ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Гладиш Богдани Іванівни
«Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів»
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія

В представленій на розгляд дисертаційній роботі Гладиш Богдани Іванівни «Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів» вивчається топологічна структура гладких функцій на компактних поверхнях, у яких критичні точки лежать на межі поверхні.

Ще на початку минулого сторіччя Марстон Морс помітив, що гладка функції $f : M \to \mathbb{R}$ на компактному n-многовиді без межі, у якої всі критичні точки є невиродженими, індукує кліткове розбиття цього многовиду, так, що кожна клітина розмірності i містить едину критичну точку індексу i. Звідси випливало, що число критичних точок c_i індексу i обмежує знизу ранг групи гомологій многвиду розмірності i, а альтернована сума кількостей критичних точок дорівнює еклеровій характеристиці многовиду. Це дало суттєвий поштовх до вивчення топології многовидів через топологічну структуру функцій на них і породило новий напрямок – теорію Морса, яка вплинула на практично всі розділи математики і фізики.

В книзі (перекладеній в 1951 році)

- М. Морс, *Топологические методы теории функций комплексного переменного*, Москва, 1951, 248 с.

він також досліджував подібні питання про зв'язок числа критичних точок псевдогармонійних функцій (топологічні аналоги дійсної та уявної частини голоморфних функцій), які можуть мати полюси і визначені на областях комплексної площини. Він отримав аналогічні формули про зв'язки кількостей критичних точок різних типів з групами гомологій областей.

В середині 1980-х років, завдяки роботам А.Фоменко та його колег та учнів з класифікації інтегровних гамільтонових систем з двома ступенями вільності, відновився інтерес математичної спільноти до вивчення топологічної структури і деформацій функцій, диференціальних форм, векторних полів, шарувань та дифеоморфізмів на маловимірних многовидах. Зокрема було отримано топологічну класифікацію функцій Морса, які приймають постійні значення на компонентах межі, а також більш загального класу так званих m-функцій, у яких всі критичні точки невироджені і лежать у внутрішності M, а обмеження на межу також є функцією Морса.

В даній дисертаційній роботі систематично досліджуються прості (на кожній критичній компоненті кожної множини рівня міститься лише одна критична точка) функції з критичними точками на межі.

Коротко опишу отримані результати.

Розділ 2. Перший результат (Теорема 2.1.1) є аналогом леми Морса для критичних точок на межі. Разом із звичайною лемою Морса ця теорема дає можливість описати структуру околів всіх можливих критичних компонент функцій, що мають єдину критичну точку (Теорема 3.1.6). Ці околи називаються *атомами.* Тоді кожна функція з невиродженими критичними точками на поверхні задає (майже) розбиття цієї поверхні на атоми - атоми перетинаються лише по частинам їх меж.

Далі авторка вводить поняття mm-функції $f : M \to \mathbb{R}$, у якої всі критичні точки є невиродженими і лежать тільки на межі, причому обмеження $f|_{\partial M} : \partial M \to \mathbb{R}$ є також функцією Морса.

Лема 2.3.2 показує, що кожну таку функцію можна модифікувати так, щоб вона мала лише один максимум і один мінімум. Це узагальнення добре відомого твердженння про скорочення критичних точок для функцій Морса.

Зокрема, ця лема дозволяє обчислити ейлерову характеристику поверхні через число різних типів критичних точок (лема 2.3.3), та отримати точні значення критичних точок простої оптимальної mm-функції на даній поверхні (теорема 2.3.4).

Відмічу, що лема 2.3.3 аналогічна згаданим вище результатам Морса, але отримана формула $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}$ має місце для довільної поверхні, і крім того вона обчислює Ейлерову характеристику поверхні через дещо інші типи критичних точок. За формулою Морса, Ейлерова характеристика компактної області U в комплексній площині, на якій визначена mm-функція становитиме $\chi(M) = m - s$, де m - число локальних мінімумів f, а s - число сідел. Зокрема тут не використовується кількість локальних максимумів, але при цьому означення сідел відрізняється від того, яке дане в дисертації.

Дуже цікавим геометричним спостереженням є Теорема 2.3.5, яка описує чередування критичних значень оптимальної mm-функції.

Розділ 3. Потрібно зауважити, що у mm-функції $f : M \to \mathbb{R}$ обмеження $f|_{\partial M}$ може мати критичні точки, які не є критичними точками f. В розділі 3 розглядається клас функцій $\Omega_0(M)$, що складається з mm-функцій, у яких кожна критична точка $f|_{\partial M}$ є також критичною точкою і самої функції f.

Теорема 3.0.1. показує, що з точністю до топологічної еквівалетності клас $\Omega_0(M)$ тотожний з класом всіх m-функцій на M.

Далі в розділі описано всі атоми критичних рівнів (теорема 3.1.6) і доведено, що класи $\mathcal{O}$-еквівалентності та топологічної $\mathcal{O}$-еквівалентності прості функції f з класу $\Omega_0(M)$ визначаються відповідно класом еквівалентності та класом порядкової еквівалентності оснащеного графа Кронрода-Ріба Γ_f цієї функції (теорема 3.2.2 та наслідок 3.2.3). Ці твердження є узагальненням відомого результату для простих функцій Морса.

В підрозділі 3.3 перераховано оснащені графи Кронрода-Ріба простих функцій з $\Omega_0(M)$, які мають не більше 5 критичних точок.

Останній результат розділу (теорема 3.4.3) дозволяє обчислити рід поверхні за оснащеним графом Кронрода-Ріба довільної простої функції з $\Omega_0(M)$.

Розділ 4. В розділі 4 введене поняття деформації загального положення простих функцій одного з класів - функції Морса, m-функції та mm-функції і описано елементарні перебудови відповідних графів Кронрода-Ріба Γ_f. Деформації загального положення детально вивчались Ж. Серфом.

В твердженні 4.1.7 отримано характеризації оптимальних функцій Морса та mm-функцій, як полярних функцій, тобто таких, які мають лише один локальний максимум і лише один локальний мінімум, але можуть мати багато сідлових точок. Зокрема, це твердження містить Лему 2.3.2.

В підрозділі 4.2 наведено кілька тверджень про структуру оснащеним графів Кронрода-Ріба функцій з малим числом вершин.

Розділ 5. В розділі 5 досліджується аналог функцій класу Ω_0 - клас $\Theta(M)$ - де замість невиродженості критичних точок вимагається їх ізольованість, при цьому критичні точки можуть бути як завгодно виродженими. Твердження 5.1.3 та теорема 5.1.4 узагальнюють результати E.N. Dancer та О. Пришляка про топологічну структуру гладкої функції в околі ізольованого локального екстремуму та сідлової точки на повехні випадок критичної точки на межі.

Аналогічно підходу, описаному в попередніх розділах, в підрозділі 5.1.1 будуються околи критичних рівнів (атоми), які у випадку вироджених сідел отримані із диска склеєнням деякої кількості пар попарно диз'юнктних дуг. Таку склейку акторка кодує хордовою діаграмою. В теоремі 5.1.10 наводяться рекурентні формули для обчислення кількості попарно нееквівалентних атомів а околі сідлової точки заданого типу k, а в таблиці 5.1.1 обчислено ці значення для $k = 1, \dots, 20$. В цій ситуації число можливих атомів суттєво більше ніж для невироджених критичних точок і, зокрема, для $k = 20$ отримане число має 11 цифр.

Далі в теоремі 5.2.1 показано, якщо M зв'язна, має зв'язну межу і не гомеоморфна 2-диску, то $f \in \Theta(M)$ є оптимальною функція тоді і лише тоді, коли вона має рівно 3 критичні точки - мінімум, максимум і вироджене сідло. Це твердження є аналогом відомого факту про мінімальне число критичних точок функцій на замкнених поверхнях.

В теоремі 5.2.1 описано структуру хордових діаграм, що відповідають критичним рівням сідел оптимальних функцій з $\Theta(M)$, а в теоремі 5.2.8 показано, що клас топологічної еквівалентності оптимальної функції з $\Theta(M)$ визначається класом еквівалентності відповідної хордової діаграми критичного рівня сідла цієї функції.

Решта розділу присвячена теоремам реалізації та перерахування оптимальних функції з $\Theta(M)$.

Список зауважень

1. стор. 27, рядок 4.

Тут вводяться атоми $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$, як частини поверхні в $\mathbb{R}^3$, яка визначена рівнянням

$$\Sigma: \ (x^2 + y^2 + z^2 + 8) = 36(x^2 + y^2).$$

Стверджується, що така поверхня є тором. Це не зовсім очевидно, було б добре навести пояснення та рисунок, тим більше, що ті частини визначаються деякими нерівностями на x, y, z.

Якщо покласти $y = 0$, то рівняння зводиться до $x^2 + z^2 + 8 = 36x^2$, або до

$$(x \pm -3)^2 + z^2 = 1,$$

тобто є об'єднанням двох кіл радіусу 1 з центрами в точках $(3, 0, 0)$ та $(-3, 0, 0)$. Тому Σ отримана обертанням цих кіл навколо осі Oz, а отже вона дійсно є тором.

Зауважу також, що в підрозділі 2.2, де вводяться атоми, про таке представлення тора не згадується.

2. стор. 33, Твердження 3.4.2.

З формулювання не дуже чітко зрозуміло де рід поверхні і як він зв'язаний з числами, і що таке g_O та g_I.

Краще було б ввести числа g_O та g_I, а потім сказати, що рід поверхні дорівнює g_O (відповідно g_I), якщо граф функції має лише O-ребра (відповідно I-ребра).

3. Теорема 4.1.5 - цікаво було б провести паралель доведення з роботою

- Kazuichi Ikegami, Osamu Saeki, *Cobordism group of Morse functions on surfaces.* J. Math. Soc. Japan 55 (2003), no. 4, 1081-1094.

про кобордизми функцій Морса. В ній теж розглядаються певні перебудови графів Кронрода-Ріба, але при переході через особливі точки змінюється не лише тип функції, а й тип поверхні.

4. стор. 38. Варто було б відмітити, що твердження 5.1.3 та теорема 5.1.4, які описують топологічну структуру ліній рівня функцій в околі локального екстремуму на межі поверхні, є аналогами відомих теорем для локальних екстремумів, що лежать всередині поверхні і доведені відповідно в **лемі 3** статті

- E.N. Dancer, *Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities. II*, J. Reine Angew. Math. 382 (1987) 145–164.

та статті [35] О.О. Пришляка.

5. стор 69, рядки 21-24 зверху.

Тут сказано, що на рисунку 2.3.2 зображено функцію, у якої $4 - 2\chi(M)$ критичних точок.

Але цей рисунок, на мій погляд, лише схематично зображає поверхні і насправді не містить інформації про розподіл ліній рівня функції - з нього складається враження, що f є функцією висоти, але в такому випадку f матиме критичні точки всередині поверхні - на ручках, і тому не буде mm-функцією. Тому потрібні більш детальні пояснення, як саме побудувати таку функцію.

6. стор. 79. Означення 3.1.4:

Тут вводяться поняття X- та Y-вершини. Варто було б відмітити, що таким вершинам відповідають атоми типів C та G.

7. стор. 92, рис.3.3.3

На цьому рисунку представлено оснащені KR-графи функцій з класів $\Omega(M)$, що містять не більше 5 вершин. Я рекомендував би згрупувати ці графи по типам поверхонь. Так було б зрозуміліше. Бо графи, які відрізняються лише кольором ребер, визначають суттєво різні поверхні. Крім того, відразу було б видно кількість нееквівалентних функцій на різних типах поверхонь. Зокрема, це дало б доведення тверджень 4.2.2 та 4.2.3.

8. стор. 93. Означення 3.4.1: Вершина валентності 2 (відповідно 3) графа, яка інцидентна одночасно і I- та O- ребру називається вершиною типу T (відповідно D).

Варто було б відмітити, що цим вершинам відовідають атоми типів B та F відповідно. На мою думку позначення T та D не очевидні (що найменше вони не пояснюються в дисертації), і можливо краще було б позначати такі вершини B та F у відповідності з атомами.

Відмічені недоліки не є суттєвими і **не впливають** на загальну дуже високу позитивну оцінку роботи.

Дисертація носить теоретичний характер. Вона виконана на високому науковому рівні і справляє дуже гарне враження. Всі наведені в ній результати є новими і належать безпосередньо автору. Результати дисертації опубліковані в 5 статтях у виданнях, що входять до переліку фахових наукових журналів згідно чинного законодавства та індексуються системою Scopus, і в 12 тезах доповідей міжнародних конференцій. Вони також доповідались на багатьох наукових семінарах. Автореферат добре відображає зміст дисертації.

Оцінюючи рецензовану дисертацію в цілому, можна зробити висновок про те, що вона є завершеним науковим дослідженням, яке збагатило топологію і теорію Морса актуальними результатами. Отримані результати можуть бути застосовані в подальших дослідженнях в топології, теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, динамічних системах.

Вважаю, що дисертаційна робота Гладиш Богдани Іванівни **«Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів»** відповідає всім вимогам чинного положення "Порядку присудження наукових ступенів", а її автор без сумніву заслуговує присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент,
член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук
завідувач лабораторії топології
відділу алгебри та топології
Інституту математики НАН України

С. І. Максименко

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код

Підпис
ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
«23» вересня 2020 р.