Лекція 2: Теорема Наймарка про зв'язок між POVM та PVM

1. Зміна стану при дії на підсистемі

1.1. Унітарна дія на підсистемі

Нехай $H = H_1 \otimes H_2$ та $\rho \in S(H)$. Тоді унітарна дія U_2 на другій підсистемі буде відповідати унітарній дії $I \otimes U_2$ на усій системі, тобто стан ρ перейде у стан $I \otimes U_2 \cdot \rho \cdot I \otimes U_2^\dagger$.

Твердження 1 *Не важко побачити, що це узгоджено зі зміною редукованого стану, тобто*

$$\mathrm{Tr}_1(I \otimes U_2 \cdot \rho \cdot I \otimes U_2^\dagger) = U_2 \cdot \mathrm{Tr}_1(\rho) \cdot U_2^\dagger.$$

Доведення.

Оскільки $L(H) = L(H_1) \otimes L(H_2)$, то можна записати $\rho = \sum_i A_i \otimes B_i$. Тоді

$$\mathrm{Tr}_1(I \otimes U_2 \cdot \rho \cdot I \otimes U_2^\dagger) = \mathrm{Tr}_1(I \otimes U_2 \cdot \sum_i A_i \otimes B_i \cdot I \otimes U_2^\dagger) =$$

$$= \mathrm{Tr}_1(\sum_i A_i \otimes U_2 B_i U_2^\dagger) = \sum_i \mathrm{Tr}(A_i) U_2 B_i U_2^\dagger = U_2 \cdot \sum_i \mathrm{Tr}(A_i) B_i \cdot U_2^\dagger =$$

$$= U_2 \cdot \mathrm{Tr}_1(\rho) \cdot U_2^\dagger.$$

Твердження 2 *Унітарна дія на другій підсистемі не змінює редукований стан першої системи, тобто*

$$\mathrm{Tr}_2(I \otimes U_2 \cdot \rho \cdot I \otimes U_2^\dagger) = \mathrm{Tr}_2(\rho)$$

Доведення.

$$\mathrm{Tr}_2(I \otimes U_2 \cdot \rho \cdot I \otimes U_2^\dagger) = \mathrm{Tr}_2(\sum_i A_i \otimes U_2 B_i U_2^\dagger) =$$

$$= \sum_i A_i \,\mathrm{Tr}(U_2 B_i U_2^\dagger) = \sum_i A_i \,\mathrm{Tr}(B_i) = \mathrm{Tr}_2(\rho).$$

1.2. Вимірювання на підсистемі

Знову нехай $H = H_1 \otimes H_2$ та $\rho \in S(H)$. І нехай ми збираємося проводити вимірювання другої підсистеми, яке задається розкладом одиниці

$$I_{H_2} = P_1 + P_2 + ... + P_k,$$

де $P_i \in P(H_2)$.

Тоді ефект такого вимірювання відповідає вимірюванню усієї системи, яке задається розкладом

$$I_H = I \otimes P_1 + I \otimes P_2 + ... + I \otimes P_k$$

Твердження 3 *Знов таки, не важко перевірити, що таке вимірювання усієї системи узгоджено з вимірюванням редукованого стану, тобто*

$$\mathrm{Tr}(I \otimes P_i \cdot \rho) = \mathrm{Tr}(P_i \cdot \mathrm{Tr}_1(\rho)) = p_i$$

та

$$\mathrm{Tr}_1(I \otimes P_i \cdot \rho \cdot I \otimes P_i/p_i) = P_i \cdot \mathrm{Tr}_1(\rho) \cdot P_i/p_i$$

Твердження 4 *Вимірювання другої системи (без фіксації результату) не змінює редукований стан першої підсистеми. Тому передати інформацію таким чином неможливо –* ***no-communication theorem****.*

Доведення. Дійсно, після вимірювання (без фіксації результату i) новий стан усієї системи це буде суміш станів $I \otimes P_i \cdot \rho \cdot I \otimes P_i/p_i$ з ймовірністю $p_i = \mathrm{Tr}(I \otimes P_i \cdot \rho)$, тобто

$$\rho' = \sum_i p_i \cdot I \otimes P_i \cdot \rho \cdot I \otimes P_i/p_i = \sum_i I \otimes P_i \cdot \rho \cdot I \otimes P_i$$

Редукований стан дорівнює

$$\mathrm{Tr}_2(\rho') = \mathrm{Tr}_2(\sum_i I \otimes P_i \cdot \rho \cdot I \otimes P_i) =$$

$$= \mathrm{Tr}_2(\sum_i I \otimes P_i \cdot \sum_j A_j \otimes B_j \cdot I \otimes P_i) =$$

$$= \mathrm{Tr}_2(\sum_i \sum_j A_j \otimes P_i B_j P_i) = \sum_i \sum_j A_j \,\mathrm{Tr}(P_i B_j P_i) =$$

$$= \sum_j A_j \,\mathrm{Tr}(\sum_i P_i B_j) = \sum_j A_j \,\mathrm{Tr}(B_j) = \mathrm{Tr}_2(\rho)$$

Теорема 1 *(Теорема Наймарка про зв'язок між POVM та PVM)*

Нехай на гільбертовому просторі H задано узагальнене вимірювання, що задано розкладом $I_H = \sum_i M_i^\dagger M_i$. Тоді існують гільбертів простір H_{anc}, стан $|0\rangle\langle 0| \in S(H_{anc})$ на ньому, унітарний оператор $U \in L(H \otimes H_{anc})$ та проективне вимірювання (PVM) рангу 1 на H_{anc}, тобто $I_{H_{anc}} = \sum_i P_i$ та $\mathrm{Tr}(P_i) = 1$, такі що для стану $\rho' = U \cdot \rho \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot U^\dagger$ виконується $\forall i$:

1) узгоджені ймовірності отримання випадку "i", тобто $\forall \rho \in S(H)$

$$\mathrm{Tr}(\rho M_i^\dagger M_i) = \mathrm{Tr}(I \otimes P_i \cdot \rho') = p_i,$$

2) узгоджено новий стан на H при випадку "i", тобто

$$M_i \rho M_i^\dagger / p_i = \mathrm{Tr}_{anc}(I \otimes P_i \cdot \rho' \cdot I \otimes P_i)/p_i.$$

Це називають розширенням Наймарка для POVM.

Усе це вірно й в обернену сторону. Тобто, якщо ми проводимо PVM рангу 1 на анциллі, то воно буде розширенням Наймарка для деякого POVM на основному просторі.

Доведення.

а) Нехай ми маємо PVM на H_{anc} з $\mathrm{Tr}(P_i) = 1$ та деякий унітарний $U \in L(H \otimes H_{anc})$. Без обмеження загальності можна вважати, що $P_i = |i\rangle\langle i|$.

Позначимо

$$M_i = I \otimes \langle i| \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle.$$

Тоді

$$M_i^\dagger M_i = (I \otimes \langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes |i\rangle) \cdot (I \otimes \langle i| \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle) =$$

$$= I \otimes \langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes P_i \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle$$

Звідси $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$.

Тепер перевіримо

$$\mathrm{Tr}(\rho M_i^\dagger M_i) = \mathrm{Tr}(\rho \cdot I \otimes \langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes P_i \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle) =$$

$$= \mathrm{Tr}(U \cdot I \otimes |0\rangle \cdot \rho \otimes 1 \cdot I \otimes \langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes P_i) =$$

$$= \mathrm{Tr}(U \cdot \rho \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes P_i) = \mathrm{Tr}(\rho' \cdot I \otimes P_i).$$

Тож є узгодженість ймовірностей.

Тепер, з одного боку маємо

$$\mathrm{Tr}_{anc}(I \otimes P_i \cdot \rho' \cdot I \otimes P_i) = \sum_j I \otimes \langle j| \cdot I \otimes P_i \cdot \rho' \cdot I \otimes P_i \cdot I \otimes |j\rangle =$$

$$= I \otimes \langle i| \cdot \rho' \cdot I \otimes |i\rangle,$$

а з іншого

$$M_i \rho M_i^\dagger = (I \otimes \langle i| \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle) \cdot \rho \otimes 1 \cdot (I \otimes \langle 0| \cdot U^\dagger \cdot I \otimes |i\rangle) =$$

$$= I \otimes \langle i| \cdot \rho' \cdot I \otimes |i\rangle.$$

б) Нехай тепер ми маємо якесь узагальнене вимірювання $I_H = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^\dagger M_i$ з n елементів. Розглянемо H_{ans} розмірності n та PVM на ньому: $P_i = |i\rangle\langle i|$. Єдине що залишається визначити це унітарний оператор $U \in L(H \otimes H_{ans})$.

Покладемо $\forall|\psi\rangle \in H$:

$$U|\psi\rangle|0\rangle = \sum_i (M_i|\psi\rangle) \otimes |i\rangle$$

і покажемо, що це визначення коректне і продовжується до унітарного оператора. Лінійність очевидна.

Перевіряємо унітарність:

$$\langle 0|\langle\phi|U^\dagger \cdot U|\psi\rangle|0\rangle = \sum_j (\langle\phi|M_j^\dagger) \otimes \langle j| \cdot \sum_i (M_i|\psi\rangle) \otimes |i\rangle =$$

$$= \sum_i (\langle\phi|M_i^\dagger)(M_i|\psi\rangle) = \langle\phi| \sum_i M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle.$$

А отже U можна довизначити до унітарного на всьому $H \otimes H_{ans}$.

Щоб перевірити узгодженість підрахуємо $\widetilde{M_i}$:

$$\widetilde{M_i} = I \otimes \langle i| \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle.$$

Можна записати, що

$$U \cdot I \otimes |0\rangle = U \cdot \sum_j |j\rangle\langle j| \otimes |0\rangle \cdot 1 =$$

$$= \sum_j U|j\rangle|0\rangle \cdot \langle j|.$$

Тепер підставляємо

$$\widetilde{M_i} = I \otimes \langle i| \cdot U \cdot I \otimes |0\rangle = \sum_j I \otimes \langle i| \cdot U|j\rangle|0\rangle \cdot \langle j| =$$

$$= \sum_j I \otimes \langle i| \cdot \big(\sum_k (M_k|j\rangle) \otimes |k\rangle\big) \cdot \langle j| =$$

$$= \sum_j M_i|j\rangle \cdot \langle j| = M_i.$$

Наслідок 1 *Нехай задано POVM на H, тобто $I = \sum_i M_i^\dagger M_i$. При цьому відповідний квантовий канал має вигляд*

$$Q(\rho) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger.$$

З теореми Наймарка випливає, що існують H_{anc} та унітарний $U \in L(H \otimes H_{anc})$, такі що

$$Q(\rho) = \mathrm{Tr}_{anc}(U \rho \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger).$$

Доведення.

Побудувавши розширення Наймарка маємо, що для $\rho' = U \cdot \rho \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot U^\dagger$:

$$M_i \rho M_i^\dagger = \mathrm{Tr}_{anc}(I \otimes P_i \cdot \rho' \cdot I \otimes P_i) = \mathrm{Tr}_{anc}(\rho' \cdot I \otimes P_i).$$

Звідси

$$\sum_i M_i \rho M_i^\dagger = \sum_i \mathrm{Tr}_{anc}(\rho' \cdot I \otimes P_i) = \mathrm{Tr}_{anc}(U \cdot \rho \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot U^\dagger).$$