^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{1-(1-x)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{x^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \\
& \quad + \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{1-(1-x)^3}{6} \right] \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \\
& \quad + \left[ \frac{(1-x)^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{(1-x)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{(1-x)^3}{6} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
& = \left[ \frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{x^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \right] \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Звідси  $\forall \alpha \in [0,1]$  одержимо оцінку

$$q = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,t)| dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[ \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{2}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{2}{3} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{13}{6} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{2}{3} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Унаслідок умови (3.63) маємо  $q < 1$ , тоді методом послідовних наближень дістаємо оцінку

$$\|u\|_{W_\infty^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q} \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f(\xi) d\xi \right\|_{L_\infty(\Omega)},$$

яка разом з нерівністю

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f(\xi) d\xi \right\|_{L_\infty(\Omega)} &= \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f'_0(\xi) d\xi \right\|_{L_\infty(\Omega)} = \left\| f_0(x) - \int_0^1 f_0(\eta) d\eta \right\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq 2 \|f_0\|_{L_\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

доводить теорему.  $\square$

Наслідком леми 3.3 і теореми 3.10 є наступний результат.

**Теорема 3.11.** *Нехай виконуються умови теореми 3.10. Тоді для розв'язку задачі (3.56) справджується вагова оцінка*

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\rho_1(x)} \right| \leq \frac{2}{1-q} \|f_0\|_{L_\infty(\Omega)},$$

де  $\rho_1(x) = \min(x, 1-x)$ ,  $q = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,t)| dt$ .

Знайдемо тепер достатні умови, за яких виконується  $u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ .

**Теорема 3.12.** *Нехай  $k_1(x) \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $k_2(x) \in L_\infty(\Omega)$ ,*

$$f(x) = f_0(x) + f_1'(x) \in H^{-1}(\Omega), \text{ де } f_0(x), f_1(x) \in L_2(\Omega),$$

*і виконується умова*

$$\frac{169}{160} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 + \frac{7}{30} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \frac{31}{40} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} < 1. \quad (3.66)$$

Тоді  $\forall \alpha \in [0,1]$  інтегральне рівняння (3.58) має єдиний розв'язок  $u' \in L_2(\Omega)$ ,  
а отже, крайова задача (3.56) має єдиний розв'язок  $u \in H^1(\Omega)$ , і для нього  
справджується оцінка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q} (\sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|), \quad (3.67)$$

$$\text{де } q = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx}.$$

Доведення. Використовуючи (3.65), маємо

$$\begin{aligned} q^2 &= \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx = \int_0^1 dx \int_0^x K^2(x,t) dt + \int_0^1 dx \int_x^1 K^2(x,t) dt \leq \\ &\leq \int_0^1 dx \int_0^x \left\{ \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (x-t) + \frac{(1-t)^2}{2} \right] \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \right\}^2 dt + \\ &\quad + \int_0^1 dx \int_x^1 \left\{ \left[ \frac{(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{(1-t)^2}{2} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \right\}^2 dt = \\ &= \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 \int_0^1 dx \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{(1-t)^{6-2\alpha}}{\Gamma^2(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} + \right. \\ &\quad + 2 \frac{(x-t)^{1-\alpha} (1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \Gamma(4-\alpha)} + 2 \frac{(x-t)^{1-\alpha} (1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \Gamma(3-\alpha)} + 2 \frac{(x-t)^{3-2\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \Gamma(3-\alpha)} + \\ &\quad \left. + 2 \frac{(1-t)^{5-2\alpha}}{\Gamma(3-\alpha) \Gamma(4-\alpha)} + 2 \frac{(1-t)^{3-\alpha} (x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha) \Gamma(4-\alpha)} + 2 \frac{(1-t)^{2-\alpha} (x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} \right] dt + \\ &\quad + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 \int_0^1 dx \int_0^x \left[ (x-t)^2 + \frac{(1-t)^4}{4} + (x-t)(1-t)^2 \right] dt + \\ &\quad + 2 \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \int_0^1 dx \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(x-t)^{1-\alpha} (1-t)^2}{2\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(x-t)(1-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-t)^{5-\alpha}}{2\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(x-t)(1-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{3-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{(x-t)^{2-\alpha} (1-t)^2}{2\Gamma(3-\alpha)} \right] dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \left[ \frac{(1-t)^{6-2\alpha}}{\Gamma^2(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} + 2 \frac{(1-t)^{5-2\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} \right] dt + \\
& \quad + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{(1-t)^4}{4} dt + \\
& \quad + 2 \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \int_0^1 dx \int_x^1 \left[ \frac{(1-t)^{5-\alpha}}{2\Gamma(4-\alpha)} + \frac{(1-t)^{4-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \right] dt = \\
& = \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 \left[ \frac{1}{(3-2\alpha)(4-2\alpha)\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{1}{(8-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} + \frac{1}{(6-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \right. \\
& \quad + \frac{1}{(5-2\alpha)(6-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma^2(4-\alpha)} + \\
& \quad \quad + \frac{3}{(5-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{2}{(7-2\alpha)\Gamma(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \\
& \quad \quad + \frac{2}{(7-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma^2(4-\alpha)} + \frac{1}{(7-2\alpha)(8-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} + \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{(5-2\alpha)(6-2\alpha)\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{1}{(7-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} \right] + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{10} + \frac{1}{120} \right] + \\
& \quad + 2 \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} \left[ \frac{1}{(3-\alpha)(4-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{2(5-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2(6-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} + \frac{1}{2(7-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} + \frac{1}{2(5-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{2(6-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \\
& \quad \quad + \frac{1}{(4-\alpha)(5-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{2(6-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} + \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2(6-\alpha)(7-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} + \frac{1}{2(5-\alpha)(6-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right] = \\
& = \frac{-4\alpha^5 + 88\alpha^4 - 715\alpha^3 + 2688\alpha^2 - 4644\alpha + 2925}{2(3-2\alpha)(5-2\alpha)(7-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 + \frac{7}{30} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \\
& \quad + \frac{-5\alpha^3 + 70\alpha^2 - 311\alpha + 432}{\Gamma(7-\alpha)} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\forall \alpha \in [0,1]$  виконуються нерівності

$$\frac{65}{168} \leq \frac{-4\alpha^5 + 88\alpha^4 - 715\alpha^3 + 2688\alpha^2 - 4644\alpha + 2925}{2(3-2\alpha)(5-2\alpha)(7-2\alpha)\Gamma^2(4-\alpha)} \leq \frac{169}{160},$$

$$\frac{3}{10} \leq \frac{-5\alpha^3 + 70\alpha^2 - 311\alpha + 432}{\Gamma(7-\alpha)} \leq \frac{31}{40},$$

то одержимо оцінку

$$\begin{aligned} q^2 &= \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx \leq \\ &\leq \frac{169}{160} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2 + \frac{7}{30} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \frac{31}{40} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Унаслідок умови (3.66) маємо  $q < 1$ , тоді методом послідовних наближень дістаємо твердження теореми і нерівність

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q} \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f(\xi) d\xi \right\|.$$

Як і в теоремі 3.8, скористаємося зображенням [174, с. 91]

$$f(x) = f_0(x) + f_1'(x), \text{ де } f_0(x), f_1(x) \in L_2(0,1),$$

і знайдемо

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f(\xi) d\xi \right\| &= \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x [f_0(\xi) + f_1'(\xi)] d\xi \right\| = \left\| \int_0^1 d\eta \int_\eta^x f_0(\xi) d\xi + f_1(x) - \int_0^1 f_1(\eta) d\eta \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|, \end{aligned}$$

що й доводить теорему.  $\square$

**Теорема 3.13.** *Нехай виконуються умови теореми 3.12. Тоді справджуються вагова оцінка*

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\sqrt{\rho_1(x)}} \right| \leq \frac{1}{1-q} (\sqrt{2} \|f_0\| + 2 \|f_1\|),$$

$$\text{де } q = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx}, \quad \rho_1(x) = \min(x, 1-x).$$

Доведення випливає з леми 3.2 і оцінки (3.67).  $\square$

**Теорема 3.14.** *Нехай виконуються припущення теореми 3.12 і  $f(x) \in L_2(\Omega)$ . Тоді для розв'язку  $u(x)$  задачі (3.56) маємо*

$u(x) \in H^2(0,1) \cap H^1(0,1)$  і для нього справджується оцінка

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{u(x)}{\rho_1(x)} \right| \leq |u|_{H^2(\Omega)}, \quad \rho_1(x) = \min(x, 1-x).$$

Доведення випливає з нерівності

$$|u(x)| = \left| (1-x) \int_0^x \xi u''(\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) u''(\xi) d\xi \right| \leq x(1-x) |u|_{H^2(\Omega)}. \quad \square$$

**3.3.2. Точність сіткової схеми.** Надалі використовуємо стандартні позначення теорії різницевої схем [86, 90]. Уведемо на відрізку  $[0,1]$  рівномірну сітку

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}, \quad N \geq 1 - \text{ціле},$$

позначимо ліву різницеву похідну  $y_{\bar{x}}(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h}$  та сіткову норму

$$\|y_{\bar{x}}\| = \left( \sum_{i=1}^N h y_{\bar{x}}^2(x_i) \right)^{1/2}.$$

На сітці  $\omega_h$  запишемо наслідок інтегрального рівняння (3.58):

$$u_{\bar{x}}(x_i) + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} u'(t) dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx = \varphi(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{де } \varphi(x_i) = \frac{1}{h} \int_0^1 d\eta \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\eta}^x f(\xi) d\xi.$$

Сіткову схему візьмемо у вигляді

$$y_{\bar{x}}(x_i) + \sum_{p=1}^N a_{i,p} y_{\bar{x}}(x_p) = \varphi(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.68)$$

$$\text{де } a_{i,p} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-1}}^{x_p} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx, \quad \varphi(x_i) = \frac{1}{h} \int_0^1 d\eta \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\eta}^x f(\xi) d\xi.$$

Для похибки  $z(x_i) = y(x_i) - u(x_i)$  одержимо сіткову схему

$$z_{\bar{x}}(x_i) + \sum_{p=1}^N a_{i,p} z_{\bar{x}}(x_p) = \psi(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.69)$$

де  $\psi(x_i)$  – похибка апроксимації:



$$\begin{aligned}
\psi(x_i) &= \frac{1}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} [u'(t) - y_{\bar{x}}(x_p)] dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx = \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} dt \int_{x_{p-1}}^{x_p} [u'(t) - y'(s)] ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx = \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} dt \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_s^t ds [u''(\xi)] d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx.
\end{aligned}$$

Використовуючи техніку [90], доведемо наступне твердження.

**Теорема 3.15.** *Нехай виконуються умови теореми 3.14. Тоді точність сіткової схеми (3.68) характеризується оцінкою*

$$\|z_{\bar{x}}\| \leq h \frac{q}{\sqrt{3(1-q)}} \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad (3.70)$$

а також ваговою оцінкою, яка враховує початковий ефект:

$$\max_{i=0, \dots, N} \left| \frac{z(x_i)}{\sqrt{\rho_1(x_i)}} \right| \leq h \frac{q}{\sqrt{3(1-q)}} \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad (3.71)$$

$$\text{де } q = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t) dt dx}, \quad \rho_1(x) = \min(x, 1-x).$$

Доведення. З рівняння (3.69) маємо

$$\begin{aligned}
\|z_{\bar{x}}\| &\leq \left\{ \sum_{i=1}^N h \left[ \sum_{p=1}^N a_{i,p} z_{\bar{x}}(x_p) \right]^2 \right\}^{1/2} + \|\psi\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^N h \left[ \sum_{p=1}^N a_{i,p}^2 \right] \left[ \sum_{p=1}^N z_{\bar{x}}^2(x_p) \right] \right\}^{1/2} = \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N a_{i,p}^2 \right\}^{1/2} \|z_{\bar{x}}\| + \|\psi\| \leq q \|z_{\bar{x}}\| + \|\psi\|,
\end{aligned}$$

оскільки

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N a_{i,p}^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx dt \right)^2 \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K^2(x,t) dx dt \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{00}^{11} K^2(x,t) dx dt \right\}^{1/2} = q.$$

Звідси випливає оцінка

$$\|z_{\bar{x}}\| \leq \frac{\|\Psi\|}{1-q}. \quad (3.72)$$

Знайдемо тепер

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2 &= \sum_{i=1}^N h \left\{ \frac{1}{h^2} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_s^t u''(\xi) d\xi ds dt \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h^3} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{p=1}^N \left[ \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx \right)^2 dt \right]^{1/2} \left[ \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_s^t u''(\xi) d\xi ds \right)^2 dt \right]^{1/2} \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h^3} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t) dx \right)^2 dt \right) \left( \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_s^t u''(\xi) d\xi ds \right)^2 dt \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{h^3} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( h \int_{x_{i-1}}^{x_i} K^2(x,t) dx \right) dt \right) \left( \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( h \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_s^t u''(\xi) d\xi \right)^2 ds \right) dt \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K^2(x,t) dx dt \right) \left( \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_s^t u''(\xi) d\xi \right)^2 ds \right) dt \right) = \\ &= \frac{q^2}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_s^t u''(\xi) d\xi \right)^2 ds \right) dt \leq \frac{q^2}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left( \int_{x_{p-1}}^{x_p} |t-s| \left| \int_s^t u''^2(\xi) d\xi \right| ds \right) dt \leq \\ &\leq \frac{q^2}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} u''^2(\xi) d\xi \int_{x_{p-1}}^{x_p} \int_{x_{p-1}}^{x_p} |t-s| ds dt = \\ &= \frac{q^2}{h} \sum_{p=1}^N \int_{x_{p-1}}^{x_p} u''^2(\xi) d\xi \frac{h^3}{3} = \frac{q^2 h^2}{3} |u|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

що разом із (3.72) дає оцінку (3.70).

Для доведення вагової оцінки (3.71) скористаємося нерівностями

$$|z(x_i)| = \left| \sum_{k=1}^i h z_{\bar{x}}(x_k) \right| \leq \left( \sum_{k=1}^i h \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^i h z_{\bar{x}}^2(x_k) \right)^{1/2} \leq \sqrt{x_i} \|z_{\bar{x}}\|,$$

$$|z(x_i)| = \left| - \sum_{k=i+1}^N h z_{\bar{x}}(x_k) \right| \leq \left( \sum_{k=i+1}^N h \right)^{1/2} \left( \sum_{k=i+1}^N h z_{\bar{x}}^2(x_k) \right)^{1/2} \leq \sqrt{1-x_i} \|z_{\bar{x}}\|.$$

Тоді з урахуванням (3.70) одержимо

$$\max_{i=0, \dots, N} \left| \frac{z(x_i)}{\sqrt{\rho(x_i)}} \right| \leq \|z_{\bar{x}}\| \leq h \frac{q}{\sqrt{3}(1-q)} |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 3.5.** Оцінка (3.70) є узгодженою в сенсі монографії [90].

**Зауваження 3.6.** Для розв'язання сіткової задачі (3.68) можна застосувати метод послідовних наближень, який збігається зі швидкістю геометричної прогресії.

**3.3.3. Висновки.** У теоремі 3.8 доведено достатню умову належності розв'язку  $u(x)$  крайової задачі (3.56) простору  $H^1(0,1)$  у випадку сталих коефіцієнтів рівняння, а у теоремах 3.10, 3.12 і 3.14 – відповідно просторам  $W_\infty^1(0,1)$ ,  $H^1(0,1)$  і  $H^2(\Omega)$  у випадку змінних коефіцієнтів.

Для розв'язку  $u(x)$  диференціальної задачі (3.56) доведено вагові оцінки в нормі  $C[0,1]$  з ваговою функцією  $\rho_1^{-1}(x)$ , де  $\rho_1(x) = \min(x, 1-x)$ , в теоремі 3.11 і теоремі 3.14 та ваговою функцією  $\rho_1^{-1/2}(x)$  – в теоремі 3.9 і теоремі 3.13.

Доведена в теоремі 3.15 вагова апріорна оцінка свідчить про те, що в нормі  $C(\omega)$  похибка сіткової схеми (3.68) у примежових вузлах має порядок  $O(h\sqrt{h})$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h)$ .

Результати підрозд. 3.3 опубліковано в [144].

### 3.4. Вагові оцінки похибки сіткового методу для двовимірного диференціального рівняння з дробовою похідною

Цей підрозділ присвячено розв'язуванню методом сіток першої крайової задачі для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною порядку  $1/2$  щодо однієї із змінних. Для розв'язку диференціальної задачі та похибки сіткових схем першого і другого порядку апроксимації доведено вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле.

#### 3.4.1. Вагова оцінка розв'язку диференціальної крайової задачі.

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{u(t, y)}{\sqrt{x-t}} dt + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad x \in \Omega = (0, 1)^2, \quad (3.73)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Знайдемо вагову апіорну оцінку розв'язку задачі (3.73). Скористаємося функцією Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа:

$$G(x, \xi; y, \eta) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x) \sin(n\pi \xi) \sin(m\pi y) \sin(m\pi \eta)}{n^2 + m^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x) \sin(n\pi \xi) \operatorname{sh}\left(n\pi \left(1 - \frac{y + \eta + |y - \eta|}{2}\right)\right) \operatorname{sh}\left(n\pi \frac{y + \eta - |y - \eta|}{2}\right)}{n \operatorname{sh}(n\pi)} \quad (3.74)$$

(для перетворень використано [51, с. 54]).

Зробимо в рівнянні (3.73) заміну  $x$  на  $\xi$ ,  $y$  – на  $\eta$ , помножимо обидві його частини на функцію Гріна (3.74) та проінтегруємо по області  $\Omega$ . Тоді після деяких перетворень одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x, y) - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \int_0^1 u(t, \eta) \int_t^1 \frac{\partial G(x, \xi; y, \eta)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-t}} d\eta dt = \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi; y, \eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

тобто

$$u(x, y) - \int_0^1 \int_0^1 K(x, t; y, \eta) u(t, \eta) d\eta dt = \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi; y, \eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi \quad (3.75)$$

з ядром

$$K(x, t; y, \eta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_t^1 \frac{\partial G(x, \xi; y, \eta)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - t}} = \quad (3.76)$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x) v_n(t) \operatorname{sh}\left(n\pi\left(1 - \frac{y + \eta + |y - \eta|}{2}\right)\right) \operatorname{sh}\left(n\pi \frac{y + \eta - |y - \eta|}{2}\right)}{n \operatorname{sh}(n\pi)},$$

де

$$v_n(t) = \int_t^1 n\pi \cos(n\pi\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - t}} =$$

$$= \pi\sqrt{2n} \left[ \cos(n\pi t) C(\sqrt{2n(1-t)}) - \sin(n\pi t) S(\sqrt{2n(1-t)}) \right],$$

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi\varphi^2}{2} d\varphi, \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi\varphi^2}{2} d\varphi - \text{інтеграли Френеля.}$$

Далі використовуємо позначення для норм

$$\|w\|_{\infty} = \max_{(x,y) \in \Omega} |w(x,y)|,$$

$$\|w\|_{1,\infty} = \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial w}{\partial y} \right\|_{\infty}, \quad \|w\|_{2,\infty} = \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\|_{\infty}.$$

Враховуючи асимптотичні рівності

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi\varphi^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi\varphi^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

маємо оцінку

$$\|v_n\|_{\infty} \leq \pi\sqrt{n}. \quad (3.77)$$

**Теорема 3.16.** *Нехай  $\alpha$  задовольняє умови*

$$1 - \frac{2\alpha\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}} = 1 - \alpha \cdot 0.9382979416\dots > 0, \quad (3.78)$$

$$1 - \frac{2\alpha}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) > 0, \quad (3.79)$$

а  $\sigma$  як завгодно близьке до  $1/2$  знизу. Тоді для розв'язку  $u(x, y)$  задачі (3.73) справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u(x, y)}{\rho(x, y)} \right\|_{\infty} \leq M \|f\|_{\infty},$$

де  $\rho(x, y) = \min\{x^{\sigma}, (1-x)^{\sigma}, y, 1-y\}$ ,  $\zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана,  $M$  – стала, не залежна від  $u(x, y)$ :

$$M = \max \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}} \right)^{-1}, \frac{4}{\pi^{3-\sigma}} \zeta(3-\sigma) \left( 1 - \frac{2\alpha}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) \right)^{-1} \right\}.$$

Доведення. Виконавши в (3.75) заміну

$$U(x, y) = \frac{u(x, y)}{y(1-y)},$$

отримаємо рівняння

$$U(x, y) - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta(1-\eta)K(x, t; y, \eta)}{y(1-y)} U(t, \eta) dt d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x, t; y, \eta)}{y(1-y)} f(t, \eta) dt d\eta,$$

з якого випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|U\|_{\infty} - \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta(1-\eta)|K(x, t; y, \eta)|}{y(1-y)} dt d\eta \|U\|_{\infty} &\leq \\ &\leq \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x, t; y, \eta)}{y(1-y)} dt d\eta \|f\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Далі нам знадобляться такі дві нерівності:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\eta(1-\eta)}{y(1-y)} \frac{\operatorname{sh} \left( n\pi \left( 1 - \frac{y+\eta+|y-\eta|}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left( n\pi \frac{y+\eta-|y-\eta|}{2} \right)}{n \operatorname{sh}(n\pi)} d\eta = \\ &= \frac{\operatorname{sh}(n\pi(1-y))}{y(1-y)n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_0^y \eta(1-\eta) \operatorname{sh}(n\pi\eta) d\eta + \frac{\operatorname{sh}(n\pi y)}{y(1-y)n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_y^1 \eta(1-\eta) \operatorname{sh}(n\pi(1-\eta)) d\eta = \\ &= \frac{1}{y(1-y)n^2\pi \operatorname{sh}(n\pi)} \left\{ y(1-y) \operatorname{sh}(n\pi) + \frac{4 \operatorname{ch} \frac{n\pi(1-2y)}{2} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2} - 2 \operatorname{sh}(n\pi)}{(n\pi)^2} \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2\pi} \left( 1 - \frac{8 \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2} - 1 \right)}{(n\pi)^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right) < \frac{1}{n^2\pi}, \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{y(1-y)} \frac{\operatorname{sh}\left(n\pi\left(1 - \frac{y+\eta+|y-\eta|}{2}\right)\right) \operatorname{sh}\left(n\pi\frac{y+\eta-|y-\eta|}{2}\right)}{n \operatorname{sh}(n\pi)} d\eta = \\ & = \frac{\operatorname{sh}(n\pi(1-y))}{y(1-y)n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_0^y \operatorname{sh}(n\pi\eta) d\eta + \frac{\operatorname{sh}(n\pi y)}{y(1-y)n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_y^1 \operatorname{sh}(n\pi(1-\eta)) d\eta = \\ & = \frac{2 \operatorname{sh}\frac{n\pi(1-y)}{2} \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}}{y(1-y)n^2\pi \operatorname{ch}\frac{n\pi}{2}} < \frac{\operatorname{th}\frac{n\pi}{2}}{n} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

які з урахуванням нерівності (3.77) приводять до оцінок

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta(1-\eta) |K(x,t;y,\eta)|}{y(1-y)} dt d\eta & \leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^2\pi} = \frac{2\alpha}{\pi^{3/2}} \zeta(3/2), \\ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x,t;y,\eta)}{y(1-y)} dt d\eta & \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \\ & = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

де  $\zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана.

Унаслідок умови (3.78) з нерівності (3.80) впливає вагова оцінка

$$\|U\|_{\infty} = \left\| \frac{u}{y(1-y)} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}} \right)^{-1} \|f\|_{\infty}.$$

Виконавши в (3.75) заміну

$$V(x,y) = \frac{u(x,y)}{x^{\sigma}}, \quad \sigma < \frac{1}{2},$$

одержимо рівняння

$$V(x,y) - \int_0^1 \int_0^1 \frac{t^{\sigma} K(x,t;y,\eta)}{x^{\sigma}} V(t,\eta) dt d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x,t;y,\eta)}{x^{\sigma}} f(t,\eta) dt d\eta,$$

з якого маємо

$$\|V\|_{\infty} - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{t^{\sigma} |K(x,t;y,\eta)|}{x^{\sigma}} dt d\eta \|V\|_{\infty} \leq \quad (3.81)$$

$$\leq \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x,t;y,\eta)}{x^\sigma} dt d\eta \|f\|_\infty.$$

Використовуючи нерівність

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\left(n\pi\left(1 - \frac{y+\eta+|y-\eta|}{2}\right)\right) \operatorname{sh}\left(n\pi\frac{y+\eta-|y-\eta|}{2}\right)}{n \operatorname{sh}(n\pi)} d\eta = \\ & = \frac{\operatorname{sh}(n\pi(1-y))}{n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_0^y \operatorname{sh}(n\pi\eta) d\eta + \frac{\operatorname{sh}(n\pi y)}{n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_y^1 \operatorname{sh}(n\pi(1-\eta)) d\eta = \\ & = \frac{\sinh(n\pi) - 2 \sinh \frac{n\pi}{2} \cosh \frac{n\pi(1-2y)}{2}}{n^2 \pi \sinh(n\pi)} \leq \frac{1}{n^2 \pi} \end{aligned} \quad (3.82)$$

і враховуючи (3.77), дістанемо оцінки

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{G(x,t;y,\eta)}{x^\sigma} dt d\eta & \leq \frac{2}{\pi} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} \frac{|\sin(n\pi x)|}{x^\sigma} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \\ & = \frac{2}{\pi} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\sigma} \pi^{1-\sigma}} \frac{|\sin(n\pi x)|}{(n\pi x)^\sigma} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \leq \frac{4}{\pi^{3-\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\sigma}} = \frac{4}{\pi^{3-\sigma}} \zeta(3-\sigma), \\ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{t^\sigma |K(x,t;y,\eta)|}{x^\sigma} dt d\eta & \leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^2 \pi} \frac{|\sin(n\pi x)|}{x^\sigma} \int_0^1 t^\sigma dt = \\ & = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^{2-\sigma} \pi^{1-\sigma}} \frac{|\sin(n\pi x)|}{(n\pi x)^\sigma} \frac{1}{\sigma+1} \leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^{2-\sigma} \pi^{1-\sigma} (\sigma+1)} = \\ & = \frac{2\alpha}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2-\sigma}} = \frac{2\alpha}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma). \end{aligned}$$

Нехай  $\sigma$  як завгодно близько до  $1/2$  знизу, а  $\alpha$  задовольняє умову (3.79), то з (3.81) виводимо оцінку

$$\|V\|_\infty = \left\| \frac{u}{x^\sigma} \right\|_\infty \leq \frac{4}{\pi^{3-\sigma}} \zeta(3-\sigma) \left( 1 - \frac{2\alpha}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) \right)^{-1} \|f\|_\infty. \quad (3.83)$$

Таку ж оцінку, як (3.83), можна отримати, якщо замінити  $x^\sigma$  на  $(1-x)^\sigma$ . Теорему доведено.  $\square$



**3.4.2. Сіткова схема першого порядку точності.** Для розв'язування рівняння (3.75) застосуємо метод сіток. Уведемо сіткову множину

$$\bar{\omega} = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$$

і покладемо в (3.75)  $x = x_i, y = y_p$ :

$$u(x_i, y_p) - \int_0^1 \int_0^1 K(x_i, t; y_p, \eta) u(t, \eta) d\eta dt = \int_0^1 \int_0^1 G(x_i, \xi; y_p, \eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (3.84)$$

Тоді отримаємо сіткову схему

$$\begin{aligned} u^h(x_i, y_p) - \sum_{k,j=1}^{N-1} u^h(x_k, y_j) \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) dtd\eta = \\ = \int_0^1 \int_0^1 G(x_i, t; y_p, \eta) f(t, \eta) dtd\eta, \quad i, p = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.85)$$

де  $\Omega_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,  $k, j = 1, \dots, N$ .

Похибка

$$z(x, y) = u^h(x, y) - u(x, y)$$

є розв'язком сіткової задачі

$$\begin{aligned} z(x_i, y_p) - \sum_{k,j=1}^{N-1} z(x_k, y_j) \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) dtd\eta = \\ = \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} [u(x_k, y_j) - u(t, \eta)] K(x_i, t; y_p, \eta) dtd\eta, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$i, p = 1, 2, \dots, N-1.$$

Позначимо сіткову норму

$$\|w\|_{\infty, \bar{\omega}} = \max_{(x,y) \in \bar{\omega}} |w(x, y)|.$$

**Теорема 3.17.** Нехай розв'язок  $u(x, y)$  рівняння (3.75) задовольняє умову  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  і для параметра  $\alpha$  виконуються умови

$$1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) > 0, \quad \sigma \in [0, 1/2), \quad (3.87)$$

$$1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) > 0, \quad \sigma \in [0, 1/2). \quad (3.88)$$

Тоді точність сіткової схеми (3.85) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u - u^h}{\rho(x, y)} \right\|_{\infty} \leq M h \|u\|_{1, \infty},$$

де  $\rho(x, y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y^\sigma, (1-y)^\sigma\}$ ,  $\zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана,  $M$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x, y)$ :

$$M = \max \left\{ \frac{\frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma)}{1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi} 4^\sigma} \zeta(3/2 - \sigma)}, \frac{\frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma)}{1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma)} \right\}.$$

Доведення. Виконавши в (3.86) заміну

$$Z(x, y) = \frac{z(x, y)}{[y(1-y)]^\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < 1/2,$$

дістанемо сіткову схему

$$\begin{aligned} Z(x_i, y_p) - \frac{1}{[y_p(1-y_p)]^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} [y_j(1-y_j)]^\sigma Z(x_k, y_j) \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) dt d\eta = \\ = \frac{1}{[y_p(1-y_p)]^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} [u(x_k, y_j) - u(t, \eta)] K(x_i, t; y_p, \eta) dt d\eta, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$i, p = 1, 2, \dots, N-1.$

З (3.89) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|Z\|_{\infty} - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{[y(1-y)]^\sigma} dt d\eta \frac{1}{4^\sigma} \|Z\|_{\infty} \leq \\ \leq \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{[y(1-y)]^\sigma} dt d\eta h \|u\|_{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Скориставшись оцінкою

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} \left( n\pi \left( 1 - \frac{y + \eta + |y - \eta|}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left( n\pi \frac{y + \eta - |y - \eta|}{2} \right)}{[y(1-y)]^\sigma n \operatorname{sh}(n\pi)} d\eta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sh}(n\pi(1-y))}{[y(1-y)]^\sigma n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_0^y \operatorname{sh}(n\pi\eta) d\eta + \frac{\operatorname{sh}(n\pi y)}{[y(1-y)]^\sigma n \operatorname{sh}(n\pi)} \int_y^1 \operatorname{sh}(n\pi(1-\eta)) d\eta = \\
&= \frac{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi(1-y)}{2} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2}}{[y(1-y)]^\sigma n^2 \pi \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \leq \frac{0.36}{n^{2-\sigma}}, \quad \sigma \in [0, 1/2),
\end{aligned}$$

і враховуючи (3.76) і (3.77), отримаємо оцінку

$$\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{[y(1-y)]^\sigma} dt d\eta \leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.36\pi\sqrt{n}}{n^{2-\sigma}} = \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma). \quad (3.91)$$

Тоді з (3.90) виводимо нерівність

$$\|Z\|_\infty \leq \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) \frac{1}{4^\sigma} \|Z\|_\infty + \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) h \|u\|_{1,\infty}. \quad (3.92)$$

Унаслідок умови (3.87) з (3.92) випливає оцінка

$$\begin{aligned}
\|Z\|_\infty &= \left\| \frac{z(x,y)}{[y(1-y)]^\sigma} \right\|_\infty = \left\| \frac{u - u^h}{[y(1-y)]^\sigma} \right\|_\infty \leq \\
&\leq h \left( 1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi} 4^\sigma} \zeta(3/2 - \sigma) \right)^{-1} \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) \|u\|_{1,\infty}.
\end{aligned} \quad (3.93)$$

Виконуючи тепер в (3.86) заміну

$$Z(x,y) = \frac{z(x,y)}{x^\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < 1/2,$$

отримаємо сіткову схему

$$\begin{aligned}
Z(x_i, y_p) - \frac{1}{x_i^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} x_k^\sigma Z(x_k, y_j) \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) dt d\eta = \\
= \frac{1}{x_i^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} [u(x_k, y_j) - u(t, \eta)] K(x_i, t; y_p, \eta) dt d\eta,
\end{aligned}$$

$$i, p = 1, 2, \dots, N-1.$$

Звідси випливає нерівність

$$\|Z\|_\infty - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{x^\sigma} dt d\eta \|Z\|_\infty \leq \quad (3.94)$$

$$\leq \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{x^\sigma} dt d\eta h \|u\|_{1,\infty}.$$

Скориставшись нерівністю (3.82) і враховуючи (3.76), (3.77), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{x^\sigma} dt d\eta &\leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^2\pi} \frac{|\sin(n\pi x)|}{x^\sigma} = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^{2-\sigma}\pi^{1-\sigma}} \frac{|\sin(n\pi x)|}{(n\pi x)^\sigma} \leq \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{n^{2-\sigma}\pi^{1-\sigma}} = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{3/2-\sigma}} = \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Тоді з (3.94) виводимо нерівність

$$\|Z\|_\infty \leq \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) \|Z\|_\infty + \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) h \|u\|_{1,\infty}.$$

Внаслідок (3.88) звідси випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|Z\|_\infty &= \left\| \frac{z(x,y)}{x^\sigma} \right\|_\infty = \left\| \frac{u-u^h}{x^\sigma} \right\|_\infty \leq \\ &\leq h \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) \right)^{-1} \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2-\sigma) \|u\|_{1,\infty}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Таку ж оцінку, як (3.96), можна отримати, якщо замінити  $x^\sigma$  на  $(1-x)^\sigma$ .

Твердження теореми випливає тепер з оцінок (3.93) і (3.96).  $\square$

**3.4.3. Сіткова схема другого порядку точності.** З рівності (3.84) маємо сіткову схему

$$\begin{aligned} u^h(x_i, y_p) - \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) L_{kj}(t, \eta, u^h) dt d\eta = \\ = \int_0^1 \int_0^1 G(x_i, t; y_p, \eta) f(t, \eta) dt d\eta, \quad i, p = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.97)$$

де

$$L_{kj}(x, y; w) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \left[ \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} w(x_k, y_j) + \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} w(x_k, y_{j-1}) \right] + \\ + \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} \left[ \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} w(x_{k-1}, y_j) + \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} w(x_{k-1}, y_{j-1}) \right]$$

– інтерполяційний поліном (лінійний по кожній змінній  $x$  і  $y$ ) для функції  $w(x, y)$ .

Похибка  $z(x, y) = u^h(x, y) - u(x, y)$  є розв'язком сіткової задачі

$$z(x_i, y_p) - \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) L_{kj}(t, \eta; z) dt d\eta = \\ = \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) [L_{kj}(t, \eta; u) - u(t, \eta)] dt d\eta, \quad (3.98)$$

$$i, p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

**Теорема 3.18.** Нехай розв'язок  $u(x, y)$  задачі (3.73) задовольняє умову  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  і для параметра  $\alpha$  виконані умови

$$1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) > 0, \quad \sigma \in [0, 1/2), \quad (3.99)$$

$$1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) > 0, \quad \sigma \in [0, 1/2). \quad (3.100)$$

Тоді точність сіткової схеми (3.97) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u - u^h}{\rho(x, y)} \right\|_{\infty} \leq M h^2 \|u\|_{2, \infty},$$

де  $\rho(x, y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y^\sigma, (1-y)^\sigma\}$ ,  $M$  – стала, не залежна від  $h$  і  $u(x, y)$ :

$$M = \max \left\{ \frac{\frac{\alpha \cdot 0.36}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma)}{1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi} 4^\sigma} \zeta(3/2 - \sigma)}, \frac{\frac{\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma)}{1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma)} \right\}.$$

Доведення. Виконавши в (3.98) заміну

$$Z(x, y) = \frac{z(x, y)}{[y(1-y)]^\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < 1/2,$$

дістанемо сіткову схему

$$\begin{aligned}
Z(x_i, y_p) - \frac{1}{[y_p(1-y_p)]^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) L_{kj}(t, \eta; [y(1-y)]^\sigma Z) dt d\eta = \\
= \frac{1}{[y_p(1-y_p)]^\sigma} \sum_{k,j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) [L_{kj}(t, \eta; u) - u(t, \eta)] dt d\eta, \\
i, p = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned}
\|Z\|_\infty - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{[y(1-y)]^\sigma} dt d\eta \frac{1}{4^\sigma} \|Z\|_\infty \leq \\
\leq \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x,t;y,\eta)|}{[y(1-y)]^\sigma} dt d\eta \frac{h^2}{2} \|u\|_{2,\infty},
\end{aligned} \tag{3.101}$$

оскільки

$$\begin{aligned}
u(x, y) - L_{kj}(x, y; u) = \\
= u(x, y) - \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} u(x_k, y) - \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} u(x_{k-1}, y) + \\
+ \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \left[ u(x_k, y) - \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} u(x_k, y_j) - \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} u(x_k, y_{j-1}) \right] + \\
+ \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} \left[ u(x_{k-1}, y) - \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} u(x_{k-1}, y_j) - \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} u(x_{k-1}, y_{j-1}) \right] = \\
= \frac{u''_{xx}(\bar{x}_k, y)}{2!} (x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{u''_{yy}(x_k, \bar{y}_j)}{2!} (y - y_{j-1})(y - y_j) + \\
+ \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} \frac{u''_{yy}(x_{k-1}, \bar{\bar{y}}_j)}{2!} (y - y_{j-1})(y - y_j), \\
\bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k), \quad \bar{y}_j, \bar{\bar{y}}_j \in (y_{j-1}, y_j);
\end{aligned}$$

$$|u(x, y) - L_{kj}(x, y; u)| \leq \frac{h^2}{2!} \|u''_{yy}\|_\infty + \frac{h^2}{2!} \|u''_{xx}\|_\infty = \frac{h^2}{2!} \|u\|_{2,\infty}. \tag{3.102}$$

Скориставшись нерівністю (3.91), з (3.101) виводимо оцінку

$$\|Z\|_\infty \leq \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) \frac{1}{4^\sigma} \|Z\|_\infty + \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) \frac{h^2}{2} \|u\|_{2,\infty}.$$

Враховуючи умову (3.99), звідси маємо

$$\begin{aligned} \|Z\|_{\infty} &= \left\| \frac{z(x, y)}{[y(1-y)]^{\sigma}} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{u - u^h}{[y(1-y)]^{\sigma}} \right\|_{\infty} \leq \\ &\leq \frac{h^2}{2} \left( 1 - \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi} 4^{\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) \right)^{-1} \frac{\alpha \cdot 0.72}{\sqrt{\pi}} \zeta(3/2 - \sigma) \|u\|_{2, \infty}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Виконавши в (3.98) заміну

$$Z(x, y) = \frac{z(x, y)}{x^{\sigma}}, \quad 0 \leq \sigma < 1/2,$$

отримаємо сіткову схему

$$\begin{aligned} Z(x_i, y_p) - \frac{1}{x_i^{\sigma}} \sum_{k, j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) L_{kj}(t, \eta; x^{\sigma} Z) dt d\eta = \\ = \frac{1}{x_i^{\sigma}} \sum_{k, j=1}^{N-1} \iint_{\Omega_{kj}} K(x_i, t; y_p, \eta) [L_{kj}(t, \eta; u) - u(t, \eta)] dt d\eta, \\ i, p = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням (3.102) дістаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|Z\|_{\infty} - \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x, t; y, \eta)|}{x^{\sigma}} dt d\eta \|Z\|_{\infty} \leq \\ \leq \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|K(x, t; y, \eta)|}{x^{\sigma}} dt d\eta \frac{h^2}{2} \|u\|_{2, \infty}. \end{aligned}$$

Застосовуючи тут нерівність (3.95), маємо

$$\|Z\|_{\infty} \leq \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) \|Z\|_{\infty} + \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) \frac{h^2}{2} \|u\|_{2, \infty}.$$

Внаслідок умови (3.100) з виводимо оцінку

$$\begin{aligned} \|Z\|_{\infty} &= \left\| \frac{z(x, y)}{x^{\sigma}} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{u - u^h}{x^{\sigma}} \right\|_{\infty} \leq \\ &\leq \frac{h^2}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) \right)^{-1} \frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}} \zeta(3/2 - \sigma) \|u\|_{2, \infty}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Таку саму оцінку можна отримати, якщо замінити  $x^{\sigma}$  на  $(1-x)^{\sigma}$ .

Твердження теореми випливає тепер з нерівностей (3.103) і (3.104).  $\square$

**Зауваження 3.7.** Аналогічні результати можна одержати і для дробової похідної по змінній  $y$ .

**Зауваження 3.8.** Випадок похідної порядку  $\alpha = 1/2$  розглянуто тільки для спрощення записів. Запропонований підхід і методику можна застосувати і в загальному випадку дробової похідної.

**3.4.4. Висновки.** У теоремі 3.16 для розв'язку  $u(x, y)$  крайової задачі (3.73) доведено вагову оцінку в нормі  $C(\bar{\Omega})$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , де  $\rho(x, y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y, 1-y\}$ .

Доведені в теоремі 3.17 і теоремі 3.18 вагові апіорні оцінки свідчать про те, що в нормі  $C(\omega)$  похибка сіткової схеми (3.85) і сіткової схеми (3.97) у примежових вузлах має порядок відповідно  $O(h^{1+\sigma})$  і  $O(h^{2+\sigma})$ , тоді як далі від них є відповідно величиною  $O(h)$  і  $O(h^2)$ .

Результати підрозд. 3.4 опубліковано в [194] та доповідалися на конференції [14].

### 3.5. Вагові оцінки похибки сіткового методу для задачі Гурса з дробовими похідними

**3.5.1. Властивості розв'язку диференціальної задачі.** Розглянемо задачу [115, 134, 255]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + k_1(x, y) D_x^\alpha (u(\cdot, y)) + k_2(x, y) D_y^\alpha (u(x, \cdot)) + k_3(x, y) u(x, y) = \\ = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, T]^2, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, T], \quad u(0, y), \quad y \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.105)$$

де  $0 < T < 1$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$D_x^\alpha (u(\cdot, y)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{u(t, y) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad D_y^\alpha (u(x, \cdot)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{u(x, t) dt}{(y-t)^\alpha}.$$



Запишемо інтегральний наслідок задачі (3.105) за умови достатньої гладкості коефіцієнтів диференціального рівняння:

$$u(x, y) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \int_0^x u(t, \eta) \left[ \frac{k_1(x, \eta)}{(x-t)^\alpha} - \int_t^x \frac{\partial k_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(\xi-t)^\alpha} \right] dt d\eta + \\ + \int_0^x \int_0^y k_3(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Звідси одержимо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$u(x, y) + \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta d\xi = \varphi(x, y) \quad (3.106)$$

з ядром

$$K(x, y, \xi, \eta) = \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{k_1(x, \eta)}{(x-\xi)^\alpha} - \int_\xi^x \frac{\partial k_1(s, \eta)}{\partial s} \frac{ds}{(s-\xi)^\alpha} + \frac{k_2(\xi, y)}{(y-\eta)^\alpha} - \int_\eta^y \frac{\partial k_2(\xi, t)}{\partial t} \frac{dt}{(t-\eta)^\alpha} \right] + k_3(\xi, \eta)$$

і правою частиною  $\varphi(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\eta d\xi$ .

Для ядра  $K(x, y, \xi, \eta)$  маємо оцінку

$$|K(x, y, \xi, \eta)| \leq \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} + \\ + \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} + \frac{(x-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{1}{(y-\eta)^\alpha} + \frac{(y-\eta)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \\ = \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} \left[ 1 + \frac{x-\xi}{1-\alpha} \right] + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(y-\eta)^\alpha} \left[ 1 + \frac{y-\eta}{1-\alpha} \right] + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} \frac{2-\alpha}{1-\alpha} + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(y-\eta)^\alpha} \frac{2-\alpha}{1-\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(x-\xi)^\alpha} + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(y-\eta)^\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right].$$

Для розв'язування рівняння (3.106) застосуємо метод послідовних наближень

$$u_{n+1}(x, y) = - \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) u_n(\xi, \eta) d\eta d\xi + \varphi(x, y), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.108)$$

$$u_0(x, y) = 0.$$

Позначивши  $z_{n+1}(x, y) = u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)$ , одержимо для  $z_n(x, y)$  рекурентну послідовність

$$z_{n+1}(x, y) = - \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) z_n(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z_1(x, y) = \varphi(x, y).$$

Надалі для зручності використовуємо позначення

$$\|v\|_{x,y} = \max_{t \in [0,x], s \in [0,y]} |v(t, s)|.$$

**Лема 3.4.** Нехай  $k_1(x, y), k_2(x, y) \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $k_3(x, y), \varphi(x, y) \in L_\infty(\Omega)$ . Тоді справджується оцінка

$$\|z_{n+1}\|_{x,y} \leq R_{n+1} (xy)^{n(1-\alpha)} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.109)$$

де

$$R_{n+1} = \left[ \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \mu \right]^n \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]},$$

$$\mu = \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. При  $n=1$  нерівність (3.109) виконується, оскільки з урахуванням (3.107) маємо

$$\begin{aligned} |z_2(x, y)| &= \left| - \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) z_1(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| = \left| - \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_0^x \int_0^y |K(x, y, \xi, \eta)| |\varphi(\xi, \eta)| d\eta d\xi \leq \int_0^x \int_0^y |K(x, y, \xi, \eta)| d\eta d\xi \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \int_0^x \int_0^y \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(x-\xi)^\alpha} + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(y-\eta)^\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] d\eta d\xi \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \frac{x^{1-\alpha}y}{1-\alpha} + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} \frac{xy^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} xy \right] \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
&= \frac{(2-\alpha)(xy)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \left[ \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} y^\alpha + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} x^\alpha + (1-\alpha) \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^\alpha \right] \times \\
&\quad \times \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{(2-\alpha)\mu}{(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (xy)^{1-\alpha} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

звідки одержуємо  $\|z_2\|_{x,y} \leq \frac{(2-\alpha)\mu}{(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (xy)^{1-\alpha} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}$ .

Припустимо, що нерівність (3.109) правильна для деякого  $n \in \mathbb{N}$ , і доведемо її для наступного значення  $n+1$ :

$$\begin{aligned}
|z_{n+2}(x,y)| &= \left| - \int_0^x \int_0^y K(x,y,\xi,\eta) z_{n+1}(\xi,\eta) d\eta d\xi \right| \leq \int_0^x \int_0^y |K(x,y,\xi,\eta)| |z_{n+1}(\xi,\eta)| d\eta d\xi \leq \\
&\leq \int_0^x \int_0^y \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(x-\xi)^\alpha} + \frac{\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}}{(y-\eta)^\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] (\xi\eta)^{n(1-\alpha)} d\xi d\eta \times \\
&\quad \times R_{n+1} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
&= \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} R_{n+1} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \left[ \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)} (x-\xi)^{-\alpha} d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)} d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)} (y-\eta)^{-\alpha} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)} d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)} d\eta \right] = [\text{заміна } \xi = xs, \eta = ys] = \\
&= \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} R_{n+1} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \times \\
&\times \left[ \frac{x^{(n+1)(1-\alpha)} \Gamma(n(1-\alpha)+1) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \frac{y^{n(1-\alpha)+1}}{n(1-\alpha)+1} \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{n(1-\alpha)+1}}{n(1-\alpha)+1} \frac{y^{(n+1)(1-\alpha)} \Gamma(n(1-\alpha)+1) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{(xy)^{n(1-\alpha)+1}}{(n(1-\alpha)+1)^2} \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] = \\
& = \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} R_{n+1} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n(1-\alpha)+1)\Gamma(1-\alpha)}{(n(1-\alpha)+1)\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \times \\
& \quad \times \left[ \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \frac{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+2)\Gamma(1-\alpha)} \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] \leq \\
& \leq \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} R_{n+1} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-n\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{(n+1-n\alpha)\Gamma(n+2-(n+1)\alpha)} \mu = \\
& = \frac{2-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \mu \right]^n \frac{\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]} \frac{\Gamma(n+1-n\alpha)\Gamma(1-\alpha)\mu}{(n+1-n\alpha)\Gamma(n+2-(n+1)\alpha)} = \\
& = \left[ \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \mu \right]^{n+1} \frac{\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma(n+2-(n+1)\alpha) \prod_{p=1}^{n+1} [p-\alpha(p-1)]} = R_{n+2} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

а отже,  $\|z_{n+2}\|_{x,y} \leq R_{n+2} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}$ . Лему доведено.  $\square$

Доведемо тепер теорему про збіжність рекурентної послідовності (3.108).

**Теорема 3.19.** Нехай  $k_1(x, y), k_2(x, y) \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $k_3(x, y), \varphi(x, y) \in L_\infty(\Omega)$ .

Тоді метод послідовних наближень (3.108) рівномірно збігається до єдиного розв'язку  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$  інтегрального рівняння (3.106) (слабкого розв'язку задачі Гурса (3.105)), для якого справджується оцінка

$$\|u\|_{x,y} \leq (M(1-\alpha)+1)e^M \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (3.110)$$

$$\text{де } M = \frac{(2-\alpha)\mu T^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2}, \quad \mu = \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Точність методу (3.108) характеризується оцінкою

$$\|u - u_n\|_{x,y} \leq \frac{M^{n-1} (M(1-\alpha)+1)e^M}{(n-1)! \Gamma(n(1-\alpha)+2)} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Покажемо, що послідовність  $\{u_n(x, y)\}$  є фундаментальною в  $C(\bar{\Omega})$ . Застосовуючи лему 3.4 та враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \left[ \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \mu \right]^n \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]} \leq \\ &\leq \left[ \frac{(2-\alpha)\mu}{1-\alpha} \right]^n \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p(1-\alpha)]} = \left[ \frac{(2-\alpha)\mu}{(1-\alpha)^2} \right]^n \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha n)n!}, \end{aligned}$$

маємо

$$\begin{aligned} \|u_{n+p} - u_n\|_{x,y} &= \|(u_{n+p} - u_{n+p-1}) + (u_{n+p-1} - u_{n+p-2}) + \dots + (u_{n+1} - u_n)\|_{x,y} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|z_{k+1}\|_{T,T} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} R_{k+1} T^{2(1-\alpha)k} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \left[ \frac{(2-\alpha)\mu T^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2} \right]^k \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha k)k!} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \quad (3.111) \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{M^k (k(1-\alpha)+1)}{k! \Gamma(k(1-\alpha)+2)} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{M^k (k(1-\alpha)+1)}{k!} = \\ &= \frac{\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \left( M(1-\alpha) \sum_{k=n-1}^{n+p-2} \frac{M^k}{k!} + \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{M^k}{k!} \right) \leq \\ &\leq \frac{(M(1-\alpha)+1) \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n-1}^{n+p-1} \frac{M^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Унаслідок повноти простору  $C(\bar{\Omega})$  послідовність  $\{u_n(x, y)\}$  збігається до деякого елемента  $u^*(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ . Неважко показати, що така функція  $u^*(x, y)$  єдина, а також задовольняє інтегральне рівняння (3.106).

Перейшовши в (3.111) до границі при  $p \rightarrow +\infty$ , одержимо оцінку

$$\|u - u_n\|_{x,y} \leq \frac{(M(1-\alpha)+1) \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \leq$$

$$\leq \frac{(M(1-\alpha)+1)\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} M^{n-1}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \frac{(M(1-\alpha)+1)\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} M^{n-1}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} e^M.$$

Доведемо оцінку (3.110). Оскільки  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n z_{k+1}$ , то

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_{x,y} &\leq \sum_{k=0}^n \|z_{k+1}\|_{x,y} \leq \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{\Gamma(k+1-\alpha k)k!} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{M^k(k(1-\alpha)+1)}{\Gamma(k(1-\alpha)+2)k!} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^n \frac{M^k(k(1-\alpha)+1)}{k!} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Перейшовши тут до границі при  $n \rightarrow +\infty$ , одержимо

$$\begin{aligned} \|u\|_{x,y} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k(k(1-\alpha)+1)}{k!} \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \\ &= \left[ M(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \right] \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = [M(1-\alpha)e^M + e^M] \|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.  $\square$

Запишемо тепер рівняння (3.105) так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} ds + \\ + \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{dt}{(y-t)^\alpha} \int_0^x \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t \partial s} ds + k_3(x,y) \int_0^y \int_0^x \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} ds dt = f(x,y), \end{aligned}$$

звідки одержимо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \int_0^x \int_0^y Q(x,y,t,s) \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} ds dt = f(x,y) \quad (3.112)$$

з ядром

$$Q(x,y,t,s) = \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-t)^\alpha} + \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(y-s)^\alpha} + k_3(x,y).$$

Для розв'язування рівняння (3.112) застосуємо метод послідовних наближень

$$v_{n+1}(x, y) = - \int_0^x \int_0^y Q(x, y, \xi, \eta) v_n(\xi, \eta) d\eta d\xi + f(x, y), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.113)$$

$$v_0(x, y) = 0.$$

Тоді для  $z_{n+1}(x, y) = v_{n+1}(x, y) - v_n(x, y)$  одержимо рекурентну послідовність рівнянь

$$z_{n+1}(x, y) = - \int_0^x \int_0^y Q(x, y, \xi, \eta) z_n(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z_1(x, y) = f(x, y).$$

**Лема 3.5.** Нехай  $k_1(x, y), k_2(x, y), k_3(x, y), f(x, y) \in L_\infty(\Omega)$ . Тоді справджується оцінка

$$\|z_{n+1}\|_{x, y} \leq R_{n+1} (xy)^{n(1-\alpha)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.114)$$

де

$$R_{n+1} = \frac{\mu^n}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]},$$

$$\mu = \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. При  $n=1$  нерівність (3.114) виконується:

$$\begin{aligned} |z_2(x, y)| &= \left| - \int_0^x \int_0^y Q(x, y, \xi, \eta) z_1(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| = \left| - \int_0^x \int_0^y Q(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_0^x \int_0^y |Q(x, y, \xi, \eta)| |f(\xi, \eta)| d\eta d\xi \leq \int_0^x \int_0^y |Q(x, y, \xi, \eta)| d\eta d\xi \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \int_0^x \int_0^y \left[ \frac{\|k_1\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)(x-\xi)^\alpha} + \frac{\|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)(y-\eta)^\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] d\eta d\xi \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \\ &= \left[ \frac{x^{1-\alpha} y}{\Gamma(2-\alpha)} \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{xy^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + xy \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \\ &= \frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} y^\alpha + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} x^\alpha + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} xy \right] \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}(xy)^\alpha\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\leq\frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\mu\|f\|_{L_\infty(\Omega)},$$

звідки одержуємо  $\|z_2\|_{x,y}\leq\frac{\mu}{\Gamma(2-\alpha)}(xy)^{1-\alpha}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ .

Припустимо, що нерівність (3.114) правильна для деякого  $n\in\mathbb{N}$ , і доведемо її для наступного значення  $n+1$ :

$$\begin{aligned} |z_{n+2}(x,y)| &= \left| -\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\xi,\eta)z_{n+1}(\xi,\eta)d\eta d\xi \right| \leq \int_0^x\int_0^y |Q(x,y,\xi,\eta)||z_{n+1}(\xi,\eta)|d\eta d\xi \leq \\ &\leq \int_0^x\int_0^y \left[ \frac{\|k_1\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)(x-\xi)^\alpha} + \frac{\|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)(y-\eta)^\alpha} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] \times \\ &\quad \times (\xi\eta)^{n(1-\alpha)}d\xi d\eta R_{n+1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \\ &= R_{n+1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \left[ \frac{\|k_1\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)}(x-\xi)^{-\alpha}d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)}d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)}d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)}(y-\eta)^{-\alpha}d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \int_0^x \xi^{n(1-\alpha)}d\xi \int_0^y \eta^{n(1-\alpha)}d\eta \right] = [\text{заміна } \xi=xs, \eta=ys] = \\ &= R_{n+1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \left[ \frac{x^{(n+1)(1-\alpha)}\Gamma(n(1-\alpha)+1)}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \frac{y^{n(1-\alpha)+1}}{n(1-\alpha)+1} \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^{n(1-\alpha)+1}}{n(1-\alpha)+1} \frac{y^{(n+1)(1-\alpha)}\Gamma(n(1-\alpha)+1)}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{(xy)^{n(1-\alpha)+1}}{(n(1-\alpha)+1)^2} \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] = \\ &= R_{n+1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n(1-\alpha)+1)}{(n(1-\alpha)+1)\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)} \times \\ &\quad \times \left[ \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)} \right] \leq \\ &\leq R_{n+1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-n\alpha)}{(n+1-n\alpha)\Gamma(n+2-(n+1)\alpha)} \mu = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \mu^n \frac{\|f\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]} \frac{\Gamma(n+1-n\alpha)}{(n+1-n\alpha)\Gamma(n+2-(n+1)\alpha)} \mu = \\
&= \mu^{n+1} \frac{\|f\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma(n+2-(n+1)\alpha) \prod_{p=1}^{n+1} [p-\alpha(p-1)]} = R_{n+2} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

а отже,  $\|z_{n+2}\|_{x,y} \leq R_{n+2} (xy)^{(n+1)(1-\alpha)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ . Лему доведено.  $\square$

У наступній теоремі досліджено гладкість мішаної похідної  $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$ .

**Теорема 3.20.** Нехай  $k_1(x,y), k_2(x,y), k_3(x,y), f(x,y) \in L_\infty(\Omega)$ . Тоді

$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \in C(\bar{\Omega})$  і справджується оцінка

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{T,T} \leq (N(1-\alpha) + 1) e^N \|f\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (3.115)$$

$$\text{де } N = \frac{\mu T^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}, \quad \mu = \|k_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|k_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Доведення. Покажемо, що послідовність  $\{v_n(x,y)\}$  є фундаментальною в  $C(\bar{\Omega})$ . Застосовуючи лему 3.5 і враховуючи нерівність

$$R_{n+1} = \frac{\mu^n}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p-\alpha(p-1)]} \leq \frac{\mu^n}{\Gamma(n+1-\alpha n) \prod_{p=1}^n [p(1-\alpha)]} = \frac{\left[\frac{\mu}{1-\alpha}\right]^n}{\Gamma(n+1-\alpha n)n!},$$

маємо

$$\begin{aligned}
\|v_{n+p} - v_n\|_{x,y} &= \|(v_{n+p} - v_{n+p-1}) + (v_{n+p-1} - v_{n+p-2}) + \dots + (v_{n+1} - v_n)\|_{x,y} \leq \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|z_{k+1}\|_{T,T} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} R_{k+1} T^{2(1-\alpha)k} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \left[\frac{\mu T^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}\right]^k \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha k)k!} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \quad (3.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{N^k (k(1-\alpha)+1)}{k! \Gamma(k(1-\alpha)+2)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{N^k (k(1-\alpha)+1)}{k!} = \\
&= \frac{\|f\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \left( N(1-\alpha) \sum_{k=n-1}^{n+p-2} \frac{N^k}{k!} + \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{N^k}{k!} \right) \leq \\
&\leq \frac{(N(1-\alpha)+1) \|f\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n-1}^{n+p-1} \frac{N^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Унаслідок повноти простору  $C(\bar{\Omega})$  послідовність  $\{u_n(x, y)\}$  збігається до деякого елемента  $v^*(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ . Незавжно показати, що така функція  $v^*(x, y)$  єдина, а також задовольняє інтегральне рівняння (3.112).

Перейшовши в (3.116) до границі при  $p \rightarrow +\infty$ , одержимо оцінку

$$\begin{aligned}
\|v - v_n\|_{x,y} &\leq \frac{(N(1-\alpha)+1) \|f\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{N^k}{k!} \leq \\
&\leq \frac{(N(1-\alpha)+1) \|f\|_{L_\infty(\Omega)}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} e^N.
\end{aligned}$$

Оскільки  $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n z_{k+1}$ , то

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}\|_{x,y} &\leq \sum_{k=0}^n \|z_{k+1}\|_{x,y} \leq \sum_{k=0}^n \frac{N^k}{\Gamma(k+1-\alpha k) k!} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{N^k (k(1-\alpha)+1)}{\Gamma(k(1-\alpha)+2) k!} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^n \frac{N^k (k(1-\alpha)+1)}{k!} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Перейшовши тут до границі при  $n \rightarrow +\infty$  і виконавши нескладні перетворення, одержимо

$$\begin{aligned}
\|v\|_{x,y} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k (k(1-\alpha)+1)}{k!} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \\
&= \left[ N(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} \right] \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = [N(1-\alpha)e^N + e^N] \|f\|_{L_\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

звідки випливає оцінка (3.115). Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 3.21.** *Нехай виконуються умови теореми 3.20. Тоді справджуються оцінки*

$$\max_{x,y \in [0,T]} \left| \frac{u(x,y)}{xy} \right| \leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{T,T}, \quad (3.117)$$

$$\max_{x,y \in [0,T]} \left| \frac{u(x,y)}{xy} \right| \leq (N(1-\alpha) + 1) e^N \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \quad (3.118)$$

Оцінка (3.117) є непокращеною в тому розумінні, що існує задача (3.105) з розв'язком  $u(x,y) = xy$ , на якому оцінка (3.117) перетворюється на рівність.

Доведення. Оцінка (3.117) випливає з нерівності

$$|u(x,y)| = \left| \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi \right| \leq xy \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{T,T}, \quad x,y \in [0,T].$$

Оцінка (3.117) разом із оцінкою (3.115) дає (3.118).  $\square$

Позначимо  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  клас неперервних на  $\bar{\Omega}$  функцій, які задовольняють умову Гельдера з показником  $\lambda$ . Норма в  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  визначається так:

$$|u|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} = \sup_{(x,y), (s,t) \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x,y) - u(s,t)|}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}.$$

Доведемо підсилений результат про гладкість розв'язку задачі (3.105).

**Теорема 3.22.** *Нехай коефіцієнти і права частина рівняння (3.105) задовольняють умову  $k_1(x,y), k_2(x,y), k_3(x,y), f(x,y) \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$ . Тоді*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Доведення. Нехай  $0 \leq x_1 < x_2 \leq T$ ,  $y \in [0,T]$ . З рівняння (3.112) маємо

$$\frac{\partial^2 u(x_2,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_1,y)}{\partial x \partial y} + A + B + C = f(x_2,y) - f(x_1,y), \quad (3.119)$$

де

$$A = \frac{k_1(x_2,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_2} \frac{d\xi}{(x_2-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta - \frac{k_1(x_1,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_1} \frac{d\xi}{(x_1-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta,$$

$$B = \frac{k_2(x_2, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi - \frac{k_2(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_0^{x_1} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi,$$

$$C = k_3(x_2, y)u(x_2, y) - k_3(x_1, y)u(x_1, y).$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \frac{k_1(x_2, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_2} \frac{d\xi}{(x_2-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta - \frac{k_1(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_1} \frac{d\xi}{(x_1-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta \right| = \\ &= \left| \frac{k_1(x_2, y) - k_1(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_2} \frac{d\xi}{(x_2-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_1(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{(x_2-\xi)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta - \int_0^{x_1} \left( \frac{d\xi}{(x_1-\xi)^\alpha} - \frac{d\xi}{(x_2-\xi)^\alpha} \right) \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\eta \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{|k_1|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} (x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{x_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} y \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})} + \\ &\quad + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{(x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} y + \frac{x_1^{1-\alpha} - x_2^{1-\alpha} + (x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} y \right] \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\ &\leq \frac{(x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ T^{2-\alpha} |k_1|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} + 2T \|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} \right] \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \frac{k_2(x_2, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi - \frac{k_2(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_0^{x_1} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{k_2(x_2, y) - k_2(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2(x_1, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^\alpha} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{|k_2|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} (x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} x_2 \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\|k_2\|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} (x_2 - x_1) \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\
& \leq \frac{(x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ T^{2-\alpha} \|k_2\|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} + T \|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} \right] \left\| \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\bar{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned}
|C| &= |k_3(x_2, y)u(x_2, y) - k_3(x_1, y)u(x_1, y)| = \\
&= \left| [k_3(x_2, y) - k_3(x_1, y)]u(x_2, y) + k_3(x_1, y)[u(x_2, y) - u(x_1, y)] \right| \leq \\
&\leq \|k_3\|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} (x_2 - x_1)^{1-\alpha} \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} (x_2 - x_1) \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\
&\leq (x_2 - x_1)^{1-\alpha} \left[ \|k_3\|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + T^\alpha \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \right].
\end{aligned}$$

Знайдемо також

$$|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq (x_2 - x_1)^{1-\alpha} \|f\|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

З отриманих нерівностей випливає, що  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$  по змінній  $x$ .

Аналогічно можна показати, що  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$  по змінній  $y$ . Тоді

одержимо

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\frac{\partial^2 u(x_1, y_1)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_2)}{\partial x \partial y}}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{(1-\alpha)/2}} \right| = \\
&= \left| \frac{\frac{\partial^2 u(x_1, y_1)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_1)}{\partial x \partial y}}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{(1-\alpha)/2}} + \frac{\frac{\partial^2 u(x_2, y_1)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_2)}{\partial x \partial y}}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{(1-\alpha)/2}} \right| \leq \\
&\leq \frac{\left| \frac{\partial^2 u(x_1, y_1)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_1)}{\partial x \partial y} \right|}{|x_2 - x_1|^{1-\alpha}} + \frac{\left| \frac{\partial^2 u(x_2, y_1)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x_2, y_2)}{\partial x \partial y} \right|}{|x_2 - x_1|^{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

що означає  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$ . Теорему доведено.  $\square$

### 3.5.2. Точність сіткової схеми. Введемо множину вузлів

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad h = T/N, \quad N \geq 1 - \text{ціле,}$$

і запишемо інтегральний наслідок задачі (3.105):

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}\bar{y}}(x_i, y_j) &+ \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_0^y \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} ds dt dy dx + \\ &+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{1}{(y-s)^\alpha} \int_0^x \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds dy dx + \\ &+ \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) \int_0^y \int_0^x \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds dy dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy dx, \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Змінивши порядок інтегрування в кожному доданку лівої частини рівності, одержимо

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}\bar{y}}(x_i, y_j) &+ \sum_{r=1}^3 \left\{ \frac{1}{h^2} \int_0^{y_{j-1}} \int_0^{x_{i-1}} m_r(x_{i-1}, y_{j-1}, \tau_r) \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{h^2} \int_0^{y_{j-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_r(t, y_{j-1}, \tau_r) \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_0^{x_{i-1}} m_r(x_{i-1}, s, \tau_r) \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds + \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_r(t, s, \tau_r) \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} dt ds \right\} = \\ & \quad = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$m_1(t, s, \xi) = \int_s^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-\xi)^\alpha} dy, \quad m_2(t, s, \eta) = \int_t^{x_i} \int_s^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-\eta)^\alpha} dx,$$

$$m_3(t, s, 0) = \int_t^{x_i} \int_s^{y_j} k_3(x, y) dy dx, \quad \tau_1 = t, \quad \tau_2 = s, \quad \tau_3 = 0.$$

Апроксимуємо (3.120) такою сітковою схемою:

$$Lv_{i,j} \equiv v_{\bar{x}\bar{y},i,j} + \quad (3.121)$$

$$+ \sum_{r=1}^3 \left\{ \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} r a_{n,l}^{i,j} v_{\bar{x}\bar{y},n,l} + \sum_{l=1}^{j-1} r b_{i,l}^{i,j} v_{\bar{x}\bar{y},i,l} + \sum_{n=1}^{i-1} r c_{n,j}^{i,j} v_{\bar{x}\bar{y},n,j} + r d_{i,j}^{i,j} v_{\bar{x}\bar{y},i,j} \right\} = \Phi_{i,j},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{де } \Phi_{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy dx;$$

$${}_1 a_{n,l}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_1(x_{i-1}, y_{j-1}, t) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha},$$

$${}_1 b_{i,l}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_1(t, y_{j-1}, t) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy \int_t^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy \int_t^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha},$$

$${}_1 c_{n,j}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_1(x_{i-1}, s, t) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_s^{y_j} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha},$$

$${}_1 d_{i,j}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_1(t, s, t) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_s^{y_j} dy \int_t^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha};$$

$${}_2 a_{n,l}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_2(x_{i-1}, y_{j-1}, s) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha},$$

$$2b_{i,l}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_2(t, y_{j-1}, s) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} dx \int \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha},$$

$$\begin{aligned} 2c_{n,j}^{i,j} &= \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_2(x_{i-1}, s, s) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} = \\ &= \frac{1}{h} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha}, \end{aligned}$$

$$2d_{i,j}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_2(t, s, s) ds dt = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{t}^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha};$$

$$\begin{aligned} 3a_{n,l}^{i,j} &= \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_3(x_{i-1}, y_{j-1}, 0) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b_{i,l}^{i,j} &= \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_3(t, y_{j-1}, 0) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{t}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{t}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3c_{n,j}^{i,j} &= \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} m_3(x_{i-1}, s, 0) dt ds = \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} k_3(x, y) dy = \\ &= \frac{1}{h} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} k_3(x, y) dy, \end{aligned}$$

$$3d_{i,j}^{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_3(t, s, 0) ds dt = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{t}^{x_i} dx \int_s^{y_j} k_3(x, y) dy.$$



**Теорема 3.23.** Нехай виконуються умови теореми 3.22 і коефіцієнти  $k_1(x, y)$ ,  $k_2(x, y)$ ,  $k_3(x, y)$  задовольняють умову

$$q \equiv \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left(T + \frac{h}{2}\right) + \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left(T + \frac{h}{2}\right) + \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} \left(T + \frac{h}{2}\right)^2 < 1.$$

Тоді точність сіткової схеми (3.121) характеризується оцінкою

$$\|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T} \leq \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad (3.122)$$

$$\text{де } M = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) + \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) + \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} (2T+h)^2.$$

Доведення. Для похибки  $z_{i,j} = v_{i,j} - u_{i,j}$  маємо сіткову схему

$$\begin{aligned} Lz_{i,j} &\equiv z_{\bar{x}\bar{y},i,j} + \\ &+ \sum_{r=1}^3 \left\{ \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} r a_{n,l}^{i,j} z_{\bar{x}\bar{y},n,l} + \sum_{l=1}^{j-1} r b_{i,l}^{i,j} z_{\bar{x}\bar{y},i,l} + \sum_{n=1}^{i-1} r c_{n,j}^{i,j} z_{\bar{x}\bar{y},n,j} + r d_{i,j}^{i,j} z_{\bar{x}\bar{y},i,j} \right\} = \\ &= \psi_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

де  $\psi_{i,j} = \sum_{r=1}^3 \eta_r = \sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^4 \eta_{r,k}$  – похибка апроксимації.

Звідси одержимо нерівність

$$\begin{aligned} |z_{\bar{x}\bar{y},i,j}| &\leq \quad (3.123) \\ &\leq \sum_{r=1}^3 \left\{ \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} |r a_{n,l}^{i,j}| + \sum_{l=1}^{j-1} |r b_{i,l}^{i,j}| + \sum_{n=1}^{i-1} |r c_{n,j}^{i,j}| + |r d_{i,j}^{i,j}| \right\} \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{x_i, y_j} + |\psi_{i,j}|, \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Оцінимо кожну суму у фігурних дужках:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} |r a_{n,l}^{i,j}| &= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} dt ds \right| \leq \\ &\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} h y_{j-1} \int_0^{x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_0^{x_{i-1}} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha} - (x_{i-1} - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt = \\
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1}}{\Gamma(2-\alpha) h^2} \frac{x_i^{2-\alpha} - h^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|{}_1 a_{n,l}^{i,j}| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} dt ds \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} dt = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha} - (x_{i-1} - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(2-\alpha) h^2} h h^{1-\alpha} = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{j-1} |{}_1 b_{i,l}^{i,j}| &= \sum_{l=1}^{j-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} dt ds \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_t^{x_i} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} dt = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt = \\
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1} h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) h^2} \frac{1}{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|{}_1 b_{i,l}^{i,j}| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} dt ds \right| \leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_t^{x_i} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} dt = \\
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(2-\alpha) h^2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(3-\alpha)} h^{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{i-1} |{}_1 c_{n,j}^{i,j}| &= \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_s^{y_j} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j - s) ds \int_0^{x_{i-1}} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha} - (x_{i-1} - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} \frac{x_i^{2-\alpha} - h^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha}, \\
|{}_1c_{n,j}^{i,j}| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_s^{y_j} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j-s) ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{(x_i-t)^{1-\alpha} - (x_{i-1}-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} hh^{1-\alpha} = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{2\Gamma(2-\alpha)} h^{2-\alpha}, \\
|{}_1d_{i,j}^{i,j}| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_s^{y_j} dy \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j-s) ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt = \\
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{2\Gamma(3-\alpha)} h^{2-\alpha}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} |{}_1a_{n,l}^{i,j}| + \sum_{l=1}^{j-1} |{}_1b_{i,l}^{i,j}| + \sum_{n=1}^{i-1} |{}_1c_{n,j}^{i,j}| + |{}_1d_{i,j}^{i,j}| \leq \tag{3.124} \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} hy_{j-1}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{x_i^{2-\alpha} - h^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} hy_{j-1}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \\
&\quad + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} \frac{x_i^{2-\alpha} - h^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \\
&= \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} hy_{j-1}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{x_i^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} \frac{x_i^{2-\alpha} - x_{i-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha} \leq \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})} hy_{j-1}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} x_i^{1-\alpha} h + \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} x_i^{1-\alpha} h = \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} x_i^{1-\alpha} \left( y_{j-1} + \frac{h}{2} \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left(T + \frac{h}{2}\right).$$

Аналогічно виводимо оцінки

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_2a_{n,l}^{i,j} \right| &= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dydx}{(y-s)^\alpha} dt ds \right| \leq \\ &\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h x_{i-1}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_0^{y_{j-1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} ds = \\ &= \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h y_{j-1}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_0^{y_{j-1}} \frac{(y_j - s)^{1-\alpha} - (y_{j-1} - s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds = \\ &= \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h x_{i-1}}{\Gamma(2-\alpha) h^2} \frac{y_j^{2-\alpha} - h^{2-\alpha} - y_{j-1}^{2-\alpha}}{2-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| {}_2a_{n,l}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dydx}{(y-s)^\alpha} dt ds \right| \leq \\ &\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{y_{j-1}}^{y_{j-1}} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} ds = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \frac{(x_i - t)^{1-\alpha} - (x_{i-1} - t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \leq \\ &\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(2-\alpha) h^2} h h^{1-\alpha} = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{j-1} \left| {}_2b_{i,l}^{i,j} \right| &= \sum_{l=1}^{j-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_t^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dydx}{(y-s)^\alpha} dt ds \right| \leq \\ &\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha) h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \frac{(y_j - s)^{1-\alpha} - (y_{j-1} - s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t) dt = \\ &\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha) h^2} h^{1-\alpha} \frac{h^2}{2} h = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{2\Gamma(2-\alpha)} h^{2-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| {}_2b_{i,l}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_t^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dydx}{(y-s)^\alpha} dt ds \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i-t) dt \int_{y_{l-1}}^{y_l} \frac{(y_j-s)^{1-\alpha} - (y_{j-1}-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \leq \\
&\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^2}{2} hh^{1-\alpha} = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{2\Gamma(2-\alpha)} h^{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_2c_{n,j}^{i,j} \right| &= \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} hx_{i-1}}{\Gamma(1-\alpha)h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_s^{y_j} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} ds = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} hx_{i-1}}{\Gamma(1-\alpha)h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{(y_j-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds = \\
&= \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} hx_{i-1}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| {}_2c_{n,j}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(1-\alpha)h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{(y_j-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})} h^2}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(3-\alpha)} h^{2-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| {}_2d_{i,j}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_t^{x_i} dx \int_s^{y_j} \frac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{(y-s)^\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{(y_j-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i-t) dt = \\
&= \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)h^2} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{h^2}{2} = \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{2\Gamma(3-\alpha)} h^{2-\alpha},
\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| 2a_{n,l}^{i,j} \right| + \sum_{l=1}^{j-1} \left| 2b_{i,l}^{i,j} \right| + \sum_{n=1}^{i-1} \left| 2c_{n,j}^{i,j} \right| + \left| 2d_{i,j}^{i,j} \right| \leq \\ & \leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} y_j^{1-\alpha} \left( x_{i-1} + \frac{h}{2} \right) \leq \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left( T + \frac{h}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| 3a_{n,l}^{i,j} \right| &= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} x_{i-1} y_{j-1} h^2 = \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} x_{i-1} y_{j-1}, \\ \left| 3a_{n,l}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy \right| \leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} h^4 = \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} h^2, \\ \sum_{l=1}^{j-1} \left| 3b_{i,l}^{i,j} \right| &= \sum_{l=1}^{j-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} y_{j-1} h \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t) dt = \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} y_{j-1} h \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} y_{j-1} h, \\ \left| 3b_{i,l}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} k_3(x, y) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t) dt = \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} h^2 \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} h^2, \\ \sum_{n=1}^{i-1} \left| 3c_{i,l}^{i,j} \right| &= \sum_{n=1}^{i-1} \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int k_3(x, y) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} x_{i-1} h \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j - s) ds = \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} x_{i-1} h \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} x_{i-1} h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| {}_3c_{i,l}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_{x_{n-1}}^{x_n} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_s^{y_j} k_3(x,y) dy \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} h^2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j - s) ds = \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} h^2 \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} h^2, \\
\left| {}_3d_{i,j}^{i,j} \right| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} ds \int_t^{x_i} dx \int_s^{y_j} k_3(x,y) dy \right| \leq \\
&\leq \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t) dt \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y_j - s) ds = \frac{\|k_3\|_{C(\bar{\Omega})}}{h^2} \frac{h^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{4} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})},
\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_3a_{n,l}^{i,j} \right| + \sum_{l=1}^{j-1} \left| {}_3b_{i,l}^{i,j} \right| + \sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_3c_{n,j}^{i,j} \right| + \left| {}_3d_{i,j}^{i,j} \right| \leq \quad (3.126) \\
&\leq \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} x_{i-1} y_{j-1} + \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} y_{j-1} h + \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} x_{i-1} h + \frac{h^2}{4} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\
&\leq \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} \left( T + \frac{h}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

З нерівностей (3.124)–(3.126) випливає оцінка

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^3 \left\{ \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_r a_{n,l}^{i,j} \right| + \sum_{l=1}^{j-1} \left| {}_r b_{i,l}^{i,j} \right| + \sum_{n=1}^{i-1} \left| {}_r c_{n,j}^{i,j} \right| + \left| {}_r d_{i,j}^{i,j} \right| \right\} \leq \quad (3.127) \\
&\leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left( T + \frac{h}{2} \right) + \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left( T + \frac{h}{2} \right) + \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} \left( T + \frac{h}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Оцінимо тепер компоненти похибки апроксимації. Маємо

$$\begin{aligned}
\eta_{1,1} &= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - u_{\bar{x} \bar{y}, n, l} \right] ds dt = \\
&= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} + \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\eta d\xi ds dt, \\
\eta_{1,2} &= \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - u_{\bar{x} \bar{y}, i, l} \right] dt ds = \\
&= \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \times \\
&\quad \times \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{l-1}}^{y_l} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} + \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\eta d\xi dt ds, \\
\eta_{1,3} &= \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_s^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - u_{\bar{x} \bar{y}, n, j} \right] dt ds = \\
&= \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_s^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \times \\
&\quad \times \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} + \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\eta d\xi dt ds, \\
\eta_{1,4} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_s^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - u_{\bar{x} \bar{y}, i, j} \right] ds dt = \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_s^{y_j} \int_t^{x_i} \frac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx dy}{(x-t)^\alpha} \times \\
&\quad \times \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[ \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} + \frac{\partial^2 u(\xi,s)}{\partial \xi \partial s} - \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\eta d\xi ds dt,
\end{aligned}$$

a томы

$$\sum_{k=1}^4 |\eta_{1,k}| \leq \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} \left[ T + \frac{h}{2} \right] \frac{1}{h^2} h^2 2h^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})} = \quad (3.128)$$



$$= h^{1-\alpha} \frac{\|k_1\|_{0,\infty}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) \left| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Аналогічно виводимо оцінки

$$\sum_{k=1}^4 |\eta_{2,k}| \leq h^{1-\alpha} \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) \left| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad (3.129)$$

$$\sum_{k=1}^4 |\eta_{3,k}| \leq h^{1-\alpha} \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} (2T+h)^2 \left| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}. \quad (3.130)$$

З нерівностей (3.128)–(3.130) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{T,T} \leq h^{1-\alpha} \left[ \frac{\|k_1\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) + \frac{\|k_2\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha} (2T+h) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \|k_3\|_{C(\bar{\Omega})} (2T+h)^2 \right] \left| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ураховуючи оцінки (3.127) і (3.131), з нерівності (3.123) дістаємо оцінку (3.122). Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 3.24.** *Нехай виконуються умови теореми 3.23. Тоді точність сіткової схеми (3.121) характеризується такими ваговими оцінками:*

$$\begin{aligned} \max_{i,j=1,\dots,N} \left| \frac{z(x_i, y_j)}{x_i y_j} \right| &\leq \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \\ \max_{j=1,\dots,N} \left| \frac{z_{\bar{x}}(x_i, y_j)}{y_j} \right| &\leq \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad i=1,\dots,N, \\ \max_{i=1,\dots,N} \left| \frac{z_{\bar{y}}(x_i, y_j)}{x_i} \right| &\leq \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad j=1,\dots,N. \end{aligned}$$

Доведення випливає з оцінки (3.122) і нерівностей

$$|z(x_i, y_j)| = \left| \sum_{n=1}^i \sum_{l=1}^j h^2 z_{\bar{x}\bar{y}}(x_n, y_l) \right| \leq \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T} \sum_{n=1}^i h \sum_{l=1}^j h = x_i y_j \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T},$$

$$|z_{\bar{x}}(x_i, y_j)| = \left| \sum_{l=1}^j h z_{\bar{x}\bar{y}}(x_i, y_l) \right| \leq \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T} \sum_{l=1}^j h = y_j \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T},$$

$$|z_{\bar{y}}(x_i, y_j)| = \left| \sum_{n=1}^i h z_{\bar{x}\bar{y}}(x_n, y_j) \right| \leq \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T} \sum_{n=1}^i h = x_i \|z_{\bar{x}\bar{y}}\|_{T,T} \cdot \square$$

**Зауваження 3.9.** Сіткова схема (3.121) є точною для задачі (3.105), коли її розв'язком є функція  $u(x, y) = xy$ .

**Зауваження 3.10.** За допомогою дискретного аналога нерівності Вендрофа (Wendroff) [229] теорему 3.22 можна посилити.

**3.5.3. Висновки.** Для слабкого розв'язку  $u(x, y)$  задачі Гурса (3.105) у теоремах 3.19, 3.20, 3.22 доведено достатні умови належності відповідно  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})$ , а в теоремі 3.21 – вагову оцінку в нормі  $C(\bar{\Omega})$  з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x, y)$ , де  $\rho(x, y) = xy$ .

Доведені в теоремі 3.24 вагові апіорні оцінки свідчать про те, що в нормі  $C(\omega)$  похибка сіткової схеми (3.121) поблизу сторони  $x=0$  ( $y=0$ ) і вершини  $(0,0)$  квадрата  $\Omega = (0, T)^2$  має порядок відповідно  $O(h^{2-\alpha})$  і  $O(h^{3-\alpha})$ , тоді як далі від них є величиною  $O(h^{1-\alpha})$ .

Результати підрозд. 3.5 опубліковано в [144].

## РОЗДІЛ 4

### Точність наближених розв'язків абстрактної задачі Коші

#### 4.1. Оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти

##### 4.1.1. Непокращувані оцінки точності методу в гільбертовому просторі.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) &= 0, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

із самоспряженим додатно визначеним оператором  $A$ , що діє в гільбертовому просторі  $H$  і має щільну в  $H$  область визначення  $D(A)$ . У випадку скінченної гладкості початкового вектора  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ , розв'язок задачі (4.1) зображується рядом [102, 141]

$$x(t) = e^{-tA}x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma)x_0 \quad (4.2)$$

де  $\gamma$  – довільна додатна стала,  $L_p^{(0)}(t)$  – поліноми Лагерра [30],  $I$  – тотожний оператор,  $T_\gamma$  – перетворення Келі оператора  $A$ :

$$T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A) \quad (4.3).$$

Ряд (4.2) збігається в  $H$  рівномірно по  $t \geq 0$  (а отже, його сума неперервна на  $[0, +\infty)$ ) для  $x_0 \in D(A^\sigma)$  і у випадку  $\sigma > 0$ .

За наближення точного розв'язку  $x(t)$  задачі (4.1) береться відрізок ряду (4.2):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma)x_0. \quad (4.4)$$

Для точності такого наближення доведено оцінку [102, 141]

$$\|x_N(t) - x(t)\| \leq cN^{-\sigma} \|A^\sigma x_0\|, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

де стала  $c$  не залежить від  $N$  і  $x_0$ .

В [74] для похибки методу перетворення Келі встановлено оцінку на зразок (4.5) і показано її непокращуваність за порядком. Точніше, доведено такі результати.

**Твердження 4.1** [74]. *Нехай  $A$  – діючий у гільбертовому просторі  $H$  самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$ ;  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ . Тоді точність методу перетворення Келі (4.4) характеризується оцінкою*

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \|A^\sigma x_0\| \quad (4.6)$$

зі сталою  $C$ , не залежною від  $N$  і  $x_0$ .

**Твердження 4.2** [74]. *Нехай виконуються умови*

$$\lambda_0 = \gamma \leq 1, \quad \frac{2\gamma}{1+\sigma} \leq 1.$$

*Тоді оцінка (4.6) майже (з точністю до логарифма) непокращувана за порядком:*

$$z_N^2 \geq \frac{4^{-11/2-\sigma}}{(N + \gamma/2)^{2\sigma+1} \ln^2(2N)}. \quad (4.7)$$

Доведемо оцінки (4.6) і (4.7) за допомогою інших перетворень (відмінних від запропонованих у [74]) та знайдемо явний вигляд константи  $C$  в оцінці (4.6).

**Теорема 4.1.** *Нехай  $A$  – діючий у гільбертовому просторі  $H$  самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$ ,  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ ;  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ;  $0 < \gamma \leq \lambda_0$ . Тоді точність наближеного методу (4.4) характеризується оцінкою*

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \|A^\sigma x_0\|, \quad (4.8)$$

де  $N+1 \geq \frac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$ , а стала  $C = \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}}$  не залежить від  $N$  і  $x_0$ .

Доведення. Відомо [102, 141], що неперервній задачі Коші (4.1) відповідає дискретна початкова задача

$$y_{\gamma, n+1} = T_{\gamma} y_{\gamma, n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_{\gamma, 0} = x_0,$$

розв'язок якої через дискретну півгрупу  $T_{\gamma}^n$  можна записати так:

$$y_{\gamma, n} = T_{\gamma}^n y_{\gamma, 0} \equiv T_{\gamma}^n x_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Тоді

$$x(t) - x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, p} + y_{\gamma, p+1}), \quad t \geq 0.$$

Звідси для кожного  $t \geq 0$  одержуємо рівність

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\|^2 &= (x(t) - x_N(t), x(t) - x_N(t)) = \\ &= \left( e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, p} + y_{\gamma, p+1}), \right. \\ &\quad \left. e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, p} + y_{\gamma, p+1}) \right) = \\ &= e^{-2\gamma t} \sum_{j, k=N+1}^{\infty} (-1)^{j+k} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, j} + y_{\gamma, j+1}, y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1}). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Узагальнені поліноми Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(t)$ ,  $\alpha > -1$ , задовольняють умову ортогональності з вагою [30]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} L_j^{(\alpha)}(t) L_k^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots,$$

де  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера. Зокрема, при  $\alpha = 0$  маємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) dt = \frac{1}{2\gamma} \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \delta_{jk} = \frac{1}{2\gamma} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots \quad (4.11)$$

Інтегруючи рівність (4.10) з урахуванням співвідношення (4.11), дістаємо

$$\begin{aligned} z_N^2 &\equiv \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt = \\ &= \sum_{j, k=N+1}^{\infty} (-1)^{j+k} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) dt (y_{\gamma, j} + y_{\gamma, j+1}, y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}, y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) = \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2. \quad (4.12)$$

Беручи до уваги (4.3) і (4.9), маємо

$$\begin{aligned} y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} &= T_{\gamma}^k (I + T_{\gamma})x_0 = \\ &= (\gamma I + A)^{-k} (\gamma I - A)^k (I + (\gamma I + A)^{-1} (\gamma I - A))x_0 = \\ &= (\gamma I + A)^{-k} (\gamma I - A)^k 2\gamma (\gamma I + A)^{-1} A^{-\sigma} A^{\sigma} x_0 \quad (\sigma > 0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Позначимо  $E_{\lambda}$  спектральний розклад одиниці, пов'язаний з оператором  $A$ , і одержимо зображення

$$y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^k \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda} \frac{1}{\lambda^{\sigma}} dE_{\lambda} A^{\sigma} x_0,$$

а тому

$$\|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2 = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \frac{(2\gamma)^2}{(\gamma + \lambda)^2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d \|E_{\lambda} A^{\sigma} x_0\|^2. \quad (4.14)$$

З урахуванням (4.14) рівність (4.12) набуває вигляду

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + \lambda)^2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d \|E_{\lambda} A^{\sigma} x_0\|^2. \quad (4.15)$$

Для функції

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{2\rho}} \left( \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \quad (\rho = \sigma + 1)$$

знайдемо похідну

$$\varphi'(\lambda) = \frac{-2\rho}{\lambda^{2\rho+1}} \frac{(\lambda - \gamma)^{2k-1}}{(\lambda + \gamma)^{2k+1}} \left( \lambda^2 - \frac{2k\gamma}{\rho} \lambda - \gamma^2 \right),$$

для додатних нулів  $\lambda_1 = \gamma$  і  $\lambda_2 = \frac{\gamma}{\rho} \left( k + \sqrt{k^2 + \rho^2} \right)$  якої при всіх натуральних  $k$

виконано  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Вибравши сталу  $\gamma > 0$  з умови  $\gamma \leq \lambda_0$ , для кожного  $k \in \mathbb{N}$  такого, що

$$\lambda_0 < \lambda_2 = \frac{\gamma}{\rho} \left( k + \sqrt{k^2 + \rho^2} \right), \quad (4.16)$$

матимемо  $\lambda_1 = \gamma \leq \lambda_0 < \lambda_2$ , а отже,

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \geq \lambda_0} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_2) = \\ & = \frac{\rho^{2\rho}}{\gamma^{2\rho} \left(k + \sqrt{k^2 + \rho^2}\right)^{2\rho}} \left(1 - \frac{2\rho}{k + \sqrt{k^2 + \rho^2} + \rho}\right)^{2k} < \frac{\rho^{2\rho}}{\gamma^{2\rho} (2k)^{2\rho}}. \end{aligned}$$

Зважаючи на цю нерівність та враховуючи, що при  $k \geq \frac{\lambda_0 \rho}{2\gamma} = \frac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$  умову

(4.16), очевидно, виконано, із (4.15) виводимо

$$\begin{aligned} z_N^2 & \leq 2\gamma \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\gamma)^{2(1+\sigma)}} \|A^\sigma x_0\|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(1+\sigma)}} \leq \\ & \leq \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\gamma)^{2\sigma+1}} \|A^\sigma x_0\|^2 \int_N^{+\infty} \frac{ds}{s^{2(1+\sigma)}} = \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}} \|A^\sigma x_0\|^2 N^{-(2\sigma+1)}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.  $\square$

Розглянемо питання про непокращуваність за порядком оцінки (4.8). Для цього достатньо вказати оператор  $A$  і початковий вектор  $x_0$  такі, що виконано умови теореми 4.1 і для яких точність методу перетворення Келі (4.4) оцінюється знизу так само, як і в нерівності (4.8). Доведемо наступний результат.

**Теорема 4.2.** *Нехай оператор  $A$  задовольняє умови теореми 4.1 і має дискретний спектр  $0 < \lambda_0 \leq 1$ ,  $\lambda_i = i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тоді для всіх  $N = 2, 3, \dots$  справджується нерівність*

$$z_N > \frac{2^{-(\sigma+2)} 3^{-3}}{(N+\gamma)^{\sigma+1/2} \ln^{1/2+\varepsilon}(2N)} \quad (\sigma > 0, \varepsilon > 0),$$

тобто оцінка (4.8) майже (с точністю до логарифма) непокращувана за порядком.

Доведення. Нехай оператор  $A$  має зліченну множину власних значень

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

і відповідні власні вектори  $e_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , що утворюють ортонормований базис в  $H$ :  $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$ ,  $j, k = 0, 1, 2, \dots$ , де  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера.

Оскільки для будь-якого  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , справджується розклад

$$A^\sigma x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (A^\sigma x_0, e_i) e_i, \text{ то з урахуванням (4.3) і (4.13) одержуємо формулу}$$

$$y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^k \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda_i} \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i) e_i,$$

а отже,

$$\| y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1} \|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2k} \left( \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda_i} \right)^2 \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i)^2.$$

Тоді вираз для  $z_N$  в (4.12) запишеться так:

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + \lambda_i)^2} \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i)^2. \quad (4.17)$$

Поклавши тут

$$0 < \lambda_0 \leq 1, \quad \lambda_i = i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

і позначивши  $x_0^\sigma = A^\sigma x_0$ , для всіх  $N = 2, 3, \dots$  і  $\gamma \in (0, 1]$  одержимо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq 2\gamma \sum_{i=N}^{2N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\gamma - i}{\gamma + i} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + i)^2} \frac{1}{i^{2\sigma}} (x_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{2\gamma}{(\gamma + 2N)^{2(1+\sigma)}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{N - \gamma}{N + \gamma} \right)^{2k} \sum_{i=N}^{2N} (x_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{2\gamma}{(\gamma + 2N)^{2(1+\sigma)}} \frac{(N + \gamma)^2}{4N\gamma} \left( \frac{N - \gamma}{N + \gamma} \right)^{2(N+1)} \sum_{i=N}^{2N} (x_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{2\sigma+3} N(N + \gamma)^{2\sigma}} \left( \frac{N - \gamma}{N + \gamma} \right)^{2(N+1)} \sum_{i=N}^{2N} (x_0^\sigma, e_i)^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Для функції  $f(\lambda) = \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2(\lambda+1)}$  знайдемо похідну

$$f'(\lambda) = 2 \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2(\lambda+1)} \left( \ln \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} + \frac{2\gamma(\lambda + 1)}{(\lambda - \gamma)(\lambda + \gamma)} \right),$$

де внаслідок нерівності



$$\ln \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} = -\ln \left( 1 + \frac{2\gamma}{\lambda - \gamma} \right) > -\frac{2\gamma}{\lambda - \gamma}$$

вираз у дужках при  $\gamma \in (0,1]$  і  $\lambda \in [2, +\infty)$  невід'ємний:

$$\ln \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} + \frac{2\gamma(\lambda + 1)}{(\lambda - \gamma)(\lambda + \gamma)} > -\frac{2\gamma}{\lambda - \gamma} + \frac{2\gamma(\lambda + 1)}{(\lambda - \gamma)(\lambda + \gamma)} = \frac{2\gamma(1 - \gamma)}{(\lambda - \gamma)(\lambda + \gamma)} \geq 0.$$

Отже, функція  $f(\lambda)$  зростає на  $[2, +\infty)$ , а тому виконується нерівність

$$f(N) = \left( \frac{N - \gamma}{N + \gamma} \right)^{2(N+1)} \geq \left( \frac{\gamma - 2}{\gamma + 2} \right)^6 \quad \forall N \geq 2.$$

Тоді при  $N = 2, 3, \dots$  і внаслідок нерівності  $\left( \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma} \right)^6 \geq 3^{-6}$ ,  $\gamma \in (0,1]$ , перетворимо оцінку (4.18) так:

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq \frac{1}{2^{2\sigma+3} N(N + \gamma)^{2\sigma}} \left( \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma} \right)^6 \sum_{i=N}^{2N} (x_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{2\sigma+3} 3^6 N(N + \gamma)^{2\sigma}} \sum_{i=N}^{2N} (x_0^\sigma, e_i)^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Візьмемо  $x_0 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^{\sigma+1/2} \ln^{(1+\varepsilon)/2} i} e_i$  ( $\sigma > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ). Тоді  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,

$$(x_0^\sigma, e_i)^2 = \frac{1}{i \ln^{1+\varepsilon} i}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

а з (4.19) при  $N = 2, 3, \dots$  дістанемо

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq \frac{1}{2^{2\sigma+3} 3^6 N(N + \gamma)^{2\sigma}} \sum_{i=N}^{2N} \frac{1}{i \ln^{1+\varepsilon} i} \geq \frac{1}{2^{2\sigma+3} 3^6 N(N + \gamma)^{2\sigma}} \frac{N + 1}{2N \ln^{1+\varepsilon}(2N)} > \\ &> \frac{2^{-(2\sigma+4)} 3^{-6}}{(N + \gamma)^{2\sigma+1} \ln^{1+\varepsilon}(2N)}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.  $\square$

Позначимо  $\mathfrak{R}(A, \mu, L)$  множину елементів  $x$  банахового простору  $X$  таких, що

$$\|x\|_{\mathfrak{R}(A, \mu, L)} = \sup_{0 \leq n < \infty} \frac{\|A^n x\|}{L^n M_n} < \infty,$$

де  $0 < L < +\infty$ ,  $\mu = (M_n)_{n=0}^{\infty}$  – неспадна послідовність додатних чисел. Відомо [49], що  $\mathfrak{R}(A, \mu, L)$  є неперервно вкладеним у  $X$  банаховим простором.

У випадку нескінченної гладкості початкового вектора  $x_0$  (тобто  $x_0 \in D(A^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ) в [74] доведено такий результат.

**Твердження 4.3** [74]. Нехай діючий у гільбертовому просторі  $H$  оператор  $A$ ,  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$  має дискретний спектр  $\gamma(1 + \sqrt{2}) = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$  і  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$ . Тоді метод перетворення Келі (4.4) має експоненціальну швидкість збіжності і для його точності справджується оцінка

$$z_N \leq \frac{\exp(-(N+1)\ln(1+\sqrt{2}))}{(\gamma\sqrt{2}(2+\sqrt{2}))^{1/2}} \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}, \quad (4.20)$$

яка непокрашувана за порядком.

На підставі зауваження в [74] виведемо нерівність типу (4.20) без додаткового припущення про дискретність спектру оператора  $A$ .

**Теорема 4.3.** Нехай оператор  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , діє в гільбертовому просторі  $H$  має щільну в  $H$  область визначення  $D(A)$ . Тоді при  $\gamma = \frac{\lambda_0}{1+\sqrt{2}}$  і  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$  метод перетворення Келі (4.4) має експоненціальну швидкість збіжності і його точність характеризується оцінкою

$$z_N \leq \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\gamma}\right)^{1/2} \exp(-(N+2)\ln(1+\sqrt{2})) \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (4.21)$$

яка непокрашувана за порядком.

Доведення. Формула (4.13) для всіх  $n \in \mathbb{N}$  має вигляд

$$\begin{aligned} y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1} &= (\gamma I + A)^{-k} (\gamma I - A)^k 2\gamma (\gamma I + A)^{-1} A^{-n} A^n x_0 = \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda}\right)^k \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda} \frac{\lambda_0^n}{\lambda^n} dE_\lambda \frac{A^n x_0}{\lambda_0^n}, \end{aligned}$$

а отже,

$$\|y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1}\|^2 = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda}\right)^{2k} \frac{(2\gamma)^2}{(\gamma + \lambda)^2} \frac{\lambda_0^{2n}}{\lambda^{2n}} d \left\| E_\lambda \frac{A^n x_0}{\lambda_0^n} \right\|^2.$$

Зокрема, при  $n = k$  дістаємо

$$\|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2 = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma+\lambda}\right)^{2k} \frac{(2\gamma)^2}{(\gamma+\lambda)^2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{2k} d \left\| E_{\lambda} \frac{A^k x_0}{\lambda_0^k} \right\|^2,$$

і формула (4.12) перетворюється на таку:

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma+\lambda}\right)^{2k} \frac{1}{(\gamma+\lambda)^2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{2k} d \left\| E_{\lambda} \frac{A^k x_0}{\lambda_0^k} \right\|^2. \quad (4.22)$$

Для функції  $\varphi(\lambda) = \frac{1}{(\lambda+\gamma)^{k+1}} \left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}\right)^k$  знайдемо похідну

$$\varphi'(\lambda) = \frac{-(\lambda-\gamma)^{k-1}}{(\lambda+\gamma)^{k+2} \lambda^{k+1}} \left( (k+1)\lambda^2 - \gamma(2k+1)\lambda - k\gamma^2 \right),$$

для нулів  $\lambda_1 = \gamma$  і  $\lambda_2 = \frac{\gamma(2k+1) + \gamma\sqrt{8k^2 + 8k + 1}}{2(k+1)}$  якої при всіх  $\gamma > 0$  і  $k \in \mathbb{N}$

справджується нерівність

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \gamma < \lambda_2 &= \frac{\gamma(2k+1) + \gamma 2\sqrt{2}\sqrt{(k+1/2)^2 - 1/8}}{2(k+1)} < \\ &< \frac{\gamma(2k+1)(1+\sqrt{2})}{2k+2} < \gamma(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Тоді при  $\gamma = \frac{\lambda_0}{1+\sqrt{2}}$  функція  $\varphi(\lambda)$  спадає на  $[\lambda_0, +\infty)$ . Відтак з (4.22) випливає

оцінка

$$\begin{aligned} z_N^2 &\leq 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma-\lambda_0}{\gamma+\lambda_0}\right)^{2k} \frac{1}{(\gamma+\lambda_0)^2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0}\right)^{2k} d \left\| E_{\lambda} \frac{A^k x_0}{\lambda_0^k} \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A,(1),\lambda_0)}^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2(k+1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{(1+\sqrt{2})^{-2(N+2)}}{1-(1+\sqrt{2})^{-2}} \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A,(1),\lambda_0)}^2 = \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})}{2\gamma} (1+\sqrt{2})^{-2(N+2)} \|x_0\|_{\mathfrak{R}(A,(1),\lambda_0)}^2. \end{aligned}$$

У [74] доведено, що для діючого в  $H$  самоспряженого і додатно визначеного оператора  $A$  із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$  і

дискретним спектром  $\lambda_0 = \gamma(1 + \sqrt{2}) \leq \lambda_1 \leq \dots$  при  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$  і  $N = 0, 1, \dots$  справджується оцінка

$$z_N \geq \frac{|(x_0, e_0)|}{\gamma^{1/2}} \exp\left(- (N + 2) \ln(1 + \sqrt{2})\right), \quad (4.23)$$

де  $e_0$  – нормований власний вектор, що відповідає власному значенню  $\lambda_0$ . Таким чином, нерівність (4.23) показує непокращуваність за порядком оцінки (4.21). Теорему доведено.  $\square$

**4.1.2. Непокращувані вагові оцінки точності методу в гільбертовому просторі.** Доведемо тепер інтегральну оцінку типу (4.8) з ваговою функцією та дослідимо її непокращуваність за порядком.

**Теорема 4.4.** *Нехай  $A$  – самоспряжений додатно визначений оператор з областю визначення  $D(A)$ , щільною в гільбертовому просторі  $H$ ;  $0 < \gamma \leq \lambda_0$ ,  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ . Тоді точність методу перетворення Келі (4.4) характеризується оцінкою*

$$z_{t,N} \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} t^{-1} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^\sigma} \|A^\sigma x_0\| \quad (4.24)$$

$$(N \geq \max\{\lambda_0 \sigma / (2\gamma), \sigma\} - 1)$$

зі сталою  $C = \frac{\sigma^{2\sigma-1}}{e^\sigma 2^{2\sigma+1} \gamma^{2\sigma}}$ , не залежною від  $N$  і  $x_0$ .

Доведення. Скориставшись відомими властивостями [30] поліномів Лагерра  $L_n^{(0)}(t)$ , перетворимо розв'язок  $x(t)$  в (4.2) до вигляду

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{(0)}(2\gamma t) [y_{\gamma,n} + y_{\gamma,n+1}] = \\ &= e^{-\gamma t} y_{\gamma,0} + e^{-\gamma t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\gamma t}{n} L_{n-1}^{(1)}(2\gamma t) y_{\gamma,n}, \end{aligned}$$

де  $y_{\gamma,n} = T_\gamma^n x_0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\gamma > 0$ . Тоді

$$z_N^2 \equiv \|x(t) - x_N(t)\|^2 = e^{-2\gamma t} (2\gamma t)^2 \sum_{i,j=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{ij} L_{i-1}^{(1)}(2\gamma t) L_{j-1}^{(1)}(2\gamma t) (y_{\gamma,i}, y_{\gamma,j}).$$

Враховуючи умову ортогональності

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_k^{(\alpha)}(x) dx = \delta_{nk} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \quad n, k \geq 0, \quad \alpha > -1,$$

де  $\delta_{nk}$  – символ Кронекера, дістанемо

$$\begin{aligned} z_{t,N}^2 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \|y_{\gamma,n}\|^2 = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2n} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d \|E_{\lambda} A^{\sigma} x_0\|^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

де  $\lambda_0$  – константа додатної визначеності, що обмежує знизу спектр оператора  $A$ ,

$E_{\lambda}$  – спектральний розклад одиниці, пов'язаний з оператором  $A$ .

Для функції  $f(\lambda) = \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2n} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}}$  знайдемо похідну

$$f'(\lambda) = \frac{-2\sigma}{\lambda^{2\sigma+1}} \frac{(\lambda - \gamma)^{2n-1}}{(\lambda + \gamma)^{2n+1}} \left( \lambda^2 - \frac{2n\gamma}{\sigma} \lambda - \gamma^2 \right),$$

нулі  $\lambda_1 = \gamma$  и  $\lambda_2 = \frac{\gamma}{\sigma} (n + \sqrt{n^2 + \sigma^2})$  якої при всіх  $n \in \mathbb{N}$  задовольняють нерівність  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Візьmemo додатний параметр  $\gamma$  з умови  $\gamma \leq \lambda_0$ . Застосовуючи нерівність

$$\left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x < e^{-1}, \quad x \geq 1,$$

для всіх натуральних  $n \geq \max \{ \lambda_0 \sigma / (2\gamma), \sigma \}$  одержимо

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \geq \lambda_0} f(\lambda) &= f(\lambda_2) = \left( \frac{n + \sqrt{n^2 + \sigma^2} - \sigma}{n + \sqrt{n^2 + \sigma^2} + \sigma} \right)^{2n} \frac{\sigma^{2\sigma}}{\gamma^{2\sigma} (n + \sqrt{n^2 + \sigma^2})^{2\sigma}} = \\ &= \left\{ \left( 1 - \frac{2\sigma}{n + \sqrt{n^2 + \sigma^2} + \sigma} \right)^{\frac{n + \sqrt{n^2 + \sigma^2} + \sigma}{2\sigma}} \right\}^{\frac{4\sigma n}{n + \sqrt{n^2 + \sigma^2} + \sigma}} \cdot \frac{\sigma^{2\sigma}}{\gamma^{2\sigma} (n + \sqrt{n^2 + \sigma^2})^{2\sigma}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sigma^{2\sigma}}{e^{\sigma\gamma} 2^{2\sigma} (2n)^{2\sigma}}.$$

Тоді з (4.25) випливає оцінка

$$\begin{aligned} z_{t,N}^2 &\leq \frac{\sigma^{2\sigma}}{e^{\sigma\gamma} 2^{2\sigma} 2^{2\sigma}} \|A^\sigma x_0\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma+1}} \leq \\ &\leq \frac{\sigma^{2\sigma}}{e^{\sigma\gamma} 2^{2\sigma} 2^{2\sigma}} \|A^\sigma x_0\|^2 \int_N^{+\infty} \frac{ds}{s^{2\sigma+1}} = \frac{\sigma^{2\sigma-1}}{e^{\sigma\gamma} 2^{2\sigma} 2^{2\sigma+1} N^{2\sigma}} \|A^\sigma x_0\|^2 \end{aligned}$$

для всіх натуральних  $N \geq \max\{\lambda_0\sigma/(2\gamma), \sigma\} - 1$ . Теорему доведено.  $\square$

Щоб довести непокращуваність за порядком оцінки (4.24), достатньо показати, що для деяких оператора  $A$  і початкового вектора  $x_0$  швидкість збіжності методу перетворення Келі (4.4) оцінюється знизу за порядком  $N$  нерівністю, подібною до (4.24).

**Теорема 4.5.** *Нехай оператор  $A$  задовольняє умови теореми 4.4 і виконані припущення  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $0 < \lambda_0 \leq 1$ . Тоді оцінка (4.24) швидкості збіжності методу перетворення Келі (4.4) є майже (з точністю до логарифма) непокращуваною за порядком  $N$ .*

Доведення. Нехай оператор  $A$  має дискретний спектр: зліченну множину власних значень  $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$  з відповідними власними функціями  $e_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , що утворюють ортонормований базис в  $H$ :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_{\gamma,n} &= T_\gamma^n x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^n \frac{1}{\lambda_i^\sigma} (A^\sigma x_0, e_i) e_i, \\ z_{t,N}^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \|y_{\gamma,n}\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2n} \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i)^2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Нехай  $\lambda_i = i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $0 < \lambda_0 \leq 1$ . Виберемо елемент  $x_0 \in D(A^\sigma)$  з умови

$(A^\sigma x_0, e_i)^2 = \frac{1}{i \ln^2 i}$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . Тоді при  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $N > 1$  маємо

$$\begin{aligned}
z_{t,N}^2 &\geq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N}^{\infty} \left( \frac{i-\gamma}{i+\gamma} \right)^{2n} \frac{1}{i^{1+2\sigma} \ln^2 i} \geq \\
&\geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \left( \frac{N-\gamma}{N+\gamma} \right)^{2n} \sum_{i=N}^{2N} \frac{1}{i^{1+2\sigma} \ln^2 i} \geq \left( \frac{N-\gamma}{N+\gamma} \right)^{4N} \frac{N}{2N} \frac{N+1}{(2N)^{1+2\sigma} \ln^2(2N)} \geq \\
&\geq \left( \frac{N-\gamma}{N+\gamma} \right)^{4N} \frac{1}{4^{1+\sigma}} \frac{1}{N^{2\sigma}} \frac{1}{\ln^2(2N)}.
\end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю  $\ln(1+r) \geq \frac{r}{r+1}$  ( $r > -1$ ), оцінимо

$$\begin{aligned}
\left( \frac{N-\gamma}{N+\gamma} \right)^{4N} &= e^{4N \ln \left( 1 - \frac{2\gamma}{N+\gamma} \right)} \geq e^{-\frac{8\gamma N}{N-\gamma}} > e^{-\frac{8\gamma}{1-\gamma}} \\
&(N > 1, 0 < \gamma \leq 1).
\end{aligned}$$

Остаточо отримаємо

$$z_{t,N}^2 \geq \frac{e^{-\frac{8\gamma}{1-\gamma}} 4^{-(1+\sigma)}}{N^{2\sigma}} \frac{1}{\ln^2(2N)}.$$

Теорему доведено.  $\square$

Непокращуваність оцінки (4.24) розглянуто також у наступному зауваженні.

**Зауваження 4.1.** Нехай  $\{c_N, N \in \mathbb{N}\}$  – необмежена послідовність додатних чисел. Тоді для деякого самоспряженого оператора  $A$  і деякого вектора  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , не існує сталої  $c > 0$  такої, що

$$z_{t,N}^2 \leq \frac{c}{N^{2\sigma} c_N}.$$

Доведення. Нехай  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  – ортонормований базис в  $H$ . Розглянемо діючий в  $H$  оператор з областю визначення

$$D(A) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 n^2 < \infty \right\}$$

і покладемо  $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n n e_n$  для  $x \in D(A)$ . Очевидно,  $\overline{D(A)} = H$ , а  $A$  – необмежений на  $D(A)$  лінійний оператор. Окрім того,  $A$  є симетричним оператором з множиною значень  $R(A) = H$ . З цього випливає, що оператор  $A$  є

самоспряженим. Нехай підпоследовність  $\{c_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$  послідовності  $\{c_N, N \in \mathbb{N}\}$  задовольняє умову

$$c_{n_k} \geq k^3, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots. \quad (4.27)$$

Візьмемо

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kn_k^{\sigma}} e_{n_k} \in D(A^{\sigma}) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 n^{2\sigma} < \infty \right\}.$$

Очевидно,  $A^{\sigma} x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_{n_k}$ . Тоді

$$\begin{aligned} z_{t, n_k}^2 &= \int_0^{+\infty} t^{-1} \|x(t) - x_{n_k}(t)\|^2 dt = \\ &= \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{n_p - \gamma}{n_p + \gamma} \right)^{2j} \frac{1}{n_p^{2\sigma}} |(A^{\sigma} x_0, e_{n_p})|^2 \geq \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{n_k - \gamma}{n_k + \gamma} \right)^{2j} \frac{1}{n_k^{2\sigma}} \frac{1}{k^2} \geq \\ &\geq \sum_{j=n_k+1}^{2n_k} \frac{1}{j} \left( \frac{n_k - \gamma}{n_k + \gamma} \right)^{2j} \frac{1}{n_k^{2\sigma}} \frac{1}{k^2} \geq n_k \frac{1}{2n_k} \left( \frac{n_k - \gamma}{n_k + \gamma} \right)^{4n_k} \frac{1}{n_k^{2\sigma}} \frac{1}{k^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2\gamma - \gamma}{2\gamma + \gamma} \right)^{8\gamma} \frac{1}{n_k^{2\sigma}} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{2} 3^{-8\gamma} \frac{1}{n_k^{2\sigma} k^2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

для всіх  $n_k \geq 2\gamma$ . Припустимо, що, навпаки, знайдуться додатна стала  $c$  і номер  $N' \in \mathbb{N}$  такі, що при  $n_k \geq N'$  виконується

$$z_{t, n_k}^2 \leq \frac{c}{n_k^{2\sigma} c_{n_k}}. \quad (4.29)$$

З оцінок (4.28) і (4.29) випливає нерівність  $\frac{c_{n_k}}{k^2} \leq 3^{8\gamma} 2c$  для всіх  $n_k \geq N'$ , а це суперечить умові (4.27).  $\square$

Розглянемо тепер випадок, коли вектор  $x_0$  належить простору  $\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$ .

**Теорема 4.6.** *Нехай самоспряжений додатно визначений оператор  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$  має дискретний спектр*

$$0 < \gamma(1 + \sqrt{2}) = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$



а відповідні власні функції  $e_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , утворюють ортонормований базис в  $H$ ;  $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$ . Тоді метод перетворення Келі (4.4) має експоненціальну швидкість збіжності і його точність характеризується оцінкою

$$\begin{aligned} z_{t,N}^2 &\equiv \int_0^{+\infty} t^{-1} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \leq \\ &\leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \frac{(1 + \sqrt{2})^{-2N-2}}{N+1} \|x\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}^2, \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.30)$$

яка є непокрешуваною за порядком.

Доведення. З урахуванням (4.26) маємо

$$z_{t,N}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2n} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \right)^{2n} \left[ \frac{(A^n x_0, e_i)}{\lambda_0^n} \right]^2. \quad (4.31)$$

Неважко переконатися, що функція

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda(\lambda + \gamma)}$$

монотонно спадає при  $\lambda \in [\gamma(1 + \sqrt{2}), +\infty)$ . Тоді з (4.31) виводимо нерівність

$$\begin{aligned} z_{t,N}^2 &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^{2n} \|x\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}^2 \leq \\ &\leq \frac{(1 + \sqrt{2})^{-2N-2}}{N+1} \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \|x\|_{\mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)}^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

З іншого боку, враховуючи (4.31) одержуємо

$$\begin{aligned} z_{t,N}^2 &\geq \frac{1}{N+1} \left( \frac{\gamma - \lambda_0}{\gamma + \lambda_0} \right)^{2(N+1)} \left[ \frac{(A^{N+1} x_0, e_0)}{\lambda_0^{N+1}} \right]^2 = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^{-2N-2}}{N+1} (x_0, e_0)^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

З нерівностей (4.32) і (4.33) випливає твердження теореми.  $\square$

### 4.1.3. Обернені теореми для операторних експоненти і косинуса.

Доведемо для задачі (4.1) обернену теорему наближення.

**Теорема 4.7.** Нехай для деякого діючого в  $H$  самоспряженого додатно визначеного оператора  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , сталої  $\sigma > 0$  і неспадної послідовності додатних чисел  $\{c_N, N \in \mathbb{N}\}$  зі збіжним рядом  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_2^k}$  виконується нерівність

$$z_{t,N}^2 \leq \frac{1}{N^{2\sigma} c_N}. \quad (4.34)$$

Тоді  $x_0 \in D(A^\sigma)$ .

Доведення. Використовуючи зображення (4.25) і оцінку (4.34), маємо

$$z_{t,N}^2 \cdot N^{2\sigma} = \int_{\lambda_0}^{+\infty} N^{2\sigma} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j} d(E_\lambda x_0, x_0) \leq \frac{1}{c_N}. \quad (4.35)(35)$$

Позначимо

$$\psi_N(\lambda) = N^{2\sigma} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j}$$

і розглянемо неспадну послідовність  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$  функцій

$$\varphi_n(\lambda) = \max \{ \psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_n(\lambda) \}, \quad \lambda \in [\lambda_0, +\infty).$$

Для кожного  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  знайдемо  $r \in \mathbb{N}_0$  таке, що  $2^r \leq k < 2^{r+1}$ . Тоді

$$\frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{2^r}(\lambda)} = \frac{k^{2\sigma} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j}}{(2^r)^{2\sigma} \sum_{j=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j}} < \left( \frac{k}{2^r} \right)^{2\sigma} < 2^{2\sigma},$$

а отже,  $\varphi_n(\lambda) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \psi_{2^r}(\lambda)$ , де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ . Звідси з

урахуванням (4.35) дістаємо для всіх  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi_n(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]+1} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \psi_{2^r}(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \frac{1}{c_{2^r}} < < M = \text{const}$$

Тоді за теоремою Беппо Леві [83] для функції  $\varphi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\lambda)$  теж справджується оцінка

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) \leq M.$$

Покажемо тепер, що  $\varphi(\lambda) \geq C\lambda^{2\sigma}$  при  $\lambda \geq \lambda' = \max\{\lambda_0, 2, \gamma\}$ , де  $C$  – деяка додатна стала. Цим буде доведено збіжність інтеграла:

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\sigma} d(E_\lambda x_0, x_0) < \infty,$$

а отже, і те, що  $x_0 \in D(A^\sigma)$ . З цією метою для кожного  $\lambda \geq \lambda' = \max\{\lambda_0, 2, \gamma\}$  знайдемо

$$\begin{aligned} \psi_{[\lambda]}(\lambda) &= [\lambda]^{2\sigma} \sum_{j=[\lambda]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j} > [\lambda]^{2\sigma} \sum_{j=[\lambda]+1}^{2[\lambda]} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j} > \\ &> [\lambda]^{2\sigma} [\lambda] \frac{1}{2[\lambda]} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{4[\lambda]} \geq (\lambda - 1)^{2\sigma} \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{4\lambda} \geq \\ &\geq (\lambda - 1)^{2\sigma} \frac{1}{2} \left( \frac{2\gamma - \gamma}{2\gamma + \gamma} \right)^{8\gamma} \geq \frac{\lambda^{2\sigma}}{2^{2\sigma+1}} 3^{-8\gamma}, \end{aligned}$$

звідки випливає  $\varphi(\lambda) \geq \varphi_{[\lambda]}(\lambda) \geq \psi_{[\lambda]}(\lambda) \geq \frac{1}{2^{2\sigma+1} 3^{8\gamma}} \lambda^{2\sigma}$ . Теорему доведено.  $\square$

Розглянемо тепер в гільбертовому просторі  $H$  задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Ax(t) &= 0, \quad t \in (0, T], \\ x(0) &= x_0, \quad x'(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.36}$$

з діючим в  $H$  оператором  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , область визначення якого  $D(A)$  щільна в  $H$  ( $I$  – тотожний оператор).

Відомо [44], що при  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 5/4$ , розв'язок  $x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0$  задачі (4.36) зображується рядом

$$x(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) u_n, \quad (4.37)$$

де  $\delta < 1/2$  – довільна стала,  $L_n^{(0)}(t)$  – поліном Лагерра, а члени послідовності  $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$  задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} (A + (\delta - 1)^2 I) u_{n+1} &= 2(A + \delta(\delta - 1)I) u_n - (A + \delta^2 I) u_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u_0 &= x_0, \quad u_1 = (A + \delta(\delta - 1)I) (A + (\delta - 1)^2 I)^{-1} x_0. \end{aligned}$$

За наближення точного розв'язку  $x(t)$  береться частинна сума ряду (4.37)

$$x_N(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^N \left( L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t) \right) u_n. \quad (4.38)$$

Для точності такого наближення в [23] доведено інтегральну оцінку

$$z_N^2 \equiv \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-(1-2\delta)t} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \leq \frac{2^{4\sigma-1} \sigma^{2\sigma-1}}{(1-2\delta)^{2\sigma}} \|A^\sigma x_0\|^2 N^{-2\sigma}$$

при  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $0 \leq \delta < 1/2$  і всіх натуральних  $N \geq N'(\lambda_0, \delta, \sigma)$ , а також встановлено її непокращуваність (з точністю до логарифма) за порядком  $N$ .

Доведемо тепер наступне обернене твердження.

**Теорема 4.8.** *Нехай для деякого діючого в гільбертовому просторі  $H$  самоспряженого додатно визначеного оператора  $A = A^* \geq \lambda_0 I$ ,  $\lambda_0 > 0$ , сталої  $\sigma > 0$ , вектора  $x_0 \in H$  і неспадної послідовності додатних чисел  $\{c_N, N \in \mathbb{N}\}$  зі*

збіжним рядом  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{2^k}}$  виконується нерівність

$$z_N^2 \leq \frac{1}{N^{2\sigma} c_N}. \quad (4.39)$$

Тоді  $x_0 \in D(A^{\sigma/2})$ .

Доведення. Використовуючи позначення [23] і умову (4.39), маємо оцінку

$$z_N^2 \cdot N^{2\sigma} = \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{1}{j} \int_{\lambda_0}^{+\infty} N^{2\sigma} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda)) d(E_\lambda x_0, x_0) \leq \frac{1}{c_N}, \quad (4.40)$$

де  $E_\lambda$  – спектральний розклад одиниці оператора  $A$ ,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , – поліноми Чебишова першого роду,

$$\chi_1(\lambda) = \frac{\lambda + \delta^2}{\lambda + (\delta - 1)^2}, \quad \chi_2(\lambda) = \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta^2)(\lambda + (\delta - 1)^2)}}.$$

Позначимо

$$\psi_N(\lambda) = N^{2\sigma} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))$$

і розглянемо неспадну послідовність  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$  функцій

$$\varphi_n(\lambda) = \max\{\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_n(\lambda)\}, \quad \lambda \in [\lambda_0, +\infty).$$

Для кожного  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  знайдемо  $r \in \mathbb{N}_0$  таке, що  $2^r \leq k < 2^{r+1}$ . Тоді

$$\frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{2^r}(\lambda)} = \frac{k^{2\sigma} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))}{(2^r)^{2\sigma} \sum_{j=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))} < \left(\frac{k}{2^r}\right)^{2\sigma} < 2^{2\sigma},$$

а отже,

$$\varphi_n(\lambda) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \psi_{2^r}(\lambda).$$

Враховуючи нерівність (4.40), одержимо для всіх  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi_n(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) &< 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \psi_{2^r}(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) < \\ &< 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \frac{1}{c_{2^r}} < M, \end{aligned}$$

$M = \text{const}$ . Тоді за лемою Беппо Леві [83] для функції

$$\varphi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\lambda)$$

теж виконується оцінка

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) \leq M.$$

Покажемо тепер, що  $\varphi(\lambda) \geq C\lambda^\sigma$  при  $\lambda \geq \lambda'$ ,  $\lambda' \geq \lambda_0$ , де  $\lambda'$  – деяке число,  $C$  – деяка додатна стала. Оскільки з цієї нерівності випливає збіжність інтеграла

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^\sigma d(E_\lambda x_0, x_0) < \infty,$$

то це і буде означати, що  $x_0 \in D(A^{\sigma/2})$ . Перш за все, для кожного фіксованого  $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$  знайдемо  $N$  з умови

$$\cos \frac{\pi}{6N} \leq \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2 + \lambda}}.$$

Скориставшись нерівностями

$$\cos \frac{\pi}{6N} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12N} < 1 - 2 \left( \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{12N} \right)^2,$$

$$\frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2 + \lambda}} = \left( 1 + \frac{\lambda}{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2} \right)^{-1/2} > 1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \delta(\delta - 1))^2},$$

одержимо  $N^2 < \frac{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2}{9\lambda}$ . Для таких  $N$  виконується

$$T_j \left( \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2 + \lambda}} \right) \geq T_j \left( \cos \frac{\pi}{6N} \right) \geq T_{2N} \left( \cos \frac{\pi}{6N} \right) = \frac{1}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2N.$$

Візьмемо  $n_0 = \left\lceil \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{3\sqrt{\lambda}} \right\rceil$ , тоді

$$\begin{aligned} \psi_{n_0}(\lambda) &\geq n_0^{2\sigma} \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda + \delta^2}{\lambda + (\delta - 1)^2} \right)^j T_j^2 \left( \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta^2)(\lambda + (\delta - 1)^2)}} \right) \geq \\ &\geq n_0^{2\sigma} n_0 \frac{1}{2n_0} \left( \frac{\lambda + \delta^2}{\lambda + (\delta - 1)^2} \right)^{2n_0} \frac{1}{4} \geq \\ &\geq \left( \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{3\sqrt{\lambda}} - 1 \right)^{2\sigma} \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda + \delta^2}{\lambda + (\delta - 1)^2} \right)^{2 \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{3\sqrt{\lambda}}} \geq C\lambda^\sigma, \end{aligned}$$

а отже,  $\varphi(\lambda) \geq \varphi_{n_0}(\lambda) \geq \psi_{n_0}(\lambda) \geq C\lambda^\sigma$ . Теорему доведено.  $\square$

Зазначимо, що умови теореми задовольняє, наприклад, послідовність

$$c_N = \ln^{1+\varepsilon} N, \quad \varepsilon > 0.$$

**4.1.4. Оцінки точності методу в банаховому просторі.** Розглянемо у банаховому просторі  $E$  задачу Коші для однорідного рівняння 1-го порядку:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) &= 0, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

де  $A$  – замкнутий лінійний (взагалі кажучи, необмежений) оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$  і резольвентною множиною  $\rho(A)$ .

Розв'язком цієї задачі, за означенням, є неперервна на  $[0, +\infty)$  і неперервно диференційовна на  $(0, +\infty)$   $E$ -значна функція  $x(t)$ , яка задовольняє рівняння і початкову умову (4.41).

Нагадаємо [44, 142], що замкнутий лінійний оператор  $A$  називається *сильно позитивним*, якщо існують  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ,  $\gamma > 0$  і  $L > 0$  такі, що

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi \leq \arg z \leq 2\pi - \varphi\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \gamma\} \subset \rho(A), \\ \|(zI - A)^{-1}\| &\leq \frac{L}{1 + |z|} \quad \forall z \in \Sigma. \end{aligned}$$

Для конструктивного зображення розв'язку  $x(t)$  задачі (4.41) в [142] запропоновано метод перетворення Келі оператора  $A$  і доведено наступний результат.

**Твердження 4.4** [142]. *Нехай  $A$  – діючий у банаховому просторі  $E$  замкнутий сильно позитивний лінійний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$ ;  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ . Тоді розв'язок задачі (4.41) існує, єдиний і зображається рядом*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1}) = \\ &= e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^k (I + T_\gamma) x_0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

де  $\gamma$  – довільна додатна стала,  $L_k^{(0)}(t)$  – поліноми Лагерра [30],  $I$  – тотожний оператор,  $T_\gamma$  – перетворення Келі оператора  $A$ :

$$T_\gamma = (\gamma I - A)(\gamma I + A)^{-1}. \quad (4.43)$$

За наближення точного розв'язку  $x(t)$  задачі (4.41) береться відрізок ряду (4.42):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^N (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^k (I + T_\gamma) x_0. \quad (4.44)$$

Для точності такого наближення доведено наступний результат.

**Твердження 4.5** [142]. Нехай  $A$  – діючий у банаховому просторі  $E$  замкнутий сильно позитивний лінійний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$ ;  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ . Тоді точність методу перетворення Келі (4.44) характеризується оцінкою

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \|x(t) - x_N(t)\| \leq c N^{-\sigma + \delta} \|A^\sigma x_0\|, \quad (4.45)$$

зі сталою  $c$ , не залежною від  $N$  і  $x_0$ , та довільним  $\delta \in (0, \sigma)$ .

Доведемо аналоги тверджень 4.4 і 4.5 у випадку логарифмічно секторіального оператора  $N$  та наведемо явний вигляд сталої  $c$  в оцінці типу (4.45).

Нагадаємо, що діючий у банаховому просторі  $E$  оператор  $A$  називають логарифмічно секторіальним, якщо існують  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ,  $\delta > 0$  і  $L > 0$  такі, що

$$\Sigma \equiv \{z \in \mathbb{C} : \varphi \leq \arg z \leq 2\pi - \varphi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\} \subset \rho(A),$$

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq L \frac{\ln(1 + |z|)}{|z|} \quad \forall z \in \Sigma \setminus \{0\}. \quad (4.46)$$

Клас таких операторів розглянуто в [4], де, окрім того, наведено приклад логарифмічно секторіального, але не секторіального (пор. із сильно позитивним) оператора.

Формально диференціюючи ряд (4.42) і враховуючи співвідношення [30]

$$\frac{d}{dt} \left( L_k^{(0)}(t) - L_{k-1}^{(0)}(t) \right) = -L_{k-1}^{(0)}(t),$$



одержимо ряд

$$\begin{aligned}
 x^{(1)}(t) &= -\gamma e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) + \\
 &\quad + e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d}{dt} \left( L_k^{(0)}(2\gamma t) - L_{k-1}^{(0)}(2\gamma t) \right) y_{\gamma,k} = \\
 &= -\gamma e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) + \\
 &\quad + 2\gamma e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) y_{\gamma,k+1} = \\
 &= \gamma e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,k+1} - y_{\gamma,k}), \quad L_{-1}^{(0)} \equiv 0.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

який далі буде потрібний разом з рядом (4.42). Доведемо таке допоміжне твердження.

**Лема 4.1.** *Нехай  $A$  – діючий у банаховому просторі  $E$  замкнутий лінійний логарифмічно секторіальний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$ . Тоді:*

1) *при  $\sigma > 0$ ,  $0 < \gamma \leq \delta$  ряд (4.42) збігається в  $E$  рівномірно по  $t \in [0, +\infty)$ , а отже, зображує неперервну на  $[0, +\infty)$  функцію  $x(t)$ ;*

2) *при  $\sigma > 1$ ,  $0 < \gamma \leq \delta$  ряд у (4.47) збігається в  $E$  рівномірно по  $t \in [0, +\infty)$ , а отже, зображує неперервну при  $t \in [0, +\infty)$  функцію  $x^{(1)}(t)$ , причому  $x^{(1)}(t) = x'(t)$  для всіх  $t \in [0, +\infty)$ ;*

3) *при  $\sigma > 1$ ,  $0 < \gamma \leq \delta$  для всіх  $t \in [0, +\infty)$  виконується  $x(t) \in D(A)$ .*

Доведення. Позначимо  $x_0^\sigma = A^\sigma x_0$  і контур інтегрування  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , де

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : z = -\rho e^{i\varphi}, -\infty < \rho \leq -\gamma\}, \quad \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\varphi}, \gamma \leq \rho < +\infty\}, \\
 \Gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma e^{-i\theta}, -\varphi \leq \theta \leq \varphi\}.
 \end{aligned}$$

Доведемо 1). На підставі (4.43) маємо

$$\begin{aligned}
y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} &= T_{\gamma}^k (I + T_{\gamma}) A^{-\sigma} x_0^{\sigma} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right)^k \left( 1 + \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right) z^{-\sigma} (zI - A)^{-1} x_0^{\sigma} dz = \\
&= \frac{\gamma}{\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right)^k \frac{1}{(\gamma + z) z^{\sigma}} (zI - A)^{-1} x_0^{\sigma} dz.
\end{aligned}$$

Звідси з урахуванням (4.46) одержуємо нерівність

$$\| y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} \| \leq \frac{M\gamma}{\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right|^k \frac{1}{|\gamma + z|} \frac{\ln(1+|z|)}{|z|^{\sigma+1}} |dz| \| x_0^{\sigma} \|,$$

яка з огляду на параметризацію для  $\Gamma_i, i=1,2,3$ , запишеться так:

$$\begin{aligned}
\| y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} \| &\leq \frac{L\gamma}{\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right|^k \frac{1}{|\gamma + z|} \frac{\ln(1+|z|)}{|z|^{\sigma+1}} |dz| \| x_0^{\sigma} \| = \\
&= \frac{L\gamma}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\gamma} \left| \frac{\gamma + \rho e^{i\varphi}}{\gamma - \rho e^{i\varphi}} \right|^k \frac{1}{|\gamma - \rho e^{i\varphi}|} \frac{\ln(1-\rho)}{(-\rho)^{\sigma+1}} d\rho + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\gamma}^{+\infty} \left| \frac{\gamma - \rho e^{i\varphi}}{\gamma + \rho e^{i\varphi}} \right|^k \frac{1}{|\gamma + \rho e^{i\varphi}|} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{\sigma+1}} d\rho + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\varphi}^{\varphi} \left| \frac{\gamma - \gamma e^{-i\theta}}{\gamma + \gamma e^{-i\theta}} \right|^k \frac{1}{|\gamma + \gamma e^{-i\theta}|} \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^{\sigma+1}} \gamma d\theta \right\} \| x_0^{\sigma} \| = \\
&= \frac{2L\gamma}{\pi} \left\{ \int_{\gamma}^{+\infty} \left| \frac{\gamma - \rho e^{i\varphi}}{\gamma + \rho e^{i\varphi}} \right|^k \frac{1}{|\gamma + \rho e^{i\varphi}|} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{\sigma+1}} d\rho + \frac{\ln(1+\gamma)}{2\gamma^{\sigma+1}} \int_0^{\varphi} \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} \cos^{-1} \frac{\theta}{2} d\theta \right\} \| x_0^{\sigma} \|.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Спростивши тут перший інтеграл за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\gamma - \rho e^{i\varphi}}{\gamma + \rho e^{i\varphi}} \right|^2 &= \frac{\gamma^2 + \rho^2 - 2\gamma\rho \cos \varphi}{\gamma^2 + \rho^2 + 2\gamma\rho \cos \varphi} = \\
&= \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi} \cdot \frac{(\rho(\gamma^2 + \rho^2) - 2\gamma^2 \rho \cos \varphi) - \gamma \cos \varphi (\rho^2 - \gamma^2)}{(\rho(\gamma^2 + \rho^2) - 2\gamma^2 \rho \cos \varphi) + \gamma \cos \varphi (\rho^2 - \gamma^2)} \leq \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{|\gamma + \rho e^{i\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \rho^2 + 2\gamma\rho \cos \varphi}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \rho^2}} \leq \frac{1}{\rho}$$

$$(\rho \geq \gamma, \quad 0 < \varphi < \pi/2),$$

а другий оцінивши з урахуванням формули

$$\int_0^\varphi \cos^{-1} \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right|,$$

перетворимо оцінку (4.48) до вигляду

$$\begin{aligned} & \| y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} \| \leq \\ & \leq \frac{2L\gamma}{\pi} \left\{ \int_{\gamma}^{+\infty} \left| \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi} \right|^{k/2} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{\sigma+2}} d\rho + \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^{\sigma+1}} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \operatorname{tg}^k \frac{\varphi}{2} \right\} \| x_0^\sigma \| \leq \\ & \leq \frac{2L\gamma}{\pi} \left\{ \max_{\rho \in [\gamma, +\infty)} \left[ \left( \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi} \right)^{k/2} \rho^{-(\sigma+1-\varepsilon)} \right] \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{1+\varepsilon}} d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^{1+\sigma-\varepsilon}} \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^{\sigma+1}} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \cdot \max_{k \geq 0} \left[ k^{1+\sigma-\varepsilon} \operatorname{ctg}^{-k} \frac{\varphi}{2} \right] \right\} \| x_0^\sigma \| \end{aligned} \quad (4.49)$$

з довільним  $\varepsilon \in (0, \sigma)$ . Розглянемо окремо кожен із двох доданків у фігурних дужках. Для функції

$$f(\rho) = \left( \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi} \right)^s \rho^{-\alpha}, \quad \rho \geq \gamma, \quad \alpha > 0, \quad s > 0,$$

знайдемо похідну

$$f'(\rho) = -\frac{(\rho - \gamma \cos \varphi)^{s-1}}{(\rho + \gamma \cos \varphi)^{s+1}} (\alpha \rho^2 - 2\gamma s \cos \varphi \rho - \alpha \gamma^2 \cos^2 \varphi),$$

додатний нуль якої  $\rho^* = \gamma \cos \varphi \frac{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2}}{\alpha} > \gamma \cos \varphi$ . Візьмемо

$$s \geq \frac{\alpha}{2 \cos \varphi}, \quad (4.50)$$

тоді виконується умова  $\rho^* > \gamma$ . Відтак

$$\max_{\rho \in [\gamma, +\infty)} f(\rho) = f(\rho^*) = \left( \frac{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} - \alpha}{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} + \alpha} \right)^s \left( \frac{\alpha}{\gamma \cos \varphi} \right)^\alpha \left( s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} \right)^{-\alpha} =$$

$$= \exp \left\{ s \ln \left( 1 - \frac{2\alpha}{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} + \alpha} \right) \right\} \left( \frac{\alpha}{\gamma \cos \varphi} \right)^\alpha (s + \sqrt{s^2 + \alpha^2})^{-\alpha}.$$

Оскільки при  $0 \neq x < 1$  виконується  $\ln(1-x) < -x$ , то з урахуванням (4.50) маємо

$$\begin{aligned} s \ln \left( 1 - \frac{2\alpha}{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} + \alpha} \right) &< \frac{-2\alpha s}{s + \sqrt{s^2 + \alpha^2} + \alpha} = \\ &= \frac{-2\alpha}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2} + \frac{\alpha}{s}} \leq \frac{-2\alpha}{1 + \sqrt{1 + 4\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi}}. \end{aligned}$$

А отже, для кожного натурального  $s \geq \frac{\alpha}{2\cos \varphi}$  справджується нерівність

$$\max_{\rho \in [\gamma, +\infty)} f(\rho) < \exp \left\{ \frac{-2\alpha}{1 + \sqrt{1 + 4\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi}} \right\} \left( \frac{\alpha}{\gamma \cos \varphi} \right)^\alpha \frac{1}{(2s)^\alpha},$$

яка при  $s = k/2$  і  $\alpha = 1 + \sigma - \varepsilon$  для всіх натуральних  $k \geq \frac{1 + \sigma - \varepsilon}{\cos \varphi}$  дає оцінку

$$\begin{aligned} \max_{\rho \in [\gamma, +\infty)} \left( \frac{\rho - \gamma \cos \varphi}{\rho + \gamma \cos \varphi} \right)^{k/2} \rho^{-(\sigma + 1 - \varepsilon)} &< \\ &< \frac{\exp \left\{ \frac{-2(1 + \sigma - \varepsilon)}{1 + \sqrt{1 + 4\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi}} \right\} \left( \frac{1 + \sigma - \varepsilon}{\gamma \cos \varphi} \right)^{1 + \sigma - \varepsilon}}{k^{1 + \sigma - \varepsilon}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Функція  $\varphi(x) = x^\beta a^{-x}$ ,  $x \geq 0$  ( $a > 1$ ,  $\beta > 0$ ) досягає максимуму при  $x = \beta / \ln a$ ,

тому

$$\max_{x \geq 0} \varphi(x) = \varphi(\beta / \ln a) = (\beta / \ln a)^\beta a^{-\beta / \ln a}.$$

Звідси при  $\beta = 1 + \sigma - \varepsilon$ ,  $a = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$  дістаємо

$$\max_{k \geq 0} \left[ k^{1 + \sigma - \varepsilon} \operatorname{ctg}^{-k} \frac{\varphi}{2} \right] = \left( \frac{1 + \sigma - \varepsilon}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} \right)^{1 + \sigma - \varepsilon} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{(1 + \sigma - \varepsilon) \ln^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.52)$$

Зважаючи на (4.51) і (4.52), перетворимо тепер (4.49) до вигляду

$$\|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\| \leq \frac{c_1}{k^{1+\sigma-\varepsilon}} \|x_0^\sigma\| \quad (4.53)$$

зі сталою  $c_1 = c_1(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon) = \frac{2L\gamma}{\pi} \max\{c_2, c_3\}$ , де

$$c_2 = \exp\left\{\frac{-2(1+\sigma-\varepsilon)}{1+\sqrt{1+4\cos^2\varphi+2\cos\varphi}}\right\} \left(\frac{1+\sigma-\varepsilon}{\gamma\cos\varphi}\right)^{1+\sigma-\varepsilon} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{1+\varepsilon}} d\rho,$$

$$c_3 = \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^{\sigma+1}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \left(\frac{1+\sigma-\varepsilon}{\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}\right)^{1+\sigma-\varepsilon} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{(1+\sigma-\varepsilon)\ln^{-1}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}},$$

для всіх  $k \geq \frac{1+\sigma-\varepsilon}{\cos\varphi}$  при довільному  $\varepsilon \in (0, \sigma)$  і  $\sigma > 0$ .

Оцінка (4.53) разом із нерівністю [30]

$$e^{-t/2} |L_n^{(0)}(t)| \leq 1 \quad (t \geq 0) \quad (4.54)$$

показує, що ряд у (4.42) мажорується збіжним числовим рядом  $\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{c_1 \|x_0^\sigma\|}{k^{1+\sigma-\delta}}$ , а

отже, збігається в  $E$  рівномірно по  $t \in [0, +\infty)$ . Тож його сума  $x(t)$  неперервна на  $[0, +\infty)$ .

2) Міркуючи, як щойно, отримуємо зображення

$$\begin{aligned} y_{\gamma,k+1} - y_{\gamma,k} &= T_\gamma^k (I - T_\gamma) A^{-\sigma} x_0^\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\gamma-z}{\gamma+z}\right)^k \left(\frac{\gamma-z}{\gamma+z} - 1\right) z^{-\sigma} (zI - A)^{-1} x_0^\sigma dz = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\gamma-z}{\gamma+z}\right)^k \frac{1}{(\gamma+z)z^{\sigma-1}} (zI - A)^{-1} x_0^\sigma dz. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|y_{\gamma,k+1} - y_{\gamma,k}\| &\leq \frac{L}{\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left|\frac{\gamma-z}{\gamma+z}\right|^k \frac{1}{|\gamma+z|} \frac{\ln(1+|z|)}{|z|^\sigma} |dz| \|x_0^\sigma\| \leq \\ &\leq \frac{2L}{\pi} \left\{ \max_{\rho \in [\gamma, +\infty)} \left[ \left(\frac{\rho - \gamma \cos\varphi}{\rho + \gamma \cos\varphi}\right)^{k/2} \rho^{-(\sigma-\delta)} \right] \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{1+\delta}} d\rho + \right. \quad (4.55) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{k^{\sigma-\varepsilon}} \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^\sigma} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \max_{k \geq 0} \left[ k^{\sigma-\varepsilon} \operatorname{ctg}^{-k} \frac{\varphi}{2} \right] \left\} \|x_0^\sigma\| \leq \frac{c_4}{k^{\sigma-\varepsilon}} \|x_0^\sigma\|$$

зі сталою  $c_4 = c_4(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon) = \frac{2L}{\pi} \max\{c_5, c_6\}$ , де

$$c_5 = \exp \left\{ \frac{-2(\sigma-\varepsilon)}{1 + \sqrt{1 + 4\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi}} \right\} \left( \frac{\sigma-\varepsilon}{\gamma \cos \varphi} \right)^{\sigma-\varepsilon} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho^{1+\varepsilon}} d\rho,$$

$$c_6 = \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^\sigma} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \left( \frac{\sigma-\varepsilon}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} \right)^{\sigma-\varepsilon} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{(\sigma-\varepsilon) \ln^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

для всіх  $k \geq \frac{\sigma-\varepsilon}{\cos \varphi}$  при довільному  $\varepsilon \in (0, \sigma)$  і  $\sigma > 1$ .

Унаслідок (4.55) і (4.54) ряд (4.47) збігається в  $E$  рівномірно по  $t \in [0, +\infty)$ , а тому має неперервну на  $[0, +\infty)$  суму  $x^{(1)}(t)$ , для якої  $x^{(1)}(t) = x'(t)$ .

3) Зважаючи на співвідношення

$$AT_\gamma^k (I + T_\gamma)x_0 = \frac{\gamma}{\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\gamma-z}{\gamma+z} \right)^k \frac{1}{(\gamma+z)z^{\sigma-1}} (zI - A)^{-1} x_0^\sigma dz,$$

для всіх  $k \geq \frac{\sigma-\varepsilon}{\cos \varphi}$  при довільному  $\varepsilon \in (0, \sigma)$  і  $\sigma > 1$  одержимо

$$\begin{aligned} & \|AT_\gamma^k (I + T_\gamma)x_0\| \leq \\ & \leq \frac{L\gamma}{\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left| \frac{\gamma-z}{\gamma+z} \right|^k \frac{1}{|\gamma+z|} \frac{\ln(1+|z|)}{|z|^\sigma} |dz| \|x_0^\sigma\| \leq \frac{c_6}{k^{\sigma-\delta}} \|x_0^\sigma\|, \end{aligned} \quad (4.56)$$

де  $c_7 = c_7(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon) = \gamma c_4(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon)$ .

Із оцінок (4.56) і (4.54) випливає (рівномірна по  $t \in [0, +\infty)$ ) збіжність в  $E$  ряду

$$\begin{aligned} & e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) AT_\gamma^k (I + T_\gamma)x_0 = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} A \left( e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^N (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^k (I + T_\gamma)x_0 \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

а це з огляду на замкнутість оператора  $A$  показує, що для кожного  $t \geq 0$  виконується  $x(t) \in D(A)$ . Лему доведено.  $\square$

Наслідком леми є наступне твердження.

**Теорема 4.9.** *Нехай  $A$  – діючий у банаховому просторі  $E$  замкнутий лінійний логарифмічно секторіальний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$ . Тоді при кожному  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ , задача (4.41) має єдиний розв'язок і для нього правильно зображення (4.42).*

Доведення. Зважаючи на лему 4.1, лишилося перевірити, що ряд (4.42) є розв'язком задачі (4.41). Справді, на підставі (4.47) і (4.57) одержуємо для кожного  $t > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = \\ & = \gamma e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^k (T_\gamma - I)x_0 + e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) A T_\gamma^k (I + T_\gamma)x_0 = \\ & = e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) \times \\ & \quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right)^k \left( \gamma \frac{\gamma - z}{\gamma + z} - \gamma + z + z \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right) \frac{1}{z^\sigma} (zI - A)^{-1} x_0^\sigma dz = 0, \end{aligned}$$

а отже,  $x(t)$  задовольняє рівняння задачі (4.41).

Виконання початкової умови

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} x(t) & = x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) = \\ & = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N (-1)^k (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (x_0 + (-1)^N y_{\gamma,N+1}) = x_0 \end{aligned}$$

впливає з оцінки і граничного переходу

$$\begin{aligned} \| y_{\gamma,k} \| & = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right)^k \frac{1}{z^\sigma} (zI - A)^{-1} x_0^\sigma dz \right\| \leq \\ & \leq \frac{L}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\gamma - z}{\gamma + z} \right|^k \frac{\ln(1+|z|)}{|z|^{\sigma+1}} |dz| \| x_0^\sigma \| \leq \frac{c_8}{k^{\sigma-\delta}} \| x_0^\sigma \| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

де  $c_8 = c_8(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon)$ .  $\square$

Аналогом твердження 4.5 є наступний результат.

**Теорема 4.10.** Нехай  $A$  – діючий у банаховому просторі  $E$  замкнутий лінійний логарифмічно секторіальний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$  і  $x_0 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ . Тоді точність наближеного розв'язку (4.44) характеризується оцінкою

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{c}{N^{\sigma-\varepsilon}} \|A^\sigma x_0\|, \quad (4.58)$$

де стала  $c = \frac{c_1(\varphi, \gamma, M, \sigma, \varepsilon)}{\sigma - \varepsilon}$  визначена в (4.53),  $N + 1 \geq \frac{1 + \sigma - \varepsilon}{\cos \varphi}$ ,  $\varepsilon \in (0, \sigma)$ .

Доведення. На підставі (4.42), (4.44), (4.53), (4.54) для всіх  $t \in [0, +\infty)$  маємо

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\| &= \left\| e^{-\gamma t} \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k L_k^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^k (I + T_\gamma) x_0 \right\| \leq \\ &\leq c_1(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon) \|x_0^\sigma\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma-\varepsilon}} \leq c_1(\varphi, \gamma, L, \sigma, \varepsilon) \|x_0^\sigma\| \int_N^{+\infty} \frac{ds}{s^{1+\sigma-\varepsilon}} = \\ &= \frac{c_1(\varphi, \gamma, M, \sigma, \varepsilon)}{\sigma - \varepsilon} N^{-(\sigma-\delta)} \|x_0^\sigma\|. \end{aligned}$$

Теорему доведено.  $\square$

**4.1.5. Висновки.** Доведена в теоремі 4.1 степенева оцінка (4.8), а в теоремі 4.4 – степенева оцінка (4.24) свідчать про те, що швидкість збіжності методу перетворення Келі (4.4) для наближеного розв'язування абстрактної задачі Коші в гільбертовому просторі автоматично залежить від гладкості початкового вектора  $x_0$ , а отже, цей метод є методом без насичення точності в сенсі [29]. Непокращуваність оцінок (4.8) і (4.24) за порядком (з точністю до логарифма) доведено відповідно в теоремах 4.2 і 4.5.

У випадку нескінченної гладкості початкового вектора  $x_0$  доведена в теоремі 4.3 оцінка (4.21) і в теоремі 4.6 – оцінка (4.30) свідчать про експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі (4.4) і є непокращуваними за порядком.

У теоремах 4.7 і 4.8 досліджено гладкість початкового вектора в термінах порядку точності методу перетворення Келі для наближення відповідно операторних експоненти і косинуса.



У теоремі 4.9 доведено конструктивне зображення (у вигляді ряду) розв'язку  $x(t)$  задачі Коші для однорідного рівняння в банаховому просторі зі щільно заданим лінійним замкнутим логарифмічно секторіальним оператором. У теоремі 4.10 для наближеного розв'язку (4.44) цієї задачі доведено рівномірну по  $t \in [0, +\infty)$  оцінку точності (4.58).

Результати підрозд. 4.1 опубліковано в [26, 21, 71, 210, 70, 209] та доповідалися на конференціях [22, 10, 11, 107].

## 4.2. Паралельний методу довільного порядку точності для еволюційного рівняння зі змінним оператором

**4.2.1. Наближення розв'язку через апроксимацію еволюційного оператора, аналіз похибки методу та дослідження його на стійкість.** Розглянемо в гільбертовому просторі  $H$  задачу Коші для операторно-диференціального рівняння першого порядку:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (4.59)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.60)$$

де  $f(t)$  і  $u(t)$  – відповідно задана і шукана функції зі значеннями в  $H$ ,  $A(t)$  при кожному  $t > 0$  – діючий в  $H$  самоспряжений додатно визначений замкнутий оператор, який має щільну в  $H$  область визначення  $D(A(t))$ , не залежну від  $t$ .

Реалізуємо побудований в [146] алгоритм та проведемо числові розрахунки. Увівши на  $[0, T]$  сітку  $\bar{\omega} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T\}$  і поклавши

$$A_k = A(t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, M}, \quad \tau = \max_{1 \leq k \leq M} \tau_k, \quad \tau_k = t_k - t_{k-1},$$

за наближення еволюційного оператора  $U(t, s)$  задачі (4.59)–(4.60) візьмемо оператор

$$U_k^m(t, s) = \sum_{j=0}^m U_k^{(j)}(t, s), \quad t_{k-1} \leq s \leq t \leq t_k, \quad k = \overline{1, M}, \quad (4.61)$$

де

$$U_k^{(j+1)}(t, s) = \int_s^t e^{-(t-s)A_k} (A_k - A(\xi)) U_k^{(j)}(t, \xi) d\xi, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (4.62)$$

$$U_k^{(0)}(t, s) = e^{-(t-s)A_k}. \quad (4.63)$$

Тоді для наближення точного розв'язку на  $[t_{k-1}, t_k]$  дістанемо рівняння

$$u_k^m(t) = U_k^m(t, t_{k-1}) u_{k-1}^m(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t U_k^m(t, s) f(s) ds,$$

а звідси – рекурентне співвідношення відносно невідомих  $u_k^m(t_k)$ :

$$U_k^m(t_k, t_{k-1}) u_{k-1}^m(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_k^m(t_k, s) f(s) ds = u_k^m(t_k), \quad k = \overline{1, M}, \quad (4.64)$$

$$u_0^m(t_0) \equiv u_0^m(0) = u_0. \quad (4.65)$$

Позначимо  $z_k^m(t) = u(t) - u_k^m(t)$  похибку методу (4.64)–(4.65) на проміжку  $[t_{k-1}, t_k]$ . Доведено такий результат [146].

**Твердження 4.6** [146]. *Нехай  $A(t)$  – діючий в  $H$  самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A(t))$ , не залежною від  $t$ . Якщо виконано умову*

$$\| [A(t) - A(s)] A^{-1}(t) \| \leq L_1 |t - s|, \quad t, s \in [0, T], \quad (4.66)$$

то для похибки методу (4.64)–(4.65) справджується оцінка

$$\left( A_k z_k^m(t_k), z_k^m(t_k) \right) + (1 - 2L_1^2 \tau^2) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| A_k z_k^m(s) \|^2 ds \leq \quad (4.67)$$

$$\leq 2(L_1 \tau)^{2(m+1)} e^{c\nu t_{k-1}} \sum_{p=0}^{k-1} \left( \int_{t_{k-p-1}}^{t_{k-p}} \| f(s) \|^2 ds + 2(A_{k-p} u(t_{k-p-1}), u(t_{k-p-1})) \right) =$$

$$= 2(L_1 \tau)^{2(m+1)} e^{c\nu t_{k-1}} \left( \int_0^{t_k} \| f(s) \|^2 ds + 2 \sum_{p=0}^{k-1} (A_{k-p} u(t_{k-p-1}), u(t_{k-p-1})) \right),$$

де  $\tau / \min_{1 \leq k \leq M} \tau_k \leq \nu$ , а стала  $c > 0$  не залежить від  $\tau$ .

Розглянемо дві задачі Коші:

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \\ v'(t) + B(t)v(t) &= g(t), \quad t \in (0, T], \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Достатні умови сильної стійкості розв'язків цих задач одержано в [146], де (на відміну від результатів [89] про сильну стійкість операторно-різницевих схем) не вимагається, щоб вихідний і збурений оператори комутували.

Різниця  $z(t) = u(t) - v(t)$  є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) &= -[A(t) - B(t)]v(t) + f(t) - g(t), \quad t \in (0, T], \\ z(0) &= u_0 - v_0. \end{aligned}$$

**Твердження 4.7** [146]. *Якщо діючі в гільбертовому просторі  $H$  самоспряжений додатно визначений оператор  $C = C^* \geq c_0 I$ ,  $c_0 > 0$ , та замкнуті оператори  $A(t)$  і  $B(t)$  мають щільну в  $H$  спільну область визначення  $D(C) = D(A(t)) = D(B(t))$  і задовольняють умови*

$$\|[A(t) - B(t)]C^{-1}\| \leq \gamma, \quad t \in [0, T], \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} (A(t)y, Cy) &\geq c_0 \|Cy\|^2, \quad (B(t)y, Cy) \geq c_0 \|Cy\|^2 \\ (t \in [0, T], y \in D(A(t)) = D(B(t))), \end{aligned} \quad (4.69)$$

то задача Коші (4.59)–(4.60) є сильно стійкою і для неї справджується оцінка

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(Cz(t), z(t)) + (c_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_0^t \|Cz(s)\|^2 ds \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \|[A(t) - B(t)]C^{-1}\|^2 \cdot \frac{1}{4\varepsilon_1(c_0 - \varepsilon_3)} \left( \frac{1}{4\varepsilon_3} \int_0^t \|g(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}(Cv_0, v_0) \right) + \\ &+ \frac{1}{4\varepsilon_2} \int_0^t \|f(s) - g(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}(C(u_0 - v_0), u_0 - v_0), \end{aligned} \quad (4.70)$$

де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – довільні додатні сталі такі, що  $c_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$  і  $c_0 - \varepsilon_3 > 0$ .

**4.2.2. Реалізація методу і числовий приклад.** Нехай функція

$$q(t), \quad q(t) \geq q_0 > 0,$$

задовольняє на  $[0, T]$  умову Гельдера з показником  $\alpha \in (0, 1]$ . Розглянемо початково-крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) - 2q(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + q^2(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (4.71)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.72)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.73)$$

При

$$T = 1, \quad q(t) = 1 + t, \quad f(x, t) = \sin \pi x (1 + t(\pi^2 + 1 + t)^2), \quad u_0(x) = 0$$

функція  $u(x, t) = t \sin \pi x$ , очевидно, задовольняє рівняння (4.71), крайові умови (4.72) і початкову умову (4.73).

Розглянемо діючий в  $H = L_2(0, 1)$  оператор

$$A(t) = \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + q(t)I \right]^2$$

( $I$  – тотожний оператор) зі щільною в  $H$  і не залежною від  $t$  областю визначення

$$D(A(t)) = \left\{ u \in W_2^4(0, 1) : u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0 \right\}.$$

Тоді задача (4.71)–(4.73) переходить в абстрактну задачу Коші

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.74)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.75)$$

для числового розв'язування якої скористаємося методом (4.64)–(4.65) і результатами про стійкість. Очевидно,

$$A(t) = B_{0,k} + B_{1,k}(t - t_{k-1}) + B_{2,k}(t - t_{k-1})^2, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad (4.76)$$

де

$$B_{0,k} = \frac{d^4}{dx^4} - 2(1 + t_{k-1}) \frac{d^2}{dx^2} + (1 + t_{k-1})^2 I, \quad D(B_{0,k}) = D(A(t)),$$

$$B_{1,k} = -2 \frac{d^2}{dx^2} + 2(1 + t_{k-1})I, \quad D(B_{1,k}) = \left\{ u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

$$B_{2,k} = I;$$

$$f(t) = f_{0,k} + f_{1,k}(t - t_{k-1}) + f_{2,k}(1 - t_{k-1})^2 + f_{3,k}(1 - t_{k-1})^3, \quad (4.77)$$

$$t \in [t_{k-1}, t_k],$$

де

$$f_{j,k} = a_{j,k} \sin \pi x, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$a_{0,k} = 1 + t_{k-1}(\pi^2 + 1 + t_{k-1})^2,$$

$$a_{1,k} = (\pi^2 + 1 + t_{k-1})^2 + 2t_{k-1}(\pi^2 + 1 + t_{k-1}),$$

$$a_{2,k} = 2(\pi^2 + 1 + t_{k-1}) + t_{k-1}, \quad a_{3,k} = 1.$$

Зважаючи на розклади (4.76) і (4.77), за наближення  $B(t)$  і  $g(t)$  оператора і правої частини рівняння (4.74) на  $[t_{k-1}, t_k]$  візьмемо відповідно оператор  $B_{0,k}$  і вектор  $f_{0,k}$ . Тоді задача Коші

$$v'(t) + B(t)v(t) = g(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.78)$$

$$v(0) = 0, \quad (4.79)$$

апроксимує задачу (4.74)–(4.75). Поклавши

$$C = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad D(C) = \left\{ u \in W_2^1(0,1) : u(0) = u(1) = 1 \right\} \quad (c_0 = 2),$$

перевіримо виконання умов твердження 4.7. Очевидно,

$$C^{-1}w = \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi, \quad \text{де } G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi) & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1 - x) & \text{при } \xi \leq x, \end{cases}$$

а отже, для кожного  $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} & (A(t) - B(t))C^{-1}w = \\ & = (A(t) - B_{0,k})C^{-1}w = (B_{1,k}(t - t_{k-1}) + B_{2,k}(t - t_{k-1})^2)C^{-1}w = \\ & = (t - t_{k-1}) \left( -2 \frac{d^2}{dx^2} \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi + 2(1 + t_{k-1}) \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi \right) + \\ & \quad + (t - t_{k-1}) \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi = \\ & = (t - t_{k-1}) \left( 2w(x) + 2(1 + t_{k-1}) \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi \right) + (t - t_{k-1})^2 \int_0^1 G(x, \xi) w(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням нерівності

$$\|C^{-1}w\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{90}} \|w\|_{L_2(0,1)}$$

випливає оцінка

$$\begin{aligned} & \left\| (A(t) - B_{0,k})C^{-1}w \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ & \leq \|w\|_{L_2(0,1)} \left( 2 + \frac{2(1+T)}{\sqrt{90}} + \frac{\tau_k}{\sqrt{90}} \right) \tau_k, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \end{aligned} \quad (4.80)$$

а отже, й оцінка (4.68) при  $\gamma = \left( 2 + \frac{2+3T}{\sqrt{90}} \right) T$ . Окрім того,

$$\begin{aligned} (A(t)y, Cy) &= -\int_0^1 \left( y^{(IV)}(x) - 2(1+t)y''(x) + (1+t)^2 y(x) \right) y''(x) dx \geq \\ &\geq \int_0^1 (y'''(x))^2 dx + 2(1+t) \int_0^1 (y''(x))^2 dx + (1+t)^2 \int_0^1 (y'(x))^2 dx \geq \\ &\geq 2 \int_0^1 (y''(x))^2 dx = 2 \|Cy\|_{L_2(0,1)}^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Аналогічно при  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  дістаємо

$$\begin{aligned} (B(t)y, Cy) &= (B_{0,k}y, Cy) = \\ &= -\int_0^1 \left( y^{(IV)}(x) - 2(1+t_{k-1})y''(x) + (1+t_{k-1})^2 y(x) \right) y''(x) dx \geq 2 \|Cy\|_{L_2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

а тому і при  $t \in [0, T]$  маємо  $(B(t)y, Cy) \geq 2 \|Cy\|_{L_2(0,1)}^2$ .

Таким чином, оператори  $A(t)$ ,  $B(t)$  і  $C$  задовольняють вимоги (4.68) і (4.69), а нерівність (4.70) з урахуванням оцінки (4.80) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z'_x(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + (c_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_0^t \|z''_{xx}(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt \leq \\ & \leq \left( 2 + \frac{2+3T}{\sqrt{90}} \right)^2 \frac{\tau^2}{4\varepsilon_1(c_0 - \varepsilon_3)} \frac{1}{4\varepsilon_3} \int_0^t \|g(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\varepsilon_2} \int_0^t \|f(s) - g(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|g(s)\|_{L_2(0,1)}^2 ds \leq \int_0^1 \|g(t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g(t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \\ & = \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f_{0,k}\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} a_{0,k}^2 \tau_k \leq \frac{T(1+T(\pi^2+1+T)^2)}{2}, \quad t \in [0, T]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_{L_2(0,1)}^2 ds \leq \int_0^1 \|f(t) - g(t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \\ & = \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(t) - g(t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(t) - f_{0,k}\|_{L_2(0,1)}^2 dt = \\ & = \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{2} (a_{1,k}(t-t_{k-1}) + a_{2,k}(t-t_{k-1})^2 + a_{3,k}(t-t_{k-1})^3)^2 dt \leq c\tau^2, \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$  ( $c$  – деяка додатна стала),

а отже, для числового розв'язування збуреної задачі Коші (4.78)–(4.79) у співвідношеннях (4.64)–(4.65) можна взяти  $m=1$ :

$$\begin{aligned} v_k^1(t_k) &= e^{-\tau_k B_{0,k}} v_{k-1}^1(t_{k-1}) + \left[ B_{0,k}^{-1} - B_{0,k}^{-1} e^{-\tau_k B_{0,k}} \right] f_{0,k}, \quad k = \overline{1, M}, \\ v_0^1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Згідно з методом перетворення Келі [141], при будь-якому  $x_0 \in D(B_{0,k}^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ , для  $x = e^{-\tau_k B_{0,k}} x_0$  виконується зображення

$$x = e^{-\gamma \tau_k} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma \tau_k) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}), \quad (4.82)$$

де  $\gamma$  – довільна додатна стала,  $L_p^{(0)}(t)$  – поліноми Лагерра, а елементи  $y_{\gamma,p}$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , є розв'язками рекурентної послідовності "еліптичних" задач

$$\begin{aligned} (\gamma I + B_{0,k}) y_{\gamma,p+1} &= (\gamma I - B_{0,k}) y_{\gamma,p}, \quad p = 0, 1, \dots, \\ y_{\gamma,0} &= x_0. \end{aligned}$$

Розв'язування задачі (4.71)–(4.73)

| $M$  | $\varepsilon_M = \ u(1) - v_M^1(1)\ _{L_2(0,1)}$ | $\delta = \log_2(\varepsilon_M / \varepsilon_{2M})$ |
|------|--|---|
| 2    | 0.2480509407914848                               | 0.8394  |
| 4    | 0.1386336521919185                               | 0.9796  |
| 8    | 0.0703037883547132                               | 1.0124  |
| 16   | 0.0348505124666610                               | 1.0493  |
| 32   | 0.0168397906225848                               | 1.1018  |
| 64   | 0.0078464856794619                               | 1.1642  |
| 128  | 0.0035011964232520                               | 1.1792  |
| 256  | 0.0015461300179676                               | 1.0963  |
| 512  | 0.0007231275747906                               | 1.0339  |
| 1024 | 0.0003531723269025                               |   |

Наближаючи  $x$  відрізком ряду (4.82)

$$x_N = e^{-\gamma\tau_k} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma\tau_k)(y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}) \quad (4.83)$$

при  $\gamma = 1$ , беручи до уваги  $\sigma = 1$  та зважаючи на оцінку [141]

$$\|x_N - x\| \leq cN^{-\sigma} \|A^\sigma x_0\|,$$

де  $c$  – не залежна від  $N$  і  $x_0$  стала, покладаємо  $N = M$ . Тоді рівності (4.81) з урахуванням (4.83) набувають вигляду

$$v_k^1(t_k) = e^{-\tau_k} \sum_{p=0}^M (-1)^p L_p^{(0)}(2\tau_k)(y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}) + B_{0,k}^{-1} f_{0,k}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$v_0^1(0) = 0,$$



а елементи  $y_{\gamma,p}$  задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned}(\gamma I + B_{0,k})y_{\gamma,p+1} &= (\gamma I - B_{0,k})y_{\gamma,p}, \quad p = 0, 1, \dots, M, \\ y_{\gamma,0} &= v_{k-1}^1(t_{k-1}) - B_{0,k}^{-1}f_{0,k}\end{aligned}$$

Дані числових розрахунків, наведені в табл. 4.1, свідчать про те, що  $\delta \approx m = 1$ .

**4.2.3. Висновки.** З урахуванням сильної стійкості задачі Коші (4.59)–(4.60) реалізовано метод (4.64)–(4.65) апроксимації еволюційного оператора за умови кусково-сталих наближень операторного коефіцієнта і правої частини рівняння. Результати числових розрахунків підтверджують правильність апріорних оцінок швидкості збіжності методу.

Результати підрозд. 4.2 опубліковано в [9] та доповідалися на конференціях [24, 25].

## РОЗДІЛ 5

# Точність методу перетворення Келі для розв'язування абстрактних диференціальних рівнянь

### 5.1. Вагові оцінки похибки методу перетворення Келі для абстрактної крайової задачі з неоднорідним рівнянням у гільбертовому просторі

Нижче розглянуто першу крайову задачу для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у гільбертовому просторі. За допомогою перетворення Келі операторного коефіцієнта та поліномів типу Майкснера від незалежної змінної точний розв'язок задачі зображено у вигляді нескінченного ряду. Для нього доведено вагові оцінки за умови скінченної та нескінченної (в певному сенсі) гладкості правої частини рівняння. За наближений розв'язок задачі береться скінченна сума доданків ряду. Для точності такого наближення доведено вагові оцінки, залежні не тільки від параметра дискретизації (кількості доданків частинної суми), але й від відстані незалежної змінної до межових точок проміжку. У випадку скінченної гладкості правої частини запропонований алгоритм має степеневу швидкість збіжності і є алгоритмом без насичення точності. Запропонований алгоритм має експоненціальну (і навіть суперекспоненціальну) швидкість збіжності, якщо права частина рівняння має нескінченну гладкість.

**5.1.1. Допоміжні результати.** Далі нам будуть потрібні дві допоміжні крайові задачі для ЗДР 2-го порядку:

$$\begin{aligned} u''(x) - au(x) &= -f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

i

$$\begin{aligned} w''(x) - aw(x) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ w(0) &= 0, \quad w(1) = w_1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

де  $a = \text{const} > 0$ .

Розв'язок задачі (5.1) можна подати у вигляді

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [0,1],$$

за допомогою функції Гріна

$$G(x, \xi) = (\sqrt{a} \operatorname{sh} \sqrt{a})^{-1} \begin{cases} \operatorname{sh}(\sqrt{a}x) \operatorname{sh}(\sqrt{a}(1-\xi)), & x \leq \xi, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{a}\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{a}(1-x)), & \xi \leq x, \end{cases}$$

диференціального оператора

$$\begin{aligned} D(L) &= \{u(x) \in H^2(0,1) : u(0) = 0, u(1) = 0\}, \\ Lu(x) &= -u''(x) + au(x) \quad (a > 0). \end{aligned}$$

Для розв'язання задачі (5.2) дослідимо спочатку крайову задачу

$$\begin{aligned} v''(x) - \frac{z^2}{1-z^2} v(x) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ v(0) &= 0, \quad v(1) = v_1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

з параметром  $z \in (0,1)$ . Її розв'язок  $v(x)$  шукаємо у вигляді ряду [151]

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) z^{2k} v_1. \quad (5.4)$$

Щоб знайти коефіцієнти  $v_k(x)$ , підставимо цей ряд у рівняння в (5.3):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v_k''(x) z^{2k} v_1 - \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+2} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) z^{2k} v_1 \right) &= 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} v_k''(x) z^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k v_p(x) z^{2p} z^{2(k-p)+2} &= 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} v_k''(x) z^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} \sum_{p=0}^{k-1} v_p(x) &= 0, \end{aligned}$$

звідки одержуємо

$$v_0''(x) = 0, \quad v_k''(x) = \sum_{p=0}^{k-1} v_p(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

З урахуванням крайових умов задачі (5.3) маємо

$$v(0) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(0) z^{2k} v_1 = 0, \quad v(1) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(1) z^{2k} v_1 = v_1,$$

а тому

$$v_0(0) = 0, \quad v_0(1) = 1; \quad v_k(0) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Із рівностей (5.5) і (5.6) дістаємо рекурентну послідовність задач

$$v_k''(x) = \sum_{p=0}^{k-1} v_p(x), \quad x \in (0, 1), \quad v_k(0) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v_0(x) = x.$$

Звідси знайдемо

$$(v_k(x) - v_{k-1}(x))'' = v_{k-1}(x), \quad x \in (0, 1), \quad v_k(0) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

$$v_0(x) = x,$$

а отже,

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x, \xi) v_{k-1}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1], \quad k = 2, 3, \dots, \quad (5.8)$$

$$v_0(x) = x, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3!} x(1-x^2),$$

де  $G_0(x, \xi)$  – функція Гріна

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x, \end{cases}$$

диференціального оператора

$$D(L_0) = \{u(x) \in H^2(0, 1) : u(0) = 0, u(1) = 0\},$$

$$L_0 u(x) = -u''(x).$$

Користуючись формулою (5.8), знайдемо, наприклад,

$$v_2(x) = \frac{1}{5!} x(1-x^2) \left( -x^2 - \frac{53}{3} \right), \quad v_3(x) = \frac{1}{7!} x(1-x^2) \left( -x^4 - 78x^2 - \frac{1963}{3} \right).$$

Зазначимо, що поліноми  $v_k(x)$  тісно пов'язані з поліномами Майкснера [215, 16].

Далі нам будуть потрібні зображення функцій  $v_k(x)$ ,  $k=1,2,\dots$ , тригонометричними рядами Фур'є. Доведемо спочатку такий допоміжний результат.

**Лема 5.1.** *Нехай  $m > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Тоді*

$$\max_{t \geq 1} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^m t^{-\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha m^{-\alpha}.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^m t^{-\alpha}, \quad t \geq 1.$$

Знайдемо її похідну

$$\varphi'(t) = (t-1)^{m-1} t^{-\alpha-m-1} (m + \alpha - \alpha t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 1} \varphi(t) &= \varphi\left(\frac{m+\alpha}{\alpha}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{m+\alpha}\right)^m \left(\frac{m+\alpha}{\alpha}\right)^{-\alpha} = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{m+\alpha}\right)^m \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{-\alpha} \alpha^\alpha m^{-\alpha} = \left(\frac{m}{m+\alpha}\right)^{m+\alpha} \alpha^\alpha m^{-\alpha} \leq e^{-\alpha} \alpha^\alpha m^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Лемі доведено.  $\square$

Скористаємося цією лемою для доведення важливого надалі твердження.

**Лема 5.2.** *Для поліномів  $v_k(x)$  справджуються оцінки*

$$\left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leq \frac{C_1}{k^{(1-\varepsilon_1)/2}}, \quad x \in [0, 1], \quad (5.9)$$

$$\left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leq \frac{1}{3}, \quad x \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

де

$$C_1 = \left(\frac{1-\varepsilon_1}{e}\right)^{(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1+\varepsilon_1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

$\zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана.

Доведення. Продовжимо поліном  $v_k(x)$  непарним чином на проміжок  $[-1,0]$ , а потім періодично на всю числову вісь. Покажемо, що  $v_k(x)$  можна подати так:

$$v_k(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin(p\pi x), \quad x \in [0,1], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

$$\text{де } a_p^{(k)} = \sqrt{2} \int_0^1 v_k(x) \sin(p\pi x) dx = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1}.$$

Для доведення формули (5.11) скористаємося методом математичної індукції. При  $k = 1$  формула (5.11) правильна, оскільки

$$v_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(1)} \sin(p\pi x), \quad x \in [0,1],$$

$$a_p^{(1)} = \sqrt{2} \int_0^1 v_1(x) \sin(p\pi x) dx = -\frac{\sqrt{2}}{6} \int_0^1 x(1-x^2) \sin(p\pi x) dx = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3}.$$

Припустимо, що формула (5.11) справджується для деякого  $k \in \mathbb{N}$  і доведемо її для наступного значення  $k + 1$ . Маємо:

$$\begin{aligned} v_{k+1}(x) &= v_k(x) - \int_0^1 G_0(x, \xi) v_k(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin(p\pi x) - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \int_0^1 G_0(x, \xi) \sin(p\pi \xi) d\xi = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin(p\pi x) - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \left[ (1-x) \int_0^x \xi \sin(p\pi \xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) \sin(p\pi \xi) d\xi \right] = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin(p\pi x) - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \frac{1}{(p\pi)^2} \sin(p\pi x) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right) \sin(p\pi x), \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} a_p^{(k+1)} &= a_p^{(k)} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right) = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^k, \end{aligned}$$

що й доводить формулу (5.11).

Доведемо оцінку (5.9). Маємо:

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| &= \left| \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1} \frac{\sin(p\pi x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1} \frac{|\sin(p\pi x)|}{\min(x, 1-x)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^2} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1} = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^{1+\varepsilon_1}} \frac{1}{((p\pi)^2)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Скористаємося лемою 5.1 при  $m = k - 1$ ,  $\alpha = \frac{1-\varepsilon_1}{2}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ,  $0 < \varepsilon_1 < 1$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| &\leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \left[ \frac{1}{((p\pi)^2)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1} \right] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^{1+\varepsilon_1}} \leq \\ &\leq \sup_{t \geq \pi^2} \left[ \frac{1}{t^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{k-1} \right] \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1 + \varepsilon_1) \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 1} \left[ \frac{1}{t^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{k-1} \right] \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1 + \varepsilon_1) \leq \\ &\leq \left(\frac{1-\varepsilon_1}{2e}\right)^{(1-\varepsilon_1)/2} (k-1)^{-(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1 + \varepsilon_1) = \\ &= \left(\frac{1-\varepsilon_1}{2e}\right)^{(1-\varepsilon_1)/2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1 + \varepsilon_1) k^{-(1-\varepsilon_1)/2} \leq \\ &\leq \left(\frac{1-\varepsilon_1}{2e}\right)^{(1-\varepsilon_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1 + \varepsilon_1) k^{-(1-\varepsilon_1)/2} = \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{1-\varepsilon_1}{e} \right)^{(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1+\varepsilon_1) k^{-(1-\varepsilon_1)/2}.$$

При  $k=1$  нерівність (5.9) набуває вигляду

$$\left| \frac{v_1(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leq C_1, \quad x \in [0, 1],$$

а отже, правильна, оскільки маємо

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{v_1(x)}{\min(x, 1-x)} \right| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{-\frac{1}{3!} x(1-x^2)}{\min(x, 1-x)} \right| = \frac{1}{3},$$

$$C_1 = \left( \frac{1-\varepsilon_1}{e} \right)^{(1-\varepsilon_1)/2} \frac{2}{\pi^{1+\varepsilon_1}} \zeta(1+\varepsilon_1) > \frac{1}{3} \quad \text{при } 0 < \varepsilon_1 < 1.$$

Таким чином, оцінка (5.9) виконується для всіх  $k \in \mathbb{N}$ .

Доведемо оцінку (5.10):

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| &= \left| \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left( 1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right)^{k-1} \frac{\sin p\pi x}{\min(x, 1-x)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^3} \left( 1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right)^{k-1} \frac{|\sin p\pi x|}{\min(x, 1-x)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^2} = \frac{1}{3}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

Зіставляючи задачі (5.2) і (5.3) та беручи до уваги (5.4), помічаємо, що розв'язок  $w(x)$  задачі (5.2) можна подати так:

$$w(x) = \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{a}) \operatorname{sh}(x\sqrt{a}) w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y_k, \quad (5.12)$$

де  $y_k = (1+a)^{-1} a y_{k-1} = \left[ (1+a)^{-1} a \right]^k w_1$ .

**5.1.2. Абстрактна крайова задача та вагові оцінки її розв'язку.** У гільбертовому просторі  $H$  зі скалярним добутком  $(u, v)$  і нормою  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$  розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - Au(x) &= -f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$



де  $A$  – самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в  $H$  областю визначення  $D(A)$  і спектром  $\Sigma(A) \subset [\lambda_0, +\infty)$ ,  $\lambda_0 > 0$ .

Наведемо приклад задачі (5.13).

**Приклад.** Розглянемо крайову задачу для двовимірного рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.14)$$

де  $f(x, y)$  – деяка задана функція. У гільбертовому просторі  $H = L_2(0,1)$  зі скалярним добутком і нормою

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x) dx, \quad \|v\| = \left( \int_0^1 v^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad v, w \in L_2(0,1),$$

уведемо оператор

$$Au = -\frac{d^2 u}{dy^2}, \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H^1(0,1).$$

Тоді задачу (5.14) можна записати в абстрактній постановці (5.13).  $\square$

Наша мета – подати розв'язок  $u(x)$  задачі (5.13) у вигляді ряду зі степенями дробово-лінійного перетворення оператора  $A$  та коефіцієнтами, залежними тільки від  $x$ .

Разом із задачею (5.13) розглянемо також крайову задачу для однорідного рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - Aw(x) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ w(0) &= 0, \quad w(1) = w_1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Її розв'язок  $w(x)$  запишемо у вигляді ряду (див. (5.12))

$$w(x) = \text{sh}^{-1}(\sqrt{A}) \text{sh}(x\sqrt{A}) w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y_k, \quad (5.16)$$

де  $y_k = (I + A)^{-1} A y_{k-1} = \left[ (I + A)^{-1} A \right]^k w_1$ , а функції  $v_k(x)$  визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь (5.8).

Розглянемо тепер задачу (5.13). Функцію  $f(x)$  у правій частині рівняння подамо за допомогою ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) f_{s,k} + f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \cos(2k\pi x) f_{c,k}, \quad (5.17)$$

де

$$f_{s,k} = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin(2k\pi x) dx, \quad f_{c,k} = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos(2k\pi x) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$f_0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Використовуючи операторну функцію Гріна

$$G(x, \xi; A) = (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \begin{cases} \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)), & x \leq \xi, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)), & \xi \leq x, \end{cases}$$

та виконуючи нескладні перетворення, розв'язок  $u(x)$  запишемо так:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, \xi; A) f(\xi) d\xi = \\ &= (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) f(\xi) d\xi + \\ &\quad + (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \int_x^1 \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \\ &= (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left\{ \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) \sin(2k\pi\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \int_x^1 \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)) \sin(2k\pi\xi) d\xi \right\} f_{s,k} + \\ &\quad + (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \left\{ \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) d\xi + \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \int_x^1 \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)) d\xi \right\} f_0 + \end{aligned}$$

$$+(\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left\{ \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) \cos(2k\pi\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \int_x^1 \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)) \cos(2k\pi\xi) d\xi \right\} f_{c,k}.$$

Звідси випливає зображення

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \\ + (A \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \{ \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \} f_0 + \quad (5.18) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{A} \{ \cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \} f_{c,k}.$$

Доведемо декілька потрібних далі нерівностей.

**Лема 5.3.** *Виконуються такі три нерівності:*

$$\frac{|\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x)} \leq 2\pi k \quad \forall x \in (0, 1), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (5.19)$$

$$\frac{|\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x) \lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2} \quad (5.20) \\ \forall x \in (0, 1) \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty);$$

$$\frac{|\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \leq \frac{C(\lambda_0)}{2\pi k} \quad (5.21) \\ \forall x \in (0, 1) \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{де } C(\lambda_0) = 1 + \frac{\operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{\lambda_0}/2).$$

**Доведення.** Функція  $h(x) = \frac{\sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)}$ ,  $x \in (0, 1)$ , задовольняє умову

$$h(1-x) = -h(x), \quad x \in (0, 1/2],$$

а тому

$$\sup_{0 < x < 1} |h(x)| = \sup_{0 < x \leq 1/2} |h(x)| = \sup_{0 < x \leq 1/2} \frac{|\sin(2k\pi x)|}{x} \leq 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

що й доводить нерівність (5.19).

Доведемо нерівність (5.20). Функцію в лівій частині перетворимо так:

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x)\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} = \frac{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-x)}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)}{\min(x, 1-x)\lambda \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)}, \quad x \in (0, 1).$$

Оскільки  $\varphi(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , і  $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ ,  $x \in (0, 1/2]$ , то

$$\sup_{0 < x < 1} |\varphi(x)| = \sup_{0 < x < 1} \varphi(x) = \sup_{0 < x \leq 1/2} \varphi(x).$$

Для похідної  $\varphi'(x)$  маємо

$$\varphi'(x) = \frac{2}{\lambda \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}/2)} \frac{\frac{\sqrt{\lambda}x}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-2x)}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-x)}{2}\right)}{x^2} < 0, \quad x \in (0, 1/2],$$

(тут враховано нерівності

$$\frac{\sqrt{\lambda}x}{2} < \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right), \quad \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-2x)}{2}\right) < \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-x)}{2}\right), \quad x \in (0, 1/2],$$

а отже, функція  $\varphi(x)$  спадає на  $(0, 1/2]$ . Тоді

$$\sup_{0 < x < 1} |\varphi(x)| = \lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-x)}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)}{x\lambda \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2}.$$

Доведемо нерівність (5.21). Функція

$$g(x) = \frac{\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda] \sinh \sqrt{\lambda}}, \quad x \in (0, 1), \quad (5.22)$$

задовольняє умову  $g(1-x) = g(x)$ ,  $x \in (0, 1/2]$ . Тому

$$\sup_{0 < x < 1} |g(x)| = \sup_{0 < x \leq 1/2} |g(x)|.$$

Оскільки чисельник дробу в (5.22) перетворюється на нуль при  $x=0$ , то скористаємося теоремою Лагранжа про скінченні прирости та виконаємо нескладні перетворення:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \frac{|\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} x)|}{x[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} = \\
&= \frac{\left| (\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} x))' \right|_{x=\xi \in (0, x)} \cdot x}{x[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} = \\
&= \frac{|-2k\pi \sin(2k\pi \xi) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\xi)) - \sqrt{\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} \xi)|}{[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \leq \\
&\leq \frac{2k\pi \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)}{[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} = \\
&= \frac{2k\pi \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}}{[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)}{[(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2k\pi} + \frac{\operatorname{cth} \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)}{4k\pi} \leq \\
&\leq \frac{1}{2k\pi} \left( 1 + \frac{\operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}\right) \right) = \frac{1}{2k\pi} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{3\sqrt{\lambda_0}}{4}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{4}\right)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0}} \right), \\
&\quad x \in (0, 1/2],
\end{aligned}$$

звідки виводимо нерівність (5.21).  $\square$

Доведемо тепер вагову оцінку для розв'язку  $u(x)$  у випадку скінченної (у певному сенсі) гладкості правої частини  $f(x)$ .

**Теорема 5.1.** *Нехай права частина  $f(x)$  рівняння (5.13) зображена рядом Фур'є (5.17), який задовольняє умови*

$$f_0 \in D(A^\sigma), \quad \sigma > 0,$$

$$\|f_s\|_\sigma \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad \|f_c\|_\sigma \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді для розв'язку  $u(x)$  крайової задачі (5.13) справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq C (\|f_s\|_\sigma + \|A^\sigma f_0\| + \|f_c\|_\sigma),$$

де  $C \equiv C(\lambda_0, \sigma)$  – не залежна від  $u(x)$  стала:

$$C = \max \left\{ \frac{1}{2\lambda_0^\sigma}; \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \zeta^{1/2}(2+2\sigma) \right\},$$

$$C(\lambda_0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{\lambda_0}/2), \quad \zeta(2+2\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}}.$$

Доведення. Позначимо  $E(\lambda)$  спектральне сімейство, що відповідає оператору  $A$ . Використовуючи спектральне зображення функції від оператора  $A$  та застосовуючи лему 5.3, маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \right. \\ &\quad \left. + (A \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x, 1-x)} f_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{A} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x, 1-x)} f_{c,k} \right\| \leq \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda]} dE(\lambda) f_{s,k} \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x) \lambda^{\sigma+1} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} dE(\lambda) A^\sigma f_0 \right\| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \sqrt{2} \frac{\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} \frac{\sqrt{2} |\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda]} \|f_{s,k}\| + \\ &\quad + \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} \frac{|\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x) \lambda^{\sigma+1} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \|A^\sigma f_0\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} \frac{\sqrt{2} \left| \cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x) \right|}{\min(x, 1-x) \left[ (2k\pi)^2 + \lambda \right] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \|f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \|f_{s,k}\| + \frac{1}{2\lambda_0^\sigma} \|A^\sigma f_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi k} \|f_{c,k}\| = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma+1}} k^\sigma \|f_{s,k}\| + \frac{1}{2\lambda_0^\sigma} \|A^\sigma f_0\| + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma+1}} k^\sigma \|f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{2\lambda_0^\sigma} \|A^\sigma f_0\| + \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_s\|_\sigma + \frac{1}{2\lambda_0^\sigma} \|A^\sigma f_0\| + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_\sigma,
\end{aligned}$$

що й доводити теорему.  $\square$

У наступній теоремі доведено вагову оцінку для розв'язку  $u(x)$  у випадку нескінченної (у певному сенсі) гладкості правої частини  $f(x)$ .

**Теорема 5.2.** Нехай права частина  $f(x)$  рівняння (5.13) зображена рядом Фур'є (5.17), який задовольняє умови

$$\begin{aligned}
f_0 \in D(e^A), \quad \|f_s\|_\infty &\equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \\
\|f_c\|_\infty &\equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Тоді для розв'язку  $u(x)$  задачі (5.13) справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq C \left( \|f_s\|_\infty + \|e^A f_0\| + \|f_c\|_\infty \right), \quad x \in (0, 1),$$

де  $C = \max \left\{ \frac{C(\lambda_0)}{2\sqrt{3}e}, \frac{1}{2e^{\lambda_0}} \right\}$ , а сталу  $C(\lambda_0)$  визначено в (5.21):

$$C(\lambda_0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{\lambda_0}/2).$$

Доведення. Позначимо  $E(\lambda)$  спектральну сім'ю, яка відповідає оператору  $A$ . Використовуючи спектральне зображення функції від оператора  $A$  та застосовуючи лему 5.3, маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \right. \\ &\quad \left. + (A \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x, 1-x)} f_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{A} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x, 1-x)} f_{c,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda]} dE(\lambda) f_{s,k} \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x) \lambda^{\sigma+1} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} dE(\lambda) A^{\sigma} f_0 \right\| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \sqrt{2} \frac{\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} \frac{\sqrt{2} |\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda]} \|f_{s,k}\| + \\ &\quad + \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} e^{-\lambda} \frac{|\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x) \lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \|e^A f_0\| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{0 < x < 1 \\ \lambda \geq \lambda_0}} \frac{\sqrt{2} |\cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x) [(2k\pi)^2 + \lambda] \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}} \|f_{c,k}\| \leq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \|f_{s,k}\| + \frac{1}{2e^{\lambda_0}} \|e^A f_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi k} \|f_{c,k}\| = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\| + \frac{1}{2e^{\lambda_0}} \|e^A f_0\| + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi e} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{2e^{\lambda_0}} \|e^A f_0\| + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi e} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}e} \|f_s\|_{\infty} + \frac{1}{2e^{\lambda_0}} \|e^A f_0\| + \frac{C(\lambda_0)}{2\sqrt{3}e} \|f_c\|_{\infty}. \text{ Теорему доведено. } \square
\end{aligned}$$

**5.1.3. Вагові оцінки похибки наближених методів без насичення точності.** За наближений розв'язок задачі (5.13) візьмемо частинну суму ряду (5.18):

$$\begin{aligned}
u_N(x) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \sin(2k\pi x) \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k} + \\
&\quad + (A \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \right\} f_0 + \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{A} \left\{ \cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \right\} f_{c,k}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

У наступній теоремі дослідимо похибку цього наближення.

**Теорема 5.3.** *Нехай виконуються умови теореми 5.1. Тоді точність наближеного розв'язку (5.23) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} (\|f_s\|_{\sigma} + \|f_c\|_{\sigma} + \|A^{\sigma} f_0\|),$$

де  $C \equiv C(\sigma, \lambda_0) = \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi(1+2\sigma)^{1/2}}$  – не залежна від  $N$  стала, а сталу  $C(\lambda_0)$

визначено в (5.21):  $C(\lambda_0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{\lambda_0}/2)$ .

Доведення. Використовуючи формули (5.18) і (5.23), як і при доведенні теореми 4.1, маємо

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_s\|_{\sigma} + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma} \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_s\|_{\sigma} + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma} = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{(1+2\sigma)^{1/2} N^{\sigma+1/2}} \|f_s\|_{\sigma} + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \frac{1}{(1+2\sigma)^{1/2} N^{\sigma+1/2}} \|f_c\|_{\sigma} \leq \\
& \leq \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2\pi(1+2\sigma)^{1/2}}; \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi(1+2\sigma)^{1/2}} \right\} \frac{1}{N^{\sigma+1/2}} (\|f_s\|_{\sigma} + \|f_c\|_{\sigma}),
\end{aligned}$$

звідки випливає твердження теореми.  $\square$

Розглянемо ще один спосіб наближення точного розв'язку та дослідимо його похибку. Використовуючи зображення (5.16), запишемо (5.23) так:

$$\begin{aligned}
u_N(x) = & \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \sin(2k\pi x) \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k} + \\
& + A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] \left[ (I+A)^{-1} A \right]^j \right\} f_0 + \\
& + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} \left\{ \cos(2k\pi x) I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] \left[ (I+A)^{-1} A \right]^j \right\} f_{c,k}.
\end{aligned}$$

Тоді розв'язок  $u(x)$  задачі (5.13) апроксимуємо скінченною сумою

$$\begin{aligned}
u_{N,M}(x) = & \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \sin(2k\pi x) \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k} + \\
& + A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] \left[ (I+A)^{-1} A \right]^j \right\} f_0 + \quad (5.24)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \times \\ \times \left\{ (\cos(2k\pi x) - 1)I - \sum_{j=1}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I + A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k}.$$

Для дослідження точності наближення  $u_{N,M}(x)$  нам знадобиться таке допоміжне твердження.

**Лема 5.4.** Нехай  $\alpha > 0$  і  $\beta \geq \max\{2\alpha, (1 + \lambda_0)\alpha\}$ . Тоді справджується нерівність

$$\max_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda^{-\alpha} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^\beta \leq (2\alpha)^\alpha \beta^{-\alpha}. \quad (5.25)$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^\beta, \quad \lambda \geq \lambda_0.$$

Знайдемо похідну

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\lambda^{-\alpha+\beta-1}}{(\lambda + 1)^{\beta+1}} (\beta - \alpha - \alpha\lambda).$$

Оскільки за умовою  $\frac{\beta - \alpha}{\alpha} \geq \lambda_0$ , то

$$\max_{\lambda \geq \lambda_0} \varphi(\lambda) = \varphi\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^\beta.$$

Оскільки за умовою  $\beta \geq 2\alpha$ , то  $\frac{\beta}{\alpha} - 1 \geq \frac{\beta}{2\alpha}$ , а тому

$$\max_{\lambda \geq \lambda_0} \varphi(\lambda) \leq \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{-\alpha} = (2\alpha)^\alpha \beta^{-\alpha}.$$

Лему доведено.  $\square$

**Теорема 5.4.** Нехай виконуються умови

$$M = N, \quad \sigma > 1, \quad M + 1 \geq \max\{2\sigma, (1 + \lambda_0)\sigma\},$$

$$f_0 \in D(A^{\sigma-1}), \quad \|f_s\|_{\sigma-3/2} \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\|f_c\|_{\sigma-3/2} \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$f_{c,k} \in D(A^{\sigma-1/2}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|f_c\|_{A^{\sigma-1/2}} \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{\sigma-1/2} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (5.24) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x) - u_{N,M}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C}{N^{\sigma-1}} \left( \|f_c\|_{\sigma-3/2} + \|f_s\|_{\sigma-3/2} + \|f_c\|_{A^{\sigma-1/2}} + \|A^{\sigma-1} f_0\| \right),$$

$$x \in (0, 1),$$

де  $C \equiv C(\sigma)$  – не залежна від  $N$  і  $M$  стала.

Доведення. Похибку наближеного розв'язку (5.24) подамо як суму п'яти доданків

$$u(x) - u_{N,M}(x) = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5,$$

де

$$D_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k},$$

$$D_2 = - \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[ v_j(1-x) + v_j(x) \right] A^{-1} \left[ (I + A)^{-1} A \right]^j f_0,$$

$$D_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} (\cos(2k\pi x) - 1) f_{c,k},$$

$$D_4 = - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[ v_j(1-x) + v_j(x) \right] \left[ (I + A)^{-1} A \right]^j f_{c,k},$$

$$D_5 = - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} \sum_{j=1}^M \left[ v_j(1-x) + v_j(x) \right] \left[ (I + A)^{-1} A \right]^j f_{c,k}.$$

Оцінимо кожен із п'яти доданків окремо. Маємо

$$\left\| \frac{D_1}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k} \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}|\sin(2k\pi x)|}{\min(x,1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} [(2k\pi)^2 + \lambda]^{-1} dE(\lambda) f_{s,k} \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k\pi\sqrt{2}}{(2k\pi)^2 + \lambda_0} \|f_{s,k}\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \|f_{s,k}\| = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma-1/2}} k^{\sigma-3/2} \|f_{s,k}\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} \|f_s\|_{\sigma-3/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} \|f_s\|_{\sigma-3/2} = \\
&= \frac{\|f_s\|_{\sigma-3/2}}{2\pi(\sigma-1)^{1/2} N^{\sigma-1}} \quad (\sigma > 1). \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Застосовуючи леми 5.2.1 і 5.4, одержимо оцінку

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{D_2}{\min(x,1-x)} \right\| = \left\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x,1-x)} A^{-1} [(I+A)^{-1} A]^j f_0 \right\| \leq \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x,1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{-\sigma} [(I+\lambda)^{-1} \lambda]^j dE(\lambda) A^{\sigma-1} f_0 \right\| \leq \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{(2\sigma)^\sigma}{j^\sigma} \|A^{\sigma-1} f_0\| \leq \frac{2(2\sigma)^\sigma}{3} \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} \|A^{\sigma-1} f_0\| \leq \tag{5.27} \\
&\leq \frac{2(2\sigma)^\sigma}{3(\sigma-1)M^{\sigma-1}} \|A^{\sigma-1} f_0\| \quad (\sigma > 1, M+1 \geq \max\{2\sigma, (1+\lambda_0)\sigma\}).
\end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{D_3}{\min(x,1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\cos(2k\pi x) - 1}{\min(x,1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} \sin^2(k\pi x)}{\min(x,1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} [(2k\pi)^2 + \lambda]^{-1} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k\pi}{(2k\pi)^2 + \lambda_0} \|f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \|f_{c,k}\| = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma-1/2}} k^{\sigma-3/2} \|f_{c,k}\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma-3/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{(2\sigma-2)^{1/2} N^{\sigma-1}} \|f_c\|_{\sigma-3/2} = \\
&= \frac{\|f_c\|_{\sigma-3/2}}{2\pi(\sigma-1)^{1/2} N^{\sigma-1}} \quad (\sigma > 1). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Для четвертого доданка маємо

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{D_4}{\min(x, 1-x)} \right\| = \\
&= \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\lambda^{-(\sigma-1/2)} [(I+\lambda)^{-1} \lambda]^j}{(2k\pi)^2 + \lambda} dE(\lambda) A^{\sigma-1/2} f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\lambda^{-(\sigma-1/2)} [(I+\lambda)^{-1} \lambda]^j}{4k\pi\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) A^{\sigma-1/2} f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{(2\sigma)^\sigma}{4k\pi j^\sigma} \|A^{\sigma-1/2} f_{c,k}\| = \frac{\sqrt{2}(2\sigma)^\sigma}{6\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A^{\sigma-1/2} f_{c,k}\|}{k} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^\sigma} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}(2\sigma)^\sigma}{6\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{\sigma-1/2} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} \leq \\
&\leq \frac{(2\sigma)^\sigma}{6\sqrt{3}(\sigma-1)M^{\sigma-1}} \|f_c\|_{A^{\sigma-1/2}} \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$(\sigma > 1, M+1 \geq \max\{2\sigma, (1+\lambda_0)\sigma\}).$$

П'ятий доданок оцінимо так:

$$\left\| \frac{D_5}{\min(x, 1-x)} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^M \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I + A)^{-1} A]^j f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{[(I + \lambda)^{-1} \lambda]^j}{(2k\pi)^2 + \lambda} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{2}{3} \frac{1}{(2k\pi)^2} \|f_{c,k}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|f_{c,k}\|}{k^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma+1/2}} k^{\sigma-3/2} \|f_{c,k}\| = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma+1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\sigma+1}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma-3/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \left( \frac{1}{2\sigma N^{2\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma-3/2} \leq \\
&\leq \frac{M}{6\pi^2 \sqrt{\sigma} N^{\sigma}} \|f_c\|_{\sigma-3/2} \leq \quad (\sigma > 0). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

З нерівностей (5.26)–(5.30) випливає твердження теореми.  $\square$

**5.1.4. Вагові оцінки похибки наближених методів із суперекспоненціальною швидкістю збіжності.** Дослідимо знову точність наближеного розв'язку (5.23), тепер уже з іншими припущеннями про гладкість вхідних даних.

**Теорема 5.5.** *Нехай виконуються умови теореми 5.2. Тоді точність наближеного розв'язку (5.23) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C(\lambda_0) e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{N}} (\|f_s\|_{\infty} + \|f_c\|_{\infty}), \quad x \in (0, 1), \tag{5.31}$$

де  $C(\lambda_0)$  – стала, визначена в (5.21):  $C(\lambda_0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda_0} + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{\lambda_0}/2)$ .

**Доведення.** Як і в доведенні теореми 5.2, маємо

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \|f_{s,k}\| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} C(\lambda_0)}{2\pi k} \|f_{c,k}\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\| + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \|f_s\|_{\infty} + \frac{C(\lambda_0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \|f_c\|_{\infty},
\end{aligned}$$

звідки випливає оцінка (5.31). Теорему доведено.  $\square$

Дослідимо тепер точність наближеного розв'язку (5.24). Для цього доведемо спочатку наступне допоміжне твердження.

**Лема 5.5.** *Справджуються такі дві властивості:*

$$\max_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda^{-1} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j = \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j}-1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{j}} \right)^j, \quad j \geq (\lambda_0 + 1)^2, \quad (5.32)$$

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j = e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j, \quad j \geq (\lambda_0 + 1)\lambda_0. \quad (5.33)$$

Доведення. Доведемо властивість (5.32). Оскільки

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^{-1} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j \right] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-2}}{(\lambda+1)^{j+1}} (j - (\lambda+1)^2),$$

тоді при  $\sqrt{j}-1 \geq \lambda_0$  отримаємо

$$\max_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda^{-1} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j = \lambda^{-1} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j \Big|_{\lambda=\sqrt{j}-1} = \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j}-1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{j}} \right)^j.$$



Щоб довести властивість (5.33), знайдемо похідну

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j \right] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-1}}{(\lambda+1)^{j+1}} (-\lambda^2 - \lambda + j);$$

тоді при  $\frac{\sqrt{4j+1}-1}{2} \geq \lambda_0$  маємо

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^j \Big|_{\lambda = \frac{\sqrt{4j+1}-1}{2}} = e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j.$$

Лему доведено.  $\square$

Одержимо тепер такий результат.

**Теорема 5.6.** *Нехай наближений розв'язок (5.24) задовольняє умови*

$$M = N, \quad M + 1 \geq (\lambda_0 + 1)^2,$$

$$\|f_c\|_\infty \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad \|f_s\|_\infty \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$f_0 \in D(e^A), \quad f_{c,k} \in D(e^A) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|f_c\|_A \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^A f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді його точність характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x) - u_{N,M}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq C \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} (\|f_s\|_\infty + \|e^A f_0\| + \|f_c\|_\infty + \|f_c\|_A), \quad (5.34)$$

$$x \in (0, 1).$$

де  $C$  – не залежна від  $N$  стала:

$$C = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{2e(1+\sqrt{2}) \cdot 0,62}{3}; \frac{3,94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}}; \frac{1}{3\sqrt{6\pi^2}} \right\} = \frac{3,94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}} = 2,712505313\dots$$

Доведення. Похибку наближеного розв'язку (5.24) запишемо як суму п'яти доданків:

$$u(x) - u_{N,M}(x) = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5,$$

де

$$D_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k},$$

$$D_2 = - \sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] A^{-1} [(I+A)^{-1}A]^j f_0,$$

$$D_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} (\cos(2k\pi x) - 1) f_{c,k},$$

$$D_4 = - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k},$$

$$D_5 = - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k}.$$

Оцінимо кожен із них. Маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_1}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} |\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} [(2k\pi)^2 + \lambda]^{-1} dE(\lambda) f_{s,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k\pi\sqrt{2}}{(2k\pi)^2 + \lambda_0} \|f_{s,k}\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} e^{-\sqrt{k}} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\| \leq \\ &\leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\| \leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \|f_s\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Застосовуючи леми 5.2 і 5.5, одержимо оцінку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_2}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} A^{-1} [(I+A)^{-1}A]^j f_0 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{-1} e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j dE(\lambda) e^A f_0 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \max_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda^{-1} e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j \|e^A f_0\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j \|e^A f_0\| \leq \frac{2}{3} \frac{e^{1-\sqrt{M+1}}}{\sqrt{M+1-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j \|e^A f_0\| \leq \\
&\leq \frac{2e(1+\sqrt{2}) \cdot 0,62}{3} \frac{e^{-\sqrt{M}}}{\sqrt{M}} \|e^A f_0\| \quad (M+1 \geq (\lambda_0+1)^2). \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Тут використано нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{M+1-1}} = \frac{\sqrt{M+1}+1}{M} \leq \frac{\sqrt{2M}+\sqrt{M}}{M} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{M}} \quad (M \geq 1)$$

та враховано збіжність числового ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j = 0,6159302120\dots < 0,62$$

за логарифмічною ознакою:

$$\frac{-\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j}{\ln j} = \frac{-j \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)}{\ln j} \geq l > 1 \quad \forall j \geq j_0.$$

Далі розглянемо третій доданок:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{D_3}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\cos(2k\pi x) - 1}{\min(x, 1-x)} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} \sin^2(k\pi x)}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left[ (2k\pi)^2 + \lambda \right]^{-1} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k\pi}{(2k\pi)^2 + \lambda_0} \|f_{c,k}\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} e^{-\sqrt{k}} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\| \leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \|f_c\|_{\infty}. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Для четвертого доданка маємо

$$\left\| \frac{D_4}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} \left[ (I+A)^{-1}A \right]^j f_{c,k} \Big\| \leq \\
& \leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j}{(2k\pi)^2 + \lambda} dE(\lambda) e^A f_{c,k} \right\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^2} \|e^A f_{c,k}\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \sup_{\lambda \geq \lambda_0} e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|e^A f_{c,k}\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}}}{\sqrt{j}} \sqrt{j} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^A f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \frac{e^{\frac{1-\sqrt{4(M+1)+1}}{2}}}{\sqrt{M+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^A f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \frac{e^{\frac{1-\sqrt{M}}{2}}}{\sqrt{M}} 3,94 = \\
& = \frac{3,94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}} \frac{e^{-\sqrt{M}}}{\sqrt{M}} \|f_c\|_A \quad (M+1 \geq (\lambda_0+1)\lambda_0). \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Тут використано леми 5.2 і 5.5, та враховано збіжність числового ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j = 3,930506503\dots < 3,94,$$

яка випливає з логарифмічної ознаки

$$\frac{-\ln \left[ \sqrt{j} \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)^j \right]}{\ln j} = -\frac{1}{2} + \frac{-j \ln \left( 1 - \frac{2}{1+\sqrt{4j+1}} \right)}{\ln j} \geq l > 1 \quad \forall j \geq j_0.$$

П'ятий доданок оцінимо так:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{D_5}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{j=1}^M \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k} \right\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{[(I+\lambda)^{-1}\lambda]^j}{(2k\pi)^2 + \lambda} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(2k\pi)^2} \|f_{c,k}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{4\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k^2} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} M e^{-\sqrt{N}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \quad (5.39) \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} M e^{-\sqrt{N}} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|e^{\sqrt{k}} f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{3\sqrt{6}\pi^2} \frac{M e^{-\sqrt{N}}}{N^{3/2}} \|f_c\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

З нерівностей (5.35)–(5.39) випливає твердження теореми.  $\square$

**5.1.5. Висновки.** У теоремах 5.1 і 5.2 для точного розв'язку  $u(x)$ , а в теоремах 5.3–5.6 – для наближених розв'язків  $u_N(x)$  і  $u_{N,M}(x)$  доведено вагові оцінки з ваговою функцією  $\rho^{-1}(x)$ ,  $\rho(x) = \min(x, 1-x)$ , яка характеризує відстань від точки  $x$  проміжку  $(0,1)$  до його межових точок.

Доведені в теоремах 5.3 і 5.4 вагові оцінки демонструють, що зі зростанням  $\sigma$  (що означає швидше спадання коефіцієнтів Фур'є, тобто збільшення гладкості правої частини  $f(x)$ ) швидкість збіжності наближених методів (5.23) і (5.24) автоматично зростає. Таким чином, ці методи є методами без насичення точності в сенсі [29].

Доведені в теоремах 5.5 і 5.6 вагові оцінки свідчать про те, що за умови "експоненціального" типу гладкості векторів  $f_0, f_{c,k}, f_{s,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , наближені методи (5.23) і (5.24) мають експоненціальну (і навіть суперекспоненціальну) швидкість збіжності.

Результати підрозд. 5.1 опубліковано в [6, 145].

## 5.2. Вагові оцінки похибки методу перетворення Келі для абстрактної крайової задачі у банаховому просторі

Цей підрозд. присвячено узагальненню результатів підрозд. 5.1 на випадок крайової задачі для однорідного і неоднорідного рівнянь із сильно позитивним оператором у банаховому просторі.

**5.2.1. Крайова задача для однорідного рівняння.** У банаховому просторі  $E$  розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - Au(x) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = u_1, \end{aligned} \quad (5.40)$$

де  $u(x): [0,1] \rightarrow E$  – невідома векторнозначна функція,  $u_1 \in E$  – заданий вектор,  $A: E \rightarrow E$  – замкнутий лінійний оператор із щільною в  $E$  областю визначення  $D(A)$  і резольвентною множиною  $\rho(A)$ . Припустимо [225, с. 69], що існують сталі  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $L > 0$  такі, що

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \{z \in \mathbb{C} : \varphi \leq |\arg z| \leq \pi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \gamma\} \subset \rho(A), \\ \|(zI - A)^{-1}\| &\leq \frac{L}{1+|z|} \quad \forall z \in \Sigma. \end{aligned} \quad (5.41)$$

В [225] показано, що важливими прикладами таких операторів є сильно еліптичні оператори порядку  $2m$  в  $L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , де  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – обмежена область з гладкою межею  $\partial\Omega$ .

Щільно заданий замкнутий оператор  $A$ , який задовольняє умови (5.41), називається *сильно позитивним* оператором [143].

Відомо [143], що при  $u_1 \in A^\sigma$ ,  $\sigma > 1$ , розв'язок  $u(x)$  можна подати за допомогою ряду:

$$u(x) = \text{sh}^{-1}(\sqrt{A}) \text{sh}(x\sqrt{A}) u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y_k, \quad (5.42)$$

де

$$y_k = (I + A)^{-1} A y_{k-1} = \left[ (I + A)^{-1} A \right]^k u_1, \quad (5.43)$$

$(I + A)^{-1}A$  – дробово-лінійне перетворення оператора  $A$ , а функції  $v_k(x)$  визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x, \xi) v_{k-1}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1], \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$v_0(x) = x, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3!}x(1-x^2),$$

де  $G_0(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x, \end{cases}$  – функція Гріна диференціального оператора

$$Lv(x) = -v''(x), \quad x \in (0, 1), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

Зазначимо, що поліноми  $v_k(x)$  тісно пов'язані з поліномами Майкснера і нещодавно досліджені в [16]. Поліноми Майкснера відіграють таку саму роль, що й поліноми Лагерра в методі перетворення Келі для розв'язування задачі Коші для абстрактного диференціального рівняння першого порядку з сильно позитивним операторним коефіцієнтом [44].

Нагадаємо відомості про деякі класи векторів із  $E$  [48]. Нехай  $C^\infty(A) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$  – множина всіх нескінченно диференційовних векторів оператора  $A$ . Відомо [44], що якщо щільно заданий замкнутий лінійний оператор  $A$  має принаймні одну регулярну точку  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то множина  $C^\infty(A)$  є щільною в  $E$ :  $\overline{C^\infty(A)} = E$ . Нехай  $(m_n)_{n=0}^{\infty}$  – неспадна послідовність додатних чисел,  $\nu > 0$ .

Позначимо  $C(A, (m_n), \nu)$  банахів простір векторів  $f \in C^\infty(A)$  з нормою

$$\|f\|_{C(A, (m_n), \nu)} = \sup_n \frac{\|A^n f\|}{\nu^n m_n}. \quad (5.44)$$

Клас  $C(A, (m_n)) \equiv \bigcup_{\nu > 0} C(A, (m_n), \nu)$  для різних послідовностей  $(m_n)$  розглянуто в

[44]. Наприклад, вектори з класу  $C(A, (n^n))$  при  $m_n = n^n$  називаються *аналітичними для оператора  $A$*  [221]; вектори з класу Жевре типу Рум'є  $C(A, (n^{n\beta}))$  при  $m_n = n^{n\beta}$ ,  $\beta > 1$ , називаються *ультрадиференційовними* [104];

вектори з класу  $C(A, (1))$  при  $m_n \equiv 1$  називаються *векторами експоненціального типу* [82]. У даному підрозділі використано клас  $C(A, (1))$  векторів експоненціального типу.

Доведемо спочатку чотири допоміжні леми, які застосовано далі.

**Лема 5.6.** Для сильно позитивного оператора  $A$  справджується оцінка

$$\left\| \left( I + \frac{A}{j} \right)^j A^{-j} \right\| \leq (L+1)^j \quad (j \in \mathbb{N}). \quad (5.45)$$

Доведення. З умови (5.41) маємо  $\|A^{-1}\| \leq L$ . Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \left( I + \frac{A}{j} \right)^j A^{-j} \right\| &= \left\| \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \left( \frac{A}{j} \right)^s A^{-j} \right\| = \left\| \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{A^{-(j-s)}}{j^s} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{\|A^{-(j-s)}\|}{j^s} \leq \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{\|A^{-1}\|^{j-s}}{j^s} \leq \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{L^{j-s}}{j^s} = \left( L + \frac{1}{j} \right)^j \leq (L+1)^j. \quad \square \end{aligned}$$

**Лема 5.7.** Нехай  $n > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Тоді

$$\max_{t \geq 1} \left( 1 - \frac{1}{t} \right)^n t^{-\alpha} \leq \left( \frac{\alpha}{e} \right)^\alpha n^{-\alpha}.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \left( 1 - \frac{1}{t} \right)^n t^{-\alpha}, \quad t \geq 1.$$

Знайдемо її похідну

$$\varphi'(t) = (t-1)^{n-1} t^{-\alpha-n-1} (n+\alpha-\alpha t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 1} \varphi(t) &= \varphi\left( \frac{n+\alpha}{\alpha} \right) = \left( 1 - \frac{\alpha}{n+\alpha} \right)^n \left( \frac{n+\alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} = \\ &= \left( 1 - \frac{\alpha}{n+\alpha} \right)^n \left( 1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{-\alpha} \alpha^\alpha n^{-\alpha} = \left( \frac{n}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} \alpha^\alpha n^{-\alpha} \leq e^{-\alpha} \alpha^\alpha n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

**Лема 5.8.** Нехай  $n > \alpha > 0$ . Тоді

$$\max_{t > 0} \left( \frac{t}{t+1} \right)^n t^{-\alpha} \leq \alpha^\alpha n^{-\alpha}.$$



Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right)^n t^{-\alpha}, \quad t > 0.$$

Знайдемо її похідну

$$\varphi'(t) = t^{n-\alpha-1}(t+1)^{-n-1}(n-\alpha-\alpha t).$$

Тоді

$$\max_{t>0} \varphi(t) = \varphi\left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^n \left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^{n-\alpha} \alpha^\alpha n^{-\alpha} < \alpha^\alpha n^{-\alpha}.$$

Лему доведено.  $\square$

**Лема 5.9.** *Справджується нерівність*

$$\max_{t \geq 0} \left( \frac{t}{\left(\frac{t}{k} + 1\right)(t+1)} \right)^k = \left( \frac{\sqrt{k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 1\right)(\sqrt{k} + 1)} \right)^k \leq e e^{-2\sqrt{k}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ця нерівність асимптотично непокращувана, тобто:

$$\left( \frac{\sqrt{k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 1\right)(\sqrt{k} + 1)} \right)^k \sim e e^{-2\sqrt{k}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$g(t) = \left( \frac{t}{\left(\frac{t}{k} + 1\right)(t+1)} \right)^k, \quad t \geq 0.$$

Із виразу для похідної

$$\frac{d \ln g(t)}{dt} = \frac{k(k-t^2)}{t(t+k)(t+1)}$$

випливає, що максимум функції  $g(t)$  досягається в точці  $t = \sqrt{k}$ . Тоді

$$\max_{t \geq 0} g(t) = g(\sqrt{k}) = \left( \frac{\sqrt{k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 1\right)(\sqrt{k} + 1)} \right)^k = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{-2k}.$$

Застосувавши оцінку

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{-2k} = e^{-2k \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \leq e^{-2k\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k}\right)} = ee^{-2\sqrt{k}}$$

і співвідношення

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{-2k} &= e^{-2k \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)} = e^{-2k\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)} = \\ &= e^{1-2\sqrt{k}+o(1)} \sim ee^{-2\sqrt{k}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

отримаємо твердження леми.  $\square$

У наступних двох лемах доведено оцінки для норм  $\|y_k\|$ .

**Лема 5.10.** *Нехай виконуються умови*

$$\sigma > 0, \quad 0 < \varepsilon_2 < \min\{1; \sigma\}, \quad k > \sigma - \varepsilon_2, \quad u_1 \in D(A^\sigma).$$

Тоді справджується оцінка

$$\|y_k\| \leq \frac{C_2}{k^{(\sigma-\varepsilon_2)/2}} \|A^\sigma u_1\|, \quad (5.46)$$

$$\text{де } C_2 = \frac{L}{\sin(\pi\varepsilon_2)} (\sigma - \varepsilon_2)^{(\sigma-\varepsilon_2)/2}.$$

Доведення. Скористаємося формулою (5.43) та застосуємо інтегрування уздовж кривої  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , що складається з двох променів на комплексній площині:

$$\Gamma_\pm = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{\pm i\varphi}, \rho \in [0, +\infty)\} \quad (5.47)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|y_k\| &= \left\| \left[ (I + A)^{-1} A \right]^k u_1 \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{z}{1+z} \right)^k z^{-\sigma} (zI - A)^{-1} A^\sigma u_1 dz \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{z}{1+z} \right|^k |z|^{-\sigma} \frac{L}{1+|z|} |dz| \|A^\sigma u_1\|. \end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення

$$|z| = |\rho e^{\pm i\varphi}| = \rho, \quad |dz| = |d(\rho e^{\pm i\varphi})| = |e^{\pm i\varphi}| d\rho = d\rho,$$

$$\left| \frac{z}{1+z} \right|^2 = \left| \frac{\rho e^{\pm i\varphi}}{1 + \rho e^{\pm i\varphi}} \right|^2 = \frac{\rho^2}{1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2} \leq \frac{\rho^2}{1 + \rho^2},$$

маємо

$$\begin{aligned}
 \|y_k\| &\leq \frac{L}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{k/2} \frac{\rho^{-\sigma}}{1+\rho} d\rho \|A^\sigma u_1\| = \\
 &= \frac{L}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{k/2} (\rho^2)^{-(\sigma-\varepsilon_2)/2} \frac{d\rho}{(1+\rho)\rho^{\varepsilon_2}} \|A^\sigma u_1\| \leq \\
 &\leq \frac{L}{\pi} \sup_{\rho>0} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{k/2} (\rho^2)^{-(\sigma-\varepsilon_2)/2} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(1+\rho)\rho^{\varepsilon_2}} \|A^\sigma u_1\| \leq \\
 &\leq \frac{L}{\pi} \sup_{t>0} \left( \frac{t}{1+t} \right)^{k/2} t^{-(\sigma-\varepsilon_2)/2} \frac{\pi}{\sin(\pi\varepsilon_2)} \|A^\sigma u_1\|.
 \end{aligned}$$

Застосувавши тут лему 5.8 при  $n = \frac{k}{2}$ ,  $\alpha = \frac{\sigma - \varepsilon_2}{2}$ , одержимо нерівність

$$\begin{aligned}
 \|y_k\| &\leq \frac{L}{\pi} \left( \frac{\sigma - \varepsilon_2}{k} \right)^{(\sigma - \varepsilon_2)/2} \frac{\pi}{\sin(\pi\varepsilon_2)} \|A^\sigma u_1\| \\
 &(k > \sigma - \varepsilon_2, \quad 0 < \varepsilon_2 < \min\{1; \sigma\}),
 \end{aligned}$$

звідки випливає оцінка (5.46). Лему доведено.  $\square$

**Лема 5.11.** Нехай  $u_1 \in E$  задовольняє умову  $u_1 \in D(A^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Тоді справджується оцінка

$$\|y_k\| \leq \frac{Le}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} \|u_1\|_{C(A, (1), \nu)}, \quad \nu = \frac{\cos \varphi}{L+1}. \quad (5.48)$$

Доведення. Скористаємося зображення (5.43) та інтегруванням уздовж кривої (5.47). Маємо

$$\begin{aligned}
 \|y_k\| &= \left\| \left[ (I+A)^{-1} A \right]^k u_1 \right\| = \\
 &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{z}{1+z} \right)^k \left( 1 + \frac{z}{k} \right)^{-k} (zI - A)^{-1} \left( I + \frac{A}{k} \right)^k u_1 dz \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{z}{1+z} \right|^k \left| 1 + \frac{z}{k} \right|^{-k} \frac{L}{1+|z|} |dz| \left\| \left( I + \frac{A}{k} \right)^k u_1 \right\| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2L}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2} \sqrt{1+2\frac{\rho}{k} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}} \right)^{k-1} \times \\
&\quad \times \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2} \sqrt{1+2\frac{\rho}{k} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}} \frac{d\rho}{1+\rho} \cos^{-k} \varphi \left\| \left( I + \frac{A}{k} \right)^k A^{-k} A^k u_1 \right\|.
\end{aligned}$$

Застосуємо тут лему 5.6 та скористаємося співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2} &\geq \sqrt{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{(1+\rho \cos \varphi)^2} = 1+\rho \cos \varphi, \\
\sqrt{1+2\frac{\rho}{k} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2} &\geq \sqrt{1+2\frac{\rho}{k} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{k} \cos \varphi\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{\rho}{k} \cos \varphi\right)^2} = 1+\frac{\rho}{k} \cos \varphi, \\
\sqrt{1+2\frac{\rho}{k} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2} &\geq \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{k}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\rho}{k}}, \\
|dz| &= |d(\rho e^{\pm i\varphi})| = |e^{\pm i\varphi}| d\rho = d\rho.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\|y_k\| &= \frac{L\sqrt{k}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\rho \cos \varphi}{(1+2\rho \cos \varphi)\left(1+\frac{\rho}{k} \cos \varphi\right)} \right)^{k-1} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}(1+\rho)} \times \\
&\quad \times \cos^{-k} \varphi \left\| \left( I + \frac{A}{k} \right)^k A^{-k} \right\| \|A^k u_1\|.
\end{aligned}$$

Застосовуючи лему 5.9 і норму (5.44), дістаємо

$$\begin{aligned}
\|y_k\| &\leq \frac{L\sqrt{k}}{\pi\sqrt{2}} \max_{t \geq 0} \left[ \frac{t}{(1+t)\left(1+\frac{t}{k}\right)} \right]^{k-1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}(1+\rho)} \cos^{-k} \varphi (L+1)^k}_{=\pi} \|A^k u_1\| \leq \\
&\leq \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \right]^{k-1} \frac{\|A^k u_1\|}{\nu^k} \leq \\
&\leq \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \right]^k \left( \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}} \right)^2 \frac{\|A^k u_1\|}{\nu^k} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{2}} e e^{-2\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}} \right)^2 \frac{\|A^k u_1\|}{v^k} \leq \frac{Le}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} \|u_1\|_{C(A,(1),v)},$$

а отже, оцінку (5.48) доведено.  $\square$

За наближений розв'язок задачі (5.40) візьмемо частинну суму ряду (5.42):

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N v_k(x) y_k. \quad (5.49)$$

У двох наступних теоремах дослідимо похибку

$$u(x) - u_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} v_k(x) y_k$$

за різних припущень про гладкість вектора  $u_1$ .

**Теорема 5.7.** *Нехай  $u_1 \in D(A^\sigma)$ ,  $\sigma > 1$ . Тоді точність наближено розв'язку (5.49) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C}{N^{(\sigma-1-\varepsilon)/2}} \|A^\sigma u_1\|, \quad x \in (0,1) \quad (N \geq \sigma-1), \quad (5.50)$$

де  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале число, а стала  $C$  не залежить від  $N$ .

Доведення. При  $\sigma > 1$ ,  $0 < \varepsilon_1 < 1$ ,  $0 < \varepsilon_2 < 1$ ,  $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \sigma$ ,  $N + 1 > \sigma - \varepsilon_2$  виконані умови лем 5.2 і 5.10. Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} y_k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \|y_k\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_1}{k^{(1-\varepsilon_1)/2}} \frac{C_2}{k^{(\sigma-\varepsilon_2)/2}} \|A^\sigma u_1\| = C_1 C_2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{(1+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}} \|A^\sigma u_1\| \leq \\ &\leq C_1 C_2 \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}} \|A^\sigma u_1\| = \frac{2C_1 C_2}{\sigma-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \frac{1}{N^{(\sigma-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}} \|A^\sigma u_1\|, \end{aligned}$$

що й доводить оцінку (5.50).  $\square$

**Теорема 5.8.** *Нехай  $u_1 \in C(A, (1), v)$ ,  $v = \frac{\cos \varphi}{L+1}$ . Тоді точність наближеного розв'язку (5.49) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C e^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}} \|u_1\|_{C(A,(1),v)}, \quad x \in [0,1] \quad (N \in \mathbb{N}), \quad (5.51)$$

де  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале число, а стала  $C$  не залежить від  $N$ .

Доведення. Застосовуючи леми 5.2 і 5.11, дістанемо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(x) - u_N(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} y_k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \|y_k\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_1}{k^{(1-\varepsilon_1)/2}} \frac{Le}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} \|u_1\|_{C(A, (1), v)} \leq \\ &\leq \frac{C_1 Le}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} \|u_1\|_{C(A, (1), v)}. \end{aligned}$$

Позначивши через  $S$  суму збіжного числового ряду

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{\sqrt{k}} = 8,152349342\dots$$

та поклавши  $C = \frac{C_1 L S e}{\sqrt{2}}$ , одержимо нерівність (5.51). Теорему доведено.  $\square$

**5.2.2. Крайова задача для неоднорідного рівняння.** Розглянемо в банаховому просторі  $E$  крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - Au(x) &= -f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

з оператором  $A$ , який задовольняє такі ж умови, що і в п. 5.2.1.

Щоб подати розв'язок  $u(x)$  у зручній формі, скористаємося розкладом правої частини  $f(x)$  в тригонометричний ряд Фур'є (5.17):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) f_{s,k} + f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \cos(2k\pi x) f_{c,k}, \quad (5.53)$$

де

$$\begin{aligned} f_{s,k} &= \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin(2k\pi x) dx, \quad f_{c,k} = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos(2k\pi x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \\ f_0 &= \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.54)$$

За допомогою операторної функції Гріна

$$G(x, \xi; A) = (\sqrt{A} \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \begin{cases} \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)), & x \leq \xi, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{A}\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)), & \xi \leq x, \end{cases}$$

розв'язок  $u(x)$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, \xi; A) f(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \\ &\quad + (A \operatorname{sh} \sqrt{A})^{-1} \{ \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \} f_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{A} \{ \cos(2k\pi x) \operatorname{sh} \sqrt{A} - \operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x)) - \operatorname{sh}(\sqrt{A}x) \} f_{c,k}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

З урахуванням (5.16) маємо

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \\ &\quad + A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \left\{ \cos(2k\pi x) I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

За наближений розв'язок задачі (5.52) візьмемо частинну суму

$$\begin{aligned} u_{N,M}(x) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} + \\ &\quad + A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_0 + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \cos(2k\pi x) I - \sum_{j=0}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Дослідимо точність  $u_{N,M}(x)$ . Для цього подамо похибку  $u(x) - u_{N,M}(x)$  у вигляді суми п'яти доданків:

$$u(x) - u_{N,M}(x) = \sum_{k=1}^5 D_k, \quad (5.58)$$

де

$$D_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k},$$

$$D_2 = - \sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] A^{-1} [(I+A)^{-1} A]^j f_0,$$

$$D_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} (\cos(2k\pi x) - 1) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{c,k},$$

$$D_4 = - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k},$$

$$D_5 = - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^M [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k}.$$

У наступних двох теоремах доведено оцінки похибки (5.58) з різними припущеннями про гладкість правої частини  $f(x)$  у термінах умов для коефіцієнтів  $f_0, f_{c,k}, f_{s,k}$  в (5.54).

**Теорема 5.9.** *Нехай виконуються умови*

$$M = N, \quad \sigma > 0, \quad f_0 \in D(A^\sigma), \quad f_{c,k} \in D(A^\sigma) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\|f_s\|_\sigma \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad (5.59)$$

$$\|f_c\|_\sigma \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad \|f_c\|_{A^\sigma} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \|A^\sigma f_{c,k}\| < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (5.57) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x) - u_{N,N}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{C}{N^{(\sigma-\varepsilon)/2}} \left( \|f_s\|_\sigma + \|f_c\|_\sigma + \|A^\sigma f_0\| + \|f_c\|_{A^\sigma} \right),$$

$$x \in [0, 1] \quad (N \geq \sigma),$$



де  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале число, а стала  $C$  не залежить від  $N$ .

Доведення. Знайдемо оцінку для кожного доданка в сумі (5.58). Для інтегрування скрізь у доведенні використано криву (5.47). Скористаємося також співвідношеннями

$$\begin{aligned} |(2k\pi)^2 + z| &= |(2k\pi)^2 + \rho e^{\pm i\varphi}| = \sqrt{[(2k\pi)^2 + \rho \cos \varphi]^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(2k\pi)^4 + 2(2k\pi)^2 \rho \cos \varphi + (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(2k\pi)^4 + 2(2k\pi)^2 \rho \cos \varphi + \rho^2} \geq \sqrt{(2k\pi)^4 + \rho^2} \geq \sqrt{2(2k\pi)^2 \rho} = 2k\pi \sqrt{2\rho}, \\ |(2k\pi)^2 + z| &= \sqrt{(2k\pi)^4 + 2(2k\pi)^2 \rho \cos \varphi + \rho^2} \geq \rho, \\ \left| \frac{z}{1+z} \right|^2 &= \left| \frac{\rho e^{\pm i\varphi}}{1 + \rho e^{\pm i\varphi}} \right|^2 = \frac{\rho^2}{1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2} \leq \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \end{aligned}$$

та нерівністю Коші–Буняковського–Шварца для числових рядів.

Для доданка  $D_1$  маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_1}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} \right\| \leq \quad (5.60) \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} |\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(2k\pi)^2 + z} (zI - A)^{-1} dz f_{s,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} 2k\pi}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|(2k\pi)^2 + z|} \frac{L}{1+|z|} |dz| \|f_{s,k}\| \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} 2k\pi}{2\pi} \frac{2L}{2k\pi\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}}_{\pi} \|f_{s,k}\| = L \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_{s,k}\| = \\ &= L \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{(\sigma+1)/2}} k^{(\sigma+1)/2} \|f_{s,k}\| \leq L \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma+1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq L \left( \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{L}{\sigma^{1/2}} \frac{1}{N^{\sigma/2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{s,k}\|^2 \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{L}{\sigma^{1/2}} \frac{1}{N^{\sigma/2}} \|f_s\|_{\sigma} \quad (N \in \mathbb{N}, \sigma > 0).$$

Щоб оцінити  $D_2$ , візьмемо  $0 < \varepsilon_1 < 1$ ,  $0 < \varepsilon_3 < 1$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 < \sigma$ ,  $M > \sigma - \varepsilon_3$ .

Це дозволяє скористатися лемою 5.2 і лемою 5.8 з  $n = \frac{j}{2}$  і  $\alpha = \frac{1 + \sigma - \varepsilon_3}{2}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_2}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| - \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} A^{-1} [(I+A)^{-1} A]^j f_0 \right\| \leq \quad (5.61) \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{z}{1+z} \right)^j z^{-(1+\sigma)} (zI - A)^{-1} dz A^{\sigma} f_0 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2C_1}{2\pi j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_{\Gamma} \left| \frac{z}{1+z} \right|^j |z|^{-(1+\sigma)} \frac{L}{1+|z|} |dz| \|A^{\sigma} f_0\| \leq \\ &\leq \frac{2C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_0^{\infty} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{j/2} (\rho^2)^{-(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \frac{d\rho}{\rho^{\varepsilon_3}(1+\rho)} \|A^{\sigma} f_0\| \leq \\ &\leq \frac{2C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \sup_{t>0} \left[ \left( \frac{t}{1+t} \right)^{j/2} t^{-(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \right] \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{\varepsilon_3}(1+\rho)} \|A^{\sigma} f_0\| \leq \\ &\leq \frac{2C_1 L (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}}{\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\varepsilon_3)} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \frac{1}{j^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}} \|A^{\sigma} f_0\| = \\ &= \frac{2C_1 L (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}}{\sin(\pi\varepsilon_3)} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(2+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \|A^{\sigma} f_0\| \leq \\ &\leq \frac{2C_1 L (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}}{\sin(\pi\varepsilon_3)} \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^{(2+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \|A^{\sigma} f_0\| = \\ &= \frac{2C_1 L (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}}{\sin(\pi\varepsilon_3)} \frac{2}{\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3} \frac{1}{M^{(\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \|A^{\sigma} f_0\| = \\ &= \frac{C_3}{M^{(\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \|A^{\sigma} f_0\|, \end{aligned}$$

де

$$C_3 = \frac{4C_1 L (1 + \sigma - \varepsilon_3)^{(1 + \sigma - \varepsilon_3)/2}}{\sin(\pi \varepsilon_3) (\sigma - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}, \quad \sigma > 0, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1, \quad 0 < \varepsilon_3 < 1, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 < \sigma, \quad M > \sigma - \varepsilon_3.$$

Для доданка  $D_3$ , як і для доданка  $D_1$ , маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_3}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(\cos(2k\pi x) - 1)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{c,k} \right\| \leq \quad (5.62) \\ &\leq L \left( \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{L}{\sigma^{1/2}} \frac{1}{N^{\sigma/2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma+1} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad (N \in \mathbb{N}, \sigma > 0). \end{aligned}$$

Доданок  $D_4$  оцінимо так само, як і  $D_2$ , узявши

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \quad 0 < \varepsilon_3 < 1, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 < \sigma, \quad M > \sigma - \varepsilon_3$$

та скориставшись лемою 5.2 і лемою 5.8 з  $n = \frac{j}{2}$  і  $\alpha = \frac{1 + \sigma - \varepsilon_3}{2}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_4}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \quad (5.63) \\ &= \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I + A)^{-1} A]^j f_{c,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{\sqrt{2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{z}{1+z} \right)^j \frac{z^{-\sigma}}{(2k\pi)^2 + z} (zI - A)^{-1} dz A^{\sigma} f_{c,k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} 2C_1}{2\pi j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_{\Gamma} \left| \frac{z}{1+z} \right|^j \frac{|z|^{-\sigma}}{|(2k\pi)^2 + z|} \frac{L}{1+|z|} |dz| \|A^{\sigma} f_{c,k}\| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}C_1 L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{j/2} (\rho^2)^{-(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \frac{d\rho}{\rho^{\varepsilon_3}(1+\rho)} \|A^{\sigma} f_{c,k}\| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \sup_{t>0} \left[ \left( \frac{t}{1+t} \right)^{j/2} t^{-(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \right] \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{\varepsilon_3}(1+\rho)} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{\sigma} f_{c,k}\| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}C_1 L}{\pi} (1 + \sigma - \varepsilon_3)^{(1 + \sigma - \varepsilon_3)/2} \frac{\pi}{\sin(\pi \varepsilon_3)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \frac{1}{j^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^\sigma f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}C_1L}{\sin(\pi\varepsilon_3)} (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(2+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^\sigma f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}C_1L}{\sin(\pi\varepsilon_3)} (1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2} \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^{(2+\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^\sigma f_{c,k}\| = \\
& = \frac{\sqrt{2}C_3}{M^{(\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2}} \|f_c\|_{A^\sigma} \quad (\sigma > 0, 0 < \varepsilon_1 < 1, 0 < \varepsilon_3 < 1, \varepsilon_1 + \varepsilon_3 < \sigma, M > \sigma - \varepsilon_3),
\end{aligned}$$

де стала  $C_4 = \frac{4C_1L(1+\sigma-\varepsilon_3)^{(1+\sigma-\varepsilon_3)/2}}{\sin(\pi\varepsilon_3)(\sigma-\varepsilon_1-\varepsilon_3)}$  та сама, що і в оцінці (5.61).

Для останнього доданка  $D_5$  маємо

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{D_5}{\min(x, 1-x)} \right\| = \tag{5.64} \\
& = \left\| - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^M \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k} \right\| \leq \\
& \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{\sqrt{2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(2k\pi)^2 + z} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j (zI - A)^{-1} dz f_{c,k} \right\| \leq \\
& \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{z}{1+z} \right|^j \frac{1}{|(2k\pi)^2 + z|} \frac{L}{|1+z|} |dz| \|f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}L}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2k\pi)^4 + \rho^2}} \left(\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)^{j/2} \frac{d\rho}{1+\rho} \|f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}L}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2(2k\pi)^2\rho}} \frac{d\rho}{1+\rho} \|f_{c,k}\| \leq \\
& \leq \frac{2\sqrt{2}L}{3\pi} \underbrace{\frac{M}{\sqrt{2}2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}}_{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_{c,k}\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{LM}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_{c,k}\| = \frac{LM}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{(3+\sigma)/2}} k^{(1+\sigma)/2} \|f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{LM}{3\pi} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3+\sigma}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{1+\sigma} \|f_{c,k}\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{LM}{3\pi} \left( \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{3+\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma} \leq \\
&\leq \frac{LM}{3\pi} \left( \frac{1}{(2+\sigma)N^{2+\sigma}} \right)^{1/2} \|f_c\|_{\sigma} = \frac{L}{3\pi(2+\sigma)^{1/2}} \frac{M}{N^{1+\sigma/2}} \|f_c\|_{\sigma} \quad (\sigma > -2).
\end{aligned}$$

З оцінок (5.60)–(5.64) випливає твердження теореми.  $\square$

У наступній теоремі дослідимо похибку (5.58) у випадку інакшого набору припущень про гладкість функції  $f(x)$ .

**Теорема 5.10.** *Нехай виконуються умови*

$$M = N, \quad \nu = \frac{\cos \varphi}{L+1}, \quad f_0 \in C(A, (1), \nu), \quad f_{c,k} \in C(A, (1), \nu) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\|f_c\|_{A^\infty} \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{c,k}\|_{C(A, (1), \nu)}^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad (5.65)$$

$$\|f_s\|_{\infty} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} e^k \|f_{s,k}\| < \infty, \quad \|f_c\|_{\infty} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} e^k \|f_{c,k}\| < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (5.57) характеризується ваговою оцінкою

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u(x) - u_{N,N}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| &\leq \frac{C e^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}} \left( \|f_s\|_{\infty} + \|f_c\|_{\infty} + \|f_0\|_{C(A, (1), \nu)} + \|f_c\|_{A^\infty} \right), \\
&x \in [0, 1] \quad (N \in \mathbb{N}),
\end{aligned}$$

де  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале число, а стала  $C$  не залежить від  $N$ .

Доведення. В усіх доданках суми (5.58), окрім  $D_2$ , скористаємося кривою інтегрування (5.47). Для скорочення записів не повторюватимемо перетворення, які аналогічні тим, що виконані в теоремі 5.10 і лемі 5.11.

Беручи до уваги (5.60), маємо

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{D_1}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} \left[ (2k\pi)^2 I + A \right]^{-1} f_{s,k} \right\| \leq \quad (5.66) \\
&\leq L \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_{s,k}\| = L \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k} e^k \|f_{s,k}\| \leq L e^{-(N+1)} \sum_{k=1}^{\infty} e^k \|f_{s,k}\| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq L \frac{e^{-\sqrt{N+1}}}{\sqrt{N+1}} \|f_s\|_\infty.$$

Для оцінки доданка  $D_2$  за криву інтегрування  $\tilde{\Gamma}$  візьмемо об'єднання двох променів і дуги кола:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \tilde{\Gamma}_- \cup \tilde{\Gamma}_+ \cup \Gamma_\gamma, \\ \tilde{\Gamma}_\pm &= \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{\pm i\varphi}, \rho \in [\gamma, +\infty)\}, \\ \tilde{\Gamma}_\pm &= \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma e^{i\theta}, \theta \in [-\varphi, \varphi]\},\end{aligned}$$

де  $dz = d(\rho e^{\pm i\varphi}) = e^{\pm i\varphi} d\rho$  для променів  $\tilde{\Gamma}_\pm$ ,  $dz = d(\gamma e^{i\theta}) = i\gamma e^{i\theta} d\theta$  для  $\Gamma_\gamma$ . Тоді

$$\begin{aligned}\left\| \frac{D_2}{\min(x, 1-x)} \right\| &= \left\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} A^{-1} \left[ (I+A)^{-1} A \right]^j f_0 \right\| \leq \quad (5.67) \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{1+z} \right)^j \left( 1 + \frac{z}{j} \right)^{-j} (zI - A)^{-1} dz \left( I + \frac{A}{j} \right)^j f_0 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2C_1}{2\pi j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|} \left| \frac{z}{1+z} \right|^j \left| 1 + \frac{z}{j} \right|^{-j} \frac{L}{1+|z|} |dz| \left\| \left( I + \frac{A}{j} \right)^j f_0 \right\| = \\ &= \frac{2C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left\{ \int_{\gamma}^{+\infty} \left[ \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2} \sqrt{1+2\frac{\rho}{j} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{j}\right)^2}} \right]^j \frac{d\rho}{\rho(1+\rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\varphi} \left[ \frac{\gamma \cos \theta}{\sqrt{1+2\gamma \cos \theta + \gamma^2} \sqrt{1+2\frac{\gamma}{j} \cos \theta + \left(\frac{\gamma}{j}\right)^2}} \right]^j \frac{d\theta}{1+\gamma} \right\} \cos^{-j\varphi} \left\| \left( I + \frac{A}{j} \right)^j A^{-j} A^j f_0 \right\| \leq \\ &= \frac{2C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \left\{ \int_{\gamma}^{+\infty} \left[ \frac{\rho \cos \varphi}{\left(1 + \frac{\rho}{j} \cos \varphi\right) (1 + \rho \cos \varphi)} \right]^j \frac{d\rho}{\rho(1+\rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\varphi} \left[ \frac{\gamma \cos \theta}{(1 + \gamma \cos \theta) \left(1 + \frac{\gamma}{j} \cos \theta\right)} \right]^j \frac{d\theta}{1+\gamma} \right\} \cos^{-j\varphi} \left\| \left( I + \frac{A}{j} \right)^j A^{-j} \right\| \|A^j f_0\| \leq\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2C_1L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \max_{t \geq 0} \left[ \frac{t}{(1+t)\left(1+\frac{t}{j}\right)} \right]^j \left\{ \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho(1+\rho)} + \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{1+\gamma} \right\} \times \\ \times \cos^{-j}\varphi(L+1)^j \|A^j f_0\|.$$

Застосовуючи лему 5.9, дістаємо

$$\left\| \frac{D_2}{\min(x, 1-x)} \right\| \leq \frac{2C_1L}{\pi} \left[ \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} + \frac{\varphi}{1+\gamma} \right] \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{ee^{-2\sqrt{j}}}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \|f_0\|_{C(A, (1), v)} \leq \\ \leq \frac{2C_1Le}{\pi} \left[ \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} + \frac{\varphi}{1+\gamma} \right] \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} \frac{e^{-\sqrt{M+1}}}{(M+1)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \|f_0\|_{C(A, (1), v)} = \\ = \frac{C_4e^{-\sqrt{M+1}}}{(M+1)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \|f_0\|_{C(A, (1), v)},$$

де  $C_4 = \frac{2C_1L\tilde{S}e}{\pi} \left[ \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} + \frac{\varphi}{1+\gamma} \right]$ ,  $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} = 1.670406818\dots$  – сума збіжного

числового ряду.

Доданок  $D_3$  оцінимо аналогічно  $D_1$ :

$$\left\| \frac{D_3}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(\cos(2k\pi x) - 1)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{c,k} \right\| \leq \quad (5.68) \\ \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}2\sin^2 k\pi x}{\min(x, 1-x)} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(2k\pi)^2 + z} (zI - A)^{-1} dz f_{c,k} \right\| \leq \\ \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k\pi}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|(2k\pi)^2 + z|} \frac{L}{1+|z|} |dz| \|f_{c,k}\| \leq \\ \leq L \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k} e^k \|f_{c,k}\| \leq L e^{-(N+1)} \sum_{k=1}^{\infty} e^k \|f_{c,k}\| \leq L \frac{e^{-\sqrt{N+1}}}{\sqrt{N+1}} \|f_c\|_{\infty}.$$

Для доданка  $D_4$  маємо:

$$\left\| \frac{D_4}{\min(x, 1-x)} \right\| = \quad (5.69) \\ = \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I + A)^{-1} A]^j f_{c,k} \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)} \times \\
&\quad \times \left\| \frac{\sqrt{2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(2k\pi)^2 + z} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \left(1 + \frac{z}{j}\right)^{-j} (zI - A)^{-1} dz \left(I + \frac{A}{j}\right)^j f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}2C_1}{2\pi j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{|(2k\pi)^2 + z|} \left|\frac{z}{1+z}\right|^j \left|1 + \frac{z}{j}\right|^{-j} \frac{L}{1+|z|} |dz| \left\| \left(I + \frac{A}{j}\right)^j f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}2C_1 2L}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \times \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2k\pi)^4 + \rho^2}} \left[ \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2} \sqrt{1 + 2\frac{\rho}{j} \cos \varphi + \left(\frac{\rho}{j}\right)^2}} \right]^j \frac{d\rho}{1+\rho} \times \\
&\quad \times \cos^{-j\varphi} \times \left\| \left(I + \frac{A}{j}\right)^j A^{-j} A^j f_{c,k} \right\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}2C_1 L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2(2k\pi)^2 \rho}} \left[ \frac{\rho \cos \varphi}{(\rho \cos \varphi + 1) \left(\frac{\rho}{j} \cos \varphi + 1\right)} \right]^j \frac{d\rho}{1+\rho} \times \\
&\quad \times \cos^{-j\varphi} \left\| \left(I + \frac{A}{j}\right)^j A^{-j} \right\| \|A^j f_{c,k}\| \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2}2C_1 L}{\pi \sqrt{2}2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{k j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \max_{t \geq 0} \left[ \frac{t}{(1+t) \left(1 + \frac{t}{j}\right)} \right]^j \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}}_{=\pi} \times \\
&\quad \times \cos^{-j\varphi} (L+1)^j \|A^j f_{c,k}\| \leq \frac{C_1 L}{\pi} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{e e^{-2\sqrt{j}}}{j^{(1-\varepsilon_1)/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_{c,k}\|_{C(A, (1), \nu)} \leq \\
&\leq \frac{C_1 L e}{\pi} \frac{e^{-\sqrt{M+1}}}{(M+1)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{c,k}\|_{C(A, (1), \nu)}^2 \right\}^{1/2} = \\
&= \frac{C_5 e^{-\sqrt{M+1}}}{(M+1)^{(1-\varepsilon_1)/2}} \|f_c\|_{A^\infty},
\end{aligned}$$



де  $C_5 = \frac{C_1 L e \tilde{S}}{\sqrt{6}}$ ,  $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} = 1.670406818\dots$  – той самий ряд, що і в оцінці

доданка  $D_2$ .

Нарешті для останнього доданка подібно (5.64) знайдемо

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{D_5}{\min(x, 1-x)} \right\| = \tag{5.70} \\
 & = \left\| - \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^M \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} [(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k} \right\| \leq \\
 & \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \underbrace{\frac{|v_j(1-x)| + |v_j(x)|}{\min(x, 1-x)}}_{\leq 2/3} \left\| \frac{\sqrt{2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(2k\pi)^2 + z} \left( \frac{z}{1+z} \right)^j (zI - A)^{-1} dz f_{c,k} \right\| \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{2}{3} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma} \frac{1}{|(2k\pi)^2 + z|} \left| \frac{z}{1+z} \right|^j \frac{L}{1+|z|} |dz| \|f_{c,k}\| \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2} 2L}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2k\pi)^4 + \rho^2}} \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{j/2} \frac{d\rho}{1+\rho} \|f_{c,k}\| \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2} 2L}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2(2k\pi)^2 \rho}} \frac{d\rho}{1+\rho} \|f_{c,k}\| \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2} 2L}{3\pi} \frac{M}{\sqrt{2} 2\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}}_{=\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_{c,k}\| = \\
 & = \frac{LM}{3\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_{c,k}\| \leq \frac{LM}{3\pi} \frac{1}{N+1} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^k e^{-k} \|f_{c,k}\| \leq \\
 & \leq \frac{LM}{3\pi(N+1)} e^{-(N+1)} \sum_{k=1}^{\infty} e^k \|f_{s,k}\| \leq \frac{LM}{3\pi(N+1)} \frac{e^{-\sqrt{N+1}}}{\sqrt{N+1}} \|f_s\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

З оцінок (5.66)–(5.70) при  $M = N$  легко випливає твердження теореми.  $\square$

**5.2.3. Висновки.** В теоремах 5.7 і 5.8 для однорідного рівняння та в теоремах 4.9 і 4.10 для неоднорідного рівняння крайовий ефект досліджено за допомогою

вагової функції  $\min(x, 1-x)$ , яка характеризує відстань аргументу  $x$  проміжку  $(0,1)$  до його межових точок.

Доведені в теоремах 5.7 і 5.9 вагові оцінки характеризують залежність похибки відповідного наближеного розв'язку від степеня параметра  $\sigma$ . Наприклад, доведена в теоремі 5.7 вагова оцінка (5.50) свідчить про те, що зі зростанням  $\sigma$  (що означає покращення диференціальних властивостей вектора  $u_1$ ) швидкість збіжності наближеного розв'язку  $u_N(x)$  автоматично збільшується. Таким чином, метод (5.49) є *методом без насичення точності* в сенсі [29]. Аналогічно доведена в теоремі 5.9 вагова оцінка (5.59) демонструє, що коли параметр  $\sigma$  зростає (тобто коефіцієнти Фур'є спадають швидше, а отже, функція  $f(x)$  має кращі диференціальні властивості) швидкість збіжності наближеного розв'язку  $u_{N,N}(x)$  збільшується. Отже, метод (5.57) теж є методом без насичення точності.

Доведена в теоремі 5.8 вагова оцінка (5.51) демонструє, що метод (5.49) має експоненціальну швидкість збіжності за умови, що вектор  $u_1$  є вектором експоненціального типу в сенсі [82]. Аналогічно доведена в теоремі 5.10 вагова оцінка (5.65) означає, що метод (5.57) має експоненціальну швидкість збіжності за умови, що вектори  $f_0, f_{c,k}, f_{s,k}, k=1,2,\dots$ , в розкладі функції  $f(x)$  в тригонометричний ряд Фур'є мають належний експоненціальний характер спадання. У цьому разі методи (5.49) і (5.57) є навіть суперекспоненціально збіжними.

Результати підрозд. 5.2 опубліковано в [20].

## ВИСНОВКИ

Одержані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Знайдено вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для двовимірного рівняння Пуассона в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

2. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для одно- і двовимірного рівняння теплопровідності в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням початково-крайового ефекту.

3. Побудовано шкалу вагових оцінок у просторах Гельдера, які враховують вплив крайової умови Діріхле, для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною і сталими коефіцієнтами. Для наближеного розв'язування цього рівняння побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та доведено узгоджені в розумінні Самарського–Лазарова–Макарова вагові апріорні оцінки похибки з урахуванням крайового ефекту.

4. Для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною у випадку як сталих, так і змінних коефіцієнтів одержано ряд достатніх умов про належність розв'язку певним функціональним просторам та знайдено вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле. Для наближеного розв'язування цієї задачі побудовано сіткові схеми та одержано вагові апріорні оцінки похибки в різних сіткових нормах з урахуванням крайового ефекту.

5. Для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною в одиничному квадраті знайдено вагову оцінку розв'язку в рівномірній нормі з ваговою функцією, яка враховує відстань точки до межі області. Побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та доведено вагові апріорні оцінки похибки в рівномірній дискретній нормі з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

6. Одержано оцінки розв'язку задачі Гурса для диференціального рівняння з дробовими похідними і змінними коефіцієнтами в різних функціональних просторах. Побудовано сіткову схему, для похибки якої одержано ряд оцінок у певних дискретних нормах. Вагова функція в оцінках точного і наближеного

розв'язків характеризує відстань точки до двох суміжних сторін прямокутника, де задано додаткові умови.

7. Для методу перетворення Келі наближеного розв'язування диференціального рівняння 1-го порядку із самоспряженим додатно визначеним щільно заданим оператором у гільбертовому просторі у випадку скінченної та нескінченної гладкості початкового вектора знайдено майже (з точністю до логарифма) непокрощувану степеневу та непокрощувану експоненціальну оцінки швидкості збіжності відповідно. Застосовано метод перетворення Келі на етапі реалізації паралельного методу довільного порядку точності для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором у гільбертовому просторі. Доведено обернені теореми наближення операторних експоненти і косинуса про гладкість початкового вектора залежно від порядку точності методу перетворення Келі.

8. Для диференціального рівняння 1-го порядку із щільно заданим логарифмічно секторіальним оператором у банаховому просторі за допомогою методу перетворення Келі одержано зображення точного розв'язку у вигляді ряду, побудовано наближений розв'язок та доведено оцінку його точності, яка автоматично залежить від гладкості початкового вектора.

9. Для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з однорідними крайовими умовами Діріхле і самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі побудовано точний розв'язок та одержано вагові оцінки з урахуванням впливу крайової умови та припущень про скінченну і нескінченну (у певному сенсі) гладкість вхідних даних. На базі зображення точного розв'язку побудовано наближені розв'язки та знайдено вагові апріорні оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле і свідчать про степеневу та експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Ці результати узагальнено на випадок однорідного і неоднорідного рівнянь з відповідно неоднорідними та однорідними крайовими умовами Діріхле у випадку сильно позитивного щільно заданого оператора в банаховому просторі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вірченко Н. О., Рибак В. Я. Основи дробового інтегро-диференціювання. К.: Задруга, 2007. 364 с.
2. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. Частина 1. Київ: Вища школа, 1995. 367 с.
3. Городній М. Ф. Про апроксимацію обмеженого розв'язку лінійного диференціального рівняння у банаховому просторі. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, № 9. С. 1268–1271.
4. Городній М. Ф., Куцик Н. М., Чайковський А. В. Про одне узагальнення поняття секторіального оператора. *Вісник Київського університету.* 2004. Вип. № 1. С. 80–86.
5. Кашпіровський О. І., Митник Ю. В. Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, № 11. С. 1506–1516.
6. Майко Н. В. Суперекспоненціальна швидкість збіжності методу перетворення Келі для абстрактного диференціального рівняння. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. № 3. С. 171–183.
7. Майко Н. В. Вагові оцінки точності сіткового методу для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти (до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. Можара В. І.).* Матеріали всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. (Київ, 26–27 травня 2020). Київ, НУХТ, 2020. С. 33–34.
8. Майко Н. В., Максимчук М. А. Оцінка швидкості збіжності різницевої схеми для рівняння Пуассона з урахуванням впливу крайової умови. Матеріали 8 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015). Київ, 2015. С. 59–60.
9. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Реалізація паралельного методу довільного порядку точності для еволюційного рівняння зі змінним оператором. *Вісник Київського університету.* 2006. №2. С. 204–210.
10. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Пряма і обернена теорема наближення операторної експоненти. Матеріали 12 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008). Київ, 2008. С. 252.
11. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Обернена теорема наближення операторного косинуса. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Праці 15 міжнар. наук. конф.* (Львів, 23–25 вересня 2008). Львів, 2008. С. 24.
12. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Покращені оцінки точності різницевої схеми для двовимірного параболічного рівняння з урахуванням ефекту від крайових

- умов. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМСС: Праці 22 Всеукр. наук. конф. (Львів, 5–7 жовтня 2016)*. Львів, 2016. С.119–120.
13. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність скінченно-різницевої схеми для рівняння Пуассона в прямокутнику з урахуванням крайового ефекту. *Інформаційні технології та взаємодії: Матеріали 4 міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 8–10 лист. 2017)*. Київ, 2017. С. 34–35.
  14. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Зважена оцінка точності сіткової схеми для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XIX international scientific conf. (Kyiv, 22–24 May, 2019)*. Kyiv, 2019. P. С.106–108.
  15. Майко Н. В., Сопотницька М. В. Оцінка точності різницевої схеми для одновимірного параболічного рівняння з урахуванням впливу початкової умови. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
  16. Макаров В. Л. Поліноми Мейкснера та їх властивості. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 7. С. 3–8. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.07.003>
  17. Макаров В. Л., Демків Л. І. Покращені оцінки точності традиційних різницевих схем для параболічних рівнянь. *Праці укр. матем. конгресу*. Київ, 2001. С. 31–42.
  18. Макаров В. Л., Демків Л. І. Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2003. № 2. С. 26–32.
  19. Макаров В. Л., Майко Н. В. Крайовий ефект в оцінці точності сіткового методу для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 1. С. 80–95.
  20. Макаров В. Л., Майко Н. В. Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 3–9.
  21. Макаров В. Л., Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2002. №4. С. 192–197.
  22. Макаров В. Л., Майко Н. В., Рябічев В. Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса. Теорія еволюційних рівнянь. П'яті Боголюбовські читання: Праці 5 міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 22–24 травня 2002): Кам'янець-Подільський, 2002. С. 111.
  23. Макаров В. Л., Рябічев В. Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2002. № 12. С. 21–25.
  24. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Паралельний метод високого порядку точності для еволюційного рівняння першого порядку. *Сучасні*

- проблеми прикладної математики та інформатики: Праці 10 всеукр. наук. конф. (Львів, 23–23 вересня 2003). Львів, 2003. С. 90.*
25. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Реалізація методу апроксимації еволюційного оператора для розв'язування абстрактної задачі Коші. *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: Праці міжнар. наук. конф. (Ужгород, 18–23 вересня 2006). Ужгород, 2006. С. 67.*
  26. Рябічев В. Л., Майко Н. В. Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету. 2004. №1. С. 270–278.*
  27. Торба С. М. Прямі та обернені теореми наближених методів розв'язування абстрактної задачі Коші. *Укр. матем. журнал. 2007. Т. 59, № 6. С. 838–852.*
  28. Абдуллаев У. Г. Об устойчивости симметричных бегущих волн в задаче Коши для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. *Дифференц. уравн. 1994. Т. 30, № 3. С. 409–418.*
  29. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 848 с.
  30. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.
  31. Берикелашвили Г. К. О скорости сходимости разностного решения одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. *Дифференц. уравн. 2003. Т. 39, № 7. С. 896–903.*
  32. Бечелова А. Р. О сходимости разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка. *Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 7. С. 994–996.*
  33. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.
  34. Браянов И. А., Волков Л. Г. Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности со сосредоточенной теплоемкостью. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39, № 2. С. 254–261.*
  35. Булавацкий В. М. Дробно-дифференциальный аналог бипараболического эволюционного уравнения и некоторые его применения. *Кибернетика и системный анализ. 2016. № 5. С. 89–100.*
  36. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 9. С. 1368–1382.*
  37. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1963. 487 с.
  38. Вайнелът В., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. О сходимости разностных схем для эллиптических уравнений со смешанными производными и обобщенными решениями. *Дифференц. уравн. 1983. Т. 19, № 17. 1140–1145.*

39. Вайнелът В., Лазаров Р. Д., Штрайт У. О порядке сходимости разностных схем для слабых решений уравнения теплопроводности в анизотропной неоднородной среде. *Дифференц. уравн.* 1984. Т. 20, № 7. С. 1144–1151.
40. Васильев В. В, Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008. 256 с.
41. Войцеховский С. А., Макаров В. Л., Рыбак Ю. И. Оценки скорости сходимости разностной аппроксимации задачи Дирихле для уравнения  $-\Delta u + \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha q_\alpha(x) u = f(x)$  при  $q_\alpha(x) \in W_\infty^{\lambda|\alpha|}(\Omega)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ . *Дифференц. уравн.* 1988. Т. 24, № 11. С. 1987–1994.
42. Волков Л. Г., Йованович Б. С. О сходимости разностных схем для уравнения Пуассона с нестационарными краевыми условиями. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2005. Т. 45, № 2. С. 287–297.
43. Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. *Тр. МИАН СССР.* 1965. Т. 77. С. 89–112.
44. Гаврилюк И. П., Макаров В. Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. *Праці Ін-ту математики НАНУ: Математика та її застосування.* Т. 52. 2004. Київ: Ін-т математики НАНУ. 500 с.
45. Гаврилюк И. П., Приказчиков В. Г., Химич А. Н. Точность решения разностной краевой задачи для эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными граничными условиями. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1986. Т. 26, № 12. 1821–1830.
46. Галба Е. Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Сб. "Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ"*. К.: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1985. С. 30–34.
47. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М. Наука, 1977. 440 с.
48. Горбачук В. И., Князюк А. В. Граничные значения решений операторно-дифференциальных уравнений. *УМН.* 1989. 44:3(267). С. 55–91.
49. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К.: Наукова думка, 1984. 283 с.
50. Горбачук М. Л., Городецкий В. В. О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. *Успехи мат. наук.* 1984. Т. 39, № 4. С. 140.
51. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.



52. Гудович Н. Н. Об абстрактной схеме разностного метода. *Ж. вычислит. матем. и матем. физики*. 1966. Т. 6, № 5. С. 916–921.
53. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1979. 536 с.
54. Дьяконов Е. Г. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. *Ж. вычисл. мат и мат физ.* 1962. Т. 2, № 1. 57–79.
55. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1971. 729 с.
56. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов И.С. *Бюллетень МГУ. Секция А*. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–25.
57. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка. *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25, № 8. С. 1359–1368.
58. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка. *Дифференц. уравнения*. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
59. Красносельский М. А., Соболевский П. Е. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах. Докл. Акад наук СССР. 1959. Т. 129, № 3. С. 499–502.
60. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
61. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики. *УМН*. 1940. Вып. 8. С. 125–160.
62. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностная схема второго порядка точности для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1981. Т. 21, № 5. С. 1168–1180.
63. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях. *Матем. сборник*. 1982. Т. 117(159), № 4. С. 469–480.
64. Лазаров Р. Д., Мокин Ю. И. О сходимости разностных схем для уравнений Пуассона в метриках  $L_p$ . *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 261, № 4. С. 796–801.
65. Мажукин В. И., Матус П. П., Михайлюк И. А. Разностные схемы для уравнения Кортевега–де Вриза. *Дифференц. уравнения*. 2000. Т. 36, № 5. С. 709–716.
66. Майко Н. В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом эффекта от начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 154–163.
67. Майко Н. В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 1. С. 99–107.

68. Майко Н. В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 1. С. 145–153.
69. Майко Н. В. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с учетом влияния краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4. С. 122–134.
70. Майко Н. В., В. Л. Рябичев Точность приближения решения абстрактной задачи Коши. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. №3. С. 145–152.
71. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Теоремы приближения операторных экспоненты и косинуса. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 145–152.
72. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 5. С. 113–124.
73. Макаров В. Л., Самарский А. А. К вопросу о скорости сходимости усечённых схем  $m$ -го ранга для обобщённых решений. *Дифференц. уравн.* Т. 16, № 7. С. 1276–1282.
74. Макаров В. Л., Василик В. Б., Рябичев В. Л. Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Кэли для приближения операторной экспоненты. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. №4. С. 180–185.
75. Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем к оценке сходимости метода прямых. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1980. Т. 20, № 2. С. 371–387.
76. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
77. Матус П. П., Марцинкевич Г. Л. Об устойчивости монотонной разностной схемы для уравнения Бюргерса. *Дифференц. уравнения*. 2005. Т. 41, № 7. С. 955–960.
78. Матус П. П., Хиеу Л. М., Пылак Д. Разностные схемы для квазилинейных уравнений со смешанными производными. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2019. Т. 63, № 3. С. 263–269. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269>
79. Молчанов И. Н., Галба Е. Ф. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. *Сб. "Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ"*. К.: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1990. С. 161–165.
80. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Наука, 1995. 301 с.
81. Пшибихова Р. А. Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто. *Матем. заметки*. 2016. Т. 99, вып. 4. С. 559–563.

82. Радыно Я. В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях. *Дифференц. уравн.* 1985. Т. 21, № 9. С. 1559–1569.
83. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
84. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
85. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
86. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
87. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
88. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
89. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск: ЦОТЖ, 1998. 442 с.
90. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987. 296 с.
91. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики. *УМН.* 1976. Т. 31, вып. 6(192). С. 167–197.
92. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
93. Соболевский Е. П. Неравенства коэциентности для абстрактных параболических уравнений. *Докл. АН СССР.* 1964. Т. 157, № 1. С. 52–55.
94. Соломяк М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха. *Докл. АН СССР.* 1958. Том 122, № 5. С. 766–769.
95. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46, № 10. С. 1871–1881.
96. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 830 с.
97. Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков-Лафишев М. Х. Обобщенные уравнения переноса и дробные производные. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 1997. № 12. С. 47–55. arXiv:2007.01410
98. Якут Л. И. К вопросу обоснования сходимости разностных схем. *ДАН СССР.* 1963. Т. 151, № 1. С. 76–79.

99. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
100. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*. 2015. Iss. 280. P. 424–438.
101. Arov D. Z., Gavriilyuk I. P. A method for solving initial value problems for linear differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1993. Vol. 14, No. 5–6. P. 459–473.
102. Arov D. Z., Gavriilyuk I. P., Makarov V. L. Representation and approximation of solutions of initial value problems for differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform, in: *Elliptic and Parabolic Problems (2-nd European Conference on elliptic and parabolic problems, Pont-à-Mousson, France)*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 325. 1994. Longman Scientific & Technical, Harlow. P. 40–50.
103. Ashyralyev A. A note on fractional derivatives and fractional powers of operators. *J. Math. Anal. Appl.* 2009. Vol. 357, No. 1. P. 232–236.
104. Beals R. Semigroups and abstract Gevrey spaces. *J. of Funct. Analysis*. 1972. 10(3). P. 300–308.
105. Berikelashvili G., Khomeriki N. On a numerical solution of one nonlocal boundary value problem with mixed Dirichlet–Neumann conditions. *Lith. Math. J.* 2013. Vol. 53, No. 4. P. 367–380.
106. Berikelashvili G., Khomeriki N. On the convergence rate of a difference solution of the Poisson equation with fully nonlocal constraints. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 2014. Vol. 19, No. 3. P. 367–381.
107. Boyko M. V., Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for parabolic equation. *Електроніка та прикладна фізика: Праці 7 міжнар. наук. конф. (Київ, 24–27 жовтня 2012)*. Київ, 2012. С. 189–190.
108. Bramble J. H., Hilbert S. R. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.* 1970. Vol. 7, No.1. P. 112–124.
109. Bramble J.H., Hilbert S.R. Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation. 1971. *Numer. Math.* 16. P. 362–369.
110. Buchanan M. L. A necessary and sufficient conditions for stability of difference schemes for initial value problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1963. Vol. 11, No.4. P. 919–935.
111. Bulavatsky V. M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some of its application. *Cybernet. Systems Anal.* 2016. Vol. 52, № 5. P. 737–747.
112. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. Springer Science & Business Media, 2007. 596 p.

113. Chen C. M., Liu F., Burrage K. Finite difference method and a Fourier analysis for the fractional reaction-subdiffusion equation. *Appl. Math. Comput.* 2008. 198. P. 754–769.
114. Chen C. M., Liu F., Turner I., Anh V. A Fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusion. *Journal of Computational Physics.* 227(2). P. 886–897.
115. Cheung T. Y., Three nonlinear initial value problems of the hyperbolic type. *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. Vol. 14, No. 3. P. 484–491.
116. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1947. **43**. P. 50–67.
117. Demkiv I. I., Gavriilyuk I. P., Makarov V. L. Super-exponentially convergent parallel algorithm for the eigenvalue problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl Math.* 2016. Vol. 16, Iss. 4. P 633–652.
118. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 247 p.
119. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlin. Dyn.* 2002. **29**. P. 3–22.
120. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. Detailed error analysis for a fractional Adams method. 2004. *Numer. Algor.* **36**. 31–52.
121. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., Luchko Y., Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005. Vol. 194, No. 6–8. P. 743–773.
122. Douglas J., Jr. A survey of numerical methods for parabolic differential equations. *Advances in computers.* 1961. Vol. 2. P. 1–54.
123. Douglas J., Jr., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematics Society.* 1956. 82. P. 421–439.
124. Duan B., Lazarov R., Pasciak J. Numerical approximation of fractional powers of elliptic operators. *Preprint.* 2018. <https://arxiv.org/abs/1803.10055>.
125. Dupont T., Scott R. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Math. Comput.* 1980. 34. P. 441–463.
126. Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations. *J. Differ. Equations.* 2004. 199. P. 211–255.
127. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol. II. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book, 1988.
128. Escher J. Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions. *Commun. Partial Differential Equations.* 1993. Vol. 19, № 7-8. P. 1309-1364.
129. Evans L.C. Partial differential equations: Second edition. AMS Press, 2010. 778 p.

130. Fattorini H. O. The Cauchy problem: Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 18. Addison-Wesley, Reading, MA, 1983. xxii+636 p.
131. Fen Q. Crank-Nicolson Difference Scheme for a Class of Space Fractional Differential Equations with High Order Spatial Fractional Derivative. *Internat. Journ. Appl. Math.* 2018. Vol. 48, Iss. 2. P. 1–7.
132. Finite Difference Methods. Theory and Applications. 7th International Conference, FDM 2018, Lozenetz, Bulgaria, June 11–16, 2018. Revised Selected Papers Editors: Dimov, Ivan, Faragó, István, Vulkov, Lubin (Eds.).
133. Ford N.J., Morgado M. L. Fractional boundary value problems: Analysis and numerical methods. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2011. Vol. 14, No. 4. P. 554–567.
134. Frisch R. A., Cheo B. R. S. On a bounded one-dimensional Poisson–Vlasov system. *SIAM J. Appl. Math.* 1973. Vol. 24. P. 362–368.
135. Fujita H., Saito N., Suzuki T. Operator theory and numerical methods. Elsevier, North Holland, 2001. 309 p.
136. Gavriljuk I. P., An algorithmic representation of fractional powers of positive operators. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1996. Vol. 17, No. 3–4. P. 293–305.
137. Gavriljuk I. P. Super-exponentially convergent approximation to the solution of the Schrödinger equation in abstract setting. *Comput. Methods Appl. Math.* 2010. Vol. 10, Iss. 4. 345–358.
138. Gavriljuk I. P., Hackbusch W., Khoromskij B. N. Data-sparse approximation to a class of operator-valued functions. *Math. Comp.* 2005. Vol. 74, To. 250. 681–708. doi: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-03-01590-4>
139. Gavriljuk I. P., Hackbusch W., Khoromskij B. N. Hierarchical tensor-product approximation to the inverse and related operators for high-dimensional elliptic problems. *Computing.* 2005. Vol. 74, No. 2. P. 131–157.
140. Gavriljuk I. P., Khoromskij B. N. Quantized-TT-Cayley transform for computing the dynamics and the spectrum of high-dimensional Hamiltonians. *Comput. Methods Appl. Math.* 2011. Vol. 11, Iss. 3. P. 273–290.
141. Gavriljuk I. P., Makarov V. L. The Cayley transform and the solution of an initial problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert Space. *Numer. Func. Anal. and Optimiz.* 1994. Vol. 15, Iss. 5&6. P. 583–598.
142. Gavriljuk I. P., Makarov V. L. Representation and Approximation of the Solution of an Initial Value Problem for a First Order Differential Equation in Banach Spaces. *Journal of Analysis and its Applications.* 1996. Vol. 15, No. 2. P. 495–527.
143. Gavriljuk I. P., Makarov V. L. Explicit and approximate solutions of second order elliptic differential equations in Hilbert and Banach spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1999. Vol. 20, No. 7–8. P. 695–715.

doi: <https://doi.org/10.1080/01630569908816919>

144. Gavriljuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates for boundary value problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. P. 1–28. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0305>
145. Gavriljuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Comput. Methods Appl. Math.* doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120>
146. Gavriljuk I. P., Makarov V. L., Ryabichev V. L. A parallel high-accuracy method for the first-order evolution equation in Hilbert and Banach spaces. *Comput. Methods Appl. Math.* 2003. Vol. 3, Iss. 1. P. 86–116.
147. Gonzalez D. C., Palencia C. Stability of time-stepping methods for abstract time-dependent parabolic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1998. Vol. 5. No. 3. P. 973–989.
148. Gonzalez D. C., Palencia C. Stability of Runge–Kutta methods for abstract time-dependent parabolic problems: the Holder case. *Mathematics of Computation.* 1999. Vol. 68, No. 225. P. 73–89.
149. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P. Time Fractional Diffusion: A Discrete Random Walk Approach. *Nonlinear Dynamics.* 2002. **29**. P. 129–143.
150. Gustafsson B., Kreiss H.-O., Oliger J. Time-dependent problems and difference methods. Hoboken: Wiley, 2013. 529 p.
151. Hartman P. Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, New York, 1964.
152. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, River Edge, 2000.
153. Jafari H., Gejji V.D. Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition. *Appl. Math. Comput.* 2006. Vol. 196. P. 644–651.
154. Jin B., Lazarov R., Vabishchevich P. Preface: Numerical analysis of fractional differential equations. *Comput. Methods Appl. Math.* 2017. Vol. 17, Iss. 4. P. 643–646. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0036>
155. Jin B., Lazarov R., Zhou Z. Numerical methods for time-fractional evolution equations with nonsmooth data: a concise overview. *Comput. Methods in Appl Mechanics and Engineering.* 2019. Vol. 346. P. 332–358.
156. Jin B., Li B., Zhou Z. Correction of high-order BDF convolution quadrature for fractional evolution equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 2017. Vol. 39, Iss. 6. P. A3129–A3152.
157. John F. On the integration of parabolic equations by difference methods. *Comm. Pure Appl. Math.* 1952. Vol. 5. P. 155–211.

158. Jovanović B. S., Vulkov L. G. On the rate of convergence of difference schemes for the Poisson equation with dynamic interface condition. *Comput. Methods Appl. Math.* 2003. Vol. 3, Iss. 1. P. 177–188
159. Jovanović B. S., Vulkov L. G., Delić A. Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation. In: Dimov I., Faragó I., Vulkov L. (eds) Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2012. *Lecture Notes in Comput. Sci.* 2013. Vol 8236. Springer, Berlin Heidelberg. P. 38–49. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-41515-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-41515-9_4)
160. Jovanović B.S., Süli E. Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions. New York: Springer, 2014. 416 p.
161. Kadalbajoo M. K., Awasthi A. A numerical method based on Crank–Nicolson scheme for Burgers' Equation. *Applied Mathematics and Computation.* 2006. Vol. 182, No. 2. P. 1430–1442. doi:10.1016/j.amc.2006.05.030.
162. Karniadakis G. E., Hesthaven J. S., Podlubny I. Special issue on Fractional PDEs: theory, numerics, and applications [Editorial]. *J. Comput. Phys.* 2015. Vol. 293. P. 1–3.
163. Keller H. B. Numerical solution of two point boundary value problems. *SIAM*, 1976.
164. Khoromskij B. N., Melenk J. M. Boundary concentrated finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 2003. Vol. 41, No. 1. P. 1–36.
165. Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. Theory and application of fractional differential equation. Elsevier, 2006.
166. Kreiss H.-O. Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren. *Nordisk Tidskr. Informations-Behandling.* 1962. 2. P. 153–81.
167. Langlands T. A. M., Henry B. I. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.* Vol. 205. P. 719–736.
168. Lazarov R., Vabishchevich P. A numerical study of the homogeneous elliptic equation with fractional boundary conditions. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2017. Vol. 20, No. 2. P. 337–351.
169. Lax P. D., Richtmyer R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1956. 9. 267–293.
170. Lees M. Approximate solution of parabolic equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1959. Vol. 7, No. 2. P. 167–183.
171. Li C. P., Tao C. X. On the fractional Adams method. *Comput. Math. Appl.* 2009. 58. P. 1573–1588.
172. Li C., Zeng. F. Finite difference methods for fractional differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2012. Vol. 22, No. 4. P. 1230014–1230028. doi: <https://doi.org/10.1142/S0218127412300145>



173. Lin Y., Xu C. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 47. 2108–2131.
174. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I. Springer, New York, 1972.
175. Liu F., Yang Q., Turner I. Two new implicit numerical methods for the fractional cable equation. *J. Comput. Nonlin. Dyn.* 2011. 6. P. 1–7.
176. Liu F., Zhuang P., Anh V., Turner I. A fractional-order implicit difference approximation for the space-time fractional diffusion equation. *ANZIAM J.* 2006. 47. P. 48–68.
177. Lubich C. Fractional linear multistep methods for Abel–Volterra integral equations of the second kind. *Math. Comp.* 1985. Vol. 45, No. 172. P. 463–469.
178. Lubich C. Discretized fractional calculus. *SIAM J. Math. Anal.* 1986. 17, No. 3. P. 704–719.
179. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I. *Numer. Math.* 1988. Vol. 52, Iss. 2. P. 129–145.
180. Lubich C., Sloan I. H., Thomée V. Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term. *Math. Comp.* 1996. Vol. 65(213). P. 1–17.
181. Lubich C. Convolution quadrature revisited. *BIT.* 2004. Vol. 44, Iss. 3. P. 503–514.
182. Lynch V. E., Carreras B. A., del-Castillo-Negrete D., Ferreira-Mejias K. M., Hicks H. R. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order. *J. Comput. Phys.* 192. P. 406–442.
183. Machado J. T., Galhano A. M., Trujillo J. J. On development of fractional calculus during the last fifty years. *Scientometrics.* 2014. Vol. 98, Iss. 1. P. 577–582. doi: <https://doi.org/10.1007/s11192-013-1032-6>
184. Machado J. T., Kiryakova V., Mainardi F. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2011. Vol. 16, Iss. 3. P. 1140–1153. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.027>
185. Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering. 2006. Begell House Publisher., Inc., Connecticut, 2006.
186. Mainardi F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Udine 1996), CISM Courses and Lectures. 1997. Vol. 378. Springer Verlag, Vienna. P. 291–348.
187. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. Imperial College, London, 2010
188. Makarov V. L. On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences).* 1989. Vol. 42, № 5. P. 41–44.

189. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Frac. Cal. Appl. Anal.* 2001. 4(2). P. 153–192.
190. Makarov V. L., Demkiv L. I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi-linear parabolic equations taking into account the initial-boundary effect. *Comput. Methods Appl. Math.* 2003. Vol. 3, Iss. 4. P. 579–595.
191. Makarov V. L., Demkiv L. I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi-linear elliptic equations with variable coefficients taking into account boundary effect. *Lect. Notes Comput. Sc.* 2005. Vol. 3401. P. 80–90.
192. Makarov V. L., Demkiv L. I. Taking into account the third kind conditions in weight estimates for difference schemes, in: *Large-Scale Scientific Computing*. Lecture Notes in Comput. Sci. 2006. Vol. 3743. Springer, Berlin. P. 687–694.
193. Makarov V. L., Demkiv L. I. Weight uniform accuracy estimate of finite-difference method for Poisson equation taking into account boundary effect. *Numerical Analysis and Its Application: Proceedings of the 4th International Conference (Lozenetz, Bulgaria, 16–20 June, 2008)*. P. 92–103.
194. Makarov V. L., Mayko N. V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. Vol. 19, Iss. 2. P. 379–394. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0002>
195. Makarov V. L., Mayko N. V. The boundary effect in accuracy estimate of the grid method for solving fractional differential equations. *Cybernet. Systems Anal.* 2019. Vol. 55, Iss. 1. P. 65–80. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00113-y>
196. Malinowska A. B., Torres D. F. M. *Introduction to the Fractional Calculus of Variations*. Imperial College, London, 2012.
197. Malinowska A. B., Odziejewicz T., Torres D. F. M. *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*. Springer Briefs Appl. Sci. Technol., Springer, Cham, 2015.
198. Martín-Vaquero J., Sajavičius S. The two-level finite difference schemes for the heat equation with nonlocal initial condition. *Applied mathematics and computation*. 2019. Vol. 342, No. 1. P 166–177.
199. Matus P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems. *Comput. Methods Appl. Math.* 2003. Vol. 3, Iss. 2. P.313–329.
200. Matus P., Hieu L. M., Vulkov L. G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 310. P. 186–199.
201. Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2013. № 3(113). P. 91–106.
202. Mayko N. V. The effect of the boundary conditions in the accuracy estimate of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation. *Dynamical*

- system modelling and stability investigation: Proceedings XV international scientific conf. (Kyiv, 29–31 May, 2013). Kyiv, 2013. С. 40.*
203. Mayko N. V. Error estimates of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation with allowance for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. Vol. 50, Iss. 5. P. 788–796. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9669-6>
  204. Mayko N. V. The error estimate with the boundary effect of the finite-difference scheme for the two-dimensional parabolic equation. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 23–24.
  205. Mayko N. V. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional heat equation allowing for the effect of the initial condition. Матеріали 7 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
  206. Mayko N. V. Improved accuracy estimates of the difference scheme for the two-dimensional parabolic equation with regard for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2017. Vol. 53, Iss. 1. P. 83–91. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9909-7>
  207. Mayko N. V. A weighted error estimate for a finite-difference scheme of increased approximation order for a two-dimensional Poisson equation with allowance for the Dirichlet boundary condition. 2018. *Cybernet. Systems Anal.* Vol. 54, Iss. 1. P. 130–138. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0014-3>
  208. Mayko N. V. The finite-difference scheme of higher order of accuracy for the two-dimensional Poisson equation in a rectangle with regard for the effect of the Dirichlet boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 4. P. 624–635. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0063-7>
  209. Mayko N. V., Ryabichev V. L. Accuracy of approximation of a solution to an abstract Cauchy problem. *Cybern. Syst. Anal.* 2005. Vol. 41, Iss. 3. P. 437–444. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0077-9>
  210. Mayko N. V., Ryabichev V. L. Approximation theorems for operator exponential and cosine functions. *Cybernet. Systems Anal.* 2009. Vol. 45, Iss. 5. P. 800–807. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-009-9145-x>
  211. Mayko N. V., Ryabichev V. L. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation allowing for the effect of the boundary condition. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XVII international scientific conf. (Kyiv, 27–29 May, 2015). Kyiv, 2015. P. 68.*
  212. Mayko N. V., Ryabichev V. L. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for Poisson's equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2016. Vol. 52, Iss. 5. P. 758–769. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9877-3>
  213. Mazumder S. Numerical Methods for Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 2015. 484 p.

214. Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion. *J. Comput. Appl. Math.* 2004. 172. P. 65–77.
215. Meixner J. Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzeugenden funk-tion. *J. London Math. Soc.* 1934. S1-9(1). P. 6–13.
216. Mendes R. V., Vazquez L. The dynamical nature of a backlash system with and without fluid friction. *Nonlinear Dynam.* 2007. Vol. 47. P. 363–366.
217. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to abnormal diffusion: A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.* 339. P. 1–77.
218. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons, New York, 1993.
219. Morton K. W., Mayers D. Numerical solutions of partial differential equations. Cambridge Univirstity Press, 2005.
220. Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M. Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration. *Journal of Math-for-industry.* 2010. Vol. 2(2010A-10). P. 99–108.
221. Nelson E. Analitic vectors. *Ann. Math.* 1959. Vol. 70, Iss. 3. P. 572–615.
222. Oldham K., Spanier J. The fracional calculus. New York: Academic Press, 1974.
223. Osman S. A., Langlands T. A. M. An implicit Keller Box numerical scheme for the solution of fractional subdiffusion equations. *Applied Mathematics and Computation.* 2019. Vol. 348. P. 609-626
224. Pandey P. A Finite difference method for numerical solution of Goursat problem of partial differential equation. *Open Access Library Journal.* 2014. 1. P. 1–6. doi: 10.4236/oalib.1100537.
225. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation. New York: Springer-Verlag, 1983. 280 p.
226. Peaceman D. W., Rachford H. H., Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 1955. Vol. 3. P. 28–41.
227. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic press, 1999.
228. Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2002. Vol. 5, No. 4. P. 367–386.
229. Qin Y. Integral and discrete inequalities and their applications. Vol. I: Linear inequalities. Birkhäuser, Springer, Cham, 2016.
230. Quarteroni A., Valli A. Numerical approximation of partial differential equations Berlin: Springer-Verlag, 1994. xvi+543 p.
231. Raberto M., Scalas E, Mainardi F. Waiting-times and returns in high-frequency fanancial data: An empirical study. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* Elsevier, 2002. 314(1). P. 749–755.

232. Richardson R. G. D. A new method in boundary problems for differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1917. Vol. 18. P. 489–518.
233. Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica.* 1977. Vol. 4, Iss. 1. P. 75–89. doi: [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(77\)90039-8](https://doi.org/10.1016/0315-0860(77)90039-8)
234. Ray S. Saha. Fractional calculus with applications for nuclear reactor dynamics. CRC Press, Boca Raton, 2016.
235. Sabatier J., Agrawal O.P., Machado T. J.A. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, The Netherlands, 2007.
236. Savare G. A  $\theta$ -stable approximation of abstract Cauchy problem. *Numer. Math.* 1993. 65. P. 319–335.
237. Schiesser W. E, Griffiths G. W. A compendium of partial differential equation models. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 474 p.
238. Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. *J. Math. Phys.* 1989. 30. P. 134–144.
239. Shortley G. H., Weller R. The numerical solution of Laplace's equation. *J. Appl. Phys.* 1938. Vol. 9. P. 334–348.
240. Strang W. G. Difference method for mixed boundary-value problems. *Duke Math. J.* 1960. 27. P. 221–232.
241. Süli E., Mayers, D. F. An introduction to numerical analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
242. Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion system. *Appl. Numer. Math.* 2006. 56. P. 193–209.
243. Tadjeran C., Meerschaert M. M. A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.* 2007. 220. P. 813–823.
244. Tadjeran C., Meerschaert M. M., Scheffler H. P. A second-order numerical approximation for the fractional diffusion equation. 2006. *J. Comput. Phys.* 213. P. 205–213.
245. Tanabe H. Equations of evolution. Pitman, London, 1979. xii+260 p.
246. Tarasov V. E. Fractional dynamics. Nonlinear Phys. Sci. Springer, Heidelberg, 2010.
247. Tomée V. Parabolic difference operators. *Math. Scand.* 1966. Vol. 19, No. 1. P. 77–107. <http://www.math.chalmers.se/~thomee/homepub.pdf>
248. Tomée V. From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations. *J. Comp. Appl. Math.* 2001. 128. C. 1-54.

249. Trotter H. F. Approximation of semi-groups of operators. *Pacific J. Math.* 1958. Vol. 8, Iss. 4. P. 887–919.
250. Wani S. S., Thakar S. H. Crank–Nicolson type method for Burger's equation. *International Journal of Applied Physics and Mathematics.* Vol. 3, No. 5. P. 324–328. DOI: 10.7763/IJAPM.2013.V3.230 and
251. Weinelt W. Untersuchungen zur Konvergenzgeschwindigkeit bei Differenzenverfahren. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt.* 1978. V. 20(6) P. 763–769.
252. Westerlund S. Dead matter has memory! *Physica Scripta*, 1991. Vol. 43. P. 174–179.
253. Widlund O. B. Stability of parabolic difference schemes in the maximum norm. *Numer. Math.* 1966. 8. P. 186–202.
254. Wu C. H., Lu L. Z. Implicit numerical approximation scheme for the fractional Fokker–Planck equation. *Appl. Math. Comput.* 216. P. 1945–1955.
255. Ying L. A., Wang C. H. The discontinuous initial value problem of a reacting gas flow. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1981. Vol. 266, No. 2. P. 361–387.
256. Yosida K. On the differentiability and the representation of one-parameter semigroup of operator. *J. Math. Soc. Japan.* 1948. 1. P. 15–21.
257. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of the initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15, N 6. P. 240–243.
258. Zaslavsky G. M. Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford University, Oxford, 2008.
259. Zheng Y. Y., Li C. P., Zhao Z. G. A note on the finite element method for the space-fractional advection diffusion equation. *Comput. Math. Appl.* Vol. 59. P. 1718–1726.
260. Zhuang P., Liu F., Anh V., Turner I. New solution and analytical techniques of the implicit numerical method for the anomalous subdiffusion equation. 2008. *SIAM J. Numer. Anal.* 46. P. 1079–1095.
261. [http://parallel.bas.bg/Conferences/NSFDE&A\\_2020-Sozopol.pdf](http://parallel.bas.bg/Conferences/NSFDE&A_2020-Sozopol.pdf)
262. <http://parallel.bas.bg/dpa/NAA20/>

## ДОДАТОК

## Список публікацій здобувача

Список наукових праць здобувача, в яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Макаров В. Л., Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2002. №4. С. 192–197.
2. Рябічев В. Л., Майко Н. В. Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2004. №1. С. 270–278.
3. Майко Н. В., В. Л. Рябічев Точность приближения решения абстрактной задачи Коши. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. №3. С. 145–152.  
Mayko N. V., Ryabichev V. L. Accuracy of approximation of a solution to an abstract Cauchy problem. *Cybernet. Systems Anal.* 2005. Vol. 41, Iss. 3. P. 437–444. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0077-9>
4. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Реалізація паралельного методу довільного порядку точності для еволюційного рівняння зі змінним оператором. *Вісник Київського університету*. 2006. №2. С. 204–210.
5. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Теоремы приближения операторных экспоненты и косинуса. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 145–152.  
Mayko N. V., Ryabichev V. L. Approximation theorems for operator exponential and cosine functions. *Cybernet. Systems Anal.* 2009. Vol. 45, Iss. 5. P. 800–807. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-009-9145-x>
6. Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2013. № 3(113). P. 91–106.
7. Майко Н. В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 154–163.

Mayko N. V. Error estimates of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation with allowance for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. Vol. 50, No. 5. P. 788–796. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9669-6>

8. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. № 5. С. 113–124.

Mayko N. V., Ryabichev V. L. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for Poisson's equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2016. Vol. 52, Iss. 5. P. 758–769. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9877-3>

9. Майко Н. В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условий. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. № 1. С. 99–107.

Mayko N. V. Improved accuracy estimates of the difference scheme for the two-dimensional parabolic equation with regard for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2017. Vol. 53, Iss. 1. P. 83–91. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9909-7>

10. Майко Н. В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. № 1. С. 145–153.

Mayko N. V. A weighted error estimate for a finite-difference scheme of increased approximation order for a two-dimensional Poisson equation with allowance for the Dirichlet Boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 1. P. 130–138. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0014-3>

11. Майко Н. В. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с учетом влияния краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. № 4. С. 122–134.

Mayko N. V. The finite-difference scheme of higher order of accuracy for the two-dimensional Poisson equation in a rectangle with regard for the effect of the Dirichlet boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 4. P. 624–635. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0063-7>



12. Makarov V. L., Mayko N. V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. Vol. 19, Iss. 2. P. 379–394. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0002>
13. Макаров В. Л., Майко Н. В. Крайовий ефект в оцінці точності сіткового методу для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. № 1. С. 80–95.
- Makarov V. L., Mayko N. V. Boundary effect in accuracy estimate of the grid method for solving fractional differential equations. *Cybernet. Systems Anal.* 2019. Vol. 55, Iss. 1. P. 65–80. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00113-y>
14. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates for boundary value problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0305>
15. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Comput. Methods Appl. Math.* doi: <https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120>
16. Майко Н. В. Суперекспоненціальна швидкість збіжності методу перетворення Келі для абстрактного диференціального рівняння. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. № 3. С. 171–183.
- Mayko N. V. Super-exponential rate of convergence of the Cayley transform method for an abstract differential equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2020. Vol. 56, Iss. 1. P.492–503. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00265-2>
17. Макаров В. Л., Майко Н. В. Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 3–9. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.003>
- Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for boundary value problems in a Banach space. arXiv:2007.01410

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Макаров В.Л., Майко Н.В., Рябічев В.Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса. *Теорія*

- еволюційних рівнянь. П'яті Боголюбівські читання: Праці 5 міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 22–24 травня 2002): Кам'янець-Подільський, 2002. С. 111.*
2. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Паралельний метод високого порядку точності для еволюційного рівняння першого порядку. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Праці 10 всеукр. наук. конф. (Львів, 23–23 вересня 2003). Львів, 2003. С. 90.*
  3. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Реалізація методу апроксимації еволюційного оператора для розв'язування абстрактної задачі Коші. *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: Праці міжнар. наук. конф. (Ужгород, 18–23 вересня 2006). Ужгород, 2006. С. 67.*
  4. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Пряма і обернена теорема наближення операторної експоненти. *Матеріали 12 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008). Київ, 2008. С. 252.*
  5. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Обернена теорема наближення операторного косинуса. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Праці 15 міжнар. наук. конф. (Львів, 23–25 вересня 2008). Львів, 2008. С. 24.*
  6. Boyko M. V., Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for parabolic equation. *Електроніка та прикладна фізика: Праці 7 міжнар. наук. конф. (Київ, 24–27 жовтня 2012). Київ, 2012. С. 189–190.*
  7. Mayko N. V. The effect of the boundary conditions in the accuracy estimate of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XV international scientific conf. (Kyiv, 29–31 May, 2013). Kyiv, 2013. С. 40.*
  8. Mayko N. V. The error estimate with the boundary effect of the finite-difference scheme for the two-dimensional parabolic equation. *Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 23–24.*
  9. Майко Н. В., Сопотницька М. В. Оцінка точності різницевої схеми для одновимірного параболічного рівняння з урахуванням впливу початкової умови. *Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.*

10. Mayko N. V. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional heat equation allowing for the effect of the initial condition. *Матеріали 7 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014)*. Київ, 2014. С. 129–130.
11. Mayko N. V., Ryabichev V. L. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation allowing for the effect of the boundary condition. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XVII international scientific conf. (Kyiv, 27–29 May, 2015)*. Kyiv, 2015. P. 68.
12. Майко Н. В., Максимчук М. А. Оцінка швидкості збіжності різницевої схеми для рівняння Пуассона з урахуванням впливу крайової умови. *Матеріали 8 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015)*. Київ, 2015. С. 59–60.
13. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Покращені оцінки точності різницевої схеми для двовимірного параболічного рівняння з урахуванням ефекту від крайових умов. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМСС: Праці 22 Всеукр. наук. конф. (Львів, 5–7 жовтня 2016)*. Львів, 2016. С. 119–120.
14. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність скінченно-різницевої схеми для рівняння Пуассона в прямокутнику з урахуванням крайового ефекту. *Інформаційні технології та взаємодії: Матеріали 4 міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 8–10 лист. 2017)*. Київ, 2017. С. 34–35.
15. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Зважена оцінка точності сіткової схеми для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Dynamical system modelling and stability investigation: Proceedings XIX international scientific conf. (Kyiv, 22–24 May, 2019)*. Kyiv, 2019. P. 106–108.
16. Майко Н. В. Вагові оцінки точності сіткового методу для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти (до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики імені проф. Можара В. І.)*. Матеріали всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. (Київ, 26–27 травня 2020). Київ, НУХТ, 2020. С. 33–34.