Національна академія наук України
Інститут математики

Майко Наталія Валентинівна

УДК 519.6

Вагові оцінки точності функціонально-дискретних методів розв'язування крайових задач

01.01.07 – обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Макаров Володимир Леонідович,
Інститут математики НАН України,
головний науковий спеціаліст відділу обчислювальної математики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Хіміч Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
заступник директора з наукової роботи;

доктор фізико-математичних наук, професор
Кутнів Мирослав Володимирович,
Інституту прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук, професор
Демків Ігор Іванович,
Національний університет «Львівська політехніка»,
професор кафедри обчислювальної математики та програмування.

Захист відбудеться 10 листопада 2020 р. о 14:00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту математики НАН України.
Автореферат розіслано 2 жовтня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Б. Василик

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Переважна більшість задач математичної фізики не може бути розв'язана точно і потребує застосування відповідних наближених методів. Важливою характеристикою будь-якого наближеного методу є його точність. Для оцінки точності традиційно використовують певний параметр дискретизації: крок сітки, кількість доданків частинної суми ряду тощо. Однак і з теоретичних, і з практичних міркувань важливим є також урахування впливу інших факторів, наприклад, *крайового і початкового ефектів за Макаровим*. Так, вплив крайового ефекту означає, що внаслідок крайової умови Діріхле для диференціального рівняння в канонічної області точність наближеного розв'язку поблизу межі області є вищою порівняно з точністю далі від межі. Аналогічна ситуація спостерігається і для нестаціонарних рівнянь у тих вузлах сітки, де задано початкову умову. Кількісною характеристикою крайового і початкового ефектів є апріорні оцінки похибки з відповідною ваговою функцією, яка характеризує відстань точки до межі просторово-часової області, в певних сіткових нормах. Ідея таких оцінок уперше анонсована В. Л. Макаровим[1] для еліптичного рівняння у випадку узагальнених розв'язків із просторів Соболєва та розвинута в публікаціях Л. І. Демківа і В. Л. Макарова для квазілінійних стаціонарних і нестаціонарних рівнянь. Близькими за тематикою є роботи Є. Ф. Галби, однак у них використовувалися припущення про класичну гладкість розв'язків і нестаціонарні задачі не розглядалися. В дисертації продовжено відомі та виконано нові дослідження впливу початкових і крайових умов на точність трьох чисельних методів: методу скінченних різниць (МСР) для еліптичних і параболічних рівнянь, сіткового методу розв'язування рівнянь з дробовими похідними та методу перетворення Келі для абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах.

МСР було вперше запропоновано понад 100 років тому, і сьогодні він є одним із найбільш визнаних чисельних методів розв'язування задач математичної фізики завдяки універсальності та простоті реалізації. Однією з перших робіт була стаття 1917 р. американського математика Р. Ричардсона (R. G. D. Richardson). Ця та деякі інші публікації лишалися невідомими більшості науковців та інженерів, а МСР не був належно оцінений до появи в 1928 р. знаменитої статті Р. Куранта (R. Courant), К. Фрідріхса (K. O. Friedrichs) і Г. Леві (H. Lewy). Близько 15 років по тому метод знайшов важливе практичне застосування завдяки появі та швидкому розвитку перших електронних обчислювальних машин (для задач, пов'язаних із рухом рідин і газів, дифузією і переносом нейтронів, переносом променистої енергії, термоядерними реакціями тощо).

[1] Makarov V. L. On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences)*. 1989. Vol. 42, № 5. P. 41–44.

Подальший розвиток теорії та застосувань різницевих схем відбувався завдяки працям Дж. Кренка (J. Crank), Ф. Ніколсон (P. Nicolson), Д. Пісмена (D. Peaceman), Г. Речфорда (H. Rachford), Дж. Дугласа (J. Douglas), П. Лакса (P. Lax), Б. Вендроффа (B. Wendroff), Р. Ріхтмайера (R. Richtmyer), В. Вазова (W. Wasow), Дж. Форсайта (G. Forsythe), В. С. Рябенького, О. Ф. Філіппова (О. Ф. Филиппов), С. К. Годунова, Г. Стренга (W. G. Strang), Г. Келлера (H. Keller), В. Томе (V. Tomée), Є. Г. Дьяконова (Е. Г. Дьяконов), М. М. Яненка (Н. Н. Яненко), Г. І. Марчука (Г. И. Марчук), А. М. Тихонова (А. Н. Тихонов) і О. А. Самарського (А. А. Самарский) та їх учнів, Р. Лазарова, Б. Йовановича (B. Jovanović), Л. Івановича (L. Ivanović), Л. Волкова (L. Vulkov), Е. Сюлі (E. Süli), І. П. Гаврилюка (I. P. Gavrilyuk), Г. Берікелашвілі, П. П. Матуса, П. М. Вабіщевича (П. Н. Вабищевич) та багатьох інших. Значні результати належать українським математикам: В. Л. Макарову та його учням (П. Ф. Жуку, Г. А. Шинкаренку, Р. В. Слоньовському, Р. С. Хапку, М. В. Кутніву, Н. О. Росохатій, І. І. Лазурчаку, В. Б. Василику та ін.), І. М. Молчанову, О. М. Хімічу, Є. Ф. Галбі, В. Г. Приказчикову, М. М. Москалькову та ін.

Вже на початку розвитку теорії МСР важливого значення набуло питання про точність різницевих схем залежно від гладкості шуканого розв'язку (адже реальні фізичні процеси відбуваються, як правило, в гетерогенних середовищах, а тому вхідні дані є негладкими функціями). Відповіддю на цей виклик стала розроблена в 1950–60-х рр. А. М. Тихоновим і О. А. Самарський *теорія однорідних різницевих схем*, у якій для одновимірних задач знайдено необхідні і достатні умови збіжності в класі розривних коефіцієнтів. Однак перенесення цього підходу на багатовимірний випадок виявилося недостатньо ефективним і дозволяло одержувати лише занижені оцінки точності. Для усунення цього недоліку О. А. Самарським, Р. Д. Лазаровим і В. Л. Макаровим у 1980–90-х рр. було побудовано теорію оцінок, *узгоджених з гладкістю розв'язку вихідної диференціальної задачі*. Теорія базувалася на використанні операторів точних різницевих схем, новій трактовці похибки апроксимації та застосуванні леми Брембла – Гільберта.

Сучасний етап розвитку теорії та застосувань МСР пов'язаний з дослідженням моделей складних явищ у природничих і суспільних науках та новими потужними можливостями обчислювальної техніки. Останнім часом можна спостерігати значний інтерес до вивчення нелінійних процесів у різних областях фізики, хімії, сейсмології, екології тощо. Математичні моделі таких явищ будують за допомогою нелінійних рівнянь з частинними похідним. Так, в аеро- і гідродинаміці виникає одновимірне квазілінійне параболічне рівняння Бюргерса як адекватна математична модель турбулентностей. Його важливим окремим випадком є квазілінійне рівняння переносу (рівняння Гопфа) – найпростіше рівняння, що описує розривні течії або течії з ударними хвилями. В біології, екології, фізіології, теорії горіння, теорії кристалізації, фізиці плазми та інших областях важливе значення має рівняння Фішера – Колмогорова – Петровського – Піскунова (Фішера – КПП). Еволюцію хвиль малої амплітуди у дисперсійних середовищах часто моделюють за допомогою рівняння Кортевега – де Вріза (рівняння КдВ) з періодичними умовами. Чимало публікацій присвячено різницевим схемам розв'язування задач для еліптичних та параболічних рівнянь з динамічними умовами спряження на межі контакту, пов'язаних із наявністю в теплопровідному середовищі зосереджених теплоємностей, і/або динамічними крайовими умовами, які моделюють теплопровідність у тілі, що перебуває в контакті з флюїдом, а також процеси в напівпровідникових приладах. В математичному моделюванні деяких процесів екології, фізики та техніки, коли неможливо задати точні значення шуканого розв'язку на межі області, виникають задачі з нелокальними крайовими умовами.

Ці та багато інших прикладів демонструють, що МСР активно розвивається та широко застосовується для розв'язання актуальних науково-технічних задач. Водночас існує порівняно небагато публікацій, присвячених впливу крайової та початкової умов на точність дискретного розв'язку. Ця дисертація у відповідній її частині є певним кроком до заповнення цього пробілу.

Про актуальність наближених методів для рівнянь із похідними дробового порядку свідчать величезна кількість робіт і тематика багатьох наукових конференцій. Цим питанням присвячено дослідження Б. Росса (B. Ross), С. Вестерлунда (S. Westerlund), К. Олдема (K. Oldham), Дж. Спеньєра (J. Spanier), М. Капуто (M. Caputo), С. Самка (С. Самко), А. Кілбаса (А. Килбас), О. Марічева (О. Маричев), А. Нахушева, И. Подлубного (I. Podlubny), Г. Заславського (Г. Заславский), Р. Нігматуліна (Р. Нигматулин), С. Ейдельмана, С. Івасишена, А. Кочубея, Дж. Сабатьєра (J. Sabatier), О. Агравала (O. Agrawal), Х. Машаду (J. Machado), В. Васильева, Л. Симак, В. Тарасова, В. Кірякової (V. Kiryakova), Ф. Майнарді (F. Mainardi), А. Гальяно (A. Galhano), Х. Трухільйо (J. Trujillo), Р. Горенфло (R. Gorenflo), К. Любіха (C. Lubich), Ю. Лучка (Yu. Luchko), А. Псху, М. Шханукова-Лафішева (М. Шхануков-Лафишев), А. Аліханова (А. Алиханов) та багатьох інших.

В останні десятиліття з'ясувалося, що апарат дробового інтегро-диференціювання дозволяє будувати адекватні математичні моделі у фізиці і техніці, хімії, біології, фінансах тощо. Завдяки здатності моделювати спадкові явища з довгою пам'яттю дробовий аналіз широко використовується в задачах в'язкопружності, аномальної дифузії, теорії керування, електродинаміки, нелінійної гідроакустики, для обробки багатовимірних сигналів у радіофізиці та радіолокації тощо. Точні розв'язки таких задач відомі в небагатьох (переважно лінійних) випадках. Інтегральна природа дробової похідної (на відміну від класичної похідної, природа якої локальна) ускладнює побудову, дослідження і реалізацію наближених методів. Так, однією з проблем реалізації є помітне зростання витрат, пов'язаних зі збереженням великих масивів даних внаслідок розв'язання системи лінійних рівнянь з великими щільно заповненими матрицями. Це потребує адаптації відомих і застосування нових підходів в області дробового чисельного аналізу, що активно розвивається і постійно оновлюється. Переважна кількість робіт присвячена задачам прикладного характеру і порівняно мало таких, де задачі становлять самостійний інтерес для розвитку самої теорії. У деяких публікаціях стійкість і збіжність методу доведено емпірично без належного теоретичного обґрунтування. Огляд джерел свідчить про те, що вплив початкових і крайових умов на точність наближеного розв'язку раніше не досліджувався.

Математичні моделі багатьох процесів, які досліджуються в науці і техніці, можна записати як операторно-диференціальні рівняння у гільбертовому і банаховому просторах. Наприклад, за певних умов абстрактна задача Коші для диференціальних рівняння 1-го і 2-го порядків з операторним коефіцієнтом є узагальненням відповідно класичних початково-крайових задач для параболічного і гіперболічного рівнянь, а крайова задача для рівняння 2-го порядку – задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Абстрактним диференціальним рівнянням і методам їх розв'язування присвячено чимало робіт, багато з яких стали класичними. Так, еволюційне рівняння досліджено в працях Е. Гілле (E. Hille), Р. Філліпса (R. Phillips), К. Йосіди (K. Yosida], Т. Като (T. Kato), П. Лакса (P. Lax), Г. Троттера (H. Trotter), Г. Танабе (H. Tanabe), А. Квартероні (A. Quarteroni), Дж. Саваре (G. Savaré), Г. Фатторіні (H. Fattorini), Г. Фуджіта (H Fujita), Н. Саїто (N. Saito), Т. Сузукі (T. Suzuki), К. Кануто (C. Canuto), А. Пазі (A. Pazy), М. Крейна, С. Крейна, М. Красносельського, П. Соболевського, Ю. Далецького, М. Соломяка, М. Горбачука, В. Горбачук, В. Городецького, М. Городнього, О. Кашпіровського, Ю. Митника, В. Василика, С. Торби та багатьох інших.

Одним з ефективних методів розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженим операторним коефіцієнтом є метод перетворення Келі (A. Cayley), запропонований у працях Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка і В. Л. Макарова. Цей метод являє собою новий підхід до побудови точного і наближеного розв'язків таких рівнянь. Основними його перевагами є конструктивне зображення операторних експоненти, тригонометричного і гіперболічного косинусів; декомпозиція еволюційної задачі на рекурентну послідовність стаціонарних задач; автоматична залежність точності від гладкості вхідних даних. Остання з перелічених властивостей означає, що даний метод належить до *методів без насичення точності за Бабенком*[2], а отже, у певному сенсі є оптимальним. Побудова таких методів є актуальним напрямом чисельного аналізу. У даній дисертації продовжено дослідження методу перетворення Келі для конструктивного зображення точних і наближених розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь у банаховому і гільбертовому просторах та запропоновано методику одержання нових вагових апріорних оцінок похибки, які враховують як вплив крайової умови Діріхле, так і гладкість вхідних даних.

Таким чином, тема дисертації є актуальною для теорії та застосувань чисельних методів та відповідає запитам природничих наук і техніки.

---

[2] Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційну роботу виконано у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України в рамках наукової теми *Чисельно-аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та обробка інформаційних даних* (номер державної реєстрації 0101U000371) і наукової теми *Експоненціально збіжні методи для розв'язування спектральних задач, задач для квазілінійних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами та раціональні апроксимації функцій багатьох змінних* (номер державної реєстрації 0116U003063).

Мета дослідження – одержати нові вагові апріорні оцінки точності наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов.

Об'єктом дослідження є математичні моделі процесів і явищ, які вивчаються у природничих і суспільних науках. **Предметом дослідження** є наближені методи розв'язування крайових і початково-крайових задач для диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, використаних для побудови цих моделей.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано методи дійсного і комплексного аналізу, елементи теорії дробового інтегро-диференціювання, елементи чисельного аналізу, теорію різницевих схем, елементи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і теорії інтегральних рівнянь, методи функціонального аналізу, елементи теорії лінійних операторів у гільбертових і банахових просторах.

Наукова новизна одержаних результатів. Одержані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Знайдено вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для двовимірного рівняння Пуассона в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

2. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для одно- і двовимірного рівняння теплопровідності в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням початкового і крайового ефектів.

3. Побудовано в просторах Гельдера шкалу вагових оцінок, які враховують вплив крайової умови Діріхле, для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною і сталими коефіцієнтами. Для наближеного розв'язування цього рівняння побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та доведено узгоджені в сенсі Самарського – Лазарова – Макарова вагові апріорні оцінки похибки з урахуванням крайового ефекту.

4. Для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною у випадку як сталих, так і змінних коефіцієнтів одержано ряд достатніх умов про належність розв'язку певним функціональним просторам та знайдено вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле. Для наближеного розв'язування цієї задачі побудовано сіткові схеми та одержано

вагові апріорні оцінки похибки в різних сіткових нормах з урахуванням крайового ефекту.

5. Для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною в одиничному квадраті одержано вагову оцінку розв'язку в рівномірній нормі з ваговою функцією, яка враховує відстань точки до межі області. Побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано вагові апріорні оцінки похибки в рівномірній дискретній нормі з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

6. Одержано оцінки розв'язку задачі Гурса для диференціального рівняння з дробовими похідними і змінними коефіцієнтами в різних функціональних просторах. Побудовано сіткову схему, для похибки якої одержано ряд оцінок у певних дискретних нормах. Вагова функція в оцінках точного і наближеного розв'язків характеризує відстань точки до двох суміжних сторін прямокутника, де задано додаткові умови.

7. Для методу перетворення Келі наближеного розв'язування диференціального рівняння 1-го порядку із самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі у випадку скінченної та нескінченної гладкості початкового вектора знайдено майже (з точністю до логарифма) непокращувану степеневу та непокращувану експоненціальну оцінки швидкості збіжності відповідно. Застосовано метод перетворення Келі на етапі реалізації паралельного методу довільного порядку точності для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором у гільбертовому просторі. Доведено обернені теореми наближення операторних експоненти і косинуса про гладкість початкового вектора залежно від порядку точності методу перетворення Келі.

8. Для диференціального рівняння 1-го порядку із щільно заданим логарифмічно секторіальним оператором у банаховому просторі за допомогою методу перетворення Келі одержано зображення точного розв'язку у вигляді ряду, побудовано наближений розв'язок та одержано оцінку його точності, яка автоматично залежить від гладкості початкового вектора.

9. Для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з однорідними крайовими умовами Діріхле і самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі побудовано точний розв'язок та одержано вагові оцінки з урахуванням впливу крайової умови та припущень про скінченну і нескінченну (у певному сенсі) гладкість вхідних даних. На основі зображення точного розв'язку побудовано наближені розв'язки та одержано вагові апріорні оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле і свідчать про степеневу та експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Ці результати узагальнено на випадок однорідного і неоднорідного рівнянь з відповідно неоднорідними та однорідними крайовими умовами Діріхле у випадку сильно позитивного щільно заданого оператора в банаховому просторі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація є теоретичною роботою в області чисельного аналізу. Розроблена у ній методика одержання вагових оцінок може бути застосована для дослідження нових класів задач. Водночас врахування початково-крайового ефекту має не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки, зокрема, надає змогу використовувати поблизу межі області більший крок сітки. Запропоновані в дисертації сіткові схеми та методи без насичення точності внаслідок їх універсальності та зручній реалізації можуть бути застосовані для розв'язування широкого кола прикладних задач фізики, техніки, хімії, біології, фінансів тощо.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статті [1], написаній у співавторстві з В. Л. Макаровим і В. Л. Рябічевим, В. Л. Макарову належить постановка задачі та контроль за правильністю викладення результатів, а внесок В. Л. Рябічева і дисертанта рівноцінний. У статтях [2–5, 8], написаних у співавторстві з В. Л. Рябічевим, внесок обох авторів рівноцінний. У статтях [12, 13, 17], написаних у співавторстві з В. Л. Макаровим, та у статтях [14, 15], написаних у співавторстві з І. П. Гаврилюком і В. Л. Макаровим, В. Л. Макарову і І. П. Гаврилюку належать постановки задач і загальне керівництво дослідженням, а дисертантові – перевірка робочих гіпотез і докладне доведення лем і теорем. Статті [6, 7, 9–11, 16] є одноосібними публікаціями дисертанта.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на наукових семінарах відділу обчислювальної математики, відділу математичних проблем механіки та теорії керування, відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на засіданнях кафедри математики та теоретичної радіофізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, у відділі чисельних методів та комп'ютерного моделювання Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, на кафедрі обчислювальної математики факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також на конференціях:

– П'ятій міжнародній науковій конференції *Теорія еволюційних рівнянь. П’яті Боголюбовські читання* (Кам’янець-Подільський, 22–24 травня 2002 р.);

– Десятій всеукраїнській науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* (Львів, 23–23 вересня 2003 р.);

– Міжнародній науковій конференції *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування* (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);

– Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.);

– П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* (Львів, 23–25 вересня 2008 р.);

– Сьомій міжнародній конференції *Електроніка та прикладна фізика*

(Київ, 24–27 жовтня 2012 р.);

– XV International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 29–31 May, 2013);

– П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені акад. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014 р.);

– Сьомій міжнародній науковій конференції імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014 р.);

– XVII International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 27–29 May, 2015);

– Восьмій міжнародній науковій конференції імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015 р.);

– Двадцять другій всеукраїнській науковій конференції *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики APAMCS* (Львів, 5–7 жовтня 2016 р.);

– Четвертій міжнародній науково-практичній конференції *Інформаційні технології та взаємодії* (Київ, 8–10 лист. 2017 р.);

– XIX International Scientific Conference *Dynamical system modelling and stability investigation* (Kyiv, 22–24 May, 2019);

– Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти* (*до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. В. І. Можара Національного університету харчових технологій*) (Київ, 26–27 травня 2020 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 17 статтях [1–17], що з урахуванням класифікації SCImago Journal & Country Rank становить 40 публікацій, зокрема: 3 статті [12, 14, 15] опубліковано у виданнях, які належать до квартиля Q1, 8 статей [5, 7–11, 13, 16] – до квартиля Q2, одна стаття [3] – до квартиля Q3; 14 статей [1–11, 13, 16, 17] опубліковано в журналах, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 12 статей [3, 5, 7–16] – у виданнях, внесених до наукометричних баз даних Scopus і Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, розбитих на 18 підрозділів, висновків та списку використаних джерел із 262 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 339 сторінок, основну частину викладено на 291 сторінці.

Висловлює глибоку і щиру вдячність моєму вчителеві і науковому консультанту академіку НАНУ Володимиру Леонідовичу Макарову за розширення кола моїх наукових інтересів, постановку задач, конструктивні обговорення і поради та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** викладено загальну характеристику роботи: обґрунтовано актуальність теми та її зв'язок з науковими програмами; визначено об'єкт і предмет дослідження та сформульовано його мету і завдання; наведено методи дослідження; охарактеризовано наукову новизну та теоретичне і практичне значення одержаних результатів; прокоментовано особистий внесок здобувача, повноту викладу матеріалу в публікаціях та ступінь його апробації; описано структуру та обсяг дисертації.

У **розділі 1** описано наближені методи, які вивчатимуться далі, дано їх історико-бібліографічний огляд і охарактеризовано сучасний стан розвитку, окреслено ряд малодосліджених питань, а також наведено ряд позначень, термінів і допоміжних тверджень.

Розділ 2 присвячено дослідженню точності різницевих схем для стаціонарних і нестаціонарних рівнянь з урахуванням впливу крайових і початкових умов. У ньому використано стандартні позначення теорії різницевих схем для сіткових множин і функцій.

У підрозд. 2.1 розглянуто задачу

$$\begin{gathered} -\Delta u = f(x), \;\; x \in D, \\ -u'_{x_1} + \sigma u(x) = 0, \;\; x \in \Gamma_{-1}, \quad u = 0, \;\; x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \end{gathered} \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $D = (0,1)^2$ – одиничний квадрат, $\Gamma = \partial D$ і Γ_{-1} – межа і ліва сторона квадрата D відповідно, Δ – оператор Лапласа, $f(x)$ – задана функція, $\sigma = \mathrm{const} \ge 0$. Апроксимуємо задачу (1) різницевою схемою

$$\begin{gathered} -\Lambda y(y) = \varphi(x), \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \\ y(x) = 0, \quad x \in \gamma \setminus \gamma_{-1}, \end{gathered} \tag{2}$$

де $\varphi(x) = T_1 T_2 f(x)$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$,

$$\Lambda_1 y(x) = \begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1}, \;\; x \in \omega, \\ \dfrac{2}{h_1}(y_{x_1} - \sigma y), \;\; x \in \gamma_{-1}, \end{cases} \qquad \Lambda_2 y(x) = \begin{cases} y_{\bar{x}_2 x_2}, \;\; x \in \omega, \\ \left(1 + \dfrac{h_1 \sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2 x_2}, \;\; x \in \gamma_{-1}, \end{cases}$$

T_1, T_2 – оператори точних різницевих схем:

$$(T_1 v)(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1^2} \displaystyle\int_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} \big(h_1 - |x_1 - \xi_1|\big) v(\xi_1, x_2)\, d\xi_1, \quad x \in \omega, \\ \dfrac{2}{h_1^2} \displaystyle\int_0^{h_1} (h_1 - \xi_1) v(\xi_1, x_2)\, d\xi_1, \quad x \in \gamma_{-1}, \end{cases}$$

$$(T_2 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2^2} \int_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} \big(h_2 - |x_2 - \xi_2|\big) v(x_1, \xi_2)\, d\xi_2, \quad x \in \omega \cup \gamma_{-1}.$$

У допоміжних лемах 2.1–2.3 досліджено властивості різницевого оператора задачі (2) та знайдено в сітковій нормі $L_2(\omega)$ оцінки різницевої функції Гріна і похибки апроксимації $\psi(x) = T_1 T_2 f(x) + \Lambda u(x)$. Тоді для похибки $z(x) = y(x) - u(x)$ випливає наступне твердження.

Теорема 2.1. *Нехай розв'язок* $u(x)$ *задачі (1) задовольняє умову* $u \in W_2^4(D)$. *Тоді точність різницевої схеми (2) характеризується ваговою оцінкою*

$$\| \rho^{-1} z \| \le 16\sqrt{6/11} |h|^2 |u|_{W_2^4(D)},$$

де $\rho(x) = \min\left\{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)},\ \sqrt{(1-x_1)x_2}\right\}$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

У зауваженні 2.1 зазначено, що оцінку похибки $z(x)$ можна знайти і за допомогою леми Брембла – Гільберта, однак у такій оцінці була б задіяна невизначена стала (не залежна від $|h|$ і $u(x)$).

У підрозд. 2.2 для задачі

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in D, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma = \partial D, \end{aligned} \tag{3}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $D = (0, l_1) \times (0, l_2)$, побудовано різницеву схему підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні:

$$\begin{aligned} \Lambda y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y(x) &= -T_1 T_2 f(x), \quad x \in \omega, \\ y(x) &= 0, \quad x \in \gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

За допомогою методики підрозд. 2.1 доведено такий результат.

Теорема 2.2. *Нехай розв'язок* $u(x)$ *задачі (3) задовольняє умову* $u \in W_2^6(D)$. *Тоді точність різницевої схеми (4) характеризується ваговою оцінкою*

$$\| \rho^{-1} z \| \le M |h|^4 |u|_{W_2^6(D)},$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, *M – не залежна від* $u(x), h_1, h_2$ *стала,* $|u|_{W_2^6(D)}$ *– півнорма в* $W_2^6(D)$, $\rho(x) = \min\left\{\sqrt{x_1 x_2},\ \sqrt{x_1(l_2 - x_2)},\ \sqrt{(l_1 - x_1)x_2},\ \sqrt{(l_1 - x_1)(l_2 - x_2)}\right\}$.

У підрозд. 2.3 різницеву схему (4) досліджено із застосуванням іншої методики. За допомогою принципу максимуму доведено наступну теорему.

Теорема 2.3. *Нехай розв'язок* $u(x,t)$ *задачі (3) задовольняє умову* $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x_\alpha^4 \partial x_{3-\alpha}^2} \in L_\infty(D)$, $\alpha = 1, 2$, *а для кроків* h_1, h_2 *виконується нерівність* $1/\sqrt{5} \le h_1/h_2 \le \sqrt{5}$. *Тоді точність різницевої схеми (4) характеризується оцінкою*

$$|z(x)| \le M v(x) \|u\|_{W_\infty^6(D)} |h|^4, \quad x \in \omega,$$

де M – не залежна от $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ *стала, а для функції* $v(x)$ *виконуються* *співвідношення* $v(x)=O(|h|)$ *и* $v(x)=O\left(|h|^2\ln|h|^{-1}\right)$ *поблизу сторін і вершин прямокутника D відповідно.*

Підрозд. 2.4 присвячено різницевим апроксимаціям початково-крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності, а підрозд. 2.5 – узагальненню цих результатів на двовимірний випадок:

$$\begin{gathered} u_t(x,t)=\Delta u(x,t)+f(x,t),\ (x,t)\in Q_T=Q\times(0,T), \\ u_{x_1}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_{-1}\times(0,T),\ u(x,t)=0,\ (x,t)\in\left(\Gamma\setminus\Gamma_{-1}\right)\times(0,T), \\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\in Q, \end{gathered} \tag{5}$$

де $x=(x_1,x_2)$, $Q=(0,1)^2$ – одиничний квадрат, $\Gamma=\partial Q$ і Γ_{-1} – межа і ліва сторона квадрата Q відповідно.

Використовуючи стандартні позначення, апроксимуємо задачу (5) різницевою схемою

$$\begin{gathered} y_{\bar t}(x,t)-(\Lambda y)(x,t)=(T_1T_2f)(x,t),\ (x,t)\in\omega_{Q_T}=\left(\omega\cup\gamma_{-1}\right)\times\omega_\tau, \\ y(x,t)=0,\ (x,t)\in\left(\gamma\setminus\gamma_{-1}\right)\times\omega_\tau, \\ y(x,0)=\varphi(x),\ x\in\omega, \end{gathered} \tag{6}$$

де $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1 y=\begin{cases} y_{\bar x_1x_1},\ x\in\omega, \\ 2/h_1\,y_{x_1},\ x\in\gamma_{-1}, \end{cases}$ $\Lambda_2 y=y_{\bar x_2x_2}$, $x\in\omega\cup\gamma_{-1}$.

Для похибки $z(x,t)=y(x,t)-u(x,t)$ доведено такий результат.

Теорема 2.6. *Нехай розв'язок* $u(x_1,x_2,t)$ *задачі (5) задовольняє умови*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_{3-\alpha}\partial t},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 x_2^2},\ \frac{\partial^3 u}{x_\alpha^2\partial t},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial t}\in L_2(Q_T),\ \alpha=1,2.$$

Тоді точність різницевої схеми (6) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\{\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\frac{|z(x,\eta)|^2}{\rho^2(x)}\right\}^{1/2}\le M\left(\tau^2h_2^2+h_2^4+\tau^2h_1^2+h_1^4+\tau^2+h_1^2h_2^2+h_1^2\right)^{1/2},$$

$$(x,t)\in\omega_{Q_T}=\left(\omega\cup\gamma_{-1}\right)\times\omega_\tau,$$

де $\rho(x)=\min\left\{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)},\ \sqrt{(1-x_1)x_2}\right\}$, *а стала M виражається через норми зазначених вище похідних від розв'язку* $u(x,t)$.

У підрозд. 2.6 для наближеного розв'язування задачі

$$\begin{gathered} u_t(x,t)=\Delta u(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T=Q\times(0,T), \\ u(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in Q, \end{gathered} \tag{7}$$

де $f(x,t)$ і $u_0(x)$ – відомі функції, а решта позначень такі самі, як і в (5), побудовано різницеву схему

$$\begin{gathered} y_{\bar t}(x,t)=(\Lambda y)(x,t)+(T_1T_2f)(x,t),\quad (x,t)\in\omega\times\omega_\tau, \\ y(x,t)=0,\ (x,t)\in\gamma\times\omega_\tau, \\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\omega, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,\ \Lambda_\alpha y(x) = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x),\ x \in \omega,\ \alpha = 1,2$.

Застосовуючи спектральний метод і теорему порівняння, як і в підрозд. 2.3, одержуємо наступне твердження.

Теорема 2.7. *Нехай розв'язок* $u(x,t)$ *задачі (7) задовольняє умову* $u \in W_\infty^4(Q_T)$. *Тоді точність різницевої схеми (8) характеризується оцінкою, яка враховує вплив крайової умови:*

$$|z(x,t)| \le M v(x,t)(\tau + h^2), \quad (x,t) \in \omega \times \omega_\tau ,$$

де стала M не залежить від h і τ, а для функції $v(x,t)$ *рівномірно по* $t \in \omega_\tau$ *виконуються співвідношення* $v(x,t) = O(h)$ *і* $v(x,t) = O\left(h^2 \ln h^{-1}\right)$ *поблизу сторін і вершин області Q відповідно.*

Дослідимо тепер точність наближеного розв'язку $y(x,t)$ поблизу дна $t = 0$ просторово-часового паралелепіпеда Q_T.

Теорема 2.8. *Нехай розв'язок* $u(x,t)$ *задачі (7) задовольняє умову* $u \in W_\infty^4(Q_T)$. *Тоді точність різницевої схеми (8) характеризується оцінкою, яка враховує вплив початкової умови:*

$$\| z(\cdot,\tau) \| \le M \tau(\tau + h^2),$$

де M – не залежна від h і τ стала.

Розділ 3 присвячено дослідженню точності сіткових методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку.

У підрозд. 3.1 розглянуто крайову задачу для одновимірного диференціального рівняння з похідною порядку $1/2$:

$$u''(x) - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}} dy = -f(x), \quad x \in (0,1), \qquad (9)$$
$$u(0) = 0,\ u(1) = 0.$$

Упродовж підрозд. 3.1–3.3 використано стандартні позначення для норми і півнорми у просторі Гельдера $C_{[0,1]}^{k,\lambda}$ та норми у просторі $C_{[0,1]}^{k}$.

Звівши задачу (9) до еквівалентного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$u(x) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x \int_x^1 \sqrt{1-y}\, u(y) dy + \int_0^x \left(x\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y} \right) u(y) dy \right\} = \qquad (10)$$
$$= \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1),$$

де $G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{при } x \le \xi, \\ \xi(1-x) & \text{при } \xi \le x, \end{cases}$ – функція Гріна крайової задачі

$$u''(x) = -f(x),\ x \in (0,1),\ u(0) = 0,\ u(1) = 0,$$

дослідимо вплив крайової умови на розв'язок $u(x)$.

Теорема 3.1. *Нехай параметр* α *в рівнянні (10) задовольняє умову* $\alpha < \sqrt{\pi}/(2K)$, *де* $K = \max\limits_{0 \le x \le 1} \varphi(x) = 0{,}3046916809\ldots$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x(1-x)} \left\{ x \int_x^1 y(1-y)^{3/2} dy + (1-x) \int_0^x y\sqrt{1-y}\, dy \right\}.$$

Тоді для розв'язку $u(x)$ *справджується вагова оцінка*

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_\infty \le \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} K \right)^{-1} \| f \|_\infty .$$

Для розв’язування рівняння (10) застосуємо метод сіток. Введемо множину вузлів $\overline{\omega} = \{ x_j = jh,\ j = 0,1,\ldots,N,\ h = 1/N \}$ і побудуємо сіткову схему

$$u^h(x_j) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ x_j \sum_{k=j+1}^{N} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-y}\, dy + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{j} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x_j \sqrt{1-y} - \sqrt{x_j - y} \right) dy \right\} = \int_0^1 G(x_j, \xi) f(\xi) d\xi, \qquad (11)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1,\ u^h(x_N) = 0.$$

Для похибки $z(x) = u^h(x) - u(x)$ в сітковій нормі $\| w \|_{\infty,\omega} = \max\limits_{x \in \omega} |w(x)|$ доведено таке твердження.

Теорема 3.2. *Нехай розв'язок* $u(x)$ *рівняння (10) задовольняє умову* $u \in C^1_{[0,1]}$ *і для параметра* α *виконується нерівність* $1 - \alpha/\sqrt{\pi} > 0$. *Тоді точність сіткової схеми (11) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:*

$$\left\| \frac{u - u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty,\omega} \le M h \| u \|_{1,\infty},$$

де $M = 4\alpha (1 - \alpha/\sqrt{\pi})^{-1} / \sqrt{\pi}$ *– стала, не залежна від* h *і* $u(x)$.

Точність сіткової схеми другого порядку апроксимації досліджено в теоремі 3.3.

У підрозд. 3.2 результати підрозд. 3.1 узагальнено на випадок крайової задачі

$$\begin{gathered} u''(x) - (D^\alpha_{0+} u)(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{gathered} \qquad (12)$$

де $(D^\alpha_{0+} f)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

За допомогою принципу максимуму доведено наступне твердження.

Теорема 3.4. *Якщо* $f(x)\in C_{[0,1]}$, *то крайова задача Діріхле (12) у класі функцій* $C^2_{(0,1)}\cap C_{[0,1]}$ *є однозначно розв'язною.*

Надалі скористаємося таким означенням.

Означення 3.1. *Слабким розв'язком крайової задачі Діріхле (12) називається розв'язок* $u(x)\in C_{[0,1]}$ *інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду*

$$u(x)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-(1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt+\right.$$

$$\left.+x\int_0^x\left((1-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha}\right)u(t)dt+x\int_x^1(1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right)= \tag{13}$$

$$=-(1-x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)+x\left(\varphi(1)-\varphi(x)\right),\quad x\in[0,1].$$

У наступному твердженні одержано вагову оцінку для $u(x)$.

Теорема 3.5. *Нехай* $\varphi(x)\in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ *і для* β *виконується умова*

$$\frac{1}{\ln 4}\cdot\ln\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}<\beta\le 1\quad(0<\alpha<1). \tag{14}$$

Тоді $u(x)\in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ *і для нього справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:*

$$\left\|\frac{u(x)}{[x(1-x)]^{\beta}}\right\|_{\infty}\le 2^{\beta}\left(1-\frac{3-\alpha}{4^{\beta}\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1}|\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}}.$$

У зауваженні 3.2 показано, що множина значень β, які задовольняють умову (14), непорожня.

Для наближеного розв'язування рівняння (13) побудовано сіткову схему за допомогою кусково-сталої інтерполяції:

$$u^h(x_j)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}dt+\right. \tag{15}$$

$$\left.+x_j\sum_{k=1}^{j}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha}\right)dt+x_j\sum_{k=j+1}^{N}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}dt\right\}=$$

$$=-(1-x_j)\left(\varphi(x_j)-\varphi(0)\right)+x_j\left(\varphi(1)-\varphi(x_j)\right),\ \ j=1,2,\ldots,N-1,\ \ u^h(x_N)=0.$$

Її точність досліджено в наступній теоремі.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови теореми 3.5. Тоді точність сіткової схеми (15) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:*

$$\left\|\frac{u-u^h}{[x(1-x)]^{\beta}}\right\|_{\infty,\omega}\le Mh^{\beta}\,|u|_{0,\beta},$$

де $M=\left(1-\frac{3-\alpha}{4^{\beta}\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1}\cdot\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$ *– стала, не залежна від* h *і* $u(x)$.

Зауваження 3.3. *Якщо* $u(x)\in C^1_{[0,1]}$, *то точність сіткової схеми (15) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\|\frac{u-u^h}{x(1-x)}\right\|_{\infty,\omega}\le Mh\,\|u\|_{1,\infty},$$

де $M=\left(1-\frac{3-\alpha}{4\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1}\cdot\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$ *– стала, не залежна від* h *і* $u(x)$.

Сіткову схему, побудовану за допомогою кусково-лінійної інтерполяції, досліджено в теоремі 3.7 і зауваженні 3.4. Наприкінці підрозд. 3.2 проведено числові розрахунки, які узгоджуються з теоретичними висновками.

У підрозд. 3.3 розглянуто крайову задачу для диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u(x)}{dx^2}+k_1(x)D^{\alpha}u(x)+k_2(x)u(x)=f(x),\quad x\in(0,1),\\ u(0)=0,\quad u(1)=0,\end{gathered}\tag{16}$$

де $D^{\alpha}u(x)$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку $\alpha\in(0,1)$.

Виконуючи нескладні перетворення, задачу (16) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно невідомої функції $u'(x)$:

$$u'(x)+\int_0^1 K(x,t)u'(t)dt=\int_0^1 d\eta\int_\eta^x f(\xi)d\xi,\quad x\in[0,1],\tag{17}$$

де ядро $K(x,t)$ має вигляд

$$K(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\begin{cases}(x-t)^{1-\alpha}k_1(x)+\int_t^1(\eta-t)^{1-\alpha}\left(k_1(\eta)(1-\eta)\right)'d\eta-\\ -\int_t^x(\eta-t)^{1-\alpha}k_1'(\eta)d\eta+\int_t^x k_2(\eta)d\eta-\int_t^1(1-\eta)k_2(\eta)d\eta, & t\le x,\\ \int_t^1(\eta-t)^{1-\alpha}\left(k_1(\eta)(1-\eta)\right)'d\eta-\int_t^1(1-\eta)k_2(\eta)d\eta, & t\ge x.\end{cases}$$

У теоремах 3.8 і 3.9 розглянуто випадок сталих коефіцієнтів. Дослідимо випадок змінних коефіцієнтів.

Теорема 3.10. *Нехай*

$$k_1(x)\in W^1_\infty(\Omega),\ k_2(x)\in L_\infty(\Omega),\ f(x)=f_0'(x),\ f_0(x)\in L_\infty(\Omega)$$

і виконується умова $\frac{13}{6}\|k_1\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\frac{2}{3}\|k_2\|_{L_\infty(\Omega)}<1$. *Тоді* $\forall\alpha\in[0,1]$ *інтегральне рівняння (17) має єдиний розв'язок* $u'(x)\in L_\infty(\Omega)$, *а отже, крайова задача (16) має* *єдиний розв'язок* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega)$, *і для нього справджується оцінка*

$$|u|_{W^1_\infty(\Omega)} \le \frac{2}{1-q} \| f_0 \|_{L_\infty(\Omega)}, \quad q = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,t)|\, dt.$$

Наслідком допоміжної леми 3.3 і теореми 3.10 є наступний результат.

Теорема 3.11. *Нехай виконуються умови теореми 3.10. Тоді для розв'язку задачі (16) справджується вагова оцінка*

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{u(x)}{\rho(x)} \right| \le \frac{2}{1-q} \| f_0 \|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \rho(x) = \min(x, 1-x).$$

Знайдемо тепер достатні умови, за яких виконується $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Теорема 3.12. *Нехай* $k_1(x) \in W^1_\infty(\Omega)$, $k_2(x) \in L_\infty(\Omega)$,

$$f(x) = f_0(x) + f_1'(x) \in H^{-1}(\Omega), \text{ де } f_0(x), f_1(x) \in L_2(\Omega),$$

і виконується умова

$$\frac{169}{160} \| k_1 \|^2_{W^1_\infty(\Omega)} + \frac{7}{30} \| k_2 \|^2_{L_\infty(\Omega)} + \frac{31}{40} \| k_1 \|_{W^1_\infty(\Omega)} \| k_2 \|_{L_\infty(\Omega)} < 1.$$

Тоді $\forall \alpha \in [0,1]$ *інтегральне рівняння (17) має єдиний розв'язок* $u' \in L_2(\Omega)$, *а отже, крайова задача (16) має єдиний розв'язок* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, *і для нього справджується оцінка*

$$|u|_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{1-q}\left(\sqrt{2} \| f_0 \| + 2 \| f_1 \|\right), \quad q = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx}.$$

З теореми 3.12 і допоміжної леми 3.2 випливає таке твердження.

Теорема 3.13. *Нехай виконуються умови теореми 3.12. Тоді справджується вагова оцінка*

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{u(x)}{\sqrt{\rho(x)}} \right| \le \frac{1}{1-q}\left(\sqrt{2} \| f_0 \| + 2 \| f_1 \|\right), \quad \rho(x) = \min(x, 1-x).$$

У наступній теоремі доведено ще одну вагову оцінку.

Теорема 3.14. *Нехай виконуються припущення теореми 3.12 і* $f \in L_2(\Omega)$. *Тоді для розв'язку* $u(x)$ *задачі (16) маємо* $u \in H^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$ *і для нього справджується вагова оцінка*

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{u(x)}{\rho(x)} \right| \le |u|_{H^2(\Omega)}, \quad \rho(x) = \min(x, 1-x).$$

Апроксимуємо інтегральне рівняння (17) сітковою схемою

$$y_{\overline{x}}(x_i) + \sum_{p=1}^{N} a_{i,p} y_{\overline{x}}(x_p) = \varphi(x_i), \quad i = 1,\ldots,N,$$

$$a_{i,p} = \frac{1}{h}\int_{x_{p-1}}^{x_p} dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,t)dx, \quad \varphi(x_i) = \frac{1}{h}\int_0^1 d\eta \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\eta}^{x} f(\xi)d\xi. \tag{18}$$

Теорема 3.15. *Нехай виконуються умови теореми 3.14. Тоді точність сіткової схеми (18) характеризується оцінкою*

$$\| z_{\overline{x}}]| \le h\frac{q}{\sqrt{3}(1-q)} |u|_{H^2(\Omega)},$$

а також ваговою оцінкою, яка враховує початковий ефект:

$$\max_{x\in\omega}\left|\frac{z(x)}{\sqrt{\rho(x)}}\right| \le h\frac{q}{\sqrt{3}(1-q)} |u|_{H^2(\Omega)},$$

де $\rho(x) = \min(x, 1-x)$, $q = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dtdx}$.

Одержана в теоремі 3.15 вагова апріорна оцінка свідчить про те, що в нормі $C(\omega)$ похибка сіткової схеми (18) у примежових вузлах має порядок $O(h\sqrt{h})$, тоді як далі від них є величиною $O(h)$.

Підрозд. 3.4 присвячено розв'язуванню методом сіток першої крайової задачі для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною порядку $1/2$ відносно однієї із змінних:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{u(t,y)}{\sqrt{x-t}}dt + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -f(x,y), \; x\in\Omega = (0,1)^2, \tag{19}$$
$$u(x,y) = 0, \; (x,y)\in\Gamma = \partial\Omega.$$

Після деяких перетворень одержимо інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$u(x,y) - \int_0^1\int_0^1 K(x,t;y,\eta)u(t,\eta)d\eta dt = \int_0^1\int_0^1 G(x,\xi;y,\eta) f(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{20}$$

де $K(x,t;y,\eta)$ – відоме ядро, $G(x,\xi;y,\eta)$ – функція Гріна оператора Лапласа.

Теорема 3.16. *Нехай параметр* α *задовольняє умови*

$$1 - \frac{2\alpha\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}} = 1 - \alpha\cdot 0{,}9382979416\ldots > 0, \quad 1 - \frac{2\alpha\zeta(3/2-\sigma)}{(\sigma+1)\pi^{3/2-\sigma}} > 0,$$

а σ *– як завгодно близьке до* $1/2$ *знизу число,* $\zeta(\cdot)$ *– дзета-функція Рімана. Тоді для розв'язку* $u(x,y)$ *задачі (19) справджується вагова оцінка*

$$\left\|\frac{u(x,y)}{\rho(x,y)}\right\|_\infty \le M \| f \|_\infty,$$

де $\rho(x,y) = \min\{x^\sigma, (1-x)^\sigma, y, 1-y\}$, *M – стала, не залежна від* $u(x,y)$.

Для наближеного розв'язування рівняння (20) застосуємо метод сіток. Уведемо сіткову множину $\bar{\omega}=\{(x_i,y_j):\ x_i=ih,\ y_j=jh,\ i,j=0,1,\ldots,N,\ h=1/N\}$ і апроксимуємо рівняння (20) сітковою схемою

$$u^h(x_i,y_p)-\sum_{k,j=1}^{N-1}u^h(x_k,y_j)\iint\limits_{\Omega_{kj}}K(x_i,t;y_p,\eta)dtd\eta= \\ =\int_0^1\int_0^1 G(x_i,t;y_p,\eta)f(t,\eta)dtd\eta\,,\quad i,p=1,2,\ldots,N-1, \tag{21}$$

де $\Omega_{kj}=[x_{k-1},x_k]\times[y_{j-1},y_j],\ k,j=1,\ldots,N$. Позначимо сіткову норму

$$\|w\|_\infty\equiv\|w\|_{\infty,\bar{\omega}}=\max_{(x,y)\in\bar{\omega}}|w(x,y)|.$$

Теорема 3.17. *Нехай розв'язок* $u(x,y)$ *рівняння (20) задовольняє умову* $u\in C^1(\bar{\Omega})$ *і для параметра* α *виконуються нерівності*

$$1-\frac{0{,}72\alpha}{\sqrt{\pi}}\zeta(3/2-\sigma)>0,\quad 1-\frac{2\alpha}{\pi^{3/2-\sigma}}\zeta(3/2-\sigma)>0,\quad \sigma\in[0,1/2).$$

Тоді точність сіткової схеми (21) характеризується ваговою оцінкою, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\|\frac{u-u^h}{\rho(x,y)}\right\|_\infty\le Mh\|u\|_{1,\infty},$$

де $\rho(x,y)=\min\{x^\sigma,(1-x)^\sigma,y^\sigma,(1-y)^\sigma\}$, $\zeta(\cdot)$ *– дзета-функція Рімана, M – стала, не залежна від h і* $u(x,y)$.

У зауваженнях 3.7 і 3.8 зазначено, що аналогічні результати можна отримати і для дробової похідної відносно змінної y, а запропоновану методику застосувати також у загальному випадку похідної порядку α, оскільки випадок $\alpha=1/2$ розглянуто лише для спрощення записів.

У підрозд. 3.5 розглянуто задачу Гурса

$$u''_{xy}(x,y)+k_1(x,y)D_x^\alpha\big(u(\cdot,y)\big)+k_2(x,y)D_y^\alpha\big(u(x,\cdot)\big)+ \\ +k_3(x,y)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega=[0,T]^2, \\ u(x,0)=0,\ x\in[0,T],\quad u(0,y),\ y\in[0,T]\quad \big(0<T<1,\ \alpha\in(0,1)\big). \tag{22}$$

Після деяких перетворень одержимо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$u(x,y)+\int_0^x\int_0^y K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi=\varphi(x,y) \tag{23}$$

з правою частиною $\varphi(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta d\xi$ і ядром

$$K(x,y,\xi,\eta)=k_3(\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{k_1(x,\eta)}{(x-\xi)^\alpha}-\int_\xi^x\frac{\partial k_1(s,\eta)}{\partial s}\frac{ds}{(s-\xi)^\alpha}+\frac{k_2(\xi,y)}{(y-\eta)^\alpha}-\int_\eta^y\frac{\partial k_2(\xi,t)}{\partial t}\frac{dt}{(t-\eta)^\alpha}\right].$$

Для розв'язування рівняння (23) застосуємо метод послідовних наближень

$$u_{n+1}(x,y)=-\int_0^x\int_0^y K(x,y,\xi,\eta)u_n(\xi,\eta)d\eta d\xi+\varphi(x,y),\ n=0,1,\ldots, \tag{24}$$
$$u_0(x,y)=0.$$

Поклавши $z_{n+1}(x,y)=u_{n+1}(x,y)-u_n(x,y)$, дістанемо рекурентну послідовність

$$z_{n+1}(x,y)=-\int_0^x\int_0^y K(x,y,\xi,\eta)z_n(\xi,\eta)d\eta d\xi,\ n=1,2,\ldots,\quad z_1(x,y)=\varphi(x,y)\,.$$

Позначимо $\|v\|_{x,y}=\max\limits_{t\in[0,x],\ s\in[0,y]}|v(t,s)|$ і доведемо теорему про збіжність рекурентної послідовності (24).

Теорема 3.19. *Нехай виконуються умови*

$$k_1(x,y),\,k_2(x,y)\in W_\infty^1(\Omega),\ \ k_3(x,y),\,\varphi(x,y)\in L_\infty(\Omega).$$

Тоді метод послідовних наближень (24) рівномірно збігається до єдиного розв'язку $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ інтегрального рівняння (23) (слабкого розв'язку задачі Гурса (22)), для якого справджується оцінка

$$\|u\|_{x,y}\le\left(M(1-\alpha)+1\right)e^M\,\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)},$$

де $M=(2-\alpha)\mu T^{2(1-\alpha)}\big/(1-\alpha)^2$, $\mu=\|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)}+\|k_2\|_{W_\infty^1(\Omega)}+\|k_3\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Точність методу (24) характеризується оцінкою

$$\|u-u_n\|_{x,y}\le\frac{M^{n-1}\left(M(1-\alpha)+1\right)e^M}{(n-1)!\,\Gamma\left(n(1-\alpha)+2\right)}\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\quad\forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Рівняння (22) можна звести до інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,t,s)\frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt=f(x,y) \tag{25}$$

з ядром $Q(x,y,t,s)=\dfrac{k_1(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}+\dfrac{k_2(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{1}{(y-s)^\alpha}+k_3(x,y)\,.$

Для розв'язання рівняння (25) застосуємо метод послідовних наближень

$$v_{n+1}(x,y)=-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\xi,\eta)v_n(\xi,\eta)d\eta d\xi+f(x,y),\ n=0,1,\ldots,\ v_0(x,y)=0.$$

Тоді для $z_{n+1}(x,y)=u_{n+1}(x,y)-u_n(x,y)$ маємо рекурентну послідовність рівнянь

$$z_{n+1}(x,y)=-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\xi,\eta)z_n(\xi,\eta)d\eta d\xi,\ n=1,2,\ldots,\quad z_1(x,y)=f(x,y)\,.$$

У наступній теоремі досліджено гладкість мішаної похідної $u''_{xy}(x,y)$.

Теорема 3.20. *Нехай* $k_1(x,y), k_2(x,y)\ k_3(x,y),\ f(x,y)\in L_\infty(\Omega)$. *Тоді* $u''_{xy}(x,y)\in C(\bar\Omega)$ *і справджується оцінка*

$$\| u''_{xy}\|_{T,T}\le \left(N(1-\alpha)+1\right)e^N \| f\|_{L_\infty(\Omega)},$$

де $N=\mu T^{2(1-\alpha)}\big/(1-\alpha)$, $\mu=\| k_1\|_{L_\infty(\Omega)}+\| k_2\|_{L_\infty(\Omega)}+\| k_3\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Звідси випливає наступне твердження.

Теорема 3.21. *Нехай виконуються умови теореми 3.20. Тоді справджуються оцінки*

$$\max_{x,y\in[0,T]}\left|\frac{u(x,y)}{xy}\right|\le \| u''_{xy}\|_{T,T},\quad \max_{x,y\in[0,T]}\left|\frac{u(x,y)}{xy}\right|\le \left(N(1-\alpha)+1\right)e^N \| f\|_{L_\infty(\Omega)},$$

перша з яких є непокращуваною в тому розумінні, що існує задача (22) з розв'язком $u(x,y)=xy$, *на якому ця оцінка перетворюється на рівність.*

Позначимо $C^{0,\lambda}(\bar\Omega)$ клас неперервних на $\bar\Omega$ функцій, які задовольняють умову Гельдера з показником λ. Півнорма в $C^{0,\lambda}(\bar\Omega)$ визначається так:

$$|u|_{C^{0,\lambda}(\bar\Omega)}=\sup_{(x,y),\,(s,t)\in\bar\Omega}\frac{|u(x,y)-u(s,t)|}{\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}}.$$

Доведемо підсилений результат про гладкість розв'язку задачі (22).

Теорема 3.22. *Нехай коефіцієнти і права частина рівняння (22) задовольняють умову* $k_1(x,y), k_2(x,y)\ k_3(x,y),\ f(x,y)\in C^{0,1-\alpha}(\bar\Omega)$. *Тоді* $u''_{xy}(x,y)\in C^{0,1-\alpha}(\bar\Omega)$.

Введемо множину вузлів $x_i=ih,\ y_j=jh,\ i,j=0,1,\ldots,N,\ h=T/N$ ($N\ge 1$ – ціле число) і апроксимуємо задачу (22) сітковою схемою

$$Lv_{i,j}\equiv v_{\bar x\,\bar y,i,j}+ \tag{26}$$

$$+\sum_{r=1}^{3}\left\{\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{n=1}^{i-1}{}_r a_{n,l}^{i,j}v_{\bar x\,\bar y,n,l}+\sum_{l=1}^{j-1}{}_r b_{i,l}^{i,j}v_{\bar x\,\bar y,i,l}+\sum_{n=1}^{i-1}{}_r c_{n,j}^{i,j}v_{\bar x\,\bar y,n,j}+{}_r d_{i,j}^{i,j}v_{\bar x\,\bar y,i,j}\right\}=$$

$$=\varphi_{i,j},\quad i,j=1,2,\ldots,N,$$

де $\varphi_{i,j}$, ${}_r a_{n,l}^{i,j}$, ${}_r b_{i,l}^{i,j}$, ${}_r c_{n,j}^{i,j}$, ${}_r d_{i,j}^{i,j}$ – відомі величини.

Теорема 3.23. *Нехай виконуються умови теореми 3.22 і коефіцієнти* $k_1(x,y),\ k_2(x,y),\ k_3(x,y)$ *задовольняють умову*

$$q\equiv\frac{\| k_1\|_{C(\bar\Omega)}}{\Gamma(2-\alpha)}T^{1-\alpha}\left(T+\frac{h}{2}\right)+\frac{\| k_2\|_{C(\bar\Omega)}}{\Gamma(2-\alpha)}T^{1-\alpha}\left(T+\frac{h}{2}\right)+\| k_3\|_{C(\bar\Omega)}\left(T+\frac{h}{2}\right)^2<1.$$

Тоді точність сіткової схеми (26) характеризується оцінкою

$$\| z_{\bar{x}\bar{y}} \|_{T,T} \le \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} | u |_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})},$$

$$M = \frac{\| k_1 \|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha}(2T+h) + \frac{\| k_2 \|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(2-\alpha)} T^{1-\alpha}(2T+h) + \frac{1}{2} \| k_3 \|_{C(\bar{\Omega})} (2T+h)^2.$$

Теорема 3.24. *Нехай виконуються умови теореми 3.23. Тоді точність сіткової схеми (26) характеризується такими ваговими оцінками:*

$$\max_{i,j=1,\ldots,N} \left| \frac{z(x_i, y_j)}{x_i y_j} \right| \le \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} | u''_{xy} |_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})},$$

$$\max_{j=1,\ldots,N} \left| \frac{z_{\bar{x}}(x_i, y_j)}{y_j} \right| \le \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} | u''_{xy} |_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

$$\max_{i=1,\ldots,N} \left| \frac{z_{\bar{y}}(x_i, y_j)}{x_i} \right| \le \frac{M}{1-q} h^{1-\alpha} | u''_{xy} |_{C^{0,1-\alpha}(\bar{\Omega})}, \quad j = 1,\ldots,N.$$

Одержані в теоремі 3.24 вагові апріорні оцінки свідчать про те, що в нормі $C(\omega)$ похибка сіткової схеми (26) поблизу сторони $x = 0$ ($y = 0$) і вершини (0,0) квадрата $\Omega = (0,1)^2$ має порядок відповідно $O(h^{2-\alpha})$ і $O(h^{3-\alpha})$, тоді як далі від них є величиною $O(h^{1-\alpha})$.

Розділ 4 присвячено дослідженню точності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти. У підрозд. 4.1 розглянуто задачу

$$\begin{gathered} x'(t) + Ax(t) = 0, \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{gathered} \tag{27}$$

із самоспряженим додатно визначеним оператором A, що діє в гільбертовому просторі H і має щільну в H область визначення $D(A)$. У випадку скінченної гладкості початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$, розв’язок задачі (27) зображується рядом

$$x(t) = e^{-tA} x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0, \tag{28}$$

де γ – довільна додатна стала, $L_p^{(0)}(t)$ – поліноми Лагерра, I – тотожний оператор, T_γ – перетворення Келі оператора A: $T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A)$.

За наближений розв'язок задачі (27) береться відрізок ряду (28):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{N} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0. \tag{29}$$

Точність цього наближення досліджено в таких теоремах.

Теорема 4.1. *Нехай* $A = A^* \ge \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$; $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, і виконується умова $0 < \gamma \le \lambda_0$. *Тоді точність наближеного методу (29) характеризується оцінкою*

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \| x(t) - x_N(t) \|^2 \, dt \right\}^{1/2} \le \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \| A^{\sigma} x_0 \|, \qquad (30)$$

де $N+1 \ge \frac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$, *а стала* $C = \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}}$ *не залежить від N і* x_0.

Теорема 4.2. *Нехай оператор A задовольняє умови теореми 4.1 і має дискретний спектр* $0 < \lambda_0 \le 1,\ \lambda_i = i,\ i = 1, 2, \ldots$. *Тоді для всіх* $N = 2, 3, \ldots$ *і довільного* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$z_N > \frac{2^{-(\sigma+2)} 3^{-3}}{(N+\gamma)^{\sigma+1/2} \ln^{1/2+\varepsilon}(2N)},$$

тобто оцінка (30) майже (з точністю до логарифма) непокращувана за порядком.

Дослідимо тепер експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі (29). Позначимо через $\mathfrak{R}(A, \mu, L)$ множину елементів *x* банахового простору *X* таких, що $\| x \|_{\mathfrak{R}(A,\mu,L)} = \sup\limits_{0 \le n < \infty} \frac{\| A^n x \|}{L^n M_n} < \infty$, де $0 < L < +\infty$, $\mu = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ – неспадна послідовність додатних чисел.

Теорема 4.3. *Нехай оператор* $A = A^* \ge \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, *діє в гільбертовому просторі H і має щільну в H область визначення D(A). Тоді при* $\gamma = \lambda_0 / (1+\sqrt{2})$ *і* $x_0 \in \mathfrak{R}(A, (1), \lambda_0)$ *метод перетворення Келі (29) має експоненціальну швидкість збіжності і його точність характеризується оцінкою*

$$z_N \le \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\gamma} \right)^{1/2} \exp\left(-(N+2) \ln(1+\sqrt{2}) \right) \| x_0 \|_{\mathfrak{R}(A,(1),\lambda_0)}, \quad N = 0, 1, \ldots,$$

яка непокращувана за порядком.

У наступних двох теоремах одержано інтегральну вагову оцінку типу (30) та досліджено її непокращуваність за порядком.

Теорема 4.4. *Нехай оператор* $A = A^* \ge \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, *діє в гільбертовому просторі H має щільну в H область визначення D(A);* $0 < \gamma \le \lambda_0$, $x_0 \in D(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$. *Тоді точність методу перетворення Келі (29) характеризується ваговою оцінкою*

$$z_{t,N} \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} t^{-1} \| x(t) - x_N(t) \|^2 \, dt \right\}^{1/2} \le \frac{C}{N^{\sigma}} \| A^{\sigma} x_0 \|, \qquad (31)$$

де $N+1 \ge \max(\lambda_0 \sigma / (2\gamma), \sigma)$, *C – стала, не залежна від N і* x_0.

Теорема 4.5. *Нехай оператор A задовольняє умови теореми 4.4 і виконується припущення* $0 < \lambda_0 \le 1$. *Тоді оцінка (31) швидкості збіжності* *методу перетворення Келі (29) є майже (з точністю до логарифма) непокращуваною за порядком N.*

Непокращуваність оцінки (31) досліджено також у зауваженні 4.1.

Розглянемо тепер випадок, коли вектор x_0 належить простору $\Re(A,(1),\lambda_0)$.

Теорема 4.6. *Нехай самоспряжений додатно визначений оператор* $A = A^* \geq \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, *із щільною в H областю визначення D(A) має дискретний спектр* $0 < \gamma(1+\sqrt{2}) = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, *а відповідні власні функції* e_i, $i = 0,1,\ldots$, *утворюють ортонормований базис в H,* $x_0 \in \Re(A,(1),\lambda_0)$. *Тоді метод перетворення Келі (29) має експоненціальну швидкість збіжності і його точність характеризується оцінкою*

$$z_{t,N}^2 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{(1+\sqrt{2})^{-2N-2}}{N+1} \| x \|_{\Re(A,(1),\lambda_0)}^2, \quad N = 0,1,\ldots,$$

яка є непокращуваною за порядком.

Теорема 4.7 є оберненою теоремою наближення для задачі Коші (27). Аналогічний результат одержано в теоремі 4.8 у випадку задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку.

Наступні дві теореми присвячено узагальненню результатів для задачі Коші (27) на випадок банахового простору.

Теорема 4.9. *Нехай A – діючий у банаховому просторі E замкнутий лінійний логарифмічно секторіальний оператор із щільною в E областю визначення D(A). Тоді при кожному* $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$, *задача (27) має єдиний розв'язок і для нього виконується зображення (28).*

Теорема 4.10. *Нехай A – замкнутий лінійний логарифмічно секторіальний оператор із щільною в банаховому просторі E областю визначення D(A) і* $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$. *Тоді точність наближеного розв'язку (29) характеризується оцінкою*

$$\sup_{t \in [0,+\infty)} \| x(t) - x_N(t) \| \leq \frac{c}{N^{\sigma-\varepsilon}} \| A^\sigma x_0 \|,$$

зі сталою $c = c(\varphi,\gamma,M,\sigma,\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,\sigma)$, $N+1 \geq (1+\sigma-\varepsilon)/\cos\varphi$.

У підрозд. 4.2 для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором застосовано паралельний метод довільного порядку точності, на одному з етапів реалізації якого використано метод перетворення Келі.

Розділ 5 присвячено дослідженню точності методу перетворення Келі для розв'язування абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах. У підрозд. 5.1 розглянуто крайову задачу

$$\begin{gathered} u''(x) - Au(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{gathered} \tag{32}$$

де A – самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в H областю визначення $D(A)$ і спектром $\Sigma(A) \subset [\lambda_0,+\infty)$, $\lambda_0 > 0$. За допомогою розкладу функції $f(x)$ у правій частині рівняння в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)\,f_{s,k}+f_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\cos(2k\pi x)\,f_{c,k}\,, \tag{33}$$

$$f_0=\int_0^1 f(x)dx,\quad f_{s,k}=\int_0^1 f(x)\sqrt{2}\sin(2k\pi x)dx,\quad f_{c,k}=\int_0^1 f(x)\sqrt{2}\cos(2k\pi x)dx\,,$$

розв'язок $u(x)$ можна подати у вигляді ряду

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)\left[(2k\pi)^2 I+A\right]^{-1}f_{s,k}+ \tag{34}$$

$$+\left(A\operatorname{sh}\sqrt{A}\right)^{-1}\left\{\operatorname{sh}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}(1-x)\right)-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}x\right)\right\}f_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\left[(2k\pi)^2 I+A\right]^{-1}\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{-1}\sqrt{A}\left\{\cos(2k\pi x)\operatorname{sh}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}(1-x)\right)-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}x\right)\right\}f_{c,k}\,.$$

У наступних двох теоремах одержано вагові оцінки для розв'язку $u(x)$ у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини $f(x)$.

Теорема 5.1. *Нехай права частина $f(x)$ рівняння (32) зображена рядом Фур'є (33), який задовольняє умови* $f_0\in D(A^{\sigma}),\ \sigma>0$,

$$\|f_s\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{2\sigma}\|f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\quad \|f_c\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{2\sigma}\|f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty\,.$$

Тоді для розв'язку $u(x)$ крайової задачі (32) справджується вагова оцінка

$$\left\|\frac{u(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le C\left(\|f_s\|_{\sigma}+\|A^{\sigma}f_0\|+\|f_c\|_{\sigma}\right),$$

де $C=C(\lambda_0,\sigma)$ – не залежна від $u(x)$ стала.

Теорема 5.2. *Нехай права частина $f(x)$ рівняння (32) зображена рядом Фур'є (33), який задовольняє умови:* $f_0\in D(e^{A})$,

$$\|f_s\|_{\infty}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\quad \|f_c\|_{\infty}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty\,.$$

Тоді для розв'язку $u(x)$ задачі (32) справджується вагова оцінка

$$\left\|\frac{u(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le C\left(\|f_s\|_{\infty}+\|e^{A}f_0\|+\|f_c\|_{\infty}\right),\quad x\in(0,1),$$

де $C=\max\left(C(\lambda_0)/(2\sqrt{3}e),1/(2e^{\lambda_0})\right)$, *а* стала $C(\lambda_0)$ *та сама, що і в теоремі 5.1.*

За наближений розв'язок задачі (32) береться частинна сума ряду (34):

$$u_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)\left[(2k\pi)^2 I+A\right]^{-1}f_{s,k}+ \tag{35}$$

$$+\left(A\operatorname{sh}\sqrt{A}\right)^{-1}\left\{\operatorname{sh}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}(1-x)\right)-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}x\right)\right\}f_0+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\left[(2k\pi)^2 I+A\right]^{-1}\times$$

$$\times \operatorname{sh}^{-1}\sqrt{A}\left\{\cos(2k\pi x)\operatorname{sh}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}(1-x)\right)-\operatorname{sh}\left(\sqrt{A}x\right)\right\} f_{c,k}.$$

У наступній теоремі досліджено похибку цього наближення у випадку скінченної гладкості вхідних даних.

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови теореми 5.1. Тоді точність наближеного розв'язку (35) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)} \right\| \le \frac{C}{N^{\sigma+1/2}}\left(\| f_s \|_\sigma + \| f_c \|_\sigma + \| A^\sigma f_0 \|\right),$$

де $C = C(\sigma,\lambda_0)$ *– не залежна від N стала, а* стала $C(\lambda_0)$ *та сама, що і в теоремі 5.1.*

Розглянемо ще один спосіб наближення точного розв'язку:

$$u_{N,M}(x) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2}\sin(2k\pi x)\left[(2k\pi)^2 I + A\right]^{-1} f_{s,k} + \tag{36}$$

$$+A^{-1}\left\{ I - \sum_{j=0}^{M}\left[v_j(1-x)+v_j(x)\right]\left[(I+A)^{-1}A\right]^j \right\} f_0 + \sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\left[(2k\pi)^2 I + A\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{ \left(\cos(2k\pi x)-1\right)I - \sum_{j=1}^{M}\left[v_j(1-x)+v_j(x)\right]\left[(I+A)^{-1}A\right]^j \right\} f_{c,k}.$$

У випадку скінченної гладкості вхідних даних доведено такий результат.

Теорема 5.4. *Нехай виконуються умови* $M = N,\ \sigma > 1,$

$$M+1 \ge \max\left\{2\sigma,(1+\lambda_0)\sigma\right\},\quad \| f_s \|_{\sigma-3/2} \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \| f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\| f_c \|_{\sigma-3/2} \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-3} \| f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty,\quad f_0 \in D(A^{\sigma-1}),$$

$$f_{c,k} \in D(A^{\sigma-1/2})\ \ \forall k \in \mathbb{N},\quad \| f_c \|_{A^{\sigma-1/2}} \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| A^{\sigma-1/2} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (36) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x)-u_{N,M}(x)}{\min(x,1-x)} \right\| \le \frac{C}{N^{\sigma-1}}\left(\| f_c \|_{\sigma-3/2} + \| f_s \|_{\sigma-3/2} + \| f_c \|_{A^{\sigma-1/2}} + \| A^{\sigma-1} f_0 \|\right),$$

де $C = C(\sigma)$ *– не залежна від N стала.*

У наступних двох теоремах досліджено похибку наближених розв'язків (35) і (36) у випадку нескінченної гладкості вхідних даних.

Теорема 5.5. *Нехай виконуються умови теореми 5.2. Тоді точність наближеного розв'язку (35) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\| \frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)} \right\| \le \frac{C(\lambda_0)}{\sqrt{2}\pi}\frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}}\left(\| f_s \|_\infty + \| f_c \|_\infty\right),\quad x \in (0,1),$$

де $x \in (0,1)$, $C(\lambda_0)$ *– стала, визначена в теоремі 5.1.*

Теорема 5.6. *Нехай виконуються умови* $M = N,\ M+1 \ge (\lambda_0+1)^2$,

$$\| f_c \|_\infty \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad \| f_s \|_\infty \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$f_0 \in D(e^A), \quad f_{c,k} \in D(e^A)\ \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \| f_c \|_A \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^A f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (36) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x) - u_{N,M}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \le C \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \left(\| f_s \|_\infty + \| e^A f_0 \| + \| f_c \|_\infty + \| f_c \|_A \right), \ x \in (0,1),$$

де C – не залежна від N стала.

Підрозд. 5.2 присвячено узагальненню результатів підрозд. 5.1 на випадок крайової задачі для однорідного і неоднорідного рівнянь із сильно позитивним оператором у банаховому просторі E. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{gathered} u''(x) - Au(x) = 0,\ x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = u_1, \end{gathered} \tag{37}$$

де $A: E \to E$ – замкнутий лінійний оператор із щільною в E областю визначення $D(A)$ і резольвентною множиною $\rho(A)$.

Припустимо, що оператор A є *сильно позитивним*, тобто існують сталі $\varphi \in (0, \pi/2)$, $\gamma > 0$, $L > 0$ такі, що

$$\begin{gathered} \Sigma \equiv \{ z \in \mathbb{C} : \varphi \le |\arg z| \le \pi \} \cup \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le \gamma \} \subset \rho(A), \\ \| (zI - A)^{-1} \| \le \frac{L}{1 + |z|} \quad \forall z \in \Sigma. \end{gathered} \tag{38}$$

Відомо, що при $u_1 \in A^\sigma$, $\sigma > 1$, розв'язок $u(x)$ можна подати за допомогою ряду

$$u(x) = \mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{A})\,\mathrm{sh}(x\sqrt{A}) u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y_k, \tag{39}$$

де $y_k = (I+A)^{-1} A y_{k-1} = \left[(I+A)^{-1} A \right]^k u_1$, $(I+A)^{-1} A$ – дробово-лінійне перетворення оператора A, а функції $v_k(x)$ визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x,\xi) v_{k-1}(\xi) d\xi, \ x \in [0,1], \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$v_0(x) = x, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3!} x (1 - x^2),$$

де $G_0(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x, \end{cases}$ – функція Гріна диференціального оператора

$$Lv(x) = -v''(x),\ x \in (0,1), \quad v(0) = 0,\ v(1) = 0.$$

За наближений розв'язок задачі (37) береться частинна сума ряду (39):

$$u_N(x)=\sum_{k=0}^{N} v_k(x)y_k\,. \tag{40}$$

Нехай $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ – неспадна послідовність додатних чисел, $\nu>0$. Позначимо $C\big(A,(m_n),\nu\big)$ банахів простір векторів $f\in C^{\infty}(A)$ з нормою

$$\| f\|_{C(A,(m_n),\nu)}=\sup_n \frac{\|A^n f\|}{\nu^n m_n}\,.$$

Теорема 5.7. *Нехай* $u_1\in D(A^{\sigma}),\ \sigma>1$. *Тоді точність наближено розв'язку (40) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\|\frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le\frac{C}{N^{(\sigma-1-\varepsilon)/2}}\|A^{\sigma}u_1\|,\quad x\in(0,1)\quad (N\ge\sigma-1)\,,$$

де $\varepsilon>0$ *– як завгодно мале число, а стала C не залежить від N.*

Теорема 5.8. *Нехай* $u_1\in C(A,(1),\nu),\ \nu=\cos\varphi/(L+1)$. *Тоді точність наближеного розв'язку (40) характеризується ваговою оцінкою*

$$\left\|\frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le\frac{Ce^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}}\|u_1\|_{C(A,(1),\nu)},\quad x\in(0,1)\quad (N\in\mathbb{N})\,,$$

де $\varepsilon>0$ *– як завгодно мале число, а стала C не залежить від N.*

Розглянемо тепер у банаховому просторі *E* крайову задачу

$$\begin{gathered}u''(x)-Au(x)=-f(x),\quad x\in(0,1),\\ u(0)=0,\quad u(1)=0,\end{gathered} \tag{41}$$

з оператором *A*, який задовольняє ті ж умови, що і в (37). Її точний і наближений розв'язки можна подати формулами (34) і (36) відповідно.

У наступних двох теоремах одержано оцінки похибки наближеного розв'язку (36) з різними припущеннями про гладкість правої частини $f(x)$ у термінах умов для коефіцієнтів $f_0,\ f_{c,k},\ f_{s,k}$ в розкладі (33).

Теорема 5.9. *Нехай виконуються умови*

$$M=N,\quad \sigma>0,\quad f_0\in D(A^{\sigma}),\quad f_{c,k}\in D(A^{\sigma})\quad \forall k\in\mathbb{N},$$

$$\|f_s\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma+1}\|f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\quad \|f_c\|_{\sigma}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma+1}\|f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\|f_c\|_{A^{\sigma}}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{\sigma}f_{c,k}\|<\infty\,.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (36) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\|\frac{u(x)-u_{N,N}(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le\frac{C}{N^{(\sigma-\varepsilon)/2}}\Big(\|f_s\|_{\sigma}+\|f_c\|_{\sigma}+\|A^{\sigma}f_0\|+\|f_c\|_{A^{\sigma}}\Big),$$
$$x\in(0,1)\quad (N\ge\sigma),$$

де $\varepsilon>0$ *– як завгодно мале число, а стала C не залежить від N.*

Теорема 5.10. *Нехай виконуються умови*

$$M = N, \quad \nu = \cos\varphi/(L+1), \quad f_0 \in C\big(A,(1),\nu\big),$$

$$f_{c,k} \in C\big(A,(1),\nu\big) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \| f_c \|_{A^\infty} \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| f_{c,k} \|^2_{C(A,(1),\nu)} \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\| f_s \|_\infty \equiv \sum_{k=1}^{\infty} e^k \| f_{s,k} \| < \infty, \quad \| f_c \|_\infty \equiv \sum_{k=1}^{\infty} e^k \| f_{c,k} \| < \infty.$$

Тоді точність наближеного розв'язку (36) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\| \frac{u(x) - u_{N,N}(x)}{\min(x, 1-x)} \right\| \le \frac{C e^{-\sqrt{N+1}}}{(N+1)^{1/2-\varepsilon}} \times$$

$$\times \Big(\| f_s \|_\infty + \| f_c \|_\infty + \| f_0 \|_{C(A,(1),\nu)} + \| f_c \|_{A^\infty} \Big), \quad x \in (0,1) \quad (N \in \mathbb{N}),$$

де $\varepsilon > 0$ *– як завгодно мале число, а стала C не залежить від N.*

Наприкінці дисертації наведено висновки, перелік використаних джерел і один додаток з переліком публікацій за темою дисертації.

ВИСНОВКИ

Результати дисертаційній роботі є новими і полягають у наступному.

1. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для двовимірного рівняння Пуассона в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

2. Одержано вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для одно- і двовимірного рівняння теплопровідності в канонічних областях для різних випадків крайових умов з урахуванням початково-крайового ефекту.

3. Побудовано в просторах Гельдера шкалу вагових оцінок, які враховують вплив крайової умови Діріхле, для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною і сталими коефіцієнтами. Для наближеного розв'язування цього рівняння побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано узгоджені в розумінні Самарського – Лазарова – Макарова вагові апріорні оцінки похибки з урахуванням крайового ефекту.

4. Для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку з дробовою похідною у випадку як сталих, так і змінних коефіцієнтів знайдено ряд достатніх умов про належність розв'язку певним функціональним просторам та одержано вагові оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле. Для наближеного розв'язування цієї задачі побудовано сіткові схеми та одержано вагові апріорні оцінки похибки в різних сіткових нормах з урахуванням крайового ефекту.

5. Для двовимірного рівняння Пуассона з дробовою похідною в одиничному квадраті одержано вагову оцінку розв'язку в рівномірній нормі з ваговою функцією, яка враховує відстань точки до межі області. Побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та одержано вагові апріорні оцінки похибки в рівномірній дискретній нормі з урахуванням впливу крайової умови Діріхле.

6. Одержано оцінки розв'язку задачі Гурса для диференціального рівняння з дробовими похідними і змінними коефіцієнтами в різних функціональних просторах. Побудовано сіткову схему, для похибки якої одержано ряд оцінок у певних дискретних нормах. Вагова функція в оцінках точного і наближеного розв'язків характеризує відстань точки до двох суміжних сторін прямокутника, де задано додаткові умови.

7. Для методу перетворення Келі наближеного розв'язування диференціального рівняння 1-го порядку із самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі у випадку скінченної та нескінченної гладкості початкового вектора знайдено майже (з точністю до логарифма) непокращувану степеневу та непокращувану експоненціальну оцінки швидкості збіжності відповідно. Застосовано метод перетворення Келі на етапі реалізації паралельного методу довільного порядку точності для розв'язування еволюційного рівняння зі змінним оператором у гільбертовому просторі. Доведено обернені теореми наближення операторних експоненти і косинуса про гладкість початкового вектора залежно від порядку точності методу перетворення Келі.

8. Для диференціального рівняння 1-го порядку із щільно заданим логарифмічно секторіальним оператором у банаховому просторі за допомогою методу перетворення Келі одержано зображення точного розв'язку у вигляді ряду, побудовано наближений розв'язок та одержано оцінку його точності, яка автоматично залежить від гладкості початкового вектора.

9. Для неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку з однорідними крайовими умовами Діріхле і самоспряженим додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі побудовано точний розв'язок та одержано вагові оцінки з урахуванням впливу крайової умови та припущень про скінченну і нескінченну (у певному сенсі) гладкість вхідних даних. На основі зображення точного розв'язку побудовано наближені розв'язки та знайдено вагові апріорні оцінки, які враховують вплив крайової умови Діріхле і свідчать про степеневу та експоненціальну швидкість збіжності методу перетворення Келі у випадку скінченної і нескінченної гладкості правої частини рівняння. Ці результати узагальнено на випадок однорідного і неоднорідного рівнянь з відповідно неоднорідними та однорідними крайовими умовами Діріхле у випадку сильно позитивного оператора в банаховому просторі.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Макаров В. Л, Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2002. № 4. С. 192–197.
2. Рябічев В. Л., Майко Н. В. Непокращувані за порядком оцінки швидкості збіжності методу перетворення Келі для наближення операторної експоненти. *Вісник Київського університету*. 2004. № 1. С. 270–278.
3. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Точность приближения решения абстрактной задачи Коши. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. № 3. С. 145–152.

   Mayko N. V., Ryabichev V. L. Accuracy of approximation of a solution to an abstract Cauchy problem. *Cybernet. Systems Anal.* 2005. Vol. 41, Iss. 3. P. 437–444. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-005-0077-9
4. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Реалізація паралельного методу довільного порядку точності для еволюційного рівняння зі змінним оператором. *Вісник Київського університету*. 2006. № 2. С. 204–210.
5. Майко Н. В., Рябичев В. Л. Теоремы приближения операторных экспоненты и косинуса. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 145–152.

   Mayko N. V., Ryabichev V. L. Approximation theorems for operator exponential and cosine functions. *Cybernet. Systems Anal.* 2009. Vol. 45, Iss. 5. P. 800–807. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-009-9145-x
6. Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. № 3(113). P. 91–106.
7. Майко Н. В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 154–163.

   Mayko N. V. Error estimates of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation with allowance for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. Vol. 50, No. 5. P. 788–796. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9669-6
8. Майко Н. В, Рябичев В. Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 5. С. 113–124.

   Mayko N. V., Ryabichev V. L. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for Poisson's equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2016. Vol. 52, Iss. 5. P. 758–769. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9877-3
9. Майко Н. В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 1. С. 99–107.

   Mayko N. V. Improved accuracy estimates of the difference scheme for the two-dimensional parabolic equation with regard for the effect of initial and boundary conditions. *Cybernet. Systems Anal.* 2017. Vol. 53, Iss. 1. P. 83–91. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9909-7

10. Майко Н. В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 1. С. 145–153.

    Mayko N. V. A weighted error estimate for a finite-difference scheme of increased approximation order for a two-dimensional Poisson equation with allowance for the Dirichlet Boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 1. P. 130–138. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0014-3
11. Майко Н. В. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с учетом влияния краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4. С. 122–134.

    Mayko N. V. The finite-difference scheme of higher order of accuracy for the two-dimensional Poisson equation in a rectangle with regard for the effect of the Dirichlet boundary condition. *Cybernet. Systems Anal.* 2018. Vol. 54, Iss. 4. P. 624–635. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0063-7
12. Makarov V. L., Mayko N. V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. Vol. 19, Iss. 2. P. 379–394. doi: https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0002
13. Макаров В. Л., Майко Н. В. Крайовий ефект в оцінці точності сіткового методу для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. № 1. С. 80–95.

    Makarov V. L., Mayko N. V. Boundary effect in accuracy estimate of the grid method for solving fractional differential equations. *Cybernet. Systems Anal. Syst. Anal.* 2019. Vol. 55, Iss. 1. P. 65–80. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00113-y
14. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates for boundary value problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 2019. doi: https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0305
15. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Comput. Methods Appl. Math.* doi: https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120
16. Майко Н. В. Суперекспоненціальна швидкість збіжності методу перетворення Келі для абстрактного диференціального рівняння. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. № 3. С. 171–183.

    Mayko N. V. Super-exponential rate of convergence of the Cayley transform method for an abstract differential equation. *Cybernet. Systems Anal.* 2020. Vol. 56, Iss. 1. P.492–503. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-020-00265-2
17. Макаров В. Л., Майко Н. В. Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 5. С. 3–9.

Makarov V. L., Mayko N. V. Weighted estimates of the Cayley transform method for boundary value problems in a Banach space. arXiv:2007.01410
18. Макаров В.Л., Майко Н.В., Рябічев В.Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса. *Теорія еволюційних рівнянь. П'яті Боголюбовські читання:* Праці 5 міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 22–24 травня 2002): Кам'янець-Подільський, 2002. С. 111.
19. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Паралельний метод високого порядку точності для еволюційного рівняння першого порядку. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики:* Праці 10 всеукр. наук. конф. (Львів, 23–23 вересня 2003). Львів, 2003. С. 90.
20. Макаров В. Л., Рябічев В. Л., Майко Н. В. Реалізація методу апроксимації еволюційного оператора для розв'язування абстрактної задачі Коші. *Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування:* Праці міжнар. наук. конф. (Ужгород, 18–23 вересня 2006). Ужгород, 2006. С. 67.
21. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Пряма і обернена теорема наближення операторної експоненти. Матеріали 12 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008). Київ, 2008. С. 252.
22. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Обернена теорема наближення операторного косинуса. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики:* Праці 15 міжнар. наук. конф. (Львів, 23–25 вересня 2008). Львів, 2008. С. 24.
23. Boyko M. V., Mayko N. V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for parabolic equation. *Електроніка та прикладна фізика*: Праці 7 міжнар. наук. конф. (Київ, 24–27 жовтня 2012). Київ, 2012. С. 189–190.
24. Mayko N. V. The effect of the boundary conditions in the accuracy estimate of the finite-difference scheme for a one-dimensional parabolic equation. *Dynamical system modelling and stability investigation:* Proceedings XV international scientific conf. (Kyiv, 29–31 May, 2013). Kyiv, 2013. P. 40.
25. Mayko N. V. The error estimate with the boundary effect of the finite-difference scheme for the two-dimensional parabolic equation. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 23–24.
26. Майко Н. В., Сопотницька М. В. Оцінка точності різницевої схеми для одновимірного параболічного рівняння з урахуванням впливу початкової умови. Матеріали 15 міжнар. наук. конф. імені акад. М. Кравчука. (Київ, 15–17 травня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
27. Mayko N. V. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional heat equation allowing for the effect of the initial condition. Матеріали 7 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 9–10 жовтня 2014). Київ, 2014. С. 129–130.
28. Mayko N. V., Ryabichev V. L. The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation allowing for the effect of the boundary

condition. *Dynamical system modelling and stability investigation:* Proceedings XVII international scientific conf. (Kyiv, 27–29 May, 2015). Kyiv, 2015. P. 68.
29. Майко Н. В., Максимчук М. А. Оцінка швидкості збіжності різницевої схеми для рівняння Пуассона з урахуванням впливу крайової умови. Матеріали 8 міжнар. наук. конф. імені акад. І. І. Ляшка (обчислювальна та прикладна математика) (Київ, 8–9 жовтня 2015). Київ, 2015. С. 59–60.
30. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Покращені оцінки точності різницевої схеми для двовимірного параболічного рівняння з урахуванням ефекту від крайових умов. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики APAMCS:* Праці 22 Всеукр. наук. конф. (Львів, 5–7 жовтня 2016). Львів, 2016. С.119–120.
31. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Точність скінченно-різницевої схеми для рівняння Пуассона в прямокутнику з урахуванням крайового ефекту. *Інформаційні технології та взаємодії*: Матеріали 4 міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 8–10 лист. 2017). Київ, 2017. С. 34–35.
32. Майко Н. В., Рябічев В. Л. Зважена оцінка точності сіткової схеми для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Dynamical system modelling and stability investigation:* Proceedings XIX international scientific conf. (Kyiv, 22–24 May, 2019). Kyiv, 2019. P. 106–108.
33. Майко Н. В. Вагові оцінки точності сіткового методу для диференціального рівняння з дробовою похідною. *Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти (до 90-річчя заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. Можара В. І.).* Матеріали всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. (Київ, 26–27 травня 2020). Київ, НУХТ, 2020. С. 33–3.

АНОТАЦІЇ

Майко Н. В. Вагові оцінки точності функціонально-дискретних методів розв'язування крайових задач. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено побудові і дослідженню наближених методів розв'язування задач математичної фізики та одержанню нових вагових апріорних оцінок точності цих методів з урахуванням впливу крайових і початкових умов у сенсі В. Л. Макарова. Вплив крайового ефекту означає, що внаслідок крайової умови Діріхле для диференціального рівняння в канонічної області точність наближеного розв'язку поблизу межі області є вищою порівняно з точністю далі від межі. Аналогічна ситуація спостерігається і для нестаціонарних рівнянь у тих вузлах сітки, де задано початкову умову.

Кількісною характеристикою крайового ефекту є апріорна оцінка похибки з відповідною ваговою функцією, яка характеризує відстань точки до межі області. Ідея таких оцінок уперше анонсована В. Л. Макаровим для лінійного еліптичного рівняння у випадку розв'язків із просторів Соболєва та узагальнена для квазілінійних стаціонарних і нестаціонарних рівнянь. У дисертації продовжено відомі та виконано нові дослідження впливу початкової та крайової умов на точність методу скінченних різниць для еліптичних і параболічних рівнянь, сіткового методу розв'язування рівнянь з дробовоми похідними та методу перетворення Келі для абстрактних диференціальних рівнянь у гільбертовому і банаховому просторах.

Розроблена в дисертації методика одержання вагових оцінок може бути застосована для дослідження точних і наближених розв'язків нових класів задач. Водночас врахування початково-крайового ефекту має не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки, зокрема, надає змогу використовувати поблизу межі області більший крок сітки. Запропоновані в дисертації різницеві та сіткові схеми, а також методи без насичення точності в сенсі К. І. Бабенка можуть бути застосовані для розв'язування широкого кола прикладних задач фізики, хімії, біології, фінансів тощо.

Ключові слова: різницева схема, рівняння Пуассона, параболічне рівняння, крайова умова Діріхле, вагова апріорна оцінка, початково-крайовий ефект, похідна дробового порядку, сіткова схема, банахів простір, гільбертів простір, абстрактна крайова задача, перетворення Келі, алгоритм без насичення точності, степенева швидкість збіжності, експоненціальна швидкість збіжності.

Майко Н. В. Весовые оценки точности функционально-дискретных методов решения краевых задач. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена построению и исследованию приближенных методов решения задач математической физики. Цель диссертации состоит в получении новых весовых априорных оценок точности этих методов с учетом влияния краевых и начальных условий в смысле В. Л. Макарова. Влияние краевого условия означает, что вследствие краевого условия Дирихле для дифференциального уравнения в канонической области точность приближенного решения вблизи границы области выше, чем вдали от границы. Аналогичная ситуация наблюдается и для нестационарных уравнений в тех узлах сетки, где задано начальное условие. Количественной характеристикой краевого эффекта служит априорная оценка погрешности с соответствующей весовой функцией, которая характеризует расстояние точки до границы области. Идея таких оценок впервые анонсирована В. Л. Макаровым для линейного эллиптического уравнения в случае решений из пространств

Соболева и в дальнейшем обобщена на случай квазилинейных стационарных и нестационарных уравнений. В диссертации продолжены известные и выполнены новые исследования влияния начального и краевого условий на точность метода сеток для эллиптических и параболических уравнений, сеточного метода решения уравнений с производными дробного порядка и метода преобразования Кэли для абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах.

Разработанная в диссертации методика получения весовых оценок может быть применена для исследования точных и приближенных решений новых классов задач. Вместе с тем учет начально-краевого эффекта имеет не только теоретическое, но и практическое значение, поскольку, в частности, позволяет использовать вблизи границы области больший шаг сетки. Предложенные в диссертации разностные и сеточные схемы, а также методы без насыщения точности в смысле К. И. Бабенко могут быть применены для решения широкого круга прикладных задач физики, химии, биологии, финансов и других областей.

Ключевые слова: разностная схема, уравнение Пуассона, параболическое уравнение, краевое условие Дирихле, весовая априорная оценка, начально-краевой эффект, производная дробного порядка, сеточная схема, банахово пространство, гильбертово пространство, абстрактная краевая задача, преобразование Кэли, алгоритм без насыщения точности, степенная скорость сходимости, экспоненциальная скорость сходимости.

Mayko N. V. The weighted estimates of the functional-discrete methods for solving boundary value problems. – Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.07 – Computational Mathematics. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the construction and study of the approximate methods for solving the problems of mathematical physics. It deals with obtaining weighted a priory accuracy estimates of these methods, taking into account the influence of boundary and initial conditions according to V. L. Makarov. The boundary effect means that due to the Dirichlet boundary condition for a differential equation in a canonical domain, the accuracy of the approximate solution near the boundary of the domain is higher compared to the accuracy away from the boundary. A similar situation is observed for non-stationary equations in the nodes of the mesh where the initial condition is given. The boundary and initial effects are quantitatively described by means of weighted estimates with a suitable weight function which characterizes the distance of a point to the boundary of the domain. The idea of such estimates was first announced by V. L. Makarov for the elliptic equation in the case of generalized solutions from Sobolev spaces and then transferred to quasilinear stationary and non-stationary equations. The dissertation develops the aforementioned approach and presents the new research into the impact of the initial and boundary conditions on the accuracy of the finite-difference method for elliptic

and parabolic equations, the grid method of solving equations with fractional derivatives and the Cayley transform method for abstract differential equations in Hilbert and Banach spaces.

We obtain new weighted error estimates of the finite-difference approximations for Poisson's and heat equations in canonical domains for various cases of boundary conditions and with allowance for the initial and boundary effects. For a second-order ODE with fractional derivatives and variable coefficients, we find a number of sufficient conditions for the solution to belong to certain functional spaces and get weighted estimates that take into account the impact of the Dirichlet boundary condition. To treat this problem numerically, we construct the grid schemes and obtain the weighted error estimates in various mesh norms with taking into account the boundary effect. We also get weighted estimates for solutions of Poisson's equation in a unit square and the Goursat problem with variable coefficients – both are with fractional derivatives. After that, the grid schemes for solving these problems approximately are constructed and examined. Namely, we get some weighted estimates in particular discrete norms. The weight function in estimates for both exact and approximate solutions characterizes a distance from a point inside the domain to that part of its boundary where the Dirichlet condition is given. Next, we study the Cayley transform method proposed and developed by D. Arov, I. Gavrilyuk and V. Makarov for the constructive representation of exact and approximate solutions of the abstract differential equations in Banach and Hilbert spaces. One of its most valuable advantages is the automatic dependence of the accuracy order on the smoothness properties of the input data. This means that the Cayley transform method is a method without saturation of accuracy in the sense of K. I. Babenko, and therefore it is optimal in a certain sense. The construction of such methods is an important problem of numerical analysis. We study a second-order differential equation with a self-adjoint positive definite operator in a Hilbert space and obtain the weighted estimates for exact and approximate solutions with taking into account the influence of the boundary condition and the regularity of the input data. These results are generalized for a differential equation with a strongly positive operator in a Banach space.

The proposed methodology of obtaining weighted estimates can be further employed for investigating exact and approximate solutions to a number of new problems. At the same time, taking into account the boundary and initial effects is not only of theoretical but also of practical value because it justifies, for example, the use of a coarser mesh (i.e. a larger mesh step) near the boundary of the domain. Moreover, the presented discrete approximations and non-saturating methods can be utilized for solving a wide range of applied problems in physics, engineering, chemistry, biology, finance, etc.

Keywords: finite-difference scheme, Poisson's equation, parabolic equation, Dirichlet boundary condition, weighted error estimate, initial-boundary effect, fractional derivative, grid scheme, Banach space, Hilbert space, abstract boundary value problem, Cayley transform, algorithm without saturation of accuracy (non-saturating algorithm), power rate of convergence, exponential rate of convergence.