

Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Гладиш Богдани Іванівни
«Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів»,
поданої на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

Починаючи з 90-х років ХХ століття у зв'язку з розвитком гамільтонових динамічних систем та застосуванням ЕОМ почався бурхливий розвиток топологічної теорії функцій на маловимірних многовидах.

Основною задачею топологічних досліджень певних об'єктів є топологічна їх класифікація. Класичними роботами з дослідження топологічних властивостей функцій є роботи М. Морса, Г. Ріба, А.С. Кронрода, А.Т. Фоменка, О.В. Болсінова, В.В. Шарка та ін. Добре відомо, що М. Морс отримав локальне зображення функцій із невиродженими критичними точками (функцій Морса) на гладких поверхнях без межі. Г. Ріб та А.С. Кронрод побудували граф, що дозволяє класифікувати прості функції Морса на замкнених поверхнях. У роботі О.В. Болсінова та А.Т. Фоменка для дослідження пошарової та пошарово оснащеної еквівалентностей функцій Морса на поверхнях було вперше введено поняття атому та f -атому. Ними також були описані всі атоми, складності не вище, ніж три. Крім того, орієнтований граф Кронрода-Ріба виступає повним пошарово оснащеним інваріантом простих функцій Морса на замкнених поверхнях. А якщо додатково зафіксувати порядок вершин на ньому, то цей граф буде повним топологічним інваріантом. Топологічна класифікація функцій Морса на замкнених поверхнях була отримана у працях В.В. Шарка та О.О. Пришляка.

У випадку поверхні з межею функції із внутрішніми невиродженими особливостями (m -функції) детально вивчались у працях С.І. Максименка, О.О. Пришляка та ін.

Функції з ізольованими критичними точками на замкнених поверхнях вивчались у роботах М. Морса, О.О. Пришляка, Є.О. Полуляха, І.А. Юрчук та ін. Так, наприклад, О.О. Пришляком були описані топологічні властивості та одержана топологічна класифікація функцій з ізольованими критичними точками на поверхнях.

Ще однією з важливих задач є пошук оптимальних функцій та критеріїв оптимальності. С. Смейл довів існування таких функцій для однозв'язних многовидів розмірності більше, ніж п'ять, а В.В. Шарко – на випадок замкнених многовидів великих розмірностей.

Вивчаючи певні класи функцій, досить актуальними та важливими є питання, пов'язані з їхньою деформацією. Дана проблематика знаходить свої результати у численних роботах С.І. Максименка та його учнів.

Однак слід констатувати, що нез'ясованими залишались питання щодо: локального представлення функцій з невиродженими та ізольованими критичними точками на межі поверхні; побудови інваріанту для класифікації таких функцій; оптимальності та деформацій гладких функцій з особливостями

на межі поверхні. Тож, з урахуванням зазначеного, тему дисертації Б.І. Гладіш «Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів» слід визнати актуальною.

Аналіз змісту дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 64 одиниці посилань, і додатку. Повний обсяг дисертації становить 149 сторінок.

У **вступі** висвітлено актуальність теми дисертаційного дослідження, зазначено об'єкт, предмет, мету, завдання і методи наукового дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів, особистий внесок здобувачки, а також зазначено апробацію та відповідні публікації за результатами представленої дисертації.

У **першому розділі** наводиться історична довідка щодо дослідження гладких функцій з невідродженими критичними точками на замкнених поверхнях, а на поверхнях з межею – m -функцій. Наведено класифікацію атомів та f -атомів функцій кожного із зазначених класів. Також описано комбінаторні інваріанти, що використовують для пошарово оснащеної й топологічної класифікації простих функцій Морса і функцій з ізольованими особливостями на замкнених поверхнях, у вигляді орієнтованого графа Кронрода-Ріба та хордової діаграми відповідно.

У **другому розділі** дисертації авторка вивчає функції із невідродженими критичними точками на межі гладкої поверхні, які також є невідродженими критичними точками відповідного обмеження функції на межу (mm -функції), а саме:

$$\{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in Morse(M), f_{\partial} \in Morse(M), CP \subset \partial M\},$$

де $Morse(*)$ – множина функцій Морса. Отримано локальне зображення таких функцій у випадку n -вимірному многовиді, класифікацію простих атомів та встановлено число критичних точок простих оптимальних функцій зазначеного класу для довільної поверхні з межею. Досить цікавими також є сформульовані і доведені авторкою необхідні умови продовження простої функції Морса, заданої на єдиній компоненті межі орієнтованої поверхні, до простої оптимальної mm -функції, заданої на всій поверхні.

Третій розділ присвячено дослідженню простих функцій із особливостями як внутрішніми, так і на межі компактно зв'язної орієнтованої поверхні – простих функцій з класу $\Omega_0(M)$, заданого таким чином:

$$\Omega_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid CP(f) = NDCP(f) \supset CP(f_{\partial}) = NDCP(f_{\partial})\},$$

де $CP(*)$ ($NDCP(*)$) – множина (невідроджених) критичних точок. Показано їхню топологічну еквівалентність m -функціям та побудовано комбінаторний інваріант у вигляді оснащеного графа Кронрода-Ріба для пошарово оснащеної класифікації функцій зі збереженням орієнтації поверхні (так званої O -класифікації). Також авторкою отримано формулу для знаходження роду поверхні, використовуючи оснащений KR -граф.

У **четвертому розділі** дисертації вивчаються деформації загального положення всередині класу простих функцій Морса на замкнених поверхнях, а саме: простих m - або ж mm -функцій на компактних поверхнях з межею.

В якості інваріанта введено поняття деформації оснащеного графа Кронрода-Ріба. Досить цікавим слід визнати отриманий зв'язок між оптимальністю і полярністю функцій кожного із зазначених вище класів.

П'ятий розділ присвячено вивченню функцій з ізольованими особливостями на межі зв'язної компактної поверхні зі зв'язною межею, тобто функцій із класу

$$\Theta_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), CP(f) = ICP(f) = ICP(f_\partial)\},$$

де $CP(*)$ ($ICP(*)$) – множина (ізольованих) критичних точок. Отримано локальне зображення таких функцій та встановлено критерій оптимальності простих функцій з класу $\Theta_0(M)$. Для топологічної класифікації простих оптимальних функцій з класу $\Theta_0(M)$ побудовано інваріант – хордову діаграму сідлового критичного рівня та розв'язано задачу реалізації такого інваріанту.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань, пов'язаних із класифікацією функцій, їх деформаціями та інших суміжних задач, зокрема в теорії динамічних систем, оскільки функції, що розглядаються, є функціями Ляпунова для систем Морса та породжують поле косоного градієнта, а отримана класифікація є рівносильною траєкторній класифікації таких полів. Оскільки зазначені поля описують певні процеси у фізиці та механіці, то отримані результати можуть бути застосовані в цих галузях знань тощо.

Ступінь обґрунтованості та достовірності наукових положень і висновків дисертації. Усі результати, що виносяться на захист, є новими, строго математично обґрунтованими. Доведення теорем є повними і коректними. В дисертації наявні висновки до розділів, а також наведено загальні висновки до дисертаційної роботи, які відповідають її змісту.

Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях. Результати дисертаційної роботи Б.І. Гладиш доповідались і обговорювались на багатьох наукових конференціях і семінарах як в Україні, так і за кордоном (м. Відень, Австрія) та були опубліковані у п'яти статтях у журналах, які (самі або ж їх переклади) входять до міжнародної наукометричної бази Scopus, і дванадцяти тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Викладені в дисертації результати та зроблені авторкою висновки є правильними й обґрунтованими. Отримані результати є новими і повно викладені у статтях.

Дисертаційна робота відповідає вимогам МОН України щодо кількості публікацій за темою дисертації у фахових виданнях, а також встановленим нормам щодо обсягу та вимогам щодо оформлення дисертаційних досліджень. Автореферат дисертації правильно і повно відображає її зміст.

У вигляді зауважень та побажань до дисертаційної роботи Б.І. Гладиш маю зазначити наступне:

1. На стор. 2 (16-17 рядки зверху) замість фрази «Важливим питання» слід писати «Важливим питанням».
2. На стор. 18 (7 та 9 рядок знизу) ініціали та прізвище автора слід писати як «О. Болсінов» та «О. Болсінова» відповідно;

3. На стор. 45 в Означенні 1.1.2. замість фрази «точкою локального мінімуму і максимуму» слід писати «точкою локального мінімуму *або* максимуму».
4. На стор. 47 (9, 10 рядки зверху) для наведеного гессіана у випадку гладкої поверхні замість локальної системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) доцільно писати (x_1, x_2) .
5. На стор. 47 в означенні 1.3.2 замість фрази «обрахований у точці» краще писати «обчислений у точці».
6. На стор. 49 (3 рядок зверху) замість фрази «для деякої сталої $c = f(p_0)$ » доцільно писати «для деякого сталого $c = f(p_0)$ », оскільки мається на увазі саме значення функції.
7. На стор. 51 (8 рядок знизу) у наведеній нерівності значиться $c_2 < c_2$.
8. На стор. 62 (6 рядок знизу) у представленні функції $h_i(u_1, \dots, u_n)$ один знак рівності є зайвим.
9. На стор. 69 (7 рядок знизу) замість фрази «листами Мюбіуса» слід писати «листами Мебіуса».

Слід відзначити, що наведені зауваження і недоліки не знижують наукової та практичної цінності результатів дисертаційної роботи та повинні сприйматись як технічні недоліки в оформленні, які переважно можна віднести до граматичних і синтаксичних помилок, «русизмів» та необов'язкових повторів тощо. Більше того, дисертаційна робота Гладиш Богдани Іванівни «Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів» є цілком завершеною науковою роботою, яку написано на досить високому науковому рівні.

Висновки. Всі наукові результати дисертації Б.І.Гладиш є новими, достовірними, строго обґрунтованими та сформульовані у вигляді тверджень, доведення яких не викликає сумнівів. На мою думку одержані дисертантом результати є досить оригінальними та можуть отримати розвиток у подальших дослідженнях.

Вважаю, що дисертаційна робота Гладиш Богдани Іванівни «Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів» задовольняє всі вимоги діючого «Порядку присудження наукових ступенів», постанова КМУ №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними Постановою КМУ №607 від 15 липня 2020 р.) щодо кандидатських дисертацій, а її авторка впевнено заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
декан фізико-математичного факультету
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний
університет»

Підпис Кадубовського О.А. засвідчую
Начальник ВК ДВНЗ «ДДПУ»

29.09.2020 р.



Кадубовський О.А.

Сілін Є.С.

Гладиш 5 жовтня 2020р.