

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГЛАДИШ Богдана Іванівна

УДК 515.162

ДИСЕРТАЦІЯ

Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів

01.01.04 – геометрія та топологія

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають
посилання на відповідне джерело.

_____ Б.І. Гладиш

Науковий керівник

ПРИШЛЯК Олександр Олегович

доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ

Гладиш Б. І. Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 "геометрія та топологія". — Київський національний університет імені Тараса Шевченка. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Результати, отримані у дисертації, присвячені вивченню локальної та глобальної класифікацій гладких функцій із ізольованими (невиродженими) критичними точками на многовидах з межею, а також деформацій загального положення таких функцій.

Базовою задачею досліджень в багатьох галузях математики є пошук інваріантів для подальшої класифікації об'єктів, що вивчаються. Важливим питання є топологія функцій на многовидах, оскільки саме функції є одним з основних інструментів в різних напрямках (не тільки математичних) наукових досліджень.

Актуальними є питання класифікації функцій на многовидах з межею та пошук інваріантів.

Дисертація складається з анотацій українською і англійською мовами, вступу, п'ятих розділів, які додатково розбиті на підрозділи, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

Основні об'єкти дослідження:

- 1) функції із невиродженими критичними точками на межі многовидів, які також є невиродженими критичними точками обмежень цих функцій на

межу;

- 2) функції з ізольованими критичними точками на межі поверхні, які також є ізольованими критичними точками їх обмежень на межу;
- 3) прості функції із невиродженими критичними точками на орієнтованій поверхні з межею;
- 4) деформації загального положення функцій вищеописаних класів.

У вступі аргументовано актуальність теми, визначено мету, завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, обґрунтовано наукову новизну, практичне значення результатів дисертації та зазначено особистий внесок здобувача.

У першому розділі зроблено огляд функцій Морса та функцій з ізольованими особливостями на замкнених поверхнях, розглянуто поняття updown-послідовності, графа Кронрода-Ріба, атома та f-атома, а також вивчено попередньо отримані результати присвячені функціям із внутрішніми критичними точками на поверхнях з межею.

У другому розділі дисертаційної роботи отримано топологічне зображення функції в околі її невиродженої критичної точки на межі n -вимірного многовиду, яка є також невиродженою критичною точкою обмеження функції на межу (mm-функцій) у вигляді многочлена другого степеня (див. теорему 2.1.1)

$$-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots \pm x_n^2.$$

Також одержано локальний вигляд таких функцій f для регулярних точок на межі многовиду:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$$

для деякої локальної системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) . Досліджено структуру функцій вищеописаного класу в околі критичного рівня та отримано класифікацію атомів та f-атомів (теорема 2.2.3).

Детально вивчено питання оптимальності (знаходження функції із мінімальним числом критичних точок у певному класі функцій на заданому многовиді) m -функцій, а саме показано, що число локальних екстремумів рівне двом (лема 2.3.2), знайдено загальне число критичних точок таких функцій (теорема 2.3.4) та отримано формулу для знаходження ейлерової характеристики поверхні через кількість критичних точок різних індексів (лема 2.3.3). Іншим важливим результатом, одержаним здобувачем у даному розділі, є необхідні умови продовження функції із межі орієнтованої поверхні на всю поверхню до простої оптимальної m -функції з однозв'язними компонентами рівня (див. теорему 2.3.5) .

Третій розділ присвячено простим функціям із невиродженими критичними точками на компактній орієнтованій поверхні M з межею — функції класу $\Omega(M)$. Показано (теорема 3.0.1), що для довільної m -функції на M існує функція із $\Omega(M)$, топологічно еквівалентна до початкової. І навпаки, для кожної функції класу $\Omega(M)$ існує m -функція, яка буде їй топологічно еквівалентною.

Важливим інструментом введеним у даному розділі, який також використовується і надалі, є оснащений граф Кронрода-Ріба, який виступає \mathcal{O} -інваріантом (топологічна еквівалентність із збереженням орієнтації поверхні) функцій із $\Omega(M)$ (див. теорему 3.2.2). Також описано прості \mathcal{O} -атоми (теорема 3.1.6) та отримано формули ((3.1), (3.2) і (3.3)) для знаходження топологічного типу поверхні оснащеного KR-графа.

У четвертому розділі розглянуто поняття деформації загального положення, введено означення (4.1.3 і 4.1.4) деформації оснащеного KR-графа та отримано критерій існування деформації загального положення між функціями класу $\Sigma(M)$ в термінах оснащених KR-графів (теорема 4.1.5), де M — компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею ∂M (можливо, $\partial M = \emptyset$), $\Sigma(M)$ — одна із таких множин:

- (1) прості функції Морса на M ($\partial M = \emptyset$);
- (2) прості m -функції на M ;
- (3) прості mm -функції на M .

Також отримано зв'язок між полярністю (функції, які мають рівно один локальний мінімум і один локальний максимум) та оптимальністю функцій із $\Sigma(M)$ (теорема 4.1.7), а саме показано, що:

- 1) оптимальна m -функція буде полярною;
- 2) оптимальність і полярність функцій Морса на замкненій поверхні є рівносильними;
- 3) mm -функція є оптимальною тоді і тільки тоді, коли вона є полярною.

Ввівши поняття деформаційного графа, наведено зв'язок між описаними вище функціями на певних поверхнях.

Останній розділ дисертації присвячено вивченню функціям із такими ізолюваними особливостями на межі поверхні, які також є ізолюваними особливостями обмежень цих функцій на межу. Клас таких функцій позначено через $\Theta_0(M)$ для поверхні M . Так, для функції $f \in \Theta_0(M)$, заданій на поверхні M з межею ∂M , отримано таке локальне топологічне зображення в околі критичної точки $p_0 = (0, 0) \in \partial M$ (для деякої карти $U(x, y)$):

- 1) $x^2 + y^2, y \geq 0$, якщо p_0 — точка локального мінімуму (твердження 5.1.3);
- 2) $-x^2 - y^2, y \geq 0$, якщо p_0 — точка локального максимуму (твердження 5.1.3);
- 3) $\operatorname{Re}(x + iy)^k, y \geq 0$ (для деякого натурального k), якщо p_0 — сідлова критична точка (теорема 5.1.4).

Введено поняття оснащеної хордової діаграми як кола із додатковими елементами. Розглядаючи простий f -атом сідлового критичного рівня функції

$f \in \Theta_0(M)$, побудовано хордову діаграму сідлового критичного рівня функції, таку що буде також оснащеною хордовою діаграмою. Для простих функцій $f \in \Theta_0(M)$, які позначено через $\Theta(M)$, отримано критерій оптимальності на зв'язній компактній поверхні M зі зв'язною межею, а саме показано наступне:

- 1) якщо M негомеоморфна 2-вимірному диску, то f — оптимальна тоді і тільки тоді, коли вона має три критичні точки (з яких дві є точками екстремуму, а третя — сідловою) (теорема 5.2.1);
- 2) якщо M гомеоморфна 2-вимірному диску, то f — оптимальна тоді і тільки тоді, коли вона має дві критичні точки (зауваження 5.2.2).

Також описано властивості хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції окремо у випадках орієнтованої та неорієнтованої поверхонь (теореми 5.2.5 і 5.2.10). Побудовано критерії топологічної еквівалентності оптимальних функцій класу $\Theta(M)$ в термінах хордових діаграм сідлового критичного рівня функції (теорема 5.2.8 і твердження 5.2.12) та базуючись на властивостях хордових діаграм розв'язано проблему реалізації, а саме показано, що якщо оснащена хордова діаграма задовольняє вищезгадані властивості, то існує оптимальна функція на компактній поверхні з однією компонентою межі, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої співпадає з початковою (теорема 5.2.9 і твердження 5.2.13).

У додаток входять список публікацій здобувачки на тему дисертаційного дослідження та дані про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: функція Морса, топологічна класифікація, невідроджена критична точка, проста функція на поверхні з межею, простий атом, простий f-атом, оснащений граф Кронрода-Ріба, оптимальна функція, полярна функція, деформація загального положення, деформація оснащеного графа Кронрода-Ріба, ізольована критична точка, хордова діаграма сідлового критичного рівня функції.

ABSTRACT

Hladysh B. I. Functions with critical points on the boundary of low-dimensional manifolds. — Manuscript.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences Thesis, speciality 01.01.04 "Geometry and Topology". — Taras Shevchenko National University of Kyiv. — Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 2020.

The work is prepared at the department of geometry, topology and dynamical systems of mechanics and mathematics faculty of Taras Shevchenko National University of Kyiv.

The results, obtained in the presented thesis, are devoted to the study of local and global classifications of smooth functions with isolated (non-degenerated) singularities on manifolds with boundaries. Also, the deformations in general position are considered.

The principal task of many scientific investigations in different branches of mathematics is the search of invariants for further objects classification. Another important issue is the topology of functions on the manifolds. This is because functions are one of the main tools in various scientific directions (not only mathematical ones).

The questions of functions classification defined on manifolds with the boundary and searching of invariants are still actual.

The thesis consists of abstracts in Ukrainian and English, introduction, five sections, divided into subsections, conclusions for each section and general one, a list of sources and appendix.

The main objects of study are:

- 1) functions with non-degenerated critical points on the boundary of manifolds being also non-degenerated critical points of correspondent functions restrictions to the boundaries;

- 2) functions with isolated singularities on the boundary of a surface being also isolated singularities their restrictions to the boundary;
- 3) simple functions with non-degenerated critical points on an oriented surface with the boundary;
- 4) deformations in general position of previously described classes of functions.

The introduction substantiates the relevance of the research, determines the purpose, objectives, subject and research methods. Also, it is indicated the scientific novelty, practical value of the thesis results and the personal contribution of the applicant is mentioned.

The first chapter provides the overview of Morse functions and functions with isolated singularities on a closed surface. Thus it is considered the following definitions: updown-sequence, Reeb graph, atom and f-atom. Also, the previously obtained outcomes, being devoted to the functions with inner critical points on the surfaces with boundary, are observed.

In the second chapter of the dissertation the local topological presentation of function above its non-degenerated critical point on the boundary of a n -dimensional manifold, being also non-degenerated critical point of function restriction to the boundary (mm-function), is obtained (Theorem 2.1.1)

$$-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots \pm x_n^2 .$$

Also we describe the local form of such functions f above regular critical points on the manifold boundary:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$$

for some local coordinates system (x_1, x_2, \dots, x_n) . The applicant investigates the structure of the class of the previously described functions above the critical level and obtains the classification of atom and f-atom (Theorem 2.2.3).

Besides it is studied in details the question devoted to the optimality of mm-functions. So, we prove that the number of local extremums is equal to two (see Lemma 2.3.2), found the general number of critical points of such functions (see Theorem 2.3.4) and received the formula of Euler characteristic of the surface using the number of critical points of different indexes (Lemma 2.3.3). Another important result, obtained in this section, is necessary conditions of continuation of the function from the boundary of oriented surface (which satisfy the Theorem 2.3.5) to the whole surface, such that the gotten continuation is simple optimal mm-function with connected level components.

The third chapter is dedicated to simple functions with non-degenerated critical points on a compact oriented surface M with the boundary, namely functions of class $\Omega(M)$. It is (Theorem 3.0.1), that for arbitrary m-function on M there exists function from $\Omega(M)$ which is topologically equivalent to the initial one, and vice versa, for each function of class $\Omega(M)$ there exists the m-function being topologically equivalent to it.

Equipped Reeb graph is a considerable tool in this section being also used later. This graph is \mathcal{O} -invariant (topological equivalence which preserves the surface orientation) for functions from $\Omega(M)$ (Theorem 3.2.2). Moreover, we describe the simple \mathcal{O} -atoms (Theorem 3.1.6) and received the formulas ((3.1), (3.2) i (3.3)) for finding the topological type of the surface using the correspondent equipped Reeb graph.

In the fourth chapter we investigate the deformations in general position. Therefore, it is considered the definitions (4.1.3 and 4.1.4) of deformation of equipped Reeb graph and obtained the criterion of existence of deformation in general position between function from $\Sigma(M)$ in terms of equipped Reeb graphs (Theorem 4.1.5), where M is a compact connected oriented surface with the boundary ∂M (it is also possible that $\partial M = \emptyset$) and $\Sigma(M)$ is one of the following sets:

- (1) simple Morse functions on M ($\partial M = \emptyset$);
- (2) simple m-functions on M ;
- (3) simple mm-functions on M .

We describe the connections between polarity and optimality of functions from $\Sigma(M)$ (Theorem 4.1.7), that are:

- 1) optimal m-function is polar;
- 2) optimality and polarity of Morse functions on a closed surface are equivalent;
- 3) mm-function is optimal if and only if it is polar.

Additionally the deformation graph of a surface is defined and subsequently it is found the connection between above-described functions on some surfaces.

The last chapter is devoted to investigating of functions with isolated singularities on the boundary of a surface being also isolated singularities of corresponding restrictions to the boundary, namely functions from $\Theta_0(M)$ for the surface M . Thus, for the function $f \in \Theta_0(M)$, defined on the surface M with the boundary ∂M , we obtain the following local presentation about critical point $p_0 = (0, 0) \in \partial M$ (for some map $U(x, y)$):

- 1) $x^2 + y^2, y \geq 0$ if p_0 is minimum point (Proposition 5.1.3);
- 2) $-x^2 - y^2, y \geq 0$ if p_0 is maximum point (Proposition 5.1.3);
- 3) $\operatorname{Re}(x + iy)^k, y \geq 0$ (for some integer $k \geq 1$) if p_0 is saddle critical point (Theorem 5.1.4).

We define the chord diagram as a circle with some elements. Considering simple f-atom of saddle critical level of the function $f \in \Theta_0(M)$, it is constructed the chord diagram of the saddle critical level of a function being also chord diagram. For simple functions $f \in \Theta_0(M)$ (the set of which is denoted by $\Theta(M)$), we obtain

the optimality criterion in the case of compact connected surface M with connected boundary, that is:

- 1) if M is not homeomorphic to 2-dimensional disk, then f is optimal if and only if it has exactly three critical points (Theorem 5.2.1);
- 2) if M is homeomorphic to 2-dimensional disk, then f is optimal if and only if it has two critical points (Remark 5.2.2).

Following the previous results, the chord diagram of the saddle critical level of an optimal function is characterized in the case of oriented (Theorem 5.2.5) and non-oriented (Theorem 5.2.10) surfaces. We construct the criterion of topological equivalence of optimal functions from $\Theta(M)$ in terms of chord diagrams of saddle critical level (Theorem 5.2.8, Proposition 5.2.12). Using the properties of chord diagrams, solve the realization problem, which means that we show that if equipped chord diagram satisfy previously mentioned properties then there exists the optimal function on the compact surface with single boundary component, chord diagram of the saddle critical level of which coincide with the initial one (Theorem 5.2.9, Proposition 5.2.13).

The appendix contains a list of publications of the applicant on the topic of the dissertation and information about the approbation of the results being obtained in the thesis.

Key words: Morse function, topological classification, non-degenerated critical point, simple function on a surface with the boundary, simple atom, simple f-atom, equipped Reeb graph, optimal function, polar function, deformation in general position, deformation of equipped Reeb graph, isolated singularity, chord diagram of saddle critical function level.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

(які входять до міжнародних наукометричних баз даних)

1. Гладіш Б.І. Функції з невідродженими критичними точками на межі поверхні / Б.І. Гладіш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. — 2016. — Т. 68, № 1. — С 28–37.
2. Hladysh Bohdana I. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold / Bohdana I. Hladysh and Alexandr O. Prishlyak // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2017. — Vol. 13, № 050. — 17 P.
3. Гладіш Б.І. Деформації загального положення оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях з межею / Б.І. Гладіш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. — 2019. — Т. 71, № 8. — С. 1028–1039.
4. Hladysh Bohdana Simple Morse functions on an oriented surface with boundary / Bohdana Hladysh and Alexandr Prishlyak // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2019. — Vol. 15, № 3. — P. 354–368.
5. Гладіш Б.І. Функції з ізольованими критичними точками на межі неорієнтованої поверхні / Б.І. Гладіш // Нелінійні коливання. — 2020. — Т. 23, № 1. — С. 26–37.

Тези наукових доповідей

1. Prishlyak O.O. Functions with non-generated critical points on the boundary of manifold / O.O. Prishlyak, B.I. Ivanusa // International conference «Geometry in Odesa – 2015», Odesa, Ukraine, 25–31 May 2015. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2015. — P. 58.

2. Hladysh B.I. Topological aspects of surfaces by genus 3 with boundary and optimal functions defined on them in technical sciences. / B.I. Hladysh, V.V. Zhebka // International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies», Kyiv, Ukraine, 17–20 November 2015. — Kyiv: State University of Telecommunications, 2015. — P. 110.
3. Гладиш Б.І. Топологічно нееквівалентні функції з трьома ізольованими критичними точками на межі орієнтованої поверхні / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Міжнародна наукова конференція «Геометрія і топологія в Одесі – 2016», Одеса, Україна, 2–8 червня 2016. — Одеса: Одеська національна академія харчових технологій, 2016. — С. 36.
4. Hladysh B.I. Optimal functions with isolated critical points on the boundary of the surfaces / B.I. Hladysh, O.O. Prishlyak // International conference Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday, Kharkiv, Ukraine, 12–16 September 2016. — Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. — P. 22.
5. Hladysh Bohdana. Continuation of functions, defined on the circle, to optimal Morse functions on the surface / Bohdana Hladysh and O.O. Prishlyak // International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, Lviv, Ukraine, 27 September – 1 October 2016. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 22–23.
6. Hladysh B.I. Deformations of functions with isolated critical points on the boundary of the surface / B.I. Hladysh // All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling», Mykolaiv, Ukraine, 19–21 October 2016. — Mykolaiv: Mukolaiv V.O. Sukhomlynskyi National University, 2016. — P. 12.
7. Hladysh B.I. Deformation of a Morse function on a surface with the boundary /

B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 31 May – 5 June 2017. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2017. — P. 50–51.

Тези (додатково), опубліковані за результатами дисертації

1. Ivanusa B.I. Optimal 2 mm-functions on surfaces with boundary / B.I. Ivanusa // International conference of young mathematicians, Kyiv, Ukraine, 3–9 June 2015. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 15.
2. Hladysh B.I. Atoms of saddle critical level line of smooth functions on surfaces with boundary / B.I. Hladysh // XI-th summer school «Algebra, topology, analysis», Odesa, Ukraine, 1–14 August 2016. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2016. — P. 76.
3. Гладиш Б.І. Функції на поверхнях з межею та їх графі Кронрода-Ріба / Б.І. Гладиш, Н.В. Лукова-Чуйко // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917 – 2008), Київ, Україна, 7–10 червня 2017. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 16.
4. Hladysh B. Functions with isolated critical points on the boundary of non-oriented surface / B. Hladysh // International conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (25.09.1949 – 07.10.2014), Kyiv, Ukraine, 25–28 September 2019. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 17–19.
5. Hladysh B. Structure of functions on an oriented 2-manifold with the boundary / B. Hladysh, A. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 26–30 May 2020. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2020. — P. 27–28.

ЗМІСТ

Вступ	18
1 Попередні відомості	45
1.1 Функції на поверхнях	45
1.2 A_n -змії	46
1.3 Функції Морса на замкнених поверхнях	46
1.3.1 Лема Морса	48
1.3.2 Мінімальні функції Морса	49
1.4 Атом та f-атом гладких функцій на поверхнях	50
1.4.1 Класифікація простих f-атомів функції Морса на замкнених по- верхнях	52
1.5 Граф Кронрода-Ріба	53
1.6 Функції із внутрішніми критичними точками на поверхнях з межею	55
1.6.1 Функції Морса	55
1.6.2 m-Функції	55
1.7 Функції з ізольованими критичними точками на замкнених поверх- нях	57
1.7.1 Мінімальні функції	59
1.7.2 Хордові діаграми	59
1.8 Висновки	61

2 Функції з неvierодженими критичними точками на межі гладкого многовида	62
2.1 Функції на n -вимірних многовидах з межею	62
2.2 Функції на поверхнях з межею	64
2.3 Оптимальні m -функції на поверхнях з межею	68
2.4 Висновки	75
3 Прості функції з неvierодженими особливостями на орієнтованих поверхнях з межею	76
3.1 Атоми простих функцій на орієнтованих поверхнях з межею	78
3.2 Оснащені графи Кронрода-Ріба простих функцій на орієнтованих поверхнях з межею	83
3.3 Приклади підрахунку KR -графів для поверхонь	89
3.4 Топологічний тип поверхні оснащеного графа Кронрода-Ріба	93
3.5 Висновки	95
4 Деформації загального положення оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях з межею	96
4.1 Деформації загального положення	96
4.2 Деформації оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях	104
4.3 Висновки	108
5 Топологія функцій з ізольованими критичними точками на межі	109
5.1 Локальна топологічна класифікація	109
5.1.1 Атом функції	116

5.2	Оптимальні функції	122
5.2.1	Критерій оптимальності функції	122
5.2.2	Випадок орієнтованої поверхні з однією компонентою межі	126
5.2.3	Випадок неорієнтованої поверхні з однією компонентою межі . .	132
5.3	Висновки	138
	Висновки	140
	Список використаних джерел	142
	Додаток	150

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню гладких функцій на многовидах із межею, а саме: розглядаються питання, пов'язані з їхньою локальною класифікацією, а у випадку 2-вимірного многовида — із глобальною класифікацією оптимальних функцій і деформаціями загального положення.

Актуальність теми. Топологічна класифікація гладких функцій — це провідна задача топологічних досліджень, оскільки такі функції знаходять своє застосування в різних галузях науки.

Одним з основних інструментів диференціальної топології є теорія Морса, засновником і автором фундаментальних результатів якої є американський математик М. Морс. Так, М. Морс отримав локальне топологічне зображення функції на замкненому n -вимірному многовиді (лема Морса [1]). Також слід зауважити, що в просторі всіх функцій з C^∞ -топологією на замкненому многовиді множина функцій Морса утворює відкриту скрізь щільну множину. Ці функції є структурно стійкими. Класичними роботами по дослідженню топологічних властивостей функцій з невідродженими особливостями на замкнених поверхнях також є роботи Г. Ріба [2], А. Кронрода [3], Дж. Милнора, А. Уолеса [4] та В. Шарка [5]. Також базовими ідеями для подальшого розвитку теорії Морса також виступають праці А. Фоменко, А. Болсінова, С. Матвєєва [6] та ін. [7, 8, 9, 10]. Г. Ріб та А. Кронрод побудували граф, що дозволяє робити класифікацію простих функцій Морса на поверхнях. О. Болсинов та А. Фоменко [11], досліджуючи гамільтонову механіку, розглядали пошарову еквівалентність функцій Морса на поверхні, ввівши для цього поняття атома та f -атома. Класифікація функцій з невідродженими особливостями на маловимірних многовидах отримана у роботах В. Шарка [12], О. Пришляка [13, 14] та ін. [15]. Важливим доповненням до цих результатів є праці [16, 17], де описано компоненти зв'язності просторів функцій Морса на компактних поверхнях. Також

питання пов'язані із топологічною класифікацією функцій Морса на 3-вимірних многовидах частково розв'язані у роботах [13, 18]. Як додатково, слід розглянути праці [19, 20], в яких також досліджувались функції Морса.

На многовидах з межею від функцій Морса природньо вимагають, щоб їх обмеження на внутрішність було функцією Морса. Проте в залежності від поставлених цілей поведінка на межі може бути різною. Так, в класичній теорії Морса [4] функції Морса стали на кожній компоненті межі. Якщо не накладати ніяких обмежень на поведінку на межі, то функція в загальному положенні не має критичних точок на межі і її обмеження на межу є функцією Морса. Такі функції часто називають m -функціями [21]. Іншим типом функцій є функції з невірдженими критичними точками на межі, які розглядаються в другому розділі дисертаційної роботи. Зауважимо, що є різні наукові праці, де під функціями Морса розуміють функції кожного з трьох типів.

Топологічна еквівалентність m -функцій вивчена в роботах С. Максименка [22], О. Пришляка [23] та ін. [21]. Також важливі результати, присвячені топологічним властивостям простих функцій (із однією критичною точкою на кожному критичному рівні) на многовидах з межею, описано в працях [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Так, у [22] отримано критерій еквівалентності m -функцій, а у статті [25] ([26]) авторами описано всі атоми та молекули m -функцій на компактних (не)орієнтованих поверхнях з краєм із не більш ніж 6-ма (5-ма) крайовими особливостями.

Іншим важливим об'єктом дослідження є деформації функцій, які виникають в багатьох розділах як математики, так і її застосувань, наприклад, в теорії катастроф [30], теорії особливостей [31, 32], при вивченні просторів функцій [33, 34] тощо.

У роботі [35] О. О. Пришляком детально вивчені питання пов'язані із класифікацією гладких функцій з ізольованими особливостями на замкнених гладких поверхнях. Отримано локальну топологічну класифікацію таких функцій в

околі критичної точки та побудовано повний топологічний інваріант у вигляді розрізняючого графа. Також важливою в даній тематиці є праця М. Морса [36] та ін. [29, 37, 38, 39, 40]. Так, у [29] авторами для встановлення еквівалентності функцій було розглянуто спеціальне навантаження графів, а, наприклад, у [38, 39] досліджувались графи Кронрода-Ріба функцій на некомпактних поверхнях.

Значущим є питання мінімальності числа критичних точок функції на заданому многовиді. С. Смейл показав існування таких функцій у випадку однозв'язних многовидів розмірності більше, ніж п'ять. Своєю чергою В. Шарко отримав умови існування мінімальних функцій на неодnozв'язних многовидах великих розмірностей. Часто виникає ситуація, коли задача класифікації потребує побудови інваріантів, що використовують певні комбінаторні об'єкти. Одним із таких об'єктів є хордові діаграми, які детально вивчені в роботах [12, 15, 41, 42, 43]. Так, В. Шарко [12] використовував хордові діаграми при дослідженні гладкої і топологічної еквівалентностей функцій на поверхнях. А. Ошемков [15] використовував хордові діаграми для класифікації функцій Морса на орієнтованих поверхнях. Також питання підрахунку неізоморфних хордових діаграм повністю розглянуте в роботах [44, 45, 46, 47, 48], а для 3-вимірних многовидів — у [49]. Хордові діаграми використовуються при дослідженні питань мінімальності функцій на замкнених поверхнях (див., наприклад [48]).

З іншого боку, актуальним для розгляду є дослідження локального представлення функцій з не виродженими та з ізольованими критичними точками на межі поверхні, побудова інваріанту для подальшої класифікації таких функцій. Також попередньо нерозв'язаною проблемою залишається питання оптимальності та деформацій гладких функцій з особливостями на межі поверхні.

Все вищезазначене дозволяє зробити висновок, що тема дисертаційної ро-

боти є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Результати дисертації використані при виконанні науково-дослідної теми 19БФ038-02 «Розробка нових аналітико-геометричних, асимптотичних та якісних методів дослідження інваріантних множин диференціальних рівнянь». Номер державної реєстрації теми: 0119U100334.

Об'єкт дослідження. Основні об'єкти дослідження:

- функції із невиродженими критичними точками на межі многовидів, які також є невиродженими критичними точками обмежень цих функцій на межу;
- функції з ізольованими критичними точками на межі поверхні, які також є ізольованими критичними точками їх обмежень на межу;
- прості функції із невиродженими критичними точками на орієнтованій поверхні з межею;
- деформації загального положення функцій вищеописаних класів із невиродженими особливостями, а також функцій Морса на замкненій поверхні.

Предмет дослідження: топологічні властивості функцій на многовидах з межею.

Мета даної роботи — це вивчення топологічних властивостей функцій із ізольованими критичними точками на межі компактного 2-вимірного многовиду.

Завдання дослідження:

- отримати представлення функції в околі невиродженої критичної точкою на межі n -вимірного многовиду, яка також є невиродженою критичною точкою обмеження функції на межу (mm -функції), а також в околі ізольованої особливості на межі поверхні;
- побудувати критерій оптимальності mm -функції на заданій (компактній) поверхні та дослідити питання продовження функції, заданої на межі поверхні, на всю поверхню до оптимальної mm -функції;
- знайти інваріанти для класифікації простих функцій з невиродженими та з ізольованими особливостями на компактних поверхнях з межею;
- класифікувати атоми всіх вищеописаних функцій;
- дослідити, коли між функціями з невиродженими особливостями на компактних поверхнях з межею (можливо порожньою) існує деформація загального положення.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи геометричної та диференціальної топології, теорії динамічних систем та теорії особливостей гладких функцій на поверхнях.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, нові й полягають у такому:

- (1) для mm -функцій на компактній поверхні:
 - а) знайдено зображення функції в околі критичної точки на межі n -ного многовиду;
 - б) описано всі прості атоми;
 - в) побудовано критерій оптимальності простих mm -функцій;

- г) знайдено необхідні умови продовження функції Морса, заданої на межі орієнтованої поверхні роду g із $4g+2$ критичними точками до оптимальної m -функції з однозв'язними компонентами рівня;
- (2) для простих функцій із неvierодженими особливостями на компактній поверхні з межею:
- а) отримано класифікацію (з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності) в термінах оснащеного KR-графа ;
 - б) виведено формули для знаходження топологічного типу поверхні за оснащеним KR-графом;
 - в) описано \mathcal{O} -атоми;
- (3) для функцій із пунктів (1) і (2), а також для простих функцій Морса на замкненій поверхні отримано критерій існування деформації загального положення між двома функціями одного з описаних вище класів в термінах деформацій відповідних оснащених KR-графів;
- (4) для простих функцій, всі критичні точки яких ізольовані, належать межі і також є ізольованими критичними точками обмеження цих функцій на межу поверхні:
- а) отримано топологічну класифікацію у околі критичної точки;
 - б) побудовано повний топологічний для оптимальних функцій як у орієнтованому, так і в неорієнтованому випадках.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженнях з топології, теорії особливостей, теорії динамічних систем, а також в інших галузях науки, де виникають функції на поверхнях. Також дослідженні у дисертації функції можуть використовуватись як функції Ляпунова для градієнтних полів і у якісній теорії гамільтонових векторних полів. Своєю чергою

mm-функції знаходять своє застосування в контактній топології і теорії Флора, та, розглядаючи ті чи інші процеси неперервно в часі, отримуємо залежну від параметра сім'ю функцій — деформацію.

Особистий внесок здобувачки. Результати, які містить ця дисертаційна робота, авторка отримала особисто. Задання загального плану досліджень, постановка задач і загальне керівництво роботою належать науковому керівникові. В працях, які опубліковані у співавторстві, остаточні формулювання й доведення результатів належать здобувачці.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- Науковий семінар відділу топології Інституту математики НАН України (м. Київ, Україна, 2015);
- Семінар кафедри геометрії і топології Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова (м. Одеса, Україна, 2015);
- International conference «Geometry in Odessa — 2015» (Odesa, Ukraine, 2015);
- International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies» (Kyiv, Ukraine, 2015);
- Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі — 2016» (м. Одеса, Україна, 2016);
- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv, Ukraine, 2016);
- The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, Ukraine, 2016);

- All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling» (Mykolaiv, Ukraine 2016);
- International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (Odesa, Ukraine, 2017);
- Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology (Vienna, Austria, 2015 — 2019);
- Семінари кафедри геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, Україна, 2015 — 2019).

Публікації. Результати дисертаційної роботи представлені в 5-ти статтях [1^a — 5^a] в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Всі статті опубліковані в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus). Також результати роботи опубліковано 12 тез у матеріалах міжнародних наукових конференціях [6^a — 17^a].

Структура й обсяг дисертації. До складу дисертації входять: анотація (українською і англійською мовами), вступ, п'ять розділів, висновки, список використаних джерел, що містить 64 одиниці посилань, і додаток. Повний обсяг роботи становить 149 сторінок.

Основний зміст роботи. У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено зв'язок з науковими планами, темами і програмами, сформульовано мета, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, аргументовано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, а також відзначено особистий внесок здобувачки, апробацію результатів та публікації за результатами даної дисертаційної роботи.

Розділ 1 має вступний і допоміжний в подальшому характер. У ньому описуються деякі базові поняття й попередні результати, присвячені теорії Морса, класу функцій з ізольованими критичними точками на замкнених поверхнях і m -функціям, такі що використовуються або ж узагальнюються в подальших розділах.

Вважатимемо, що всі многовиди й функції класу C^∞ . Також для функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ через f_∂ позначатимемо обмеження f на межу ∂M поверхні M .

Розділ 2 присвячено вивченню функцій із невідродженими особливостями на межі поверхні. Так, в підрозділі 2.1 отримано локальне зображення цих функцій.

Нехай M — гладкий n -вимірний многовид із межею ∂M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функція, визначена на цьому многовиді, f_∂ — обмеження функції f на межу ∂M .

Теорема 2.1.1. *Нехай $p_0 \in \partial M$ — невідроджена критична точка функції f і невідроджена критична точка обмеження f_∂ функції f на ∂M , така, що $f(p_0) = 0$. Тоді існує система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$ в околі p_0 , для якої $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ і функція f має таке локальне зображення:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2 \quad (2.1)$$

для деякого $\delta \in \{-1, +1\}$.

Твердження 2.1.3. *Якщо $p_0 \in \partial M$ така, що $f(p_0) = 0$ і не є критичною точкою функції f_∂ , то існує система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$ в околі p_0 , для якої функція f має вигляд:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \quad (2.3)$$

Означення 2.1.4. Нехай $p_0 \in \partial M$ — критична точка функції f і її обмеження f_∂ на ∂M , тоді *індексом критичної точки* називатимемо пару (λ, δ) , яка визначається рівністю (2.1).

Ця пара чисел повністю визначається парою індексів Морса для функцій f і f_∂ . Оскільки індекси Морса не залежать від способу зведення функції до канонічного вигляду, то те саме виконується для індексу (λ, δ) .

Під f -атомами A_1, B_1 розумітимемо частини тора $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2)$ задані умовами $y \leq 0, z \leq -3$ та $y \leq 0, -3 \leq z \leq 0$ відповідно, розбиті на лінії рівня функції $f(x, y, z) = z$ та розглянуті з точністю до пошарово оснащеної еквівалентності. В свою чергу f -атом C_1 будемо розглядати як проекцію частини тора $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2), x > 0, 1 \leq z \leq 3$ на площину yz , розбиту на лінії рівня функції $f(x, y, z) = z$. Заміною знаку функції із f -атомів A_1, B_1, C_1 можна отримати f -атоми A_2, B_2 і C_2 відповідно (див. рис. 2.2.1 – 2.2.6).

Теорема 2.2.3. *Кожен простий атом збігається із атомом A або з атомом B , або з атомом C , кожному з яких відповідає два f -атоми.*

У підрозділах 2.2 і 2.3 розглядається випадок 2-вимірного многовиду і прості функції з невідродженими особливостями на межі. Так у 2.2 описано структуру простих функцій в околі критичного рівня залежно від індексу критичної точки. Отримано повну класифікацію простих атомів таких функцій (див. теорему 2.2.3).

У підрозділі 2.3 введено поняття m -функції, знайдено найменше можливе число критичних точок простої m -функції у класі всіх простих m -функцій на заданій поверхні. Також важливим результатом є отримані необхідні умови продовження простої функції Морса, заданої на межі орієнтованої поверхні роду g із $4g + 2$ критичними точками на всю поверхню до простої оптимальної m -функції.

Нехай M — гладка поверхня з межею, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Під оптимальною функцією у деякому класі функцій розумітимемо функцію, яка має найменше можливе число критичних точок у цьому класі, якщо така існує.

Означення 2.3.1. Функцію Морса $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називатимемо *тм-функцією*, якщо обмеження $f|_{\partial M}$ функції на межу ∂M також є функцією Морса і всі критичні точки функції f належать межі поверхні ∂M .

Лема 2.3.2. *Проста оптимальна тм-функція на поверхні має рівно один мінімум і один максимум.*

Нехай f — тм-функція на поверхні M . Через c_i^\pm позначатимемо число критичних точок функції f індексу $(i, \pm 1)$, тобто c_0^+ — число критичних точок індексу $(0,1)$, c_0^- — індексу $(0,-1)$, c_1^+ — індексу $(1,+1)$, c_1^- — індексу $(1,-1)$.

Лема 2.3.3. *Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — оптимальна тм-функція на поверхні M . Тоді ейлерова характеристика поверхні дорівнює*

$$\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}.$$

Теорема 2.3.4. *Проста оптимальна тм-функція на орієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $4g + 2k$ критичні точки, а на неорієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $2g + 2k$ критичні точки.*

Природньо виникає запитання: чи кожну просту функцію Морса, задану на межі поверхні, можна продовжити на всю поверхню до простої оптимальної тм-функції з однозв'язними компонентами рівня?

Відразу ж з останньої теореми можна зробити висновок, що необхідними умовами є те, що для орієнтованої (неорієнтованої) поверхні роду g з k компонентами межі функція повинна мати $4g + 2k$ ($2g + 2k$) критичні точки.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні M роду $g \geq 1$ з однією компонентою межі. Тоді число критичних точок простої оптимальної функції дорівнює $4g + 2$.

Теорема 2.3.5. *Нехай f — проста функція Морса, задана на межі орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі, яка має $4g + 2$ критичні*

точки із критичними значеннями $c_1, c_2, \dots, c_{4g+2}$ ($c_1 < c_2 < \dots < c_{4g+2}$). Тоді, якщо функцію f можна продовжити на всю поверхню до простої оптимальної m -функції з однозв'язними компонентами рівня, то виконуються умови:

- I) перші 3 критичні значення, c_1, c_2, c_3 , функції f (як функції на колі) відповідають точкам локального мінімуму;
- II) серед критичних значень $c_4, c_5, \dots, c_{4i+3}$ є принаймні 2і значень, які відповідають точкам локального мінімуму, для всіх натуральних i , таких, що $4i + 3 \leq 4g + 2$.

Зауважимо, що, за виконання умов теореми 2.3.5 останні три критичні значення $c_{4g}, c_{4g+1}, c_{4g+2}$ відповідають точкам локального максимуму як функції на колі.

Розділ 3 присвячено дослідженню простих функцій із невиродженими критичними точками на гладкій компактній зв'язній поверхні M з межею ∂M , які топологічно еквівалентні m -функціям.

Введено поняття функцій класу $\Omega(M)$, доведено їх еквівалентність m -функціям, описано поняття \mathcal{O} -еквівалентності і \mathcal{O} -атома та побудовано оснащений KR-граф, інваріантність якого при \mathcal{O} -класифікації функцій показано в підрозділі 3.2.

Нехай M — гладка поверхня з межею ∂M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція на ній. Через f_∂ позначатимемо обмеження функції f на межу ∂M .

Розглянемо клас функцій

$$\Omega_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid CP(f) = NDCP(f) \supset CP(f_\partial) = NDCP(f_\partial)\},$$

де $CP(*)$ ($NDCP(*)$) — множина (невироджених) критичних точок функції $*$.

Надалі в цьому розділі розглянуто випадок гладкої компактної зв'язної орієнтованої поверхні.

Теорема 3.0.1. *Нехай M — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня. Тоді виконуються такі твердження:*

- 1) *для довільної функції $f \in \Omega_0(M)$ існує m -функція $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, яка є топологічно еквівалентною до функції f ;*
- 2) *для довільної m -функції $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ існує функція $f \in \Omega_0(M)$, така, що f і g топологічно еквівалентні.*

Розглянемо гладкі функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, задані на гладких компактних поверхнях.

Нагадаємо, що функції f і g називаються *пошарово (пошарово оснащено) еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм поверхонь $\lambda : M \rightarrow N$, такий, що переводить лінії рівня f у лінії рівня функції g (зберігаючи при цьому напрямки росту функцій).

Означення 3.1.1. Функції f і g називаються *\mathcal{O} -еквівалентними*, якщо f і g пошарово оснащено еквівалентні і відповідний гомеоморфізм поверхонь (який задає пошарово оснащену еквівалентність) зберігає орієнтацію. Позначимо через U об'єднання компонент лінійної зв'язності достатньо малого околу критичного рівня функції f , такі, що містять критичні точки. Клас \mathcal{O} -еквівалентності пари $(U, f|_U)$ називатимемо *\mathcal{O} -атомом*.

Означення 3.1.2. *\mathcal{O} -атом називається простим*, якщо він містить одну критичну точку.

Оскільки всі функції, які надалі буде розглянуто в цьому розділі, будуть простими, то в подальшому кожен атом (\mathcal{O} -атом) також буде простим, що для простоти викладок інколи будемо опускати.

Означення 3.1.3. Топологічно еквівалентні функції f і g , задані на орієнтованій поверхні M , називатимемо *топологічно \mathcal{O} -еквівалентними*, якщо відповід-

ний гомеоморфізм поверхонь (який задає топологічну еквівалентність) зберігає орієнтацію поверхні M .

Розглянемо надалі клас функцій $\Omega(M) = \{f \in \Omega_0(M) | f \text{ — проста}\}$, заданих на компактній поверхні M .

Нехай $f \in \Omega(M)$. Компоненти лінії рівня функції f називатимемо шарами, причому для регулярних рівнів вони гомеоморфні відрізку або колу. Тоді поверхня M розіб'ється на об'єднання шарів і отримаємо шарування з особливостями. Шар називатимемо (О-) І-шаром, якщо він відповідає компоненті лінії рівня гомеоморфній відрізку (колу). Розглянемо відношення еквівалентності на M , в якому точки еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони належать одному шару. Далі, ввівши фактор-топологію в просторі шарів, отримаємо деякий граф Γ_f , в якому ребра будемо зображати звичайною (штрихпунктирною) лінією, якщо вони поставлені у відповідність (О-) І-шарам. Відповідні ребра називатимемо (О-) І-ребрами, тоді всі ребра графа розіб'ються на два типи і таке розбиття називатимемо *розбиттям ребер* графа Γ_f .

Означення 3.1.4. Вершини валентності 3 і 4 графа Γ_f функції f , яким інцидентні тільки І-ребра, називатимемо *Y- і X-вершинами* відповідно.

На графі X-вершини будемо зображати так, як на рис. 3.1.1.

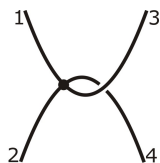


Рис. 3.1.1. X-вершина KR-графа

Для кожної Y-вершини графа Γ_f зафіксуємо циклічний порядок інцидентних їм ребер. На рисунку він буде задаватися за допомогою обходу відповідних ребер проти годинникової стрілки. Циклічний порядок у X-вершині задається так: лівий верхній — лівий нижній — правий верхній — правий нижній (див. рис. 3.1.1).

Далі для того щоб розглядати \mathcal{O} -еквівалентність функцій f і g , зафіксуємо на графах Γ_f і Γ_g орієнтацію ребер від нижньої до верхньої вершини. Оскільки орієнтація ребер задається однозначно на кожному графі, то на графах явно її зображати не будемо, але вважатимемо, що ця орієнтація ребер задана.

Означення 3.1.5. *Оснащеним графом Кронрода-Ріба (оснащеним KR-графом) функції $f \in \Omega(M)$ називатимемо граф Γ_f разом із заданим розбиттям, орієнтацією ребер та їхнім циклічним порядком у Y - і в X -вершинах.*

Залежно від індексу критичної точки p_0 та її приналежності до межі поверхні ∂M можливими є 7 простих атомів (A, B, C, D, E, F та G) та 13 простих \mathcal{O} -атомів, які зображені на рис. 3.1.2 — 3.1.4.

Теорема 3.1.6. *Кожен \mathcal{O} -атом функції класу $\Omega(M)$ збігається із одним із \mathcal{O} -атомів $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ або G .*

Означення 3.1.7. *Оснащені графи Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g функцій $f, g \in \Omega(M)$ називатимемо еквівалентними за ізоморфізмом $\varphi : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$ (позн. $\Gamma_f \sim \Gamma_g$ або $\Gamma_f \sim_\varphi \Gamma_g$), якщо φ задовольняє умови:*

- (1) зберігає розбиття ребер;
- (2) зберігає циклічні порядки суміжних ребер для кожної X - і Y -вершини;
- (3) зберігає орієнтацію ребер.

Теорема 3.2.2. *Нехай M, N — гладкі компактні орієнтовані поверхні, $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Тоді f і g є \mathcal{O} -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні оснащені KR-графи Γ_f і Γ_g еквівалентні.*

Підрозділ 3.3 має обрахунковий характер. Так, описано оснащені KR-графи для функцій із $\Omega(M)$ з не більш, ніж 5-ма критичними точками.

Теорема 3.3.3. *Для кожної функції $f \in \Omega(M)$ із не більш, ніж 5-ма критичними точками, оснащений граф Кронрода-Ріба її класу еквівалентності $[f]$ має один із виглядів, зображених на рис. 3.3.3.*

В підрозділі 3.4 описано топологічний тип поверхні оснащеного KR-графа.

Нехай $f \in \Omega(M)$, де M — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею. Відомо, що топологічний тип орієнтованої поверхні з межею задається родом g та числом компонент межі ∂ .

Означення 3.4.1. Вершини валентності 2 і 3 графа Γ_f функції f , яким інцидентні як I-, так і O-ребра, називатимемо T- і D-вершинами відповідно.

Щоб визначити рід поверхні спершу розглянемо два випадки. Позначимо через E_I (E_O) — число I-ребер (O-ребер), а через V_I (V_O) — число вершин графа Γ_f , яким інцидентні тільки I-ребра (O-ребра).

Твердження 3.4.2 *Якщо граф Γ_f функції $f \in \Omega(M)$ містить або тільки O-ребра, або ж тільки I-ребра, то рід поверхні визначається формулою (3.1) або (3.2) відповідно, де*

$$g_O = E_O - V_O + 1, \quad (3.1)$$

$$g_I = \frac{E_I - V_I + 2 - \partial}{2}. \quad (3.2)$$

Надалі під (O-) I-підграфом оснащеного KR-графа Γ_f розумітимемо граф (можливо, незв'язний), утворений із Γ_f шляхом викидання (I-) O-ребер та ізолюваних вершин, якщо такі утворилися.

Теорема 3.4.3. *Рід поверхні може бути визначений за формулою*

$$g = g_I + g_O + V_D + V_T - c_O - c_I + 1, \quad (3.3)$$

де g_I (g_O) — сумарний рід (O-) I-підграфа, рід кожної компоненти якого задається формулою (3.2) ((3.1)), (V_T) V_D — число (T-) D-вершин, c_I (c_O) — число компонент зв'язності (O-) I-підграфа.

Наслідок 3.4.4. Для m -функцій мають місце формули (3.1), (3.2) і (3.3).

Розділ 4 присвячено деформаціям простих гладких функцій з невідірженими особливостями на гладких компактних орієнтованих поверхнях з межею.

У підрозділі 4.1 визначено поняття деформації загального положення й деформації оснащеного КР-графу. Описано зв'язок між оптимальністю та полярністю функцій Морса, m -функцій та mm -функцій на гладких компактних орієнтованих зв'язних поверхнях.

Нехай M — гладка компактна орієнтована зв'язна поверхня, $\Sigma(M)$ — одна із таких множин:

- (1) прості функції Морса на замкненій поверхні;
- (2) прості m -функції на компактній поверхні з межею;
- (3) прості mm -функції на компактній поверхні з межею.

Означення 4.1.1. Деформацією (гладкою гомотопією) гладкої функції $f \in \Sigma(M)$ у гладку функцію $g \in \Sigma(M)$ називатимемо однопараметричну сім'ю відображень $F_t(x) := F(x, t)$, $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таку, що:

- (a) $F_0(x) = f(x)$, $x \in M$;
- (b) $F_1(x) = g(x)$, $x \in M$;
- (c) $F \in C^\infty(M \times [0, 1])$.

Означення 4.1.2. Деформацією загального положення називається деформація F_t , для якої виконується такі умови:

- (1) існує скінченна підмножина $J \subset (0, 1)$, така, що $F_t \in \Sigma(M)$, $t \in [0, 1] \setminus J$ та $F_t \notin \Sigma(M)$, $t \in J$;
- (2) для кожного $t \in J$ виконується одна з таких умов:

(2.1) функція F_t має критичний рівень, на якому розташовані 2 невироджені критичні точки (які можуть бути внутрішніми або ж точками на межі), тобто функція F_t є функцією Морса, m - або mm -функцією відповідно;

(2.2) існує точка $p \in M$, така, що функція F_t — проста гладка функція, всі критичні точки якої є невиродженими, та така заміна координат $(x, y$ і окремо $t)$ в околі точки p , що:

$$(2.2.1) \quad F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y^2 \text{ у разі, якщо } p \in \text{Int}(M);$$

$$(2.2.2) \quad F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y \text{ або } F(x, y, t) = -x^2 + (y - t)^2, y \geq 0 \text{ у разі, якщо } p \in \partial M \text{ і } \Sigma(M) \text{ — клас } m\text{-функцій};$$

$$(2.2.3) \quad F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y^2, y \geq 0 \text{ у разі, якщо } p \in \partial M \text{ і } \Sigma(M) \text{ — клас } mm\text{-функцій.}$$

Нехай Γ_f — оснащений KR-граф функції $f \in \Sigma(M)$. Розглянемо відображення $\varphi : V(\Gamma_f) \rightarrow 2^{E(\Gamma_f)}$, яке кожній вершині v графа Γ_f ставить у відповідність множину всіх інцидентних їй ребер $\{p_j | j = \overline{1, i}\}$ (для деякого i): I-ребер — e_j й O-ребер — l_j , тобто $p_j = e_j$ або ж $p_j = l_j$. На множині вершин і ребер графа Γ_f розглянемо два відношення часткового порядку \prec і \vdash , визначені таким чином: (1) $v_1 \prec v_2$, якщо вершина v_1 відповідає меншому значенню функції f ніж v_2 ; (2) $p_1 \prec p_2$, якщо всі точки ребра p_1 відповідають меншим значенням функції f ніж всі точки p_2 ; (3) нехай ребра p_1 і p_2 інцидентні одній Y-вершині v , такі, що їх неможливо порівняти за допомогою відношення часткового порядку \prec . У вершині v оснащений граф Кронрода-Ріба визначає циклічний порядок. Якщо циклічний порядок проти (за) годинникової стрілки, то будемо казати, що друге (перше) ребро при його проходженні знаходиться лівіше від першого (другого). Тоді $p_1 \vdash p_2$, якщо p_1 знаходиться лівіше від p_2 . Отже, відображення φ та відношення \prec, \vdash однозначно задають граф Γ_f .

Означення 4.1.3. Нехай v_1, v_2 — суміжні вершини графа Γ_f , такі, що $v_1 \prec$

v_2 . Тоді простою деформацією оснащеного KR -графу Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається одна з наступних операцій або обернена до неї:

- 1) скорочення вершини v_2 й інцидентного до неї ребра l_1 у випадку якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1\}$;
- 2) скорочення ребра e_2 й інцидентних до нього вершин v_1 і v_2 , якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2\}$;
- 3) скорочення ребра l_2 й інцидентних до нього вершин v_1, v_2 , якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2\}$;
- 4) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec l_4 \vdash l_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро l_3 , тобто ізоморфізм η , такий, що $\eta(v_1) \prec \eta(v_2)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{l_3 \prec l_4 \vdash l_5\}$;
- 5) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2 \prec e_4 \vdash e_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро e_5 , тобто ізоморфізм η , такий що $\eta(v_2) \prec \eta(v_1)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{e_4 \prec e_5 \vdash e_1\}$;
- 6) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, то протягування вершини v_1 на ребро l_3 , тобто ізоморфізм μ , такий що $\mu(v_2) \prec \mu(v_1)$ і $\varphi(\mu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(\mu(v_2)) = \{e_2 \prec l_2 \vdash e_1\}$;
- 7) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec e_1\}$, то протягування вершини v_2 на ребро l_1 , тобто ізоморфізм ν , такий що $\nu(v_2) \prec \nu(v_1)$ і $\varphi(\nu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1 \vdash e_2\}$, $\varphi(\nu(v_2)) = \{l_2 \prec e_1\}$.

Означення 4.1.4. Деформацією оснащеного KR -графу Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається послідовність простих деформацій.

Теорема 4.1.5. Якщо між функціями f і g із класу $\Sigma(M)$ існує деформація загального положення, то існує деформація між їхніми оснащеними графами Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g .

Нагадаємо, що функція називається *полярною*, якщо вона має рівно два локальні екстремуми.

Твердження 4.1.7. *Для функцій, заданих на гладкій компактній орієнтованій зв'язній поверхні з межею (можливо, порожньою), мають місце такі твердження:*

(1) *кожна оптимальна m -функція є полярною;*

(2) *оптимальність і полярність є рівносильними для таких функцій:*

(2.1) *функції Морса (у випадку поверхні без межі);*

(2.2) *mt -функції.*

Обернене твердження до пункту (1) у твердженні 4.1.7 не є вірним, тобто існує полярна m -функція, яка не є оптимальною.

У підрозділі 4.2 введено поняття деформаційного графа поверхні й описано деформаційні графи таких поверхонь: $F_{1,0}$, $F_{0,2}$ і $F_{2,0}$, де $F_{i,j}$ — орієнтована поверхня роду i із j компонентами межі.

Означення 4.2.1. *Деформаційним графом поверхні M називається граф, вершини якого відповідають класу пошарово оснащеної еквівалентності оптимальних mt -функцій (для поверхонь з межею) або функцій Морса (для замкнених поверхонь) на поверхні M , а ребрам — прості деформації корозмірності 0 між відповідними функціями. Даний граф позначатимемо через $G_D(M)$.*

Твердження 4.2.2. *На торі $F_{1,0}$ існує єдиний клас пошарово оснащеної еквівалентності оптимальних функцій Морса. Граф $G_D(F_{1,0})$ є точкою, тобто має єдину вершину і не має ребер.*

Твердження 4.2.3. *На диску з діркою $F_{0,2}$ існують дві \mathcal{O} -нееквівалентні оптимальні mt -функції.*

Твердження 4.2.5. *Існує 3 пошарово оснащено нееквівалентні оптимальні функції Морса на кренделі роду 2 $F_{2,0}$. Граф $G_D(F_{2,0})$ має 3 вершини і 2 ребра, які послідовно з'єднують ці вершини.*

Розділ 5 присвячено вивченню гладких функцій із ізольованими особливостями на межі гладкої компактної поверхні.

У підрозділі 5.1 отримано локальне представлення таких функцій у околі критичних точок. Для подальшої класифікації сформульовано поняття оснащеної хордової діаграми й описано прості атоми сідлового критичного рівня функції. Також виведено рекурентну формулу для обчислення числа атомів.

Нехай M — компактна поверхня з межею ∂M і $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — задана на M функція, яка має скінченне число критичних точок, що належать ∂M . Через f_∂ позначатимемо обмеження функції f на межу ∂M . Розглянемо наступний клас функцій (заданих на поверхні M)

$$\Theta_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), CP(f) = ICP(f) = ICP(f_\partial)\},$$

де $CP(*)$ ($ICP(*)$) — множина (ізольованих) критичних точок функції $*$.

Твердження 5.1.3. *Функція $f \in \Theta_0(M)$ є топологічно еквівалентною до функції $g(x, y) = x^2 + y^2, y \geq 0$ ($g(x, y) = -x^2 - y^2, y \geq 0$) у деякому околі своєї точки мінімуму (максимуму).*

Теорема 5.1.4. *Нехай $f \in \Theta_0(M)$, p_0 — сідлова критична точка функції f . Тоді існує окіл $U(p_0)$ точки p_0 , такий, що обмеження функції $f|_{U(p_0)}$ топологічно еквівалентне до функції $g(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k, y \geq 0$, заданої у деякому околі точки $(0, 0)$ для певного цілого $k \geq 1$.*

Надалі розглянемо тільки прості функції із $\Theta_0(M)$ (позн. $\Theta(M)$).

Кожен атом сідлового критичного рівня функції $f \in \Theta(M)$ має структуру $(2k + 2)$ -кутника. Поставимо у відповідність даному багатокутнику коло з

відміченими точками. Коло відповідатиме межа $(2k + 2)$ -кутника, а відміченим точкам — точки на межі, які належать перетину заштрихованих і незаштрихованих секторів, тобто відмічені точки належать критичному рівню функції. Відмічені точки з'єднаємо хордою тоді і тільки тоді, коли відповідні сторони багатокутника склеюються при збільшенні околу. Таким чином, отримаємо коло з відміченими точками і хордами з вершинами у цих точках. Надалі зафіксуємо орієнтацію для подальшого задання нумерації відмічених точок на колі так, щоб при зміні орієнтації отримати атом, еквівалентний до початкового. Занумеруємо відмічені точки таким чином: точка, яка поставлена у відповідність до критичної точки p_0 , позначимо через Q_0 , а решту точок занумеруємо відповідно до орієнтації межі, починаючи від Q_1 і до Q_k , беручи при цьому за точку відліку точку Q_0 . Відмічені точки розбивають коло на $k + 1$ чорних і сірих дуг, які відповідають областям додатності та від'ємності функції відповідно (див. рис 5.1.6). Також зауважимо, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо, окрім тих які містять вершину Q_0) є різного кольору.

Так, кожен f -атом може бути визначений за допомогою кола з k відміченими точками та точкою Q_0 , l хордами (для деякого $l \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$) (серед яких немає петель), якщо додатково розглянути фіксоване розбиття дуг таке, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо окрім тих які містять вершину Q_0) є різного кольору. Таких розбиттів є рівно два. Коло з вищеописаними елементами (побудоване з f -атома функції) називатимемо *хордовою діаграмою сидлового критичного рівня функції*.

Означення 5.1.5. *Оснащеною хордовою діаграмою* називатимемо коло, яке містить такі елементи:

- (1) відмічені точки, які є занумерованими, і серед них виділена одна точка — точка Q_0 ;
- (2) хорди з кінцями у відмічених точках, окрім точки Q_0 ;

(3) розбиття дуг кола на чорні і сірі, таке, що кожні дві дуги (можливо, окрім тих, які містять Q_0) мають різний колір.

Занумеруємо відмічені точки оснащеної хордової діаграми від 0 до k (для деякого натурального k) за годинниковою стрілкою, починаючи з виділеної точки. Тоді хорду називатимемо *хордою 1-го (2-го) типу*, якщо вона з'єднує відмічені точки із номерами різної (однакової) парності.

Кожна хордова діаграма сідлового критичного рівня функції буде оснащеною хордовою діаграмою. Тому надалі всі поняття визначені для оснащених хордових діаграм можуть розглядатись і для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції.

Означення 5.1.6. Дві оснащені хордові діаграми називаються *еквівалентними*, якщо вони можуть бути отримані одна із другої за допомогою повороту чи симетрії, що зберігають при цьому елементи (1) — (3) (див. означення 5.1.5).

Означення 5.1.7. *Вільною відміченою точкою* на оснащній хордовій діаграмі називається відмічена точка, яка не з'єднана хордою з іншими відміченими точками.

Коло оснащеної хордової діаграми позначатимемо через S^1 , відмічені точки — $0, 1, \dots, k$, а хорди, які з'єднують точки i і j — через l_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Вважатимемо, що j — номер відміченої точки Q_j . Вільні точки, за винятком Q_0 , позначимо через Q_{i^*} , де i — номер відповідної відміченої точки. Кожна відмічена точка оснащеної хордової діаграми відповідає двом вершинам багатокутника, одна з яких належить додатньому сектору ($f > 0$), а інша — від'ємному ($f < 0$). Тому ці точки позначимо через P_i і N_i , де i — номер точки Q_i .

Лема 5.1.8. *Число вільних точок $N_{f.p.}$ оснащеної хордової діаграми може бути знайдене за допомогою наступної формули:*

$$N_{f.p.} = k - 2 \cdot N_{ch.} + 1$$

де N_{ch} — число хорд хордової діаграми.

Означення 5.1.9. З оснащеної хордової діаграми, яка містить $k + 1$ відмічену точку, побудуємо підстановку $\tau^{(k)}$ таку, що $\tau^{(k)}$ містить цикл (ij) (для деяких $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$) тоді і тільки тоді, коли відмічені точки Q_i і Q_j з'єднані хордою. Так задана підстановка містить тільки цикли довжини 2 і називається *підстановкою склейки* на множині $\{1, 2, \dots, k\}$.

Атом разом із заданою підстановкою склейки $\tau^{(k)}$ позначатимемо як $A_{\tau^{(k)}}$.

Теорема 5.1.10. *Мають місце наступні твердження:*

1) *кожен атом сідлового критичного рівня співпадає з атомом $A_{\tau^{(k)}}$ для деякої підстановки склейки $\tau^{(k)}$ на множині $\{1, 2, \dots, k\}$ і ця підстановка задає склейку сторін атома;*

2) *число N_k атомів $A_{\tau^{(k)}}$ може бути знайдене із рекурентної формули:*

$$N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 4, N_k = 2 \sum_{j=1}^{k-3} P_j^{(k)} + P_{k-2}^{(k)} \quad (5.1)$$

де для кожного k $P_j^{(k)}$ є множиною чисел, визначених таким рекурентним співвідношенням для $j \in \mathbb{Z}, j \geq 3$

$$P_0^{(k)} = 1, P_1^{(k)} = k - 1, P_2^{(k)} = k - 2, P_j^{(k)} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + \dots + P_{j-2}^{(k)})(k - j).$$

У підрозділі 5.2 розглянуто прості оптимальні функції. Отримано критерій оптимальності, критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій у термінах хордових діаграм, а також розв'язано питання реалізації хордових діаграм із додатковими умовами.

Теорема 5.2.1. *Нехай $f \in \Theta(M)$, де M — зв'язна компактна поверхня зі зв'язною межею, яка негомеоморфна до 2-вимірного диску. Тоді функція f*

оптимальна тоді і тільки тоді, коли вона має лише три критичні точки, дві з яких є точками мінімуму і максимуму, а третя — сідловою.

Зауваження 5.2.2. Функція $f \in \Theta(D^2)$, задана на двовимірному диску D^2 , є оптимальною тоді і тільки тоді, коли вона має дві критичні точки (точки екстремуму) і може бути реалізована за допомогою функції висоти.

Оснащену хордову діаграму можна розглядати як граф, вершинами якого є відмічені точки, а ребрами — дуги і хорди. Тоді для хордових діаграм коректно заданим є поняття шляху та суміжності дуг і хорд (як ребер графу).

Означення 5.2.3. Шлях між відміченими точками на оснащній хордовій діаграмі називається *правильним*, якщо він задовольняє наступні умови:

- 1) хорди і дуги чергуються (під час проходження цього шляху);
- 2) кожна хорда 1-го типу розбиває своїми кінцями коло на дві частини і дві суміжні до неї дуги лежать у одній частині;
- 3) для хорди 2-го типу суміжні дуги лежать у різних частинах щодо її кінців.

Означення 5.2.4. Правильний шлях між вільними відміченими точками, який проходить через кожен хорду по одному разу, називається *повним шляхом*.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні.

Теорема 5.2.5. Хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на орієнтованій поверхні з однією компонентою межі задовольняє такі умови:

- 1) кожна хорда ділить коло на дуги, які містять парні числа відмічених точок;
- 2) хордова діаграма має $k + 1 = 4n + 2$ відмічених точок (для певного натурального n) дві з яких є вільними відміченими точками, причому одна — точка Q_0 ;

3) існує два повні шляхи між вільними відміченими точками.

Наслідок 5.2.6. Підстановка склейки не містить цикл $(i, j + 1)(i + 1, j)$ для всіх можливих $i, j \in \{\overline{0, k}\}$.

Наслідок 5.2.7. Вільна відмічена точка хордової діаграми сідлового критичного рівня, за винятком точки Q_0 , має непарний номер.

Теорема 5.2.8 (критерій топологічної еквівалентності). Оптимальні функції топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних рівнів еквівалентні.

Теорема 5.2.9 (реалізація). Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1) – 3) теореми 5.2.5, то існує оптимальна функція, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої збігається із заданою.

Показано, що на орієнтованій поверхні роду 1, 2 і 3 існує 1 (1), 5 (8) і 84 пошарово (топологічно) нееквівалентні функції відповідно.

Розглянемо випадок неорієнтованої поверхні.

Теорема 5.2.10. Хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі задовольняє такі умови:

- 1) існує принаймні одна хорда, яка розділяє коло на дві частини, кожна з яких містить непарне число відмічених точок;
- 2) існує рівно два повних шляхи між вільними точками;
- 3) хордова діаграма містить $k + 1 = 2n + 2$ відмічених точок, де n — число хорд, і існує рівно дві вільні точки, одна з яких — Q_0 .

Наслідок 5.2.11. *Підстановка склейки хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі не містить одночасно два цикли $(i, j + 1)$ та $(i + 1, j)$ для всіх $i, j \in \{0, \bar{k}\}$ із однаковою парністю.*

Твердження 5.2.12 (критерій топологічної еквівалентності). *Оптимальні функції на гладких неорієнтованих поверхнях з однією компонентою межі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних точок еквівалентні.*

Твердження 5.2.13 (реалізація). *Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1)–3) теореми 5.2.10, то існує оптимальна функція на гладкій неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої збігається із заданою.*

Твердження 5.2.15. *На листі Мюбіуса існує єдиний клас пошарової й топологічної еквівалентності оптимальних функцій.*

Твердження 5.2.16. *На плящі Клейна з діркою існує 2 (3) пошарово (топологічно) нееквівалентні оптимальні функції.*

Твердження 5.2.17. *На неорієнтованій поверхні роду 3 з однією компонентою межі існує 12 пошарово і 20 топологічно нееквівалентних оптимальних функцій.*

Подяки. Авторка висловлює щирі вдячність своєму науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Олеговичу Пришляку за постановку задач, постійну підтримку і керування роботою, а також докторам фізико-математичних наук С. І. Максименку, Є. О.Полуляху та іншим працівникам лабораторії топології Інституту математики НАН України за вагомі зауваження, підтримку й увагу до результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1

Попередні відомості

У даній роботі будемо розглядати всі многовиди класу C^∞ (наз. *гладкими*), якщо не буде вказано протилежного. Нехай $M^n \in C^\infty$ — n -вимірний многовид, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція, визначена на M^n .

1.1 Функції на поверхнях

Означення 1.1.1. Точка $p_0 \in M^n$ називається *критичною точкою функції* (особливістю функції) $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, якщо

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) = 0$$

у деякій системі координат (x_1, x_2, \dots, x_n) в околі точки p_0 . Точки, які не є критичними, називатимемо *регулярними точками функції* f .

Зауважимо, що рівність часткових похідних нулю, а отже і означення критичної точки, не залежить від вибору локальної системи координат.

Означення 1.1.2. Ізольована критична точка, яка не є точкою локального мінімуму і максимуму, називається *сідловою критичною точкою функції* (або ж критичною точкою сідлового типу). Точки локального мінімуму і максимуму називаються *точками екстремуму*.

Так, маємо розбиття ізольованих критичних точок гладкої функції на гладкому многовиді на точки максимуму, мінімуму і сідлові.

Означення 1.1.3. Значення $c \in \mathbb{R}$ функції $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається *критичним*, якщо $f(p_0) = c$ для деякої критичної точки $p_0 \in M^n$ функції f . Значення $r \in \mathbb{R}$ функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називається *регулярним значенням*, якщо воно не є критичним.

Означення 1.1.4. Лінією рівня (рівнем) $f^{-1}(l) \subset M^n$ функції $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається множина $f^{-1}(l) = \{p \in M^n \mid f(p) = l\}$.

Означення 1.1.5. Рівень $f^{-1}(l)$ функції $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається *критичним (регулярним) рівнем*, якщо множина $f^{-1}(l)$ (не) містить критичні точки.

Означення 1.1.6. Функція $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається *простою (функцією загального положення)*, якщо кожен її критичний рівень містить одну критичну точку.

1.2 A_n -змії

У роботах В. Арнольда [50] описано зв'язок між комбінаторикою і теорією особливостей. Так, дослідження багатьох топологічних питань, зокрема пов'язаних із класифікацією функцій, набувають дещо простішого вигляду в тих чи інших комбінаторних термінах. Одним із таких інструментів, введених автором є A_n -змії, які надалі активно застосовувались у роботах інших топологів (див., наприклад, [51, 52, 53]). Так, використовуючи *updown*-послідовності, отримано [51] критерій топологічної еквівалентності гладких функцій на колі з ізольованими особливостями.

Означення 1.2.1. Перестановка α чисел $\{0, 1, \dots, n\}$ називається A_n -змією, якщо виконується система нерівностей $(x_0 < x_1 > x_2 < \dots < x_n)$, де $x_i = \alpha(i)$, $i = \overline{0, n}$. Послідовність, яка задовольняє ці умови, називається *updown-послідовністю*.

1.3 Функції Морса на замкнених поверхнях

Одним із напрямків теорії Морса є класична теорія критичних точок на гладкому многовиді, ключовим результатом в якій є лема Морса, доведена М. Морсом у 1925 році (див., наприклад, [1]).

Нехай $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція визначена на гладкому n -вимірному многовиді M^n .

Означення 1.3.1. Матрицею Гессе $Hess_f(p_0)$ функції f в її критичній точці p_0 називається матриця $Hess_f(p_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$, для деякої локальної системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) в околі точки p_0 . Визначник $\det(Hess_f(p_0))$ матриці Гессе називається *гессіаном* (визначником Гессе) функції f у точці p_0 .

Зауважимо наступне: (1) матриця Гессе є квадратною і, в силу гладкості функції f , симетричною; (2) у випадку гладкої поверхні M^2 для локальної системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) в околі точки p_0 гессіан має вигляд:

$$\det(Hess_f(p_0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_0) \right)^2.$$

Означення 1.3.2. Критична точка p_0 функції f називається *невиродженою*, якщо гессіан, обрахований у точці p_0 відмінний від нуля, тобто

$$\det(Hess_f(p_0)) \neq 0.$$

Якщо є цей визначник рівний нулю, то критичну точку p_0 називають *виродженою* критичною точкою функції f .

Означення 1.3.3. Гладка функція $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки є невинродженими.

Лема 1.3.4. Функція Морса на замкненій поверхні має тільки скінченне число критичних точок.

Тому всі критичні точки функції Морса, в силу скінченності їх числа, є ізольованими, а отже будуть точками екстремуму або ж сідлового типу.

Надалі множину всіх функцій Морса, визначених на n -вимірному многовиді M^n , позначатимемо через $MorseF(M^n)$.

Відомо [1], що для кожної гладкої функції $g \in C^\infty(M^n)$, заданої на замкненому n -вимірному многовиді M^n , існує функція Морса $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ як завгодно близька до функції g .

Теорема 1.3.5. [4] *Сума індексів критичних точок функції Морса на замкненому многовиді рівна ейлеровій характеристиці даного многовида.*

1.3.1 Лема Морса

Нехай M^n — гладкий многовид розмірності n без межі, $f \in \text{MorseF}(M^n)$.

Теорема 1.3.6. [1] *Нехай $f \in \text{MorseF}(M)$ — функція Морса, задана на гладкому n -вимірному многовиді M без межі. Тоді в околі кожної критичної точки p_0 функції f існує локальна система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) така, що для деякого натурального $\lambda \leq n$ координатне представлення функції f має наступну стандартну форму:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 + c,$$

де $c = f(p_0)$ — стала, а $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ — відповідає початку координат.

Зауважимо, що у теоремі 1.3.6 не втрачаючи загальності можна вважати, що відповідне критичне значення функції f рівне нулю, тобто $c = f(p_0) = 0$. Тоді функція f матиме наступне локальне представлення в околі точки $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

для деякої локальної системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Наслідок 1.3.7. [1] *У випадку гладкої поверхні без межі, функція Морса матиме наступне локальне представлення в околі критичної точки $p_0 = (0, 0)$:*

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + c$;

- $f(x, y) = x^2 - y^2 + c$;
- $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c$,

для деякої сталої $c = f(p_0)$ і локальної системи координат (x, y) .

Означення 1.3.8. Нехай p_0 — невироджена критична точка функції двох змінних $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданої на гладкій поверхні M^2 без межі. Тоді число λ називається *індексом невиродженої критичної точки p_0* , яке визначається відповідним локальним представленням функції f (див. теорему 1.3.6).

Так, у випадку функції Морса на поверхні, точка p_0 матиме індекс:

- $\text{ind}(p_0) = 0$, якщо $f = x^2 + y^2 + c$;
- $\text{ind}(p_0) = 1$, якщо $f(x, y) = x^2 - y^2 + c$;
- $\text{ind}(p_0) = 2$, якщо $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c$.

1.3.2 Мінімальні функції Морса

Нехай N — гладка замкнена поверхня.

Означення 1.3.9. *i -м числом Морса $M_i(N)$* називається мінімум чисел критичних точок індексу i , взятий по всіх функціях класу $\text{MorseF}(N)$.

Означення 1.3.10. *Мінімальною функцією Морса* на поверхні N називається функція, у якої число критичних точок індексу i рівне $M_i(N)$ для всіх можливих i .

Означення 1.3.11. *Критичним типом* функції Морса на поверхні називається послідовність чисел (a_0, a_1, a_2) , які описують кількість критичних точок індексів 0, 1 і 2 відповідно.

Існування мінімальних функцій Морса на гладких замкнених поверхнях впливає з теорії сферичних перебудов (див., наприклад [4], де також описано

можливий варіант побудови функції Морса на поверхнях довільного критичного типу).

Зауважимо, що поняття мінімальної функції розглянуто і в загальному випадку (для n -вимірного замкненого многовида). Так, Смейл довів існування мінімальних функцій Морса на однозв'язних многовидах достатньо великих розмірностей, а для неодnozв'язних дана теорія отримала важливі результати у роботі В. В. Шарка [54].

1.4 Атом та f-атом гладких функцій на поверхнях

У праці [11] авторами для дослідження гамільтонової механіки було введено поняття атома, f-атома та молекули, розглядаючи при цьому пошарову та пошарово оснащену еквівалентності простих функцій Морса.

Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкі функції, задані на гладких поверхнях M і N з межами ∂M і ∂N відповідно (можливо $\partial M = \emptyset$ і (або) $\partial N = \emptyset$).

Означення 1.4.1. Нехай f і g — гладкі функції на гладких поверхнях M і N відповідно. Тоді f і g називаються

- (1) *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $\lambda : M \rightarrow N$, який переводить компоненти зв'язності ліній рівня функції f у компоненти зв'язності ліній рівня функції g ;
- (2) *пошарово оснащено еквівалентними*, якщо виконується умова (1) і додатково гомеоморфізм λ зберігає напрямки росту функцій f і g .

Означення 1.4.2. Гладкі функції f і g , задані на гладких поверхнях M і N відповідно, називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h_1 : M \rightarrow N$ і $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що $h_2 \circ f = g \circ h_1$ і h_2 зберігає орієнтацію прямої \mathbb{R} .

Казатимемо, що функція f має *локальне топологічне представлення* $f = g$, якщо вона є локально топологічно еквівалентною функції g .

Нехай $c \in \mathbb{R}$ — критичне значення функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $V_\varepsilon(c) = [c - \varepsilon, c + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} | c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon\}$ — ε -окіл критичного значення c (для деякого достатньо малого $\varepsilon > 0$, такого що відрізок $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ не містить відмінних від c критичних значень функції f). Розглянемо відповідний до $V_\varepsilon(c)$ окіл критичного рівня функції f , а саме $f^{-1}(V_\varepsilon(c)) = \{x \in M | f(x) \in V_\varepsilon(c)\}$.

Зауважимо, що окіл критичного (а також і регулярного) рівня функції не завжди є лінійно зв'язним. Розглянемо, наприклад, функцію висоти f задану на кренделі роду 2 так, як це показано на рис. 1.4.1.

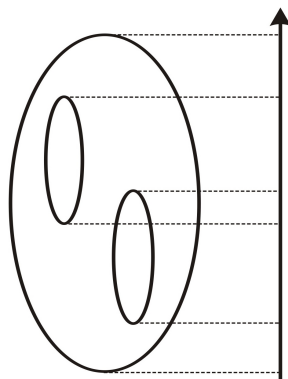


Рис. 1.4.1. Функція висоти на кренделі роду 2

Функція f має шість критичних точок p_i , $i = \overline{1, 6}$ із відповідними критичними значеннями $c_i = f(p_i)$, $i = \overline{1, 6}$. Не втрачаючи загальності, вважаємо що $c_1 < c_2 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6$. Тоді наступні околи критичних рівнів $V_{\varepsilon_1}(f^{-1}(c_1))$, $V_{\varepsilon_2}(f^{-1}(c_2))$, $V_{\varepsilon_5}(f^{-1}(c_5))$ і $V_{\varepsilon_6}(f^{-1}(c_6))$ будуть лінійно зв'язними (для довільних $0 < \varepsilon_1 < c_2 - c_1$, $0 < \varepsilon_2 < \min\{c_2 - c_1, c_3 - c_2\}$, $0 < \varepsilon_5 < \min\{c_5 - c_4, c_6 - c_5\}$ і $0 < \varepsilon_6 < c_6 - c_5$). А от околи $V_{\varepsilon_3}(f^{-1}(c_3))$ і $V_{\varepsilon_4}(f^{-1}(c_4))$ критичних рівнів c_3 і c_4 мають по дві компоненти лінійної зв'язності (для довільних $0 < \varepsilon_3 < \min\{c_3 - c_2, c_4 - c_3\}$, $0 < \varepsilon_4 < \min\{c_4 - c_3, c_5 - c_4\}$).

Означення 1.4.3. Нехай c — критичне значення гладкої функції f , заданої на гладкій поверхні M , $f^{-1}(V_\varepsilon(c))$ — окіл відповідного критичного рівня для

деякого достатньо малого $\varepsilon > 0$. Тоді *атомом* (*f-атомом*) називається клас пошарової (пошарово оснащеної) еквівалентності пари $(U, f|_U)$, де U — об'єднання компонент лінійної зв'язності множини $f^{-1}(V_\varepsilon(c))$, такі що містять критичні точки.

Кожному атому відповідає два f-атома, які отримуються один з одного заміною знаку функції.

Означення 1.4.4. Атом, f-атом називається *простим*, якщо він містить одну критичну точку.

Оскільки всі розглянуті в подальшому функції будуть простими, то вибравши достатньо мале $\varepsilon > 0$, відповідні атоми також будуть простими. Тому, якщо не буде сказано протилежного, надалі всі атоми, f-атоми будуть простими.

1.4.1 Класифікація простих f-атомів функцій Морса на замкнених поверхнях

Для функцій Морса на замкнених поверхнях можливими є наступні випадки атома критичної точки, які розписані (див. [11]) в залежності від індексу $\text{ind}(p)$ критичної точки p :

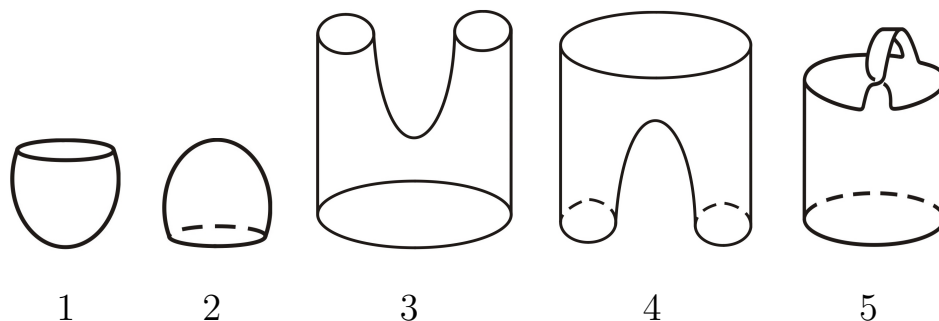


Рис. 1.4.2. Прості f-атоми функцій Морса на замкнених поверхнях

(1) $\text{ind}(p) \in \{0; 2\}$: отримаємо орієнтований атом A , якому відповідають два f-атома, зображені на рис. 1.4.2: 1, 2;

(2) $\text{ind}(p) = 1$: отримаємо атом B або \tilde{B} у випадку орієнтованої та неорієнтованої поверхонь відповідно. Відповідні f -атоми зображені на рис. 1.4.2: орієнтовані f -атоми — 3, 4 та неорієнтований f -атом — 5).

Теорема 1.4.5. [11] *Кожен простий атом співпадає або з атомом A , або з атомом B , або ж з атомом \tilde{B} . Цим трьом атомам відповідає п'ять f -атомів: по два для атомів A і B та один f -атом для атома \tilde{B} .*

1.5 Граф Кронрода-Ріба

Здебільшого вважається, що поняття графа Кронрода-Ріба (графаріба, KR-графа) введено Ж. Рібом [2], але об'єкт з таким же описом розглянутий у московській математичній школі Г. Адельсон-Вельським та О. Кронродом (див. [55, 3]) при аналізі 13-ої проблеми Гільберта. Тому надалі будемо використовувати поняття графа Кронрода-Ріба (або ж KR-графа).

Графи Кронрода-Ріба часто використовуються як інструмент при класифікації функцій певного класу. Інколи розглядаються графи із додатковою інформацією [25, 26]. На некомпактних поверхнях простір Кронрода-Ріба може бути нехаусдорфовим. Дана ситуація детально вивчена у роботах Є. О. Полуляха [38, 39].

Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція на поверхні M , яка на кожному критичному рівні має по одній критичній точці. Для довільного значення l функції f розглянемо лінію рівня $f^{-1}(l)$, на якій дві точки $x_1, x_2 \in f^{-1}(l)$ називатимемо еквівалентними ($x_1 \sim x_2$), якщо x_1 і x_2 належать одній компоненті зв'язності лінії рівня $f^{-1}(l)$. Легко переконатися, що так визначене відношення \sim є відношенням еквівалентності.

Означення 1.5.1. Фактор-простір $\Gamma_f := M / \sim$ за вищеописаним відношенням еквівалентності \sim із відповідною фактор-топологією називається *простором*

Кронрода-Ріба. Через $\pi_f : M \rightarrow \Gamma_f$ позначатимемо відповідне *відображення проєкції*.

Також, простір Кронрода-Ріба Γ_f можна розглядати як фактор-простір M/Δ , де Δ — шарування з особливостями, елементами якого є компоненти множини зв'язності рівня функції f [29].

Відомо, що простір Кронрода-Ріба гладкої функції f з ізольованими критичними точками на компактній поверхні є топологічним графом (і називається *графом Кронрода-Ріба* або *KR-графом*), тобто існує (див. [56]) неперервне відображення $f_{K-R} : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}$, таке що $f = f_{K-R} \circ \pi_f$. Також, після задання орієнтації ребер *KR-графа* Γ_f відповідно до напрямку зростання функції f , отриманий граф буде орієнтованим і називається *орієнтованим графом Кронрода-Ріба* (орієнтованим *KR-графом*).

У так побудованому *KR-графі* компоненти зв'язності, які містять критичні точки функції, відповідають вершинам, а ті компоненти зв'язності, які не містять критичних точок — точкам на ребрах.

Для (орієнтованих) *KR-графів* виконується: (1) якщо відомо чи орієнтована поверхня, то за графом Кронрода-Ріба можна відновити топологію на цій поверхні, тобто побудувати поверхню, гомеоморфну початковій; (2) прості функції Морса на замкнених поверхнях пошарово еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх *KR-графи* ізоморфні; (3) прості функції Морса на замкнених поверхнях пошарово оснащено еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх орієнтовані *KR-графи* ізоморфні.

Так, орієнтований *KR-граф* є повним інваріантом простих функцій Морса на замкнених поверхнях для пошарово оснащеної еквівалентності функцій. Якщо ж додатково на *KR-графі* зафіксувати порядок вершин, приписавши значення функції у відповідній критичній точці, то отриманий граф буде повним топологічним інваріантом простих функцій Морса на замкнених поверхнях.

Зауважимо, що поняття графа Кронрода-Ріба узагальнене і для гладких функцій з внутрішніми ізольованими критичними точками на довільних гладких многовидах (див., наприклад, [57]).

1.6 Функції із внутрішніми критичними точками на поверхнях з межею

В цьому розділі узагальнюються поняття функції Морса на випадок компактних многовидів з межею.

1.6.1 Функції Морса

Поняття функції Морса також розглядається і для гладких n -вимірних многовидів з межею.

Означення 1.6.1. Гладка функція $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, задана на гладкому n -вимірному многовиді W , називається *функцією Морса*, якщо вона задовольняє умови:

- 1) f має скінченну кількість критичних точок, причому всі вони не вироджені і лежать у внутрішності W ;
- 2) f набуває сталих значень на компонентах межі ∂W .

1.6.2 m -Функції

Нехай M — гладка поверхня з межею ∂M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція на ній. Через f_∂ позначатимемо обмеження функції f на межу поверхні ∂M .

Означення 1.6.2. Функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, задана на гладкій поверхні з межею (можливо $\partial M = \emptyset$), називається *m -функцією*, якщо вона задовольняє умови:

- (1) всі критичні точки функції f є внутрішніми, не виродженими і їх скінченна кількість;

(2) обмеження f_{∂} функції f на межу поверхні є функцією Морса на одно-
мірному многовиді ∂M .

Надалі через $mF(M)$ позначатимемо множину всіх m -функцій, заданих
на многовиді M .

Означення 1.6.3. Дві m -функції $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *еквівалентними*,
якщо існують дифеоморфізми $h : M \rightarrow M$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що $\phi \circ f = g \circ h$.

Відповідно до такого означення еквівалентності, було отримано повну кла-
сифікацію m -функцій [22]. Також, у роботах [25, 26] отримано повний тополю-
гічний інваріант простих m -функцій на компактних поверхнях з межею.

У роботі [25] авторами, досліджуючи топологічні властивості m -функцій
на компактних орієнтованих поверхнях з межею, авторами описано всі атоми
таких функцій (орієнтовані атоми простих m -функцій). Також отримано інва-
ріант пошарово оснащеної еквівалентності простих m -функцій у вигляді KR -
графа із додатковою інформацією.

Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — m -функція, задана на гладкій поверхні M з межею.

Означення 1.6.4. Нехай $p \in \partial M$ — критична точка функції f_{∂} . *Індексом* $\text{ind}(p)$
точки p називається пара (λ, ε) , де λ — звичайний індекс функції f_{∂} , а $\varepsilon = 1$
або $\varepsilon = -1$, якщо вектор $\text{grad}f_x$ спрямований назовні або всередину многовиду
 M відноповідно.

Розглянемо всі можливі f -атоми [25] m -функції f та її обмеження f_{∂} на
межу поверхні в залежності від критичної точки p :

(1) $p \in \text{Int}(M)$ — критична точка функції f , тоді отримуємо випадки:

(1.1) якщо атом має порожній перетин із межею поверхні, то отримуємо ато-
ми A і B (див. рис. 1.4.2: 1 – 4);

(1.2) якщо атом має непорожній перетин із межею поверхні, то отримуємо два атоми, яким відповідає три f-атоми, зображені на рис. 1.6.1.

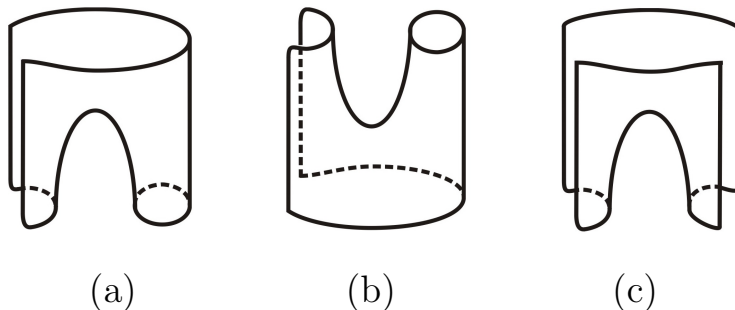


Рис. 1.6.1. f-Атоми m-функцій

(2) $p \in \partial M$ — критична точка функції f_{∂} , тоді отримуємо три атоми, яким відповідає шість f-атомів, зображені на рис. 1.6.2.

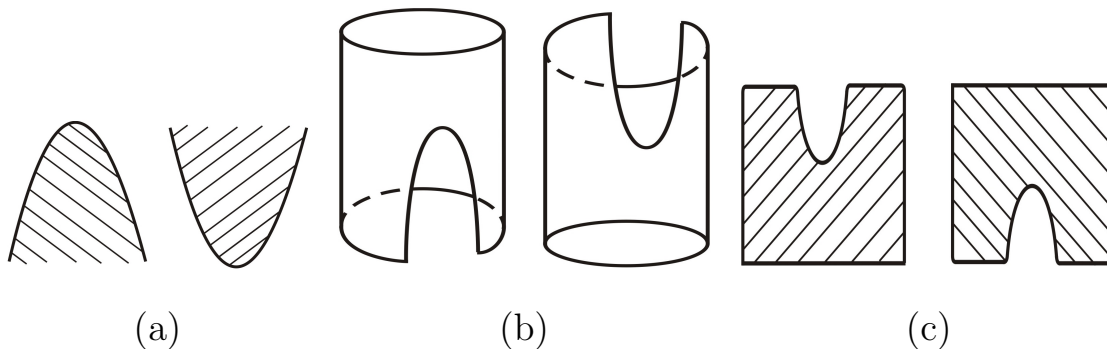


Рис. 1.6.2. f-Атоми m-функцій

1.7 Функції з ізольованими критичними точками на замкнених поверхнях

Нехай M — гладка замкнена поверхня, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція, задана на поверхні M і всі її критичні точки є ізольованими. Клас всіх таких функцій, заданих на M позначатимемо через $Iso(M)$.

Теорема 1.7.1. [35] *Нехай x_0 — критична точка функції $f \in Iso(M)$, яка не є локальним екстремумом. Тоді існує окіл $U(x_0)$ точки x_0 , в якому функція f топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого цілого $k \geq 0$.*

Означення 1.7.2. Критична точка функції f , яка не є локальним екстремумом, називається *суттєво (несуттєво) критичною точкою*, якщо f локально топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого $k > 1$ ($\operatorname{Re}(x + iy)$).

Означення 1.7.3. Число n суттєво критичних точок гладкої функції f разом із відповідними k називаються *топологічним сингулярним типом функції f* .

В. Шарко [12] встановлено, що існує скінченне число топологічно нееквівалентних гладких функцій фіксованого сингулярного типу. Для гладких функцій із однією суттєво критичною точкою задача топологічної класифікації стає простішою, якщо її розглядати в термінах топологічних інваріантів (так званих 2-кольорових спін-графів) [12].

Також, у роботах Є. Полуляха та І. Юрчук [58, 59] вивчались неперервні функції, які в кожній своїй точці топологічно еквівалентні до функції $\operatorname{Re}z^k$, де $k \in \mathbb{N}$ і не залежить від точки (псевдогармонічні функції).

У роботах О. Кадубовського (див., наприклад, [48]) розглядаються два класи гладких функцій на гладкій замкненій (не)орієнтованій поверхні M_g (N_g) роду $g \geq 1$, які мають k локальних максимумів, l локальних мінімумів і ще додатково рівно одну (вироджену) сідлову критичну точку. Ці класи функцій позначено через $C_{k,l}(M_g)$ та $C_{k,l}(N_g)$ відповідно. Задача обрахунку компонент зв'язності (відносно топологічної еквівалентності) просторів функцій $C_{k,l}(M_g)$, $C_{k,l}(N_g)$ для довільних k, l є нерозв'язаною, але для $k = l = 1$ дана проблема частково вирішена [48].

1.7.1 Мінімальні функції

Мінімальні функції з ізольованими особливостями на замкнених поверхнях розглядались у роботах О. Кадубовського (див., наприклад, [48]).

Так, знайдено [48] число топологічно нееквівалентних функцій класу $C_{1,1}(M_g)$ (мінімальні функції) для всіх $g \geq 1$, а у випадку неорієнтованої поверхні N_g — для $g \in \{5, 6\}$.

Також, слід зауважити, що важливе застосування для оцінки знизу числа критичних точок гладкої функції на замкненому многовиді має категорія Люстерника-Шнірельмана [60].

Означення 1.7.4. Функція $f \in Iso(M)$ називається *мінімальною на поверхні M* , якщо вона має мінімальне число критичних точок у класі $Iso(M)$.

Мінімальна функція має один локальний мінімум і один локальний максимум. На гладкій замкненій поверхні, яка негомеоморфна сфері, мінімальна функція має 3 критичні точки, дві з яких є точками локального мінімуму і максимуму, а третя — сідлового типу (див., наприклад, [48]). На сфері мінімальна функція $f \in Iso(S^2)$ має дві критичні точки.

1.7.2 Хордові діаграми

У роботі О. Кадубовського [48], узагальнюючи попередні результати, автор розв'язав задачу підрахунку числа топологічно нееквівалентних мінімальних функцій на замкненій орієнтованій поверхні довільного роду, ввівши для цього поняття 2-кольорової хордової O -діаграми.

Означення 1.7.5. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин (числами від 0 до $2n - 1$) за годинниковою стрілкою, називається *2-кольоровим $2n$ -шаблоном*. *2-Кольоровою хордо-*

вою n -діаграмою називається n -діаграма, побудована на основі 2-кольорового $2n$ -шаблону (під побудовою розуміється з'єднання $2n$ точок на колі n хордами).

Означення 1.7.6. 2-Кольорова хордова n -діаграма, яка не містить (містить) хорди, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називається O -діаграмою (N -діаграмою).

Наприклад, на рис. 1.7.1: [48] (а) зображено 2-кольоровий $2n$ -шаблон для $n = 10$ (рис. 1.7.1: (а)) та відповідні O (рис. 1.7.1: (b)) і N -діаграми (рис. 1.7.1: (c)).

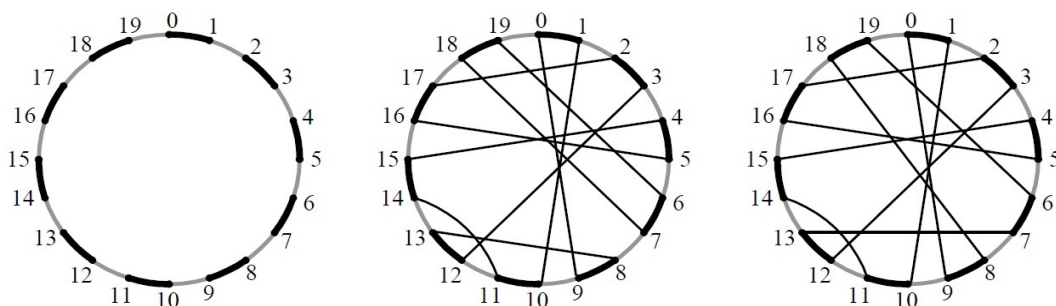


Рис. 1.7.1. (а) 2-Кольоровий 20-шаблон; (b) O -діаграма з 1 сірим та 2 чорними циклами; (c) N -діаграма з 1 сірим та 1 чорним циклами

Означення 1.7.7. 2-Кольорові хордові n -діаграми називаються *ізоморфними*, якщо їх можна сумістити в результаті повороту на певний кут, та *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити в результаті повороту, симетрії або ж їх композиції.

Означення 1.7.8. Чорним (сірим) циклом 2-кольорової хордової n -діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які, чергуючись, утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола (див., рис. 1.7.1: (b), (c)).

Множину O -діаграм (N -діаграм) з n хордами, які мають l сірих та k чорних циклів позначимо через $\mathfrak{F}_{l,k;n}^O$ ($\mathfrak{F}_{l,k;n}^N$) [48].

Теорема 1.7.9. [47] Число топологічно нееквівалентних функцій класу $C_{1,1}(M_g)$ дорівнює числу нееквівалентних діаграм класу $\mathfrak{F}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$).

Так, на рис. 1.7.2 [48] зображені топологічні інваріанти (O -діаграми) функцій на орієнтованій замкненій поверхні M_3 роду 3, які мають два локальні екстремуми та одну (вироджену) сідлову критичну точку.

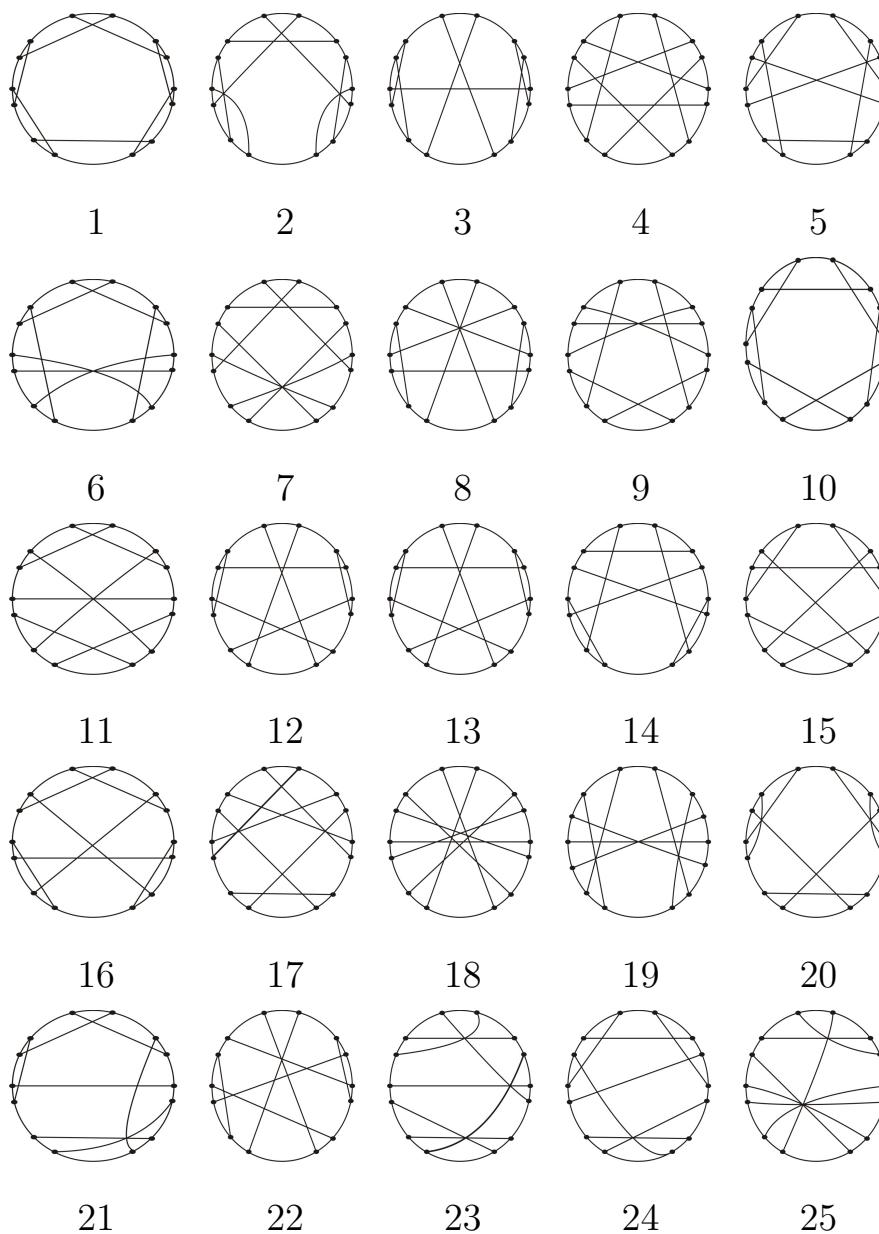


Рис. 1.7.2. Інваріанти для топологічної класифікації функцій класу $C_{1,1}(M_3)$

1.8 Висновки

Наведені в цьому розділі дисертаційної роботи теоретичні відомості є допоміжними і будуть використовуватись при подальшому опису результатів.

РОЗДІЛ 2

Функції з невикористаними критичними точками на межі гладкого многовида

2.1 Функції на n -вимірних многовидах з межею

Нехай M — многовид розмірності n з межею ∂M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функція визначена на многовиді M . Локально межу можна записати у вигляді $\partial M = \{x_1, x_2, \dots, x_n | x_n = 0\}$ для деякої системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) . Позначимо через f_∂ обмеження функції f на межу поверхні M .

Теорема 2.1.1. *Нехай $p_0 \in \partial M$ — невикористана критична точка функції f і невикористана критична точка обмеження f_∂ функції f на ∂M , така, що $f(p_0) = 0$. Тоді існує система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$ в околі p_0 , для якої $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ і функція f має таке локальне зображення:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2 \quad (2.1)$$

для деякого $\delta \in \{-1, +1\}$.

Доведення. Виберемо довільну локальну систему координат (u_1, u_2, \dots, u_n) в околі критичної точки p_0 , таку що $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ і $u_n \geq 0$. Тоді межа задається рівністю $u_n = 0$.

Як і при доведенні теореми 1.3.6 (див., наприклад, роботу [1]) з умови $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ випливає, що існують функції $h_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i \in \overline{1, n}$ (наприклад $h_i(u_1, \dots, u_n) = \int_0^1 \frac{df(u_1 t, \dots, u_n t)}{du_i} dt$, $i \in \overline{1, n}$), такі що $f = \sum_{i=1}^n u_i \cdot h_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Для критичних точок $\frac{\partial f}{\partial u_i}(0, 0, \dots, 0) = h_i(0, 0, \dots, 0) = 0$. Тоді в свою чергу $f = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \cdot g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ для деяких функцій $g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i, j = \overline{1, n}$. Поклавши $G_{ij} \equiv (g_{ij} + g_{ji})/2$, маємо

$$f = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \cdot G_{ij} \quad (2.2)$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $G_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то з невідродженості $H_{f|_{\partial M}}(x_1, x_2, \dots, x_n)(p_0)$ маємо, що $\exists k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$: $G_{1k} \neq 0$ і заміна $v_1 = u_1 + u_k, v_k = u_1 - u_k$ приводить нас до бажаного результату). Враховуючи неперервність G_{ij} , маємо що $G_{11} \neq 0$ в деякому околі p_0 .

Із рівності (2.2) маємо $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(0, 0, \dots, 0) = 2G_{11}(0, 0, \dots, 0) \neq 0$. Тому заміна, для якої $x_1 = \sqrt{|G_{11}|} \cdot (u_1 + \sum_{i=2}^n \frac{G_{1i}}{G_{11}} \cdot u_i)$, а решта координат, включаючи u_n , не змінюється, є коректною. Це означає, що межа $\partial M = \{u_n = 0\}$ не змінюється при даному перетворенні і область $\{u_n \geq 0\}$ переходить сама в себе.

Тоді маємо наступні зображення: $f = (x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n u_i u_j \cdot G_{ij} - (\sum_{i=2}^n u_i \cdot G_{1i})^2 / G_{11}) / G_{11}$, якщо $G_{11} > 0$) $\wedge (-x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n u_i u_j \cdot G_{ij} - (\sum_{i=2}^n u_i \cdot G_{1i})^2 / G_{11}) / G_{11}$, якщо $G_{11} < 0$).

Далі аналогічними міркування можна отримати

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + F(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \cdot u_n^2$$

для деяких $\delta_i \in \{-1, +1\}, i = \overline{1, n-1}$ і деякої функції F , яка не залежить від u_n . З невідродженості критичної точки функції f випливає, що $F(0) \neq 0$.

Поклавши $x_n = \sqrt{|F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})|} \cdot u_n$, отримаємо $f = \sum_{i=1}^n \delta_i x_i^2$, $\delta_i \in \{-1, +1\}$. Також зауважимо, що останнє перетворення координат не змінює межу многовида ∂M і область $\{u_n \geq 0\}$ переходить в $\{x_n \geq 0\}$. У останньому представленні функції f , замінивши x_i на $x_j, i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, де це потрібно отримаємо рівність (2.1). \square

Зауваження 2.1.2. Такий же результат отримано у лемі 2.6 [61], але, на відміну від теореми 2.1.1 необхідними умовами у вказаній лемі є скрізь дотичність поля градієнта.

Твердження 2.1.3. Якщо $p_0 \in \partial M$ така, що $f(p_0) = 0$ і не є критичною точкою функції f_{∂} , то існує система координат $(x_1, x_2, \dots, x_n), x_n \geq 0$ в околі

p_0 , для якої функція f має вигляд:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \quad (2.3)$$

Доведення. Нехай $p_0 \in \partial M$ не є критичною точкою функції f , $f(p_0) = 0$. Виберемо довільну локальну систему координат (u_1, u_2, \dots, u_n) , $u_n \geq 0$ в околі p_0 , таку що $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Тоді, оскільки p_0 — регулярна точка функції f_∂ , то $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p_0) \neq 0$ для деякого $i \in \overline{1, n-1}$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $\frac{\partial f}{\partial u_1}(p_0) \neq 0$. Оскільки $f(p_0) = 0$, то існують гладкі функції $a_i(u_1, \dots, u_n)$, такі що $f = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$, причому $a_1 \neq 0$ у деякому околі p_0 . Тоді гладка заміна координат $x_1 = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$, $x_i = u_i$, $i = \overline{2, n}$, яка не змінює межу многовида і область $u_n \geq 0$ переводить у область $x_n \geq 0$, приводить функцію f до бажаного вигляду. \square

Означення 2.1.4. Нехай $p_0 \in \partial M$ — критична точка функції f і її обмеження f_∂ на ∂M , тоді *індексом критичної точки* називатимемо пару (λ, δ) , яка визначається рівністю (2.1).

Ця пара чисел повністю визначається парою індексів Морса для функцій f і f_∂ . Оскільки індекси Морса не залежать від способу зведення функції до канонічного вигляду (див., наприклад, [1]), то те саме виконується для індексу (λ, δ) .

2.2 Функції на поверхнях з межею

З теореми 2.1.1 безпосередньо випливає

Наслідок 2.2.1. *В околі точки, що є невиродженою критичною точкою як для функції f на поверхні так і для її обмеження на межу, функція заміною координат зводиться до одної з таких форм:*

$$(i) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, y \geq 0$$

$$(ii) f(x, y) = -x^2 + y^2, y \geq 0$$

$$(iii) f(x, y) = x^2 - y^2, y \geq 0$$

$$(iv) f(x, y) = -x^2 - y^2, y \geq 0$$

Зауваження 2.2.2. З наслідку маємо локальні представлення функції Морса в околі її критичної точки, яка належить межі. Але на відміну від теореми 1.3.6 ми не можемо звести до трьох форм, бо перетворення координат, яке (ii) переводить у (iii) чи навпаки, змінює межу поверхні.

Надалі в цьому і в усіх наступних параграфах розглядаються тільки прості функції.

Дослідимо структуру функції в околі критичного рівня для випадків різних індексів критичної точки.

- Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(0, +1)$.

Тоді згідно теореми 2.1.1 існує локальна система координат (x, y) в околі p_0 , така що $f = x^2 + y^2$. Звідки видно, що p_0 є точкою локального мінімуму. Тоді при проходженні p_0 (зміни $f^{-1}(p_0 - \varepsilon)$ на $f^{-1}(p_0 + \varepsilon)$ для досить малого ε) додається півдиск $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 | y \geq 0\}$, де $D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Це показано на рис. 2.2.1.



Рис. 2.2.1. Атом A_1 (індекс $(0, +1)$) Рис. 2.2.2. Атом A_2 (індекс $(1, -1)$)

- Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(1, -1)$.

Функція матиме локальне зображення $f = -x^2 - y^2$, звідки — точка p_0 є точкою локального максимуму. При проходженні p_0 приклеюється півдиск D_+^2 , так що точки $\{y = 0\} \cap \partial D_+^2$ приклеюються до кутів, ∂D_+^2 — до межі

лінії рівня функції, а $\{(x, y) \in D_+^2 | y = 0\}$ додається до межі поверхні. Ця перебудова зображена на рис. 2.2.2.

- Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(1, +1)$.

За теоремою 2.1.1 функцію f можна записати у формі $f = -x^2 + y^2$ для деякої системи координат (x, y) в околі p_0 . Точки перетину межі поверхні з межею лінії рівня функції f ми називатимемо кутами. При проходженні критичної точки p_0 перебудова відбувається таким чином: приклеюється полоска $ABCD$ до межі лінії рівня так щоб вершини A і D приклеюються до кутів, а сторони AB і CD до компоненти межі лінії рівня. При цьому до межі додаються сторони BC і AD , зокрема AD до частини межі ∂M на даній лінії рівня. Ця перебудова зображена на рис. 2.2.3.

- Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(0, -1)$.

Тоді функцію можна записати у вигляді $f = x^2 - y^2$ і перебудова відбуватиметься так: приклеюється смужка (квадрат) $ABCD$, так що сторона BC приклеюється до межі лінії рівня. При цьому до межі додаються сторони AB , CD і AD , причому AD — до компоненти межі — ∂M , що зображено на рис. 2.2.4.

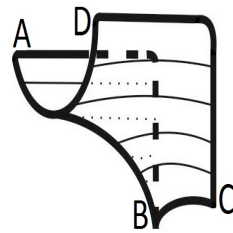
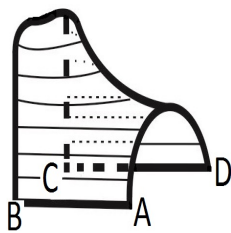


Рис. 2.2.3. Атом C_1 (індекс $(1, +1)$) Рис. 2.2.4. Атом C_2 (індекс $(0, -1)$)

На рисунках 2.2.1 — 2.2.6 маємо атоми, які називатимемо атомами A (f-атоми A_1 у випадку рис. 2.2.1 і A_2 — рис. 2.2.2), B (B_1 — рис. 2.2.5, B_2 — рис. 2.2.6) і C (C_1 — рис. 2.2.3 і C_2 — рис. 2.2.4). Атом C зручніше зображати так, як це показано на рис. 2.2.7, 2.2.8. (Це проекція частини тора $x = \cos u$,

$y = (3 + \sin u) \cos v$, $z = (3 + \sin u) \sin v$, $x > 0$, $1 \leq z \leq 3$ з критичною точкою $(0,0,2)$ на площину yz , функція висоти $f(x, y, z) = z$.

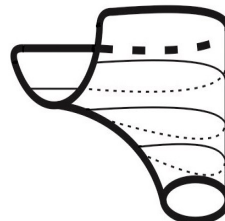
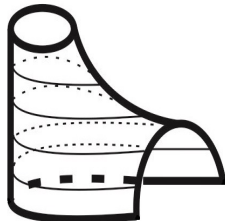


Рис. 2.2.5. Атом B_1 (індекс $(1, +1)$) Рис. 2.2.6. Атом B_2 (індекс $(0, -1)$)

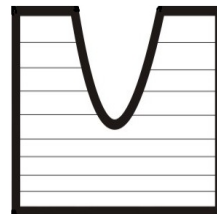
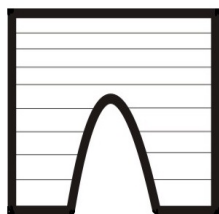


Рис. 2.2.7. Атом C_1 (індекс $(1, +1)$) Рис. 2.2.8. Атом C_2 (індекс $(0, -1)$)

Теорема 2.2.3. *Кожний простий атом збігається із атомом A або з атомом B , або з атомом C , кожному з яких відповідає два f -атоми.*

Доведення. У випадках, коли індекс критичної точки дорівнює $(0, +1)$ чи $(1, -1)$ отримаємо атом A . Тому надалі вважаємо, що індекс рівний $(1, +1)$ або $(0, -1)$. Нехай $f(p_0) = c$. Розглянемо окіл критичної точки p_0 , обмежений $f^{-1}(c - \varepsilon)$, $f^{-1}(c + \varepsilon)$, деякими траєкторіями поля градієнта і межею поверхні ∂M . Називатимемо областями додатності функції f частину поверхні де $\{f > c\}$ і будемо зображати її заштрихованою, та областями від'ємності — де $\{f < c\}$ будемо зображати білим кольором. Ми отримаємо поверхню зображену на рис. 2.2.9.



Рис. 2.2.9

Далі маємо дві можливості склейки для кожного з атомів — склеювати околи в межі кінців критичного рівня або ні. У випадку склейки отримуємо атом B , інакше — атом C . \square

2.3 Оптимальні tt -функції на поверхнях з межею

Під поняттям оптимальної функції у деякому класі функцій розумітимемо функцію, яка має найменше можливе число критичних точок у цьому класі, якщо така існує. Також, оптимальні функції ще називають мінімальними.

Означення 2.3.1. Функцію Морса $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називатимемо tt -функцією, якщо обмеження f_∂ функції на межу ∂M також є функцією Морса і всі критичні точки функції f належать межі поверхні ∂M .

Лема 2.3.2. Проста оптимальна tt -функція на поверхні має рівно один мінімум і один максимум.

Доведення. Для доведення леми потрібно показати: 1) існування tt -функції, у якої рівно один мінімум і один максимум; 2) якщо у tt -функції є принаймні дві точки мінімуму чи максимуму, то вона не є оптимальною.

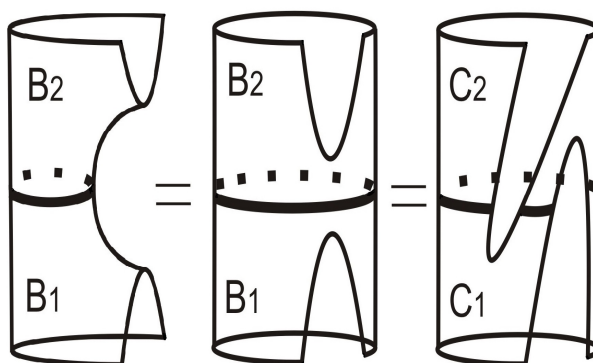


Рис. 2.3.1

Спершу розглянемо деякі попередні викладки. Зауважимо, що якщо поверхня містить один f -атом B , приклеювання якого змінює компоненту лінії

рівня з відрізком на коло, то повинен міститися і симетричний йому атом B , який з кола робить відрізок. Отже, приклеювання такої пари атомів додає до поверхні смужку (приклеєний за протилежними сторонами квадрат), що у свою чергу можна також отримати приклеюванням двох симетричних f -атомів. Це показано на рисунку 2.3.1.

Тому надалі замінимо всі атоми B на атоми C . Така заміна змінює функцію, але не змінює поверхню та числа критичних точок.

Тоді кожна компонента зв'язності кожного рівня функції буде гомеоморфна відрізку або точці. Отже, поверхня гомотопічно еквівалентна KR -графу. Звідси випливає, що ейлерова характеристика поверхні, як гомотопічний інваріант, дорівнює ейлеровій характеристиці відповідного KR -графа. Нехай у KR -графу є a вершин валентності 1 (вони відповідають за мінімуми і максимуми) та b вершин валентності 3 (вони відповідають за сідлові точки). Тоді граф має $a + b$ вершин і $\frac{3b+a}{2}$ ребер. Отже, ейлерова характеристика $\chi = a + b - \frac{3b+a}{2} = \frac{a-b}{2}$, звідки $b = a - 2\chi$ та число критичних точок дорівнює $a + b = 2a - 2\chi \geq 4 - 2\chi$, бо $a \geq 2$ (оскільки у функції на компактні завжди є точка мінімуму і точка максимуму).

1) Розглянемо поверхні, зображені на рис. 2.3.2: 1, 2, та m -функцію f . На рис. 2.3.2: 1 зображена орієнтована поверхня роду g з k компонентами межі — двовимірний диск з $k - 1$ полосками та $g - k + 1$ парами перехрещених полосок. На рис. 2.3.2: 2 зображена неорієнтована поверхня роду g з k компонентами межі — двовимірний диск з $k - 1$ полосками та $g - k + 1$ листами Мюбіуса. Функція f має рівно один локальний мінімум і один локальний максимум і, отже, загальне число її критичних точок дорівнює $4 - 2\chi$, що означає, що вона має найменше можливе число критичних точок на даній поверхні, тобто вона є оптимальною.

2) Далі припустимо що m -функція має принаймні дві точки максимуму чи мінімуму, тобто $a \geq 3$, тоді загальне число її критичних точок $2a - 2\chi \geq$

$6 - 2\chi > 4 - 2\chi$, де $4 - 2\chi$ — число критичних точок заданої у 1) m -функції. Це означає, що дана m -функція не буде оптимальною. \square

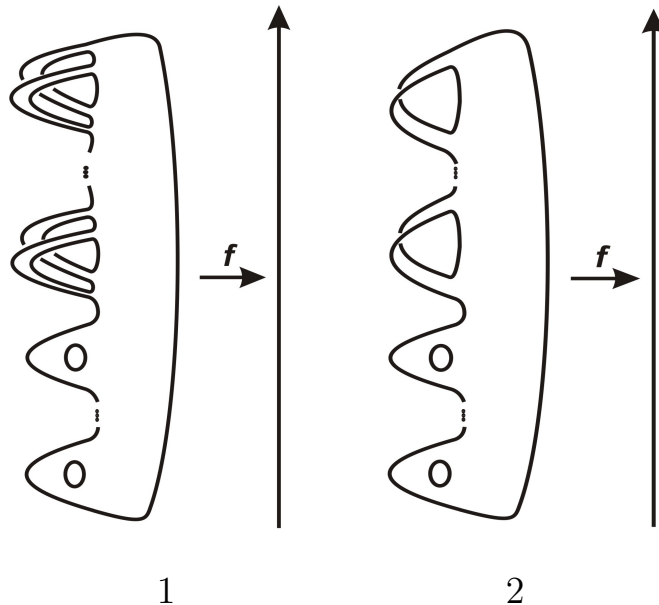


Рис. 2.3.2. Оптимальна m -функція на поверхні роду g

з k компонентами межі (двовимірний диск з приклеєними полосками)

Нехай f — m -функція на поверхні M . Через c_i^\pm позначатимемо число критичних точок функції f індексу $(i, \pm 1)$, тобто c_0^+ — число критичних точок індексу $(0, 1)$, c_0^- — індексу $(0, -1)$, c_1^+ — індексу $(1, +1)$, c_1^- — індексу $(1, -1)$.

Лема 2.3.3. *Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — оптимальна m -функція на поверхні M .*

Тоді ейлерова характеристика поверхні дорівнює

$$\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}.$$

Доведення. Розглянемо подвоєння DM поверхні M , таке що атлас в точках межі задовольняє умови теореми 2.1.1 і зауваження 2.1.2. Тоді функцію f можна симетрично продовжити до оптимальної m -функції на DM . Звідки $\chi(DM) = 2\chi(M) - \chi(\partial M) = 2\chi(M)$, оскільки межа поверхні ∂M є диз'юнкним об'єднанням кіл S^1 , а тому $\chi(\partial M) = 0$. Таким чином $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(DM)$.

З іншого боку всі критичні точки на поверхні DM будуть внутрішніми, тому має місце рівність Морса (теорема 1.3.0.6) $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2$, де c_i — число критичних точок індексу $i, i = \overline{0, 2}$. З останньої рівності, підставивши $c_0 = c_0^+, c_1 = c_0^- + c_1^+, c_2 = c_1^-$, отримаємо $\chi(M) = \frac{c_0^+ - (c_0^- + c_1^+) + c_1^-}{2}$. \square

Теорема 2.3.4. *Проста оптимальна m -функція на орієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $4g + 2k$ критичні точки, а на неорієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $2g + 2k$ критичні точки.*

Доведення. Нехай M — поверхня роду g з k компонентами межі, f — оптимальна m -функція на ній. Зауважимо, що збільшення компонент межі зменшує ейлерову характеристику, оскільки воно рівносильне приклеюванню смужки. Тоді $\chi(M) = 2 - 2g - k$ для орієнтованого випадку і $\chi(M) = 2 - g - k$ у випадку неорієнтованої поверхні M .

З іншого боку з леми 2.3.3 маємо, що $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2} = \frac{2 - c_0^- - c_1^+}{2}$, оскільки згідно леми 2.3.2 оптимальна m -функція має рівно один мінімум і рівно один максимум, які відповідають критичним точка індексу $(0, +1)$ і $(1, -1)$ відповідно.

Далі елементарними перетвореннями отримаємо, що $c_0^+ + c_0^- + c_1^+ + c_1^- = 4g + 2k$ і $c_0^+ + c_0^- + c_1^+ + c_1^- = 2g + 2k$ для орієнтованого і неорієнтованого випадків відповідно, що і доводить теорему. \square

Теорему 2.3.4 можна також розглядати як критерій оптимальності m -функцій на заданій поверхні.

Природньо виникає запитання: чи кожну функцію Морса, задану на межі поверхні, можна продовжити на всю поверхню до оптимальної m -функції з одностов'язними компонентами рівня?

Відразу ж з останньої теореми можна зробити висновок, що необхідними умовами є те, що для орієнтованої (неорієнтованої) поверхні роду g з k компо-

нентами межі функція повинна мати $4g + 2k$ ($2g + 2k$) критичні точки.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні M роду $g \geq 1$ з однією компонентою межі. Тоді число критичних точок оптимальної функції дорівнює $4g + 2$.

Теорема 2.3.5. *Нехай f — проста функція Морса, задана на межі орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі, яка має $4g + 2$ критичні точки із критичними значеннями $c_1, c_2, \dots, c_{4g+2}$ ($c_1 < c_2 < \dots < c_{4g+2}$). Тоді, якщо функцію f можна продовжити на всю поверхню до простої оптимальної tt -функції з однозв'язними компонентами рівня, то виконуються умови:*

- I) перші 3 критичні значення, c_1, c_2, c_3 , функції f (як функції на колі) відповідають точкам локального мінімуму;*
- II) серед критичних значень $c_4, c_5, \dots, c_{4i+3}$ є принаймні $2i$ значень, які відповідають точкам локального мінімуму, для всіх натуральних i , таких, що $4i + 3 \leq 4g + 2$.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки компоненти множин рівня однозв'язні, то поверхня M містить тільки атоми A і C . З теореми 2.3.4 для поверхні M маємо, що $\chi(M) = 1 - 2g$. Також, оскільки точки, які відповідають числам мінімуму, збільшують число компонент ліній рівня на 1, а точки, які відповідають числам максимуму, зменшують на 1, то для довільного регулярного значення a функції f частина поверхні $f^{-1}((-\infty, a))$ містить більше точок локального мінімуму, ніж максимуму.

Припустимо, від супротивного, що I) не виконується. Тоді, за умовою теореми значення c_1 є найменшим критичним значенням, тобто відповідає точці мінімуму на колі. Значення c_2 не може бути локальним максимумом, оскільки дві сусідні критичні точки на колі будуть мати значення менші за c_2 і тоді c_2 буде щонайменше третім за зростанням критичним значенням, що протирічить

умові теореми. Залишилось розглянути випадок, коли c_3 відповідає точці максимуму. Розглянемо частину поверхні $f^{-1}((-\infty, c_3 + \varepsilon])$ для достатньо малого ε . Тоді лінія рівня $f^{-1}(c_3 + \varepsilon)$ має одну компоненту зв'язності. Приклеїмо до поверхні $f^{-1}((-\infty, c_3 + \varepsilon])$ двовимірний півдиск $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 | y \geq 0\}$ за гомеоморфізмом, що відображає $[-1, 1] \times 0$ у $f^{-1}(c_3 + \varepsilon)$ і продовжимо функцію на півдиск по формулі $f(x, y) = y + c_3 + \varepsilon$. Тоді згідно леми 2.3.3 ейлерова характеристика отриманої поверхні M' дорівнює $\chi(M') = 0$, що означає, що M' містить принаймні дві компоненти межі. Оскільки решта (після третього) атомів не будуть приклеюватись до однієї з цих компонент межі, то число компонент межі може тільки збільшитись. Отримана суперечність доводить $I)$.

По-іншому у справедливості твердження $I)$ можна переконатися за допомогою послідовної склейки атомів A і C . А саме: атоми A_1 і C_1 приклеюються однозначно, що показує, що значення c_1 і c_2 відповідають точкам мінімуму. Далі, якщо клеїти атом C_1 (однозначно з точністю до симетричності), то c_3 теж буде відповідати точці мінімуму, якщо ж атом C_2 (це можна зробити двома способами), то ми отримаємо дві компоненти межі, що приводить до суперечності, тому c_3 теж буде відповідати точці мінімуму. Ці викладки зображені на рис. 2.3.3.

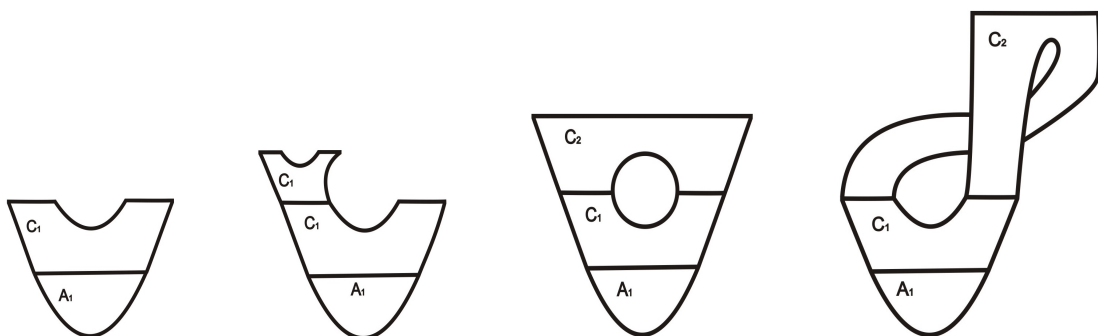


Рис. 2.3.3

Припустимо, що $II)$ не виконується. Тоді серед критичних значень c_4, \dots, c_{4i+3} є принаймні $2i + 1$, які відповідають точкам максимуму і відповідно не

більше $2i - 1$, які відповідають точкам мінімуму. Звідки, серед $c_1, c_2, \dots, c_{4i+3}$ не більше $2i - 1 + 3 = 2i + 2$ відповідають точкам мінімуму. Згідно з зауваженням на початку доведення, для будь-якого регулярного значення функції серед критичних точок з меншим значенням є не менше локальних мінімумів ніж локальних максимумів. Це означає, що серед критичних значень c_1, \dots, c_{4i+3} рівно $2i + 1$ відповідають точкам максимуму і $2i + 2$ — точкам мінімуму.

Так, $f^{-1}((c_{4i+3} + \varepsilon))$ має одну компоненту зв'язності. Як і раніше приклеємо до неї двовимірний півдиск D_+^2 і з леми 2.3.3 отримаємо, що ейлерова характеристика отриманої поверхні M' дорівнює: $\chi(M') = \frac{1-(2i+1)-(2i+1)+1}{2} = -2i$. Звідки випливає, що межа поверхні M' має парне число компонент, а отже містить принаймні дві компоненти межі. Отримуємо суперечність. \square

Зауважимо, що необхідними умовами продовження функції є також те, що останні 3 критичні значення функції відповідають точкам локального максимуму. Останнє випливає із I) та II) (див. теорему 2.3.5).

Нехай f — m -функція з n критичними точками. Поставимо їй у відповідність підстановку наступним чином: занумеруємо критичні точки від 1 до n в порядку зростання значення функції f в них. Нехай число i відповідає критичному значенню функції c_i , $i = \overline{1, n}$. Рухаючись по межі поверхні, починаючи від точки мінімуму запишемо номери критичних точок. Отримаємо підстановку на n числах. Число a_i підстановки $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$ називатимемо числом максимуму, якщо $a_{i-1} < a_i$ і $a_{i+1} < a_i$ та числом мінімуму, якщо $a_{i-1} > a_i$ і $a_{i+1} > a_i$, $i = \overline{1, n-2}$, де $a_0 = 1$. Зауважимо, що у так побудованій підстановці $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$ числа мінімуму і числа максимуму чергуються, а підстановки $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$ і $(1a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1)$ задають одну і ту ж поверхню з точністю до напрямку проходження. Крім того числу мінімуму відповідає точка локального мінімуму функції на колі, а числу максимуму — точка локального максимуму. Так задана послідовність буде updown-послідовністю.

Приклад 2.3.6. Розглянемо випадок орієнтованої поверхні роду 1 з однією компонентою межі (тор з діркою). Тоді, за теоремою 2.3.4 оптимальна mm -функція має 6 критичних точок. Число функцій Морса на колі з 6 критичними точками дорівнює числу відповідних підстановок, а саме 16. Серед цих підстановок 4 не задовольняють умови теореми 2.3.5. Це підстановки (164523), (154623), (132645), (132546). Отже, відповідні функції Морса не можна продовжити на всю поверхню до mm -функцій з однозв'язними компонентами рівня. Решта підстановок можна отримати при проходженні межі поверхонь, склеєних з атомів A і C . Якщо зафіксувати напрямок проходження, то кожній підстановці відповідатиме одна поверхня, інакше — дві.

2.4 Висновки

В цьому розділі доведено аналог теореми Морса для функцій, у яких критичні точки не вироджені та збігаються з критичними точками обмеження цих функцій на межу двовимірного многовида і є не виродженими для цього обмеження (mm -функції). Знайдено найменше можливе число критичних точок простої mm -функції у класі всіх простих mm -функцій на заданій поверхні. Також, важливим результатом є отримані у даному розділі необхідні умови продовження простої функції Морса, заданої на єдиній компоненті межі орієнтованої поверхні роду g із $4g + 2$ критичними точками, на всю поверхню до простої оптимальної mm -функції.

Результати, отримані в розділі 2, опубліковані у статті [1^a].

РОЗДІЛ 3

Прості функції з невідродженими особливостями на орієнтованих поверхнях з межею

У цьому розділі розглянуто гладку компактну зв'язну орієнтовану поверхню M з межею ∂M (можливо, $\partial M = \emptyset$). Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція, яка задовольняє умови:

- (1) якщо критична точка p_0 функції f не лежить на межі ∂M , то вона є невідродженою критичною точкою функції f ;
- (2) якщо критична точка p_0 функції f належить межі поверхні ∂M , то вона є невідродженою критичною точкою як функції f , так і її обмеження f_∂ на межі ∂M поверхні M ;
- (3) якщо p_0 — критична точка функції f_∂ , то вона є критичною точкою функції f , тобто f_∂ не має критичних точок, відмінних від критичних точок f .

Множину таких функцій будемо позначати через $\Omega_0(M)$.

Якщо множину (невідроджених) критичних точок функції $*$ позначимо через $CP(*)$ ($NDCP(*)$), то означення даного класу функцій перепишеться у вигляді

$$\Omega_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid CP(f) = NDCP(f) \supset CP(f_\partial) = NDCP(f_\partial)\}.$$

Теорема 3.0.1. *Нехай M — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня. Тоді виконуються такі твердження:*

- 1) для довільної функції $f \in \Omega_0(M)$ існує m -функція $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, яка є топологічно еквівалентною до функції f ;
- 2) для довільної m -функції $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ існує функція $f \in \Omega_0(M)$, така, що f і g топологічно еквівалентні.

Доведення. Доведемо 1). Тоді з урахуванням симетричності топологічної еквівалентності з 1) впливатиме твердження пункту 2).

Нехай $f \in \Omega_0(M)$. Тоді в околах регулярних точок функція f має представлення $f(x, y) = x + C$ для сталої $C = f(0, 0)$ (твердження 2.1.3). Враховуючи, що m -функція має таке ж представлення в регулярних околах, функцію g побудуємо тотожно рівною f в деяких достатньо малих регулярних околах.

В околах внутрішніх критичних точок функція f буде m -функцією за означенням, тому в цих околах g також виберемо тотожно рівною функції f .

Зауважимо, що функція f має локальне зображення $f = \pm x^2 \pm y^2, y \geq 0$ (наслідок 2.2.1) в околі критичної точки на межі поверхні, а m -функція g в свою чергу $g(x, y) = \pm x^2 \pm y, y \geq 0$ [21] в околі критичної точки обмеження функції на межу ∂M .

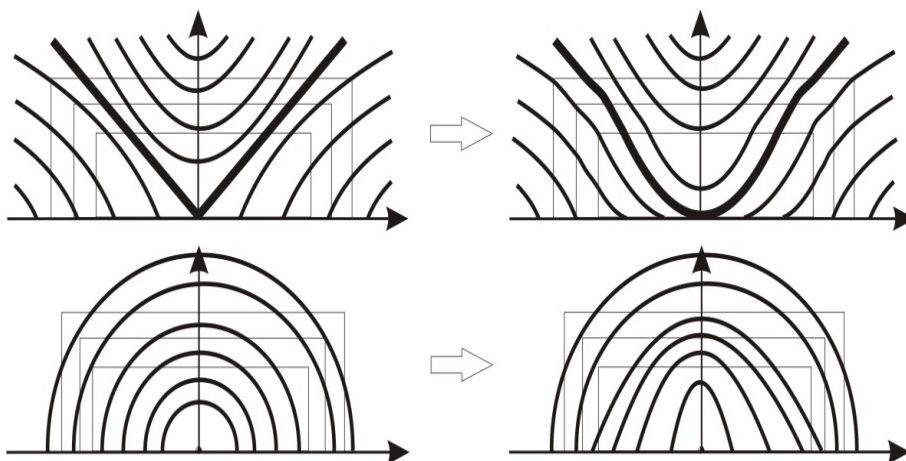


Рис. 3.0.1

Залишилось розглянути околи критичних точок на межі поверхні. Нехай p_1, \dots, p_l — критичні точки функції f , які належать межі ∂M . Виберемо їх прямокутні околи $-2\varepsilon_i \leq x \leq 2\varepsilon_i, 0 \leq y \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, l}$, для деяких достатньо малих ε_i , таких що ці околи не містять інших критичних точок функції f , крім $p_i, i = \overline{1, l}$. Покладемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i | i = \overline{1, l}\}$ і звуємо побудовані прямокутні околи до наступних $V_i = \{-2\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, 0 \leq y \leq \varepsilon\}, i = \overline{1, l}$. Далі розглянемо δ -околи меж вищеописаних околів $V_i, i = \overline{1, l}$, які задамо у вигляді:

$U(V_i) = \{-2\varepsilon - \delta \leq x \leq -2\varepsilon + \delta, 0 \leq y \leq \varepsilon + \delta\} \cup \{2\varepsilon - \delta \leq x \leq 2\varepsilon + \delta, 0 \leq y \leq \varepsilon + \delta\} \cup \{-2\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, \varepsilon - \delta \leq y \leq \varepsilon + \delta\}$, $i = \overline{1, l}$ для деякого достатньо малого δ (такого, що $U(V_i)$ містить тільки регулярні рівні функції f). Тоді на множинах $V_i \setminus U(V_i)$, $i = \overline{1, l}$ m -функцію задамо наступним чином $g = \pm x^2 \pm y$, $y \geq 0$, а топологічна еквівалентність буде задаватися гомеоморфізмами $h_1(x, y) = (x, y^2)$, $h_2(z) = z$. В регулярних околах поза V_i функцію g виберемо тотожно рівною функції f . Тоді, щоб так побудована функція g була m -функцією, її залишилося згладити на множинах $U(V_i)$, $i = \overline{1, l}$. Це можна зробити, наприклад, так як у роботі [62] (див. рис. 3.0.1). \square

3.1 Атоми простих функцій на орієнтованих поверхнях з межею

Розглянемо гладкі функції f і g , задані на компактних зв'язних орієнтованих поверхнях M і N відповідно.

Означення 3.1.1. Функції f і g називаються \mathcal{O} -еквівалентними, якщо f і g пошарово оснащено еквівалентні і відповідний гомеоморфізм поверхонь (який задає пошарово оснащену еквівалентність) зберігає орієнтацію. Позначимо через U об'єднання компонент лінійної зв'язності достатньо малого околу критичного рівня функції f , такі, що містять критичні точки. Клас \mathcal{O} -еквівалентності пари $(U, f|_U)$ називатимемо \mathcal{O} -атомом.

Означення 3.1.2. \mathcal{O} -атом називається *простим*, якщо він містить одну критичну точку.

Означення 3.1.3. Топологічно еквівалентні функції f і g , задані на орієнтованій поверхні M , називатимемо *топологічно \mathcal{O} -еквівалентними*, якщо відповідний гомеоморфізм поверхонь (який задає топологічну еквівалентність) зберігає орієнтацію поверхні M .

Оскільки надалі в цьому розділі всі функції, які буде розглянуто, є простими, то відповідно кожен атом та \mathcal{O} -атом також будуть простими. Тому під

атомом, \mathcal{O} -атом розумітимемо простий атом, \mathcal{O} -атом відповідно.

Розглянемо надалі клас функцій $\Omega(M) = \{f \in \Omega_0(M) | f \text{ — проста}\}$, заданих на компактній поверхні M .

Нехай $f \in \Omega(M)$. Компоненти лінії рівня функції f називатимемо шарами, причому для регулярних рівнів вони гомеоморфні відрізку або колу. Тоді поверхня M розіб'ється на об'єднання шарів і отримаємо шарування з особливостями. Шар називатимемо $(\mathcal{O}-)$ І-шаром, якщо він відповідає компоненті лінії рівня гомеоморфній відрізку (колу). Розглянемо відношення еквівалентності на M , в якому точки еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони належать одному шару. Далі, ввівши фактор-топологію в просторі шарів, отримаємо деякий граф Γ_f , в якому ребра будемо зображати звичайною (штрихпунктирною) лінією, якщо вони поставлені у відповідність $(\mathcal{O}-)$ І-шарам. Відповідні ребра називатимемо $(\mathcal{O}-)$ І-ребрами, тоді всі ребра графа розіб'ються на два типи і таке розбиття називатимемо *розбиттям ребер* графа Γ_f . Якщо не задавати розбиття ребер, то отримаємо граф Кронрода-Ріба.

Означення 3.1.4. Вершини валентності 3 і 4 графа Γ_f функції f , яким інцидентні тільки І-ребра, називатимемо Y - і X -вершинами відповідно.

На графі X -вершини будемо зображати як на рис. 3.1.2.

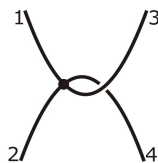


Рис. 3.1.1. X -вершина KR-графа

Для кожної Y -вершини графа Γ_f зафіксуємо циклічний порядок інцидентних їх ребер. На рисунку він буде задаватися за допомогою обходу відповідних ребер проти годинникової стрілки. Циклічний порядок у X -вершині задається нумерацією ребер як на рис. 3.1.1.

Далі для того щоб розглядати \mathcal{O} -еквівалентність функцій f і g , зафіксуємо на графах Γ_f і Γ_g орієнтацію ребер від нижньої до верхньої вершини. Оскільки

ки орієнтація ребер задається однозначно на кожному графі, то на графах явно її зображати не будемо, але вважатимемо, що ця орієнтація ребер задана.

Означення 3.1.5. *Оснащеним графом Кронрода-Ріба (оснащеним KR-графом) функції $f \in \Omega(M)$ називатимемо граф Γ_f разом із заданим розбиттям, орієнтацією ребер та їхнім циклічним порядком у Y- і в X-вершинах.*

Нехай p_0 — критична точка функції $f \in \Omega(M)$. Залежно від індексу p_0 та її приналежності до межі поверхні ∂M можливими є наступні 7 атомів та 13 \mathcal{O} -атомів. Оскільки функції класу $\Omega(M)$ топологічно еквівалентні m -функціям, то для зручності атоми будемо зображати як атоми функції висоти m -функції. Таким чином маємо наступні атоми:

- (i) 3 атоми, якщо $p_0 \in \partial M$: A, B і C , кожному з яких відповідають 2 \mathcal{O} -атоми:
 A_1, A_2, B_1, B_2 і C_1, C_2 (рис. 3.1.2);

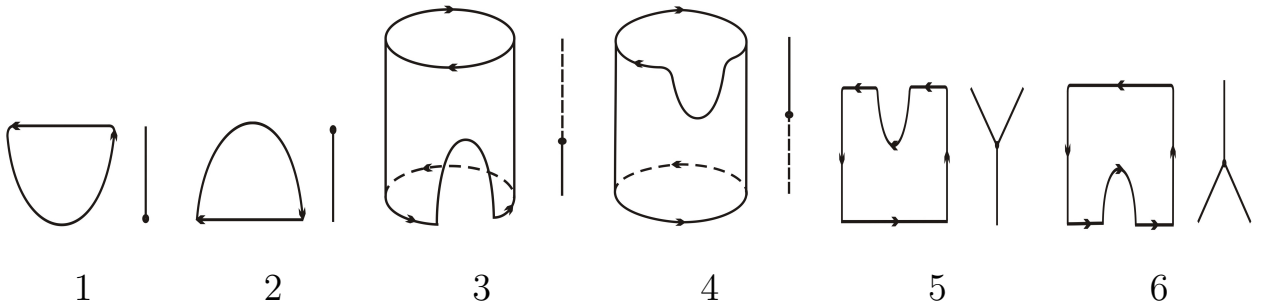


Рис. 3.1.2. \mathcal{O} -атоми функцій із $\Omega(M)$ граничної критичної точки

- (ii) 2 атоми, якщо $p_0 \notin \partial M$ та атом не перетинається з межею поверхні: D і E та відповідно 4 \mathcal{O} -атоми: D_1, D_2, E_1, E_2 (рис. 3.1.3);

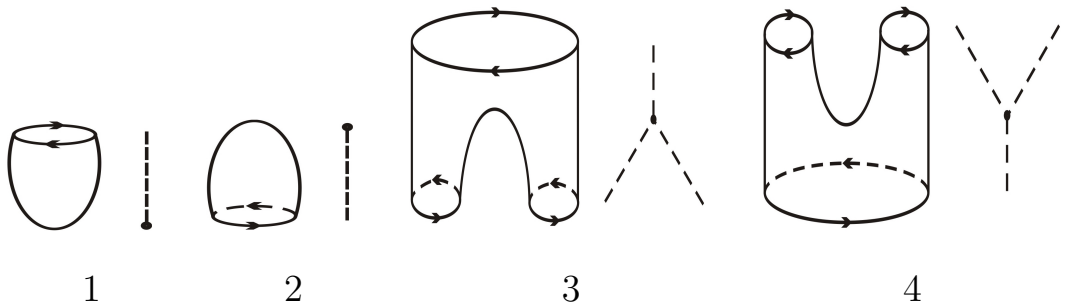


Рис. 3.1.3. \mathcal{O} -атоми функцій із $\Omega(M)$ внутрішньої критичної точки із порожнім перетином із межею

(iii) 2 атоми, якщо $p_0 \notin \partial M$ та атом містить частину межі поверхні: F і G , яким відповідають 3 \mathcal{O} -атоми: F_1, F_2 і $G = G_1 = G_2$ (рис. 3.1.4).

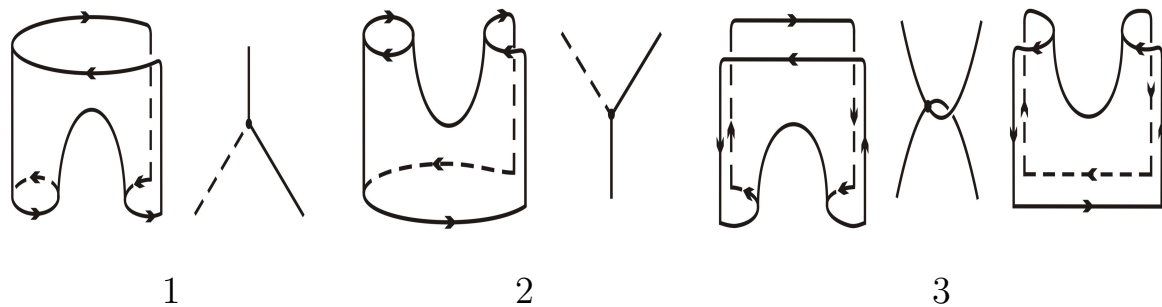


Рис. 3.1.4. \mathcal{O} -атоми функцій із $\Omega(M)$ внутрішньої критичної точки із непорожнім перетином із межею

Для атомів, які є підмножиною площини, їх орієнтація породжується орієнтацією площини (рис. 3.1.2: 1, 2, 5, 6, рис. 3.1.4: 3). У іншому випадку (рис. 3.1.2: 3, 4, рис. 3.1.3: 1, 2, 3, 4, рис. 3.1.4: 1, 2) зафіксуємо орієнтацію наступним чином: проти годинникової стрілки на нижніх колах (частинах кіл) та за годинниковою стрілкою на верхніх колах (частинах кіл). Також на рис. 3.1.2–3.1.4 зображені осначені КР-графи, поставлені у відповідність кожному з \mathcal{O} -атомів.

Теорема 3.1.6. *Кожен \mathcal{O} -атом функції класу $\Omega(M)$ збігається із одним із \mathcal{O} -атомів $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ або G .*

Доведення. Нехай $f \in \Omega(M)$, P — простий \mathcal{O} -атом функції f , тобто P — окіл критичного рівня деякої (єдиної) критичної точки p_0 функції f , розглянутий з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності. Тоді для точки p_0 виконується один із наступних випадків: (1) $p_0 \in \partial M$; (2) $p_0 \notin \partial M$ і $P \cap \partial M = \emptyset$; (3) $p_0 \notin \partial M$ і $P \cap \partial M \neq \emptyset$.

У першому випадку з теореми 2.2.3 випливає, що P співпадає з атомом A, B або C , кожному з яких відповідає 2 \mathcal{O} -атоми. Якщо ж $p_0 \notin \partial M$ і $P \cap \partial M = \emptyset$ (випадок (2)), то отримаємо атоми D, E і відповідно \mathcal{O} -атоми D_1, D_2 та E_1, E_2 [11].

У випадку (3) прості атоми P можуть бути отримані з атомів D і E вирізанням з них частини поверхні, що не містить p_0 . Якщо з атома D вирізати таку частину поверхні, то отримаємо дві критичні точки (одну внутрішню, яка буде локальним мінімумом (максимумом) для D_1 (D_2), а друга критична точка буде локальним мінімумом (максимумом) функції $f_{\partial M}$ для \mathcal{O} -атома D_1 (D_2)), що є неможливим, оскільки ми розглядаємо прості атоми. Отже, простий атом P може бути отриманим з атома E . При цьому ми не можемо отримати нову критичну точку, а отже, повинні вирізати одну або декілька полосок, причому так, щоб функція f була зростаючою на двох сторонах полоски, а дві інші сторони лежали на лініях рівня функція. Допускається таке вирізання однієї або двох полосок, бо у випадку трьох і більше отримана поверхня буде незв'язною і, як наслідок, P не буде простим атомом. Якщо з \mathcal{O} -атомів E_1, E_2 вирізати одну полоску, то отримаємо \mathcal{O} -атоми F_1 і F_2 відповідно, а якщо вирізати дві полоски, то — \mathcal{O} -атом $G = G_1 = G_2$. \square

Зауважимо, що твердження теореми 3.1.6 випливає з теореми 1 [25] з урахуванням теореми 3.0.1. Наведене доведення теореми 3.1.6 розглядається як додаткове.

З рис. 3.1.2 — 3.1.4 видно, що у графа Γ_f можливими є вершини валентності 1 (відповідають точкам максимуму і мінімуму), 2 (сідлові точки на межі поверхні), 3 (сідлові критичні точки як внутрішні, так і на межі поверхні (для Y -вершин)) та 4 (X -вершини, внутрішні сідлові точки).

Означення 3.1.7. Оснащені графи Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g функцій $f, g \in \Omega(M)$ називатимемо *еквівалентними* за ізоморфізмом $\varphi : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$ (позн. $\Gamma_f \sim \Gamma_g$ або $\Gamma_f \sim_{\varphi} \Gamma_g$), якщо φ задовольняє умови:

- (1) зберігає розбиття ребер;
- (2) зберігає циклічні порядки суміжних ребер для кожної X - і Y -вершини;

(3) зберігає орієнтацію ребер.

Зауважимо, що так побудоване відношення \sim є відношенням еквівалентності, бо виконується наступне: 1) рефлексивність: шуканий ізоморфізм $\varphi = id$ є тотожним відображенням; 2) симетричність: якщо $\Gamma_f \sim \Gamma_g$ за ізоморфізмом φ , то $\Gamma_g \sim \Gamma_f$ за ізоморфізмом φ^{-1} ; 3) транзитивність: нехай $\Gamma_f \sim \Gamma_g$ за ізоморфізмом φ_1 , $\Gamma_g \sim \Gamma_h$ за ізоморфізмом φ_2 , тоді $\Gamma_f \sim \Gamma_h$ за ізоморфізмом $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

3.2 Оснащені графи Кронрода-Ріба простих функцій на орієнтованих поверхнях з межею

Нехай $f \in \Omega(M)$ — функція з n критичними точками p_1, p_2, \dots, p_n та відповідно критичними значеннями $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, $M_t = \{p \in M | f(p) \leq t\}$, $L_t = \{p \in M | f(p) = t\}$. Оскільки M є орієнтованою зв'язною поверхнею, то її топологічний тип задається родом g та числом компонент межі ∂ (див. [23]). При зміні параметра t потрібно слідкувати за зміною цих інваріантів поверхні M_t , а також за числом її компонент зв'язності. Зауважимо також, що для незв'язної поверхні рід визначається як сума родів всіх компонент зв'язності.

Розглянемо як змінюватиметься топологічний тип поверхні M_t в залежності від приклеювання до M_t відповідного \mathcal{O} -атома (тут Δg , $\Delta \partial$, Δc — зміна роду, числа компонент межі і числа компонент зв'язності поверхні M_t). Спершу зауважимо, що для $t < c_1$ виконується $M_t = \emptyset$, а для $t > c_n$ маємо $M_t = M$, тому надалі достатньо розглянути зміну поверхні M_t для проміжних значень $c_1 \leq t \leq c_n$ функції. Якщо f не має критичних значень на відрізку $[t_1, t_2]$, то поверхні M_{t_1} і M_{t_2} є дифеоморфними (див. [61]), тобто при проходженні регулярного рівня t топологічний тип поверхні M_t не зміниться.

Далі розглянемо як відбуватиметься перебудова поверхні у випадку критичних рівнів функції. Якщо $t_i = c_i$ критичне значення, яке відповідає точці p_i

локального мінімуму або максимуму, то для деякого достатньо малого $\varepsilon_i > 0$ поверхня $M_{t_i+\varepsilon_i}$ є диз'юнктним об'єднанням $M_{t_i-\varepsilon_i} \amalg D_1$ [4] або $M_{t_i-\varepsilon_i} \amalg A_1$ для внутрішніх критичних точок та критичних точок на межі відповідно. Причому у випадку \mathcal{O} -атома A_1 у поверхні M_t зміниться, а саме збільшиться на 1, число компонент межі ($\Delta\partial = +1$) та число компонент зв'язності ($\Delta c = +1$), а для \mathcal{O} -атома $D_1 - \Delta g = 0, \Delta\partial = +1, \Delta c = +1$. Зауважимо, що приклеїка тільки цих \mathcal{O} -атомів збільшує число компонент зв'язності Δc . Якщо ж p_i — точка локального максимум функції f , то до поверхні $M_{t_i-\varepsilon_i}$ приклеюється або півдиск D_+^2 ($p_i \in \partial M$) або ж диск D^2 ($p_i \notin \partial M$), які гомеоморфні \mathcal{O} -атомам A_2 та D_2 (див. [4]). Приклеїка \mathcal{O} -атома D_2 зменшує число компонент межі поверхні на 1 ($\Delta\partial = -1$), а інші інваріанти, так як і \mathcal{O} -атом A_2 , не змінює.

У випадку сідлової критичної точки p_i до поверхні $M_{t_i-\varepsilon_i}$ приклеюється смужка (квадрат) $[0, 1] \times [0, 1]$ так, що дві протилежні сторони приклеюються до межі лінії рівня $L_{t_i-\varepsilon_i}$, а дві інші сторони додаються до межі поверхні. В результаті отримаємо один з атомів: E, B, C, F або G . Приклеїка f -атомів B_2 і C_2 не змінює топологічний тип поверхні (рис. 3.1.3: 4, 6), а \mathcal{O} -атомів B_1, E_2 і F_2 збільшує число компонент межі $\Delta\partial = +1$, оскільки додається компонента межі лінії рівня $M_{t_i+\varepsilon_i}$ (див. рис. 3.1.2: 3, рис. 3.1.3: 4, рис. 3.1.4: 2). Для решти \mathcal{O} -атомів (C_1, E_1, F_1 і G) потрібно додатково розглядати випадки (позн. $P(i : j)$), коли атом приклеюється до i компонент зв'язності та j компонент межі лінії рівня L_{t_i} функції f . Зауважимо, що $P(2 : 1)$ є в принципі неможливим. З рис. 3.1.3: 5 та рис. 3.1.4: 3 видно, що приклеїка \mathcal{O} -атому C_1 або G до однієї компоненти межі лінії L_{t_i} ($P(1 : 1)$) збільшує тільки число компонент межі, тобто $\Delta\partial = +1$. А от для \mathcal{O} -атомів E_1 та F_1 $P(1 : 1)$ є неможливим (див. рис. 3.1.3: 3, рис. 3.1.4: 1). У випадку $P(1 : 2)$ f -атом C_1 (рис. 3.1.2: 1), як і \mathcal{O} -атоми E_1 та G (рис. 3.1.3: 3, рис. 3.1.4: 3), збільшує рід поверхні $\Delta g = +1$, зменшуючи при цьому число компонент межі $\Delta\partial = -1$. Якщо ж при проходженні критичного рівня t_i до різних компонент зв'язності поверхні $M_{t_i-\varepsilon_i}$ приклеюється стрічка ($P(2 : 2)$),

то в результаті отримаємо один з \mathcal{O} -атомів C_1 , E_1 , F_1 або G , що зменшує на 1 як число компонент межі, так і число компонент зв'язності поверхні (див. рис. 3.1.2: 5; рис. 3.1.3: 3; рис. 3.1.4: 1; рис. 3.1.4: 3).

Підсумуємо вищеописані викладки у таблицю 3.2.1, де $P1$ — випадок $P(1 : 1)$, $P2$ — $P(1 : 2)$, $P3$ — $P(2 : 2)$.

	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_1	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_1	E_2	F_1	F_1	F_2	G	G	G
P	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2	3	1	2	3	1	1	2	3
Δg	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0
$\Delta \partial$	+1	0	+1	0	+1	-1	-1	0	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
Δc	+1	0	0	0	0	0	-1	0	+1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	-1

Таблиця 3.2.1

Зауваження 3.2.1. Нехай функція $f \in \Omega(M)$ має n критичних точок з відповідними критичними значеннями t_1, \dots, t_n . Тоді топологічні інваріанти поверхні M можуть бути обраховані з формул:

$$\begin{aligned}
 g &= \Delta g_1 + \dots + \Delta g_n, \\
 \partial &= \Delta \partial_1 + \dots + \Delta \partial_n, \\
 (c &= \Delta c_1 + \dots + \Delta c_n = 1)
 \end{aligned}$$

де Δg_i , $\Delta \partial_i$, Δc_i — зміна роду, числа компонент межі і числа компонент зв'язності поверхні M_{t_i} відповідно при проходженні критичного рівня t_i .

Також зауважимо, що локально означення \mathcal{O} -еквівалентності перепишеться у вигляді: функції $f \in \Omega(M)$ і $g \in \Omega(N)$, задані на гладких компактних орієнтованих поверхнях M і N відповідно називаються \mathcal{O} -еквівалентними в околі своїх критичних рівнів $f^{-1}(c_1)$, $g^{-1}(c_2)$, якщо існують $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ і гомеоморфізм $\lambda : f^{-1}(c_1 - \varepsilon_1, c_1 + \varepsilon_1) \rightarrow g^{-1}(c_2 - \varepsilon_2, c_2 + \varepsilon_2)$, який переводить лінії рівня функції f у лінії рівня функції g , зберігаючи при цьому напрямки росту функцій та орієнтацію поверхні.

Теорема 3.2.2. *Нехай M, N — гладкі компактні орієнтовані поверхні, $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Тоді f і g є \mathcal{O} -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні оснащені KR -графи Γ_f і Γ_g еквівалентні.*

Доведення. Необхідність. Випливає з побудови графа Кронрода-Ріба для функцій класу $\Omega(M)$.

Достатність. Припустимо, що $\Gamma_f \sim_\varphi \Gamma_g$ за ізоморфізмом $\varphi : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$. Для довільної вершини v_i графа Γ_f та її образу $\varphi(v_i)$ графа Γ_g , не втрачаючи загальності, вважатимемо, що v_i та $\varphi(v_i)$ відповідає одне критичне значення функцій $f = g = i$.

З ізоморфізму оснащених графів Ріба випливає, що ізоморфними є і достатньо малі околиці відповідних вершин, а отже відповідні атоми є \mathcal{O} -еквівалентними. Це означає, що існує гомеоморфізм між частинами поверхонь, які є атомами. Тому для побудови шуканого гомеоморфізму між поверхнями M та N достатньо продовжити гомеоморфізми атомів до гомеоморфізму всієї поверхні M .

Для спрощення викладок, введемо наступні позначення: $M_{v_i} = \{p \in M | f(p) = i\}$, $N_{\varphi(v_i)} = \{p \in N | g(p) = i\}$, $M_{[v_i - \varepsilon_i, v_i + \varepsilon_i]} = \{p \in M | i - \varepsilon_i \leq f(p) \leq i + \varepsilon_i\}$ та $N_{[\varphi(v_i) - \varepsilon_i, \varphi(v_i) + \varepsilon_i]} = \{p \in N | i - \varepsilon_i \leq g(p) \leq i + \varepsilon_i\}$.

Розглянемо частини поверхонь

$$M_{[v_i - \varepsilon_i, v_i + \varepsilon_i]}, N_{[\varphi(v_i) - \varepsilon_i, \varphi(v_i) + \varepsilon_i]} \text{ для } \varepsilon_i = \min\{\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}\} > 0$$

де $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ описані в означенні \mathcal{O} -еквівалентності. Тоді $M_{[v_i - \varepsilon_i, v_i + \varepsilon_i]}, N_{[\varphi(v_i) - \varepsilon_i, \varphi(v_i) + \varepsilon_i]}$ будуть одним із f -атомів A, B, C, D, E, F або G , оскільки оснащений граф Ріба кожного з атомів однозначно задається валентністю вершини та типом інцидентних їй ребер (див. рис. 3.1.2 — 3.1.4), з чого випливає існування гомеоморфізму $\Phi^{(i)} : M_{[v_i - \varepsilon_i, v_i + \varepsilon_i]} \rightarrow N_{[\varphi(v_i) - \varepsilon_i, \varphi(v_i) + \varepsilon_i]}$ (див. рис. 3.2.1).

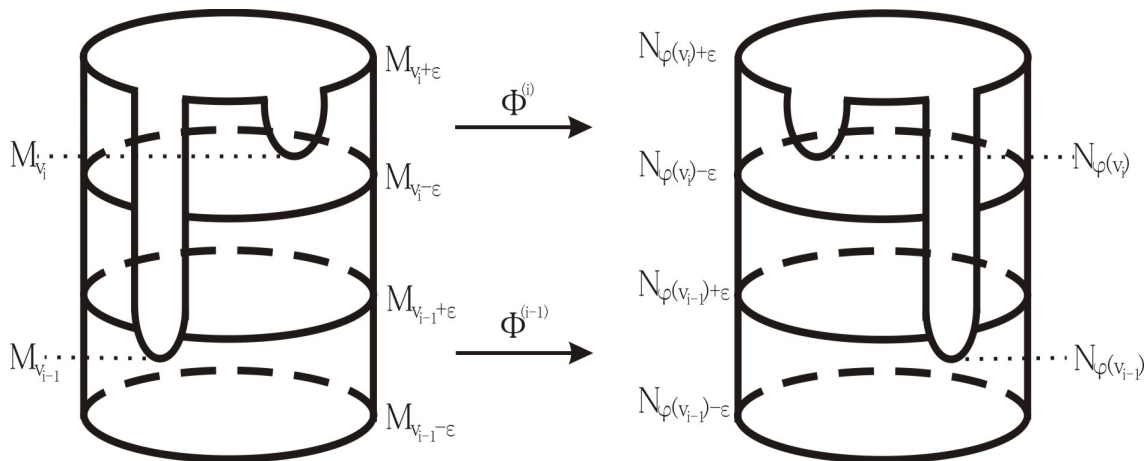


Рис. 3.2.1

Таким чином, ми побудували гомеоморфізми

$$\Phi^{(i)} : M_{[v_i-\epsilon, v_i+\epsilon]} \rightarrow N_{[\varphi(v_i)-\epsilon, \varphi(v_i)+\epsilon]}$$

в околах критичних рівнів i функцій f і g , де $\epsilon = \min\{\epsilon_i | i\}$.

Далі для кожної пари суміжних вершин v_{i-1}, v_i побудуємо гомеоморфізм $\Psi^{(i-1, i)} : M_{[v_{i-1}+\epsilon, v_i-\epsilon]} \rightarrow N_{[\varphi(v_{i-1})+\epsilon, \varphi(v_i)-\epsilon]}$ такий, що

$$\Psi^{(i-1, i)}|_{M_{v_{i-1}+\epsilon}} \equiv \Phi^{(i-1)}|_{M_{v_{i-1}+\epsilon}}, \quad \Psi^{(i-1, i)}|_{M_{v_i-\epsilon}} \equiv \Phi^{(i)}|_{M_{v_i-\epsilon}}.$$

Оскільки вершини v_{i-1}, v_i — суміжні, то їх, так як і вершини $\varphi(v_{i-1})$ та $\varphi(v_i)$, які також є суміжними, з'єднає або 1-ребро, або 0-ребро. Якщо v_{i-1} та v_i з'єднані 1-ребром, то існують гомеоморфізми

$$\phi_M^{(i-1, i)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M_{[v_{i-1}+\epsilon, v_i-\epsilon]}, \quad \phi_N^{(i-1, i)} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N_{[\varphi(v_{i-1})+\epsilon, \varphi(v_i)-\epsilon]}$$

такі, що виконується наступне

$$\phi_M^{(i-1, i)} : [0, 1] \times \{0\} \mapsto M_{v_{i-1}+\epsilon}, \quad \phi_M^{(i-1, i)} : [0, 1] \times \{1\} \mapsto M_{v_i-\epsilon}$$

$$\phi_N^{(i-1, i)} : [0, 1] \times \{0\} \mapsto N_{\varphi(v_{i-1})+\epsilon}, \quad \phi_N^{(i-1, i)} : [0, 1] \times \{1\} \mapsto N_{\varphi(v_i)-\epsilon}.$$

Тоді, оскільки всі гомеоморфізми відрізка в себе, які зберігають орієнтацію, є ізотопними, то між гомеоморфізмами

$$\left(\phi_N^{(i-1, i)}\right)^{-1} \circ \Phi^{(i-1)} \circ \phi_M^{(i-1, i)}|_{[0, 1] \times \{0\}} : [0, 1] \times \{0\} \rightarrow [0, 1] \times \{0\}$$

$$\left(\phi_N^{(i-1,i)}\right)^{-1} \circ \Phi^{(i)} \circ \phi_M^{(i-1,i)}|_{[0,1] \times \{1\}} : [0, 1] \times \{1\} \rightarrow [0, 1] \times \{1\}$$

існує ізоотопія $F_t^{(i-1,i)} : [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$. Тоді $F_0^{(i-1,i)} \equiv \left(\phi_N^{(i-1,i)}\right)^{-1} \circ \Phi^{(i-1)} \circ \phi_M^{(i-1,i)}|_{[0,1] \times \{0\}}$ і $F_1^{(i-1,i)} \equiv \left(\phi_N^{(i-1,i)}\right)^{-1} \circ \Phi^{(i)} \circ \phi_M^{(i-1,i)}|_{[0,1] \times \{1\}}$, звідки випливає існування ізоотопії $G_t^{(i-1,i)} = \phi_N^{(i-1,i)} \circ F_t^{(i-1,i)} \circ \left(\phi_M^{(i-1,i)}\right)^{-1}$ між відображеннями

$$\begin{aligned} \Phi^{(i-1)}|_{M_{v_{i-1}+\varepsilon}} &= G_0^{(i-1,i)} = \phi_N^{(i-1,i)} \circ F_0^{(i-1,i)} \circ \left(\phi_M^{(i-1,i)}\right)^{-1}|_{M_{v_{i-1}+\varepsilon}} \\ \text{і } \Phi^{(i)}|_{M_{v_i-\varepsilon}} &= G_1^{(i-1,i)} \phi_N^{(i-1,i)} \circ F_1^{(i-1,i)} \circ \left(\phi_M^{(i-1,i)}\right)^{-1}|_{M_{v_i-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Аналогічно будується ізоотопія $G_t^{(i-1,i)}$ у випадку, коли вершини v_i та v_{i-1} з'єднані 0-ребром. Тоді ізоотопія $G_t^{(i-1,i)}$ буде задавати шуканий гомеоморфізм $\Psi^{(i-1,i)}$.

Так, побудовано гомеоморфізм

$$\lambda : M \rightarrow N (\forall i : \lambda|_{M_{[v_i-\varepsilon, v_i+\varepsilon]}} \equiv \Phi^{(i)}, \lambda|_{M_{[v_{i-1}+\varepsilon, v_i-\varepsilon]}} \equiv \Psi^{(i-1,i)})$$

який переводить лінії рівня функції f у лінії рівня функції g , зберігаючи при цьому напрям росту функцій, що доводить твердження теореми. \square

Твердження теореми 3.2.2 випливає з теореми 4 [22] з урахуванням теореми 3.0.1. Наведене доведення теореми 3.2.2 розглядається як додаткове.

Занумеруємо вершини оснащеного графа Кронрода-Ріба функцій f, g класу $\Omega(M)$ згідно з порядковим (за зростанням значення функцій) номером критичної точки. Тоді еквівалентні графи Γ_f і Γ_g називатимемо *порядково еквівалентними*, якщо ізоморфізм φ додатково зберігає нумерацію вершин графів. Зауважимо, що у випадку порядково еквівалентних графів умова (3) з означення еквівалентних графів є надлишковою.

Наслідок 3.2.3. *Нехай M, N — гладкі компактні поверхні (з межею), $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Тоді f і g топологічно \mathcal{O} -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх оснащені графи Ріба Γ_f і Γ_g порядково еквівалентні.*

3.3 Приклади підрахунку КР-графів для поверхонь

Оскільки еквівалентність оснащених графів Кронрода-Ріба функцій класу $\Omega(M)$ є відношенням еквівалентності, то за теоремою 3.2.2 \mathcal{O} -еквівалентність також буде відношенням еквівалентності. Тоді $\Omega(M)$ розіб'ється на класи еквівалентності, які для $f \in \Omega(M)$ будемо позначати через $[f]$.

Нехай i, j — число вхідних та вихідних ребер деякого орієнтованого графа γ , тоді будемо розглядати γ разом з парою чисел (i, j) , яку називатимемо *індексом вершини* графа. Через $\Gamma_n^{\leq 4}$ позначимо множину всіх зв'язних орієнтованих графів γ з n вершинами, якщо граф містить тільки вершини індексів $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ та принаймні по одній вершині індексів $(0, 1)$ та $(1, 0)$. Без уточнення числа вершин графа отримаємо множину $\Gamma^{\leq 4}$.

Розглянемо дії над графами з $\Gamma^{\leq 4}$: (a1) додавання вершини та інцидентних їй ребер (рис. 3.3.1: 1), (a2) розбиття одного з ребер на два внутрішньою точкою — вершиною (рис. 3.3.1: 2), (a3) додавання ребра без додаткових вершин (рис. 3.3.1: 3), якщо в результаті отримаємо граф з $\Gamma^{\leq 4}$.

Дії, обернені до (a1), (a2), (a3) будемо позначати через $(a1)^{-1}$, $(a2)^{-1}$ і $(a3)^{-1}$ відповідно.

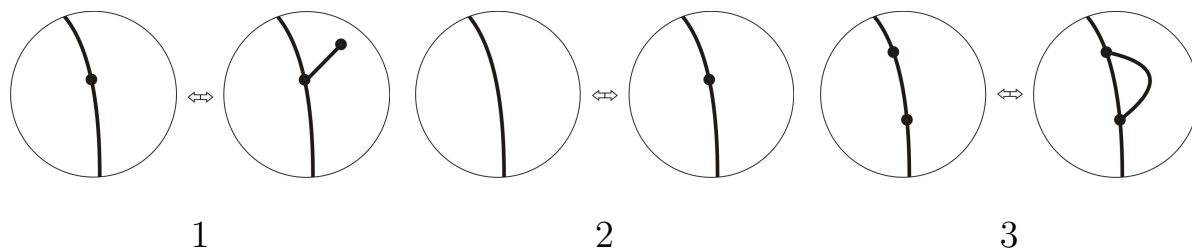


Рис. 3.3.1. Дії над оснащеними КР-графами

Означення 3.3.1. *Операцією збільшення (зменшення) числа вершин графа $\gamma \in \Gamma_n^{\leq 4}$ називатимемо одну з дій (a1), (a2), (a3) ($(a1)^{-1}$, $(a2)^{-1}$, $(a3)^{-1}$) над графом γ або їх скінченну послідовність.*

Лема 3.3.2. *Кожен граф $\gamma \in \Gamma_n^{\leq 4}$ можна отримати з графа з $\tilde{\gamma} \in \Gamma_2^{\leq 4}$ (рис. 3.3.2) за допомогою операції збільшення числа вершин графа $\tilde{\gamma}$.*

Рис. 3.3.2. Оснащений KR-граф $\Gamma_2^{\leq 4}$

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що, використовуючи операцію зменшення числа вершин, граф $\gamma \in \Gamma_n^{\leq 4}$ можна звести до графу, зображеного на рис. 3.3.2.

Граф γ або є деревом, або ж містить один або декілька простих циклів (без повтору вершин). Якщо γ містить простий цикл, то за допомогою послідовності з деякої кількості дій $(a3)^{-1}$ його можна звести до зв'язного графа без циклів. Таким чином, надалі можна розглядати граф γ як такий, що є плоским (оскільки дерево є планарним графом) з орієнтацією ребер, яка утворює гострий кут з додатнім напрямком осі ординат (після деякого вкладення γ в площину). Зафіксуємо на дереві вершину v_0 індексу $(0, 1)$ та введемо відношення часткового порядку \ll на множині вершин V графа γ наступним чином: $v_i, v_j \in V : v_i \ll v_j \Leftrightarrow l(v_i) \leq l(v_j) = j$, де $l(v_s)$ — неорієнтована довжина (найменша кількість ребер всіх можливих шляхів, які опускають орієнтацію) з вершини v_s у фіксовану вершину v_0 . Тоді множина всіх вершин V може бути представлена як диз'юнктне об'єднання класів $V = V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^l$ для деякого натурального l , де $V^j = \{v_1^j, v_2^j, \dots, v_{i_j}^j\} \subset V$, $j = \overline{1, l}$ такі, що $l(v_0, v_p^j) = l(v_0, v_q^j) = j$, $p, q \in \{1, 2, \dots, i_j\}$, $j = \overline{1, l}$. Зауважимо, що $\forall j = \overline{1, l} : V^j \neq \emptyset$, а також V^l складається тільки з вершин індексу $(1, 0)$, причому $|V^l| \geq 1$. Нехай $v_1^l \in V^l$, а $v_1^{l-1} \in V^{l-1}$ — суміжна їй вершина (за необхідності після перенумерації вершин у класі V^{l-1}). Тоді розглянемо випадки індексу вершини v_1^{l-1} та операції зменшення вершин графа в залежності від них:

- 1) $(0, 1)$: оскільки граф γ є зв'язним, то він в точності співпадає з графом зображеним на рис. 3.3.2;
- 2) $(1, 1)$: дією $(a2)^{-1}$ скоротимо вершину v_1^{l-1} , після чого $v_1^l \in V^{l-1}$ (що рівно-

сильне скороченню вершини v_1^l та відповідного ребра);

- 3) (1, 2): у цьому випадку існує $v_2^l \in V^l$, тоді двічі застосувавши операцію $(a1)^{-1}$ скорочуємо вершини v_1^l та v_2^l ;
- 4) (2, 1): тоді існує суміжна з v_1^{l-1} вершина $v_2^l \in V^l$, тому, застосувавши дію $(a1)^{-1}$ до вершини v_2^l , даний випадок можна звести до випадку (1, 1);
- 5) (2, 2): у цьому випадку $|V^l| \geq 3$, тобто існують ще дві вершини v_2^l, v_3^l , які будуть суміжними з v_1^{l-1} і цей випадок зводиться до випадку (1, 2) або (2, 1) (дія $(a1)^{-1}$ для v_2^l або v_3^l).

Тоді граф γ можна звести до такого, для якого $V^l = \emptyset$, якщо індекс v_1^{l-1} дорівнює (1, 1) та $V^l = \{v_1^l\}$ (тобто $|V^l| = 1$) в іншому випадку. З таких же міркувань, можна вважати, що класи V^1, V^2, \dots, V^{l-1} не мають вершин валентності 1, тобто весь отриманий граф складатиметься з шляху між v_0 та v_1^l . Знову застосувавши операцію обернену до (a1) отриманий граф можна звести до графа, зображеного на рис. 3.3.2. □

Теорема 3.3.3. *Для кожної функції $f \in \Omega(M)$ із не більш, ніж 5-ма критичними точками, оснащений граф Кронрода-Ріба її класу еквівалентності $[f]$ має один із виглядів, зображених на рис. 3.3.3.*

Доведення. Кожна функція $f \in \Omega(M)$, крім $f = \text{const}$, на компактній множині набуває свого найбільшого і найменшого значення і відповідні точки є точками мінімуму і максимуму. Отже кожен оснащений КР-граф має принаймні дві вершини. Оскільки є всього дві можливості задання ребра, то існує рівно два оснащених графа Кронрода-Ріба з двома вершинами, які зображені на рис. 3.3.3 (перші два графи). Оснащені КР-графи із трьома вершинами мають один з виглядів, зображених на рис. 3.3.3 (3-ій і 4-ий графи). Це впливає з того, що ребра інцидентні вершинам валентності 2 повинні бути різного типу.

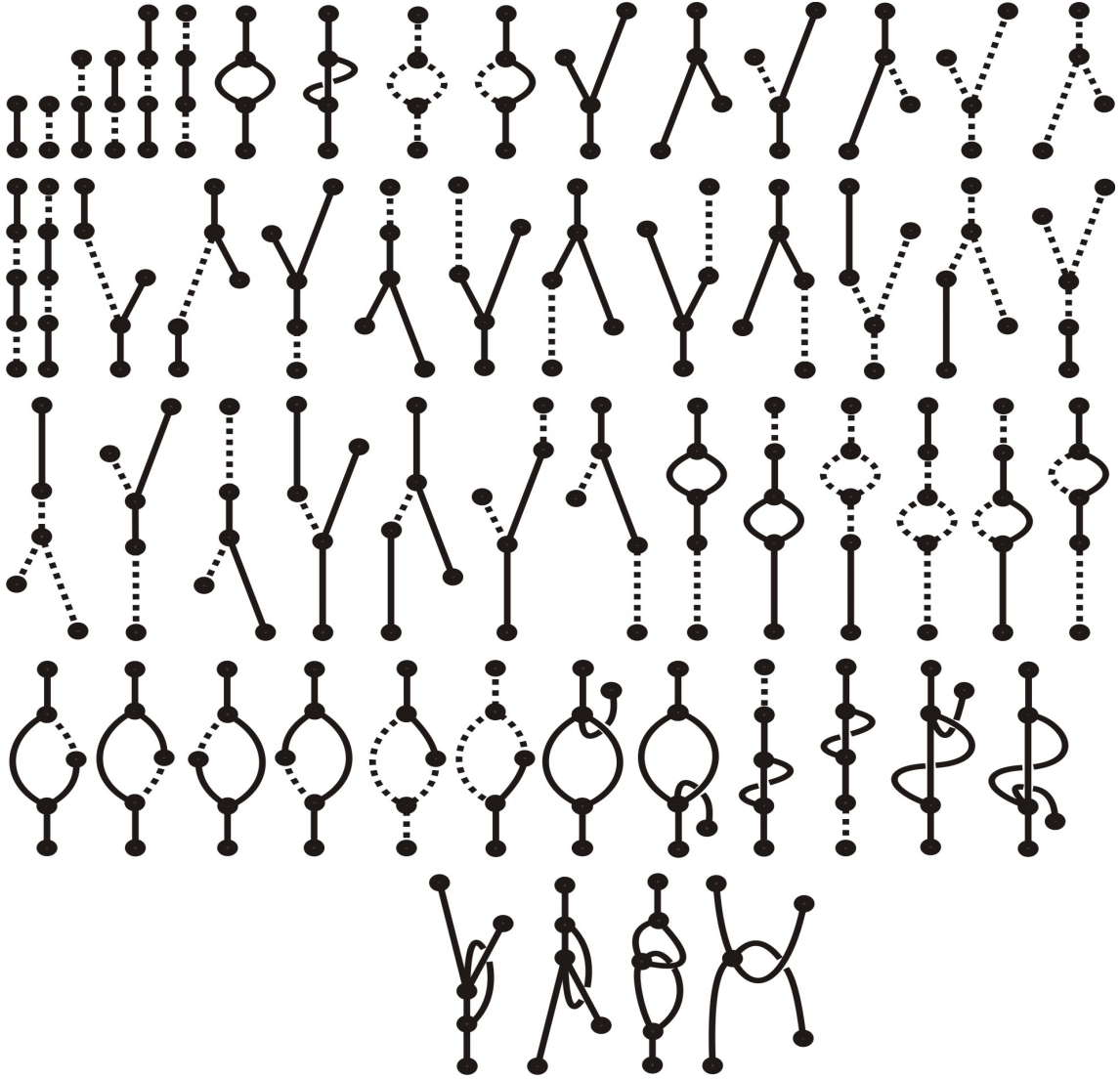


Рис. 3.3.3. Оснащені KR-графи із $\Gamma_2^{\leq 4}$, $\Gamma_3^{\leq 4}$, $\Gamma_4^{\leq 4}$ та $\Gamma_5^{\leq 4}$

Далі, кожен граф з вершинами як на рис. 3.1.2 — 3.1.4 з n вершинами може бути отриманий з графа з меншою кількістю вершин та ребер в результаті операції збільшення числа вершин графа. Так, спершу розглянемо графи функцій з $[f]$ з трьома критичними точками без заданого розбиття ребер. З отриманими графами розглянемо всі можливі вищеписані операції, в результаті яких отримуються графи з 4-ма та 5-ма вершинами валентності не більше чотирьох на яких задамо розбиття ребер так, щоб досить малий окіл кожної з вершин мав один з виглядів оснащених KR-графів, зображених на рис. 3.1.2 — 3.1.4. Таким чином, для функцій з $[f]$ отримаємо один з графів зображених на рис. 3.3.3, що і треба було довести. □

Наслідок 3.3.4. *Існує 58 топологічно \mathcal{O} -нееквівалентних m -функцій, графи Кронрода-Ріба яких зображені на рис. 3.3.3.*

Зауваження 3.3.5. У роботі [25] отримано орієнтовану пошарово оснащену еквівалентність m -функцій з мінімальним числом критичних точок, яких не більше 6-ти. Серед наведених на рис. 3.3.3 оснащених KR-графів мінімальним m -функціям відповідають перший, другий, сьомий, восьмий, дев'ятий і десятий графи.

3.4 Топологічний тип поверхні оснащеного графа Кронрода-Ріба

Нехай $f \in \Omega(M)$, де M — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею.

Означення 3.4.1. Вершини валентності 2 і 3 графа Γ_f функції f , яким інцидентні як \mathbf{I} -, так і \mathcal{O} -ребра, називатимемо \mathbf{T} - і \mathbf{D} -вершинами відповідно.

Як зазначалося вище, топологічний тип орієнтованої поверхні з межею задається родом g та числом компонент межі ∂ .

Для визначення числа m введемо поняття граничного циклу. Розглянемо довільне чорне ребро і довільний напрямок руху по ньому. Дійшовши до вершини за цим напрямком далі будемо рухатись по \mathbf{I} -ребру, що визначається орієнтацією (циклічним порядком) в \mathbf{Y} - та \mathbf{X} -вершинах, по іншому \mathbf{I} -ребру в \mathbf{T} -вершині або по самому собі в іншому напрямку в \mathbf{D} -вершині та у вершині валентності 1. Пройшовши по другому ребру в кінцевій вершині наступне ребро визначається за тим самим правилом. Продовжимо цей процес. Коли повернемося в початкове ребро з початковим напрямком руху отримаємо цикл, який назвемо *граничним*. З побудови випливає, що число різних граничних циклів дорівнює числу компонент межі ∂ .

Щоб визначити рід поверхні спершу розглянемо два спеціальні випадки. Позначимо через E_1 (E_0) — число 1-ребер (0-ребер), а через V_1 (V_0) — число вершин графа Γ_f , яким інцидентні тільки 1-ребра (0-ребра).

Твердження 3.4.2 *Якщо граф Γ_f функції $f \in \Omega(M)$ містить або тільки 0-ребра, або ж тільки 1-ребра, то рід поверхні визначається формулою (3.1) або (3.2) відповідно, де*

$$g_0 = E_0 - V_0 + 1, \quad (3.1)$$

$$g_1 = \frac{E_1 - V_1 + 2 - \partial}{2}. \quad (3.2)$$

Доведення. У випадку, коли граф Γ_f містить тільки 0-ребра, поверхня M не буде містити межі, тобто $\partial = 0$. Якщо Γ_f є деревом, рід поверхні дорівнює 0, а додавання ребра з вершинами у внутрішніх точках зв'язного графа збільшує рід на 1, з чого і випливає формула (3.1) для визначення роду поверхні M .

Якщо ж граф Γ_f містить тільки 1-ребра, то у випадку дерева поверхня є двовимірним диском. Приклеювання ребра до внутрішніх точок рівносильне приклеюванню стрічки. Якщо стрічка приклеюється до однієї компоненти межі, то збільшується на 1 число компонент межі, а рід залишається незмінним, а якщо до різних, то число компонент межі зменшується на 1, а рід збільшується на 1. Враховуючи це, отримаємо формулу (3.2). \square

Надалі під (0-) 1-підграфом оснащеного KR-графа Γ_f розумітимемо граф (можливо, незв'язний), утворений із Γ_f шляхом викидання (1-) 0-ребер та ізолюваних вершин, якщо такі утворилися.

Теорема 3.4.3. *Рід поверхні може бути визначений за формулою*

$$g = g_1 + g_0 + V_D + V_T - c_0 - c_1 + 1, \quad (3.3)$$

де g_1 (g_0) — сумарний рід (0-) 1-підграфа, рід кожної компоненти якого задається формулою (3.2) ((3.1)), (V_T) V_D — число (Т-) D-вершин, c_1 (c_0) — число компонент зв'язності (0-) 1-підграфа.

Доведення. Розріжемо граф у D-вершинах та T-вершинах. Об'єднання O-ребер разом з D-вершинами та T-вершинами утворює граф (такий що містить тільки O-ребра), для кожної компоненти якої рід знаходиться за формулою (3.1), а рід g_0 всього підграфа 2-го типу дорівнює сумі цих родів. Аналогічно визначається рід I-підграфа — g_1 . Граф G може бути отриманий з незв'язного об'єднання I- й O-підграфів шляхом приєднанням відповідних O-ребер до I-ребер у D-вершинах або T-вершинах. При кожному такому приєднанні відбувається або зменшення числа компонент зв'язності поверхні на 1 (рід незмінний) або збільшення роду на 1 (число компонент незмінне), з чого і випливає доведення твердження теореми. \square

Наслідок 3.4.4. *Для m -функцій мають місце формули (3.1), (3.2) і (3.3).*

Доведення. Наслідок випливає із рівностей (3.1), (3.2) і (3.3) з урахуванням теореми 3.0.1. \square

3.5 Висновки

В даному розділі розглянуто прості гладкі функції з невідродженими особливостями на гладкій компактній орієнтованій поверхні M з межею (функції класу $\Omega(M)$). Доведено топологічну еквівалентність цих функцій та m -функцій. Означено поняття оснащеного графа Кронрода-Ріба, в термінах якого отримано класифікацію функцій класу $\Omega(M)$ з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності та знайдено число функцій класу $\Omega(M)$ із не більш, ніж 5-ма критичними точками. Також отримано формулу для визначення топологічного типу поверхні за оснащеним KR-графом.

Результати, отримані в розділі 3, опубліковано у статті [4^a].

РОЗДІЛ 4

Деформації загального положення оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях з межею

4.1 Деформації загального положення

Нехай M — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею ∂M (можливо $\partial M = \emptyset$), $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція.

Нехай надалі $\Sigma(M)$ — одна із таких множин:

- (1) прості функції Морса на замкненій поверхні;
- (2) прості m -функції на компактній поверхні з межею;
- (3) прості mm -функції на компактній поверхні з межею.

Залежно від індексу критичної точки p_0 та її приналежності до межі поверхні ∂M можливими є 7 простих атомів та 13 простих (\mathcal{O} -) f -атомів (рис. 3.1.2, 3.1.3 і 3.1.4).

Для атомів, які є підмножиною площини, їх орієнтація породжується орієнтацією площини (рис. 3.1.2: 1, 2, 5, 6, рис. 3.1.4: 3). У іншому випадку (рис. 3.1.2: 3, 4, рис. 3.1.3: 1 — 4, рис. 3.1.4: 1, 2) зафіксуємо орієнтацію наступним чином: проти годинникової стрілки на нижніх колах (частинах кіл) та за годинниковою стрілкою на верхніх колах (частинах кіл).

Нехай $f, g \in \Sigma(M)$. Далі розгляду пошарово оснащеної еквівалентності функцій f і g , зафіксуємо на відповідних оснащених KR -графах Γ_f і Γ_g орієнтацію ребер від нижньої до верхньої вершини. Оскільки орієнтація ребер задається цим правилом однозначно на кожному графі, то на графах явно її зображати не будемо, але вважатимемо, що ця орієнтація ребер задана.

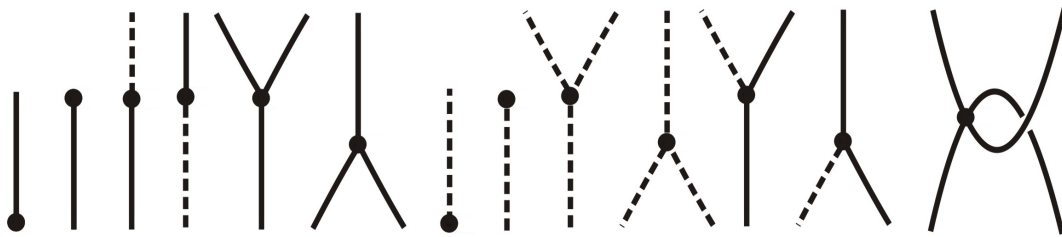


Рис. 4.1.1. Околи вершин оснащених KR-графів

Так, на рис. 4.1.1 зображені частини оснащених KR-графів, поставлені у відповідність кожному з \mathcal{O} -атомів, які задають всі можливі варіанти будови оснащеного KR-графа в околі його вершин.

Означення 4.1.1. *Деформацією* (гладкою гомотопією) гладкої функції $f \in \Sigma(M)$ у гладку функцію $g \in \Sigma(M)$ називатимемо однопараметричну сім'ю відображень $F_t(x) := F(x, t)$, $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таку, що:

- (a) $F_0(x) = f(x)$, $x \in M$;
- (b) $F_1(x) = g(x)$, $x \in M$;
- (c) $F \in C^\infty(M \times [0, 1])$.

Означення 4.1.2. *Деформацією загального положення* називається деформація F_t , для якої виконується такі умови:

- (1) існує скінченна підмножина $J \subset (0, 1)$, така, що $F_t \in \Sigma(M)$, $t \in [0, 1] \setminus J$ та $F_t \notin \Sigma(M)$, $t \in J$;
- (2) для кожного $t \in J$ виконується одна з таких умов:
 - (2.1) функція F_t має критичний рівень, на якому розташовані 2 невідроджені критичні точки (які можуть бути внутрішніми або ж точками на межі), тобто функція F_t є функцією Морса, m - або nm -функцією відповідно;
 - (2.2) існує точка $p \in M$, така, що функція F_t — проста гладка функція, всі критичні точки якої є невідродженими, й така заміна координат $(x, y$ і окремо $t)$ в околі точки p , що:

(2.2.1) $F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y^2$ у разі, якщо $p \in \text{Int}(M)$;

(2.2.2) $F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y$ або $F(x, y, t) = -x^2 + (y - t)^2, y \geq 0$ у разі, якщо $p \in \partial M$ і $\Sigma(M)$ — клас m -функцій;

(2.2.3) $F_t(x, y) = x^3 \pm tx \pm y^2, y \geq 0$ у разі, якщо $p \in \partial M$ і $\Sigma(M)$ — клас mm -функцій.

У означенні 4.1.2 пункту (2.2.1) та першим частинам пунктів (2.2.2), (2.2.3) відповідають скорочення або введення пар критичних точок сусідніх індексів, а 2-ій частині пункту (2.2.2) — випадок коли критична точка рухається до межі поверхні.

Нагадаємо поняття корозмірності функції на замкнених поверхнях [63]. Нехай M — компактна поверхня, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $CP(f) \in M$, $CV(f) \in \mathbb{R}$ — множина критичних точок та критичних значень функції f відповідно. В околі (x, y) кожної критичної точки $p \in CP(f)$ розглянемо ідеал Якобі $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$.

Корозмірністю функції f називається величина (натуральне число або символ ∞):

$$\text{codim}(f) = \sum_{p \in CP(f)} c(f, p) - \sum_{c \in CV(f)} d(f, c),$$

де $c(f, p) = \dim_{\mathbb{R}} C^\infty(M, \mathbb{R})/J_f$, $d(f, p, c) = \min\{k | (f - c)^k \in J_f\}$,

$c = f(p) \in CV(f)$, $d(f, c) = \sup\{d(f, p, c) | p \in L_c\}$, L_c — рівень функції f .

Використовуючи поняття корозмірності функції, деформації загального положення мають таку властивість: для всіх, крім скінченного числа значень параметра t функція F_t є функцією корозмірності 0, а для скінченного числа параметра t — функцією корозмірності 1.

Нехай Γ_f — оснащений КР-граф функції $f \in \Sigma(M)$. Розглянемо відображення $\varphi : V(\Gamma_f) \rightarrow 2^{E(\Gamma_f)}$, яке кожній вершині v графа Γ_f ставить у відповідність множину всіх інцидентних їй ребер $\{p_j | j = \overline{1, i}\}$ (для деякого i): І-ребер — e_j й О-ребер — l_j , тобто $p_j = e_j$ або ж $p_j = l_j$ (за необхідності у позначенні

ребра p_i можна уточнювати інцидентну йому вершину v так: p_j^v). На множині вершин і ребер графа Γ_f розглянемо два відношення часткового порядку \prec і \vdash , визначені таким чином: (1) $v_1 \prec v_2$, якщо вершина v_1 відповідає меншому значенню функції f ніж v_2 ; (2) $p_1 \prec p_2$, якщо всі точки ребра p_1 відповідають меншим значенням функції f ніж всі точки p_2 ; (3) нехай ребра p_1 і p_2 інцидентні одній Y -вершині v , такі, що їх неможливо порівняти за допомогою відношення часткового порядку \prec . У вершині v оснащений граф Кронрода-Ріба визначає циклічний порядок. Якщо циклічний порядок проти (за) годинникової стрілки, то будемо казати, що друге (перше) ребро при його проходженні знаходиться лівіше від першого (другого). Тоді $p_1 \vdash p_2$, якщо p_1 знаходиться лівіше від p_2 . Отже, відображення φ та відношення \prec, \vdash однозначно задають граф Γ_f .

Означення 4.1.3. Нехай v_1, v_2 — суміжні вершини графа Γ_f , такі, що $v_1 \prec v_2$. Тоді *простою деформацією оснащеного KR-графа* Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається одна з наступних операцій або обернена до неї:

- 1) скорочення вершини v_2 й інцидентного до неї ребра l_1 у випадку якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1\}$;
- 2) скорочення ребра e_2 й інцидентних до нього вершин v_1 і v_2 , якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2\}$;
- 3) скорочення ребра l_2 й інцидентних до нього вершин v_1, v_2 , якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2\}$;
- 4) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec l_4 \vdash l_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро l_3 , тобто ізоморфізм η , такий, що $\eta(v_1) \prec \eta(v_2)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{l_3 \prec l_4 \vdash l_5\}$;
- 5) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2 \prec e_4 \vdash e_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро e_5 , тобто ізоморфізм η , такий що $\eta(v_2) \prec \eta(v_1)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{e_4 \prec e_5 \vdash e_1\}$;

- 6) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, то протягування вершини v_1 на ребро l_3 , тобто ізоморфізм μ , такий що $\mu(v_2) \prec \mu(v_1)$ і $\varphi(\mu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(\mu(v_2)) = \{e_2 \prec l_2 \vdash e_1\}$;
- 7) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec e_1\}$, то протягування вершини v_2 на ребро l_1 , тобто ізоморфізм ν , такий що $\nu(v_2) \prec \nu(v_1)$ і $\varphi(\nu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1 \vdash e_2\}$, $\varphi(\nu(v_2)) = \{l_2 \prec e_1\}$.

Прості деформації оснащених графів Кронрода-Ріба зображені на рис. 4.1.2.

Означення 4.1.4. Деформацією оснащеного KR-графу Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається послідовність простих деформацій.

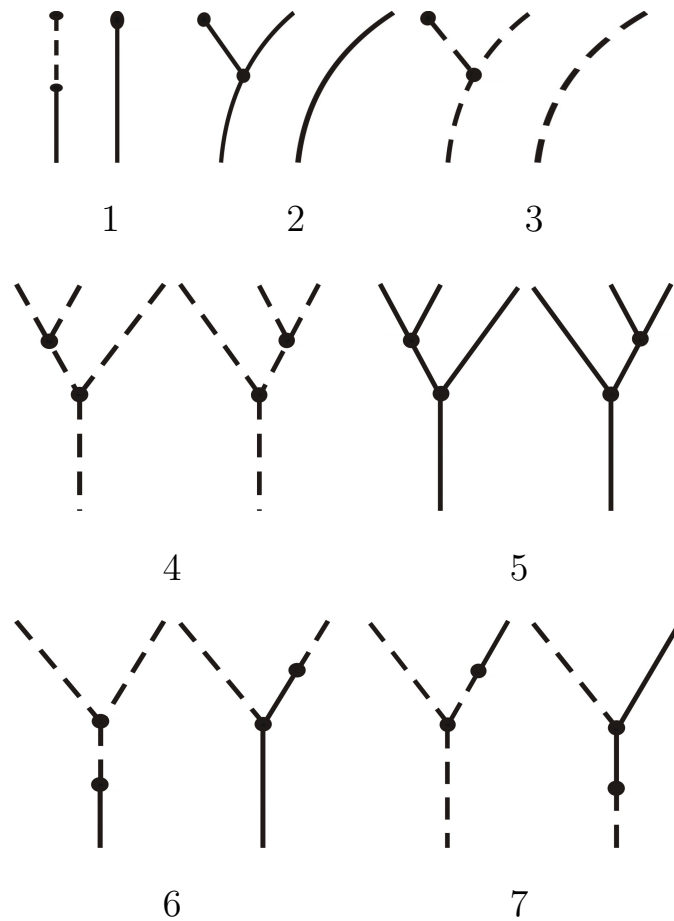


Рис. 4.1.2. Прості деформації оснащеного KR-графу

Якщо у пункті (2.1) означення 4.1.2 відповідні 2 критичні точки лежать на різних компонентах рівня функції, то КР-граф при цій деформації не змінюється, якщо ж вони лежать на одній компоненті межі, то деформації КР-графа описані на рис. 4.1.2: 4, 5.

Теорема 4.1.5. *Якщо між функціями f і g із класу $\Sigma(M)$ існує деформація загального положення, то існує деформація між їхніми оснащеними графами Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g .*

Доведення впливає [32] з означення та побудови графа Кронрода-Ріба.

Зауваження 4.1.6. Якщо кожна компонента критичного рівня гомеоморфна відрізку, то граф Кронрода-Ріба можна вкласти у поверхню так, щоб за виключенням досить малих околів критичних рівнів точки графа є серединами компонент регулярних рівнів, а в околах критичних рівнів кінці так побудованих кривих з'єднуються кривими з відповідними критичними точками. Тоді якщо деформацію вкладеного оснащеного графа Кронрода-Ріба можна здійснити в поверхні, то між відповідними функціями також існує деформація.

Нагадаємо, що функція називається *полярною*, якщо вона має рівно два локальні екстремуми.

Твердження 4.1.7. *Для функцій, заданих на гладкій компактній орієнтованій зв'язній поверхні з межею (можливо, порожньою), мають місце такі твердження:*

- (1) *кожна оптимальна m -функція є полярною;*
- (2) *оптимальність і полярність є рівносильними для таких функцій:*
 - (2.1) *функції Морса (у випадку поверхні без межі);*
 - (2.2) *mt -функції.*

Доведення. Доведемо (1). Нехай поверхня M має рід g і одну компоненту межі. Покажемо, що на такій поверхні оптимальна m -функція f має $2g + 2$ критичні точки. Для цього дослідимо зміну топологічного типу множини $M_c = f^{-1}(-\infty; c)$ при збільшенні параметра c . Проходження кожного локального мінімуму додає компоненту зв'язності до множини M_c і компоненту до множини ∂M_c . У випадку внутрішньої критичної точки це буде коло, а у випадку критичної точки на межі — відрізок. Проходження внутрішньої сідлової точки не змінює число компонент M_c і або додає компоненту межі, або ж зменшує число компонент межі на 1, при цьому або зменшує на 1 число компонент M_c , або збільшує рід поверхні M_c на 1. Проходження внутрішньої точки максимуму зменшує число компонент межі ∂M_c на 1. Для критичних точок на межі, які не є локальними екстремумами, можливі наступні варіанти зміни топологічного типу M_c при проходженні цієї точки: (i) зменшення числа компонент M_c і компонент межі, гомеоморфних відрізкам, на 1; (ii) число компонент M_c не змінюється, а число компонент межі ∂M_c збільшується на 1; (iii) число компонент M_c не змінюється, а число компонент межі зменшується на 1 і при цьому рід M_c збільшується на 1; (iv) число компонент M_c не змінюється, а число компонент межі гомеоморфних відрізка збільшується на 1; (v) число компонент M_c не змінюється, а компонента межі гомеоморфна колу замінюється на відрізок.

Локальний максимум на межі зменшує число компонент гомеоморфних відрізка на 1. З усього вищесказаного випливає, що для отримання поверхні роду g з однією компонентою межі потрібно принаймні $2g + 2$ критичні точки, що є такими: 1 локальний мінімум на межі, 1 локальний максимум на межі та $2g$ внутрішніх сідлових точок (якщо ми хочемо збільшувати рід поверхні за рахунок критичних точок на межі, то для збільшення роду на 1 потрібно 4 таких критичних точок, при цьому збільшення числа локальних мінімумів потребує збільшення числа сідлових точок і це не змінює рід поверхні).

Отже, оптимальна m -функція матиме один локальний мінімум і один ло-

кальний максимум.

У необхідності (2.1) можна переконатись аналогічно пункту (1).

Достатність (2.1). Для функції Морса на замкненій поверхні M (у даному випадку $\partial M = \emptyset$) виконується рівність Морса, а саме: $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2$, де c_i — число критичних точок індексу i функції f , $i = \overline{0, 2}$. З останньої рівності випливає, що для полярної функції $c_1 = c_0 + c_2 - \chi(M) = 2 - \chi(M)$, так як $c_0 = c_2 = 1$. Таким чином, число критичних точок функції f дорівнює $c_0 + c_1 + c_2 = 4 - \chi(M) = \text{const}$ для фіксованої поверхні M і не залежить від f , що означає, що полярна функція Морса є оптимальною на заданій поверхні.

Необхідність (2.2). Згідно з лемою 2.3.2 оптимальна m -функція на поверхні має рівно один мінімум і один максимум, тобто є полярною.

Достатність (2.2). Аналогічно лемі 2.3.3 можна показати, що ейлерова характеристика поверхні M дорівнює $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}$, де c_i^\pm — число критичних точок m -функції f індексу $(i, \pm 1)$, $i = \overline{0, 1}$ (для критичної точки індексу $(0, \pm 1)$ функція f має локальне представлення $f(x, y) = x^2 \pm y^2$ для деякої системи координат (x, y) в околі вищевказаної критичної точки, а у випадку індексу $(1, \pm 1)$ функція $f(x, y) = -x^2 \pm y^2$). Для полярної функції $c_0^+ = c_1^- = 1$, тоді $c_0^- + c_1^+ = 2 - 2\chi(M) = \text{const}$. Так, число критичних точок полярної функції f дорівнює $2 + c_0^- + c_1^+ = 4 - 2\chi(M)$ і не залежить від самої функції f , а тільки від ейлерової характеристики поверхні M , що і доводить оптимальність функції f . \square

Обернене твердження до пункту (1) у твердженні 4.1.7 не є вірним, тобто існує полярна m -функція, яка не є оптимальною. Прикладом такої функції може бути m -функція, отримана з функції Морса з двома критичними точками на сфері після видалення зі сфери досить малого (який не містить критичних точок функції) околу деякої регулярної точки. Таким чином, отримана функція має 4 критичні точки, 2 з яких є локальними екстремумами на множині

гомеоморфній двовимірному диску. Очевидно, що оптимальна функція на двовимірному диску має 2 критичні точки. Іншим прикладом може бути полярна m -функція на торі з діркою, що близька до оптимальної mm -функції, з 6-ма критичними точками на межі. Проте якщо розглянути стандартну функцію висоти на торі з 4 критичними точками і вирізати досить малий окіл траєкторії поля градієнта, що йде з джерела у стік, отримаємо функцію з 4 критичними точками на торі з діркою (мінімум та максимум на межі та 2 внутрішніх сідла).

4.2 Деформації оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях

Зауважимо, що для полярних (і, як наслідок, для оптимальних) функцій деформації 2) і 3) у означенні 4.1.3 відповідних оснащених КР-графів є неможливими.

Означення 4.2.1. *Деформаційним графом поверхні M називається граф, вершини якого відповідають класу пошарово оснащеної еквівалентності оптимальних mm -функцій (для поверхонь з межею) або функцій Морса (для замкнених поверхонь) на поверхні M , а ребрам — прості деформації корозмірності 0 між відповідними функціями. Даний граф позначатимемо через $G_D(M)$.*

Як було доведено раніше, оптимальна mm -функція на орієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $4g + 2k$, а на неорієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $2g + 2k$ критичні точки. Тому на замкненій орієнтованій поверхні роду g оптимальна функція Морса має $2g + 2$ критичні точки.

Гладку компактну орієнтовану поверхню роду i із j компонентами межі надалі позначатимемо через $F_{i,j}$. Надалі, для простоти викладок, вершини графа Кронрода-Ріба будемо позначати через v_j і занумеруємо від v_1 до v_l за зростанням значень функції (для деякого натурального l).

Твердження 4.2.2. *На торі $F_{1,0}$ існує єдиний клас пошарово оснащеної екви-*

валентності оптимальних функцій Морса. Граф $G_D(F_{1,0})$ є точкою, тобто має єдину вершину і не має ребер.



Рис. 4.2.1. Оснащений KR-граф функцій із $\Sigma(F_{1,0})$, розглянутих з точністю до пошарово оснащеної еквівалентності

Доведення. Із теореми 2.3.4 випливає, що число критичних точок оптимальної функції Морса на $F_{1,0}$ дорівнює 4 ($g = 1$). Позаяк оптимальна функція на замкненій поверхні є полярною, то оснащений граф Кронрода-Ріба матиме рівно 2 вершини v_1 і v_4 валентності 1 (відповідають локальним екстремумам) і, як наслідок, 2 вершини v_2, v_3 валентності 3 (відповідають сідловим критичним точкам). Тому число ребер графа дорівнює 4. Розглянемо шлях α з вершини v_1 до v_4 (він існує, так як граф є зв'язним). Нехай e_1 і e_4 — ребра, яким інцидентні вершини v_1 і v_4 відповідно. Тоді, оскільки інші вершини графа мають валентність 3, то іншими кінцями e_1 і e_4 можуть бути тільки відповідно. Такий граф уже містить 4 вершини і 3 ребра, тому останнє ребро, згідно з вищевказаними валентностями, з'єднує вершини v_2 і v_3 і отримуємо граф, зображений на рис. 4.2.1. До отриманого оснащеного графа Кронрода-Ріба жодна з деформацій не може бути застосована, тому деформаційний граф тора $G_D(F_{1,0})$ складається тільки з єдиної вершини і не містить ребер, що і доводить твердження 4.2.2. \square

Твердження 4.2.3. *На диску з діркою $F_{0,2}$ існують дві \mathcal{O} -нееквівалентні оптимальні tt -функції.*

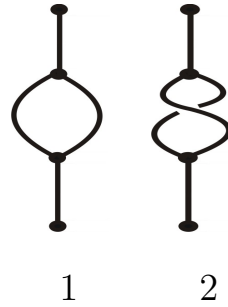


Рис. 4.2.2. Оснащені KR-графи функцій із $\Sigma(F_{0,2})$, розглянутих з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності

Доведення. Згідно з теоремою 2.3.4 оснащений граф Кронрода-Ріба оптимальної mt -функції на $F_{0,2}$ містить 4 вершини, 2 з яких валентності 1, а 2 інші мають валентності 3 і є Y -вершинами. Аналогічно доведенню попередньої теореми можна отримати граф зображений на рис. 4.2.2: 1. Враховуючи наявність Y -вершин, із останнього графа заміною циклічного порядку у вершині v_2 (або v_3) отримуємо граф (рис. 4.2.2: 2) ізоморфний попередньому, але ці два оснащені графи Кронрода-Ріба відповідатимуть різним (з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності) оптимальним функціям на диску з діркою. Деформації до отриманих графів не можуть бути застосовані, що і доводить дане твердження. \square

Зауважимо, що якщо розглянути поняття аналогічне деформаційному графу але з точністю до \mathcal{O} -еквівалентності, то цей граф у випадку диска з діркою буде складатися з 2 точок і не міститиме ребер.

Наслідок 4.2.4. *На диску з діркою існує єдиний клас пошарово оснащеної еквівалентності оптимальних mt -функцій. Граф $G_D(F_{0,2})$ складається з 1 вершини і не містить ребер.*

Твердження 4.2.5. *Існує 3 пошарово оснащено нееквівалентні оптимальні функції Морса на кренделі роду 2 $F_{2,0}$. Граф $G_D(F_{2,0})$ має 3 вершини і 2 ребра, які послідовно з'єднують ці вершини.*

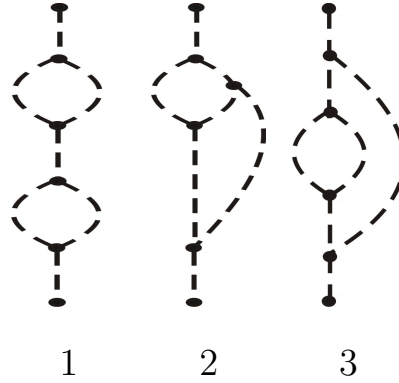


Рис. 4.2.3. Оснащені KR-графи функцій із $\Sigma(F_{2,0})$, розглянутих з точністю до пошарово оснащеної еквівалентності

Доведення. Число критичних точок оптимальної функції Морса на кренделі роду 2 дорівнює 6 ($g = 2$). Оскільки оптимальна функція має 2 екстремуми (2 вершини валентності 1) і 4 сідлові критичні точки (4 вершини валентності 3), то оснащений граф Кронрода-Ріба матиме 7 ребер. Оскільки граф зв'язний, то існує шлях α , який починається у вершині v_1 і закінчується у v_6 . Розглянемо сідлову вершину v_2 . За побудовою вона належить α . З v_2 буде виходити ребро, яке не належить α , рухаючись за яким вгору (за зростанням значення функції) ми повинні дійти до v_6 , оскільки не існує інших локальних максимумів. Нехай β — шлях від v_2 до першої вершини на шляху α . Крім вершин v_1, v_2, v_6 і другого кінця шляху β (v_j) існує ще 2 вершини графа і одне ребро γ , що не належить α, β . За умови, ребро γ не може починатися нижче вершини v_2 . Якщо обидва кінці γ менші за v_j та одночасно належать або α , або ж β , то отримаємо граф 3 (рис. 4.2.3: 3). Якщо ж одна з вершин менша, а друга більша за v_j , то отримаємо граф 2 (рис. 4.2.3: 2). Якщо ж обидві вершини менші за v_j і одна з них належить α , а інша — β , то також отримаємо граф 2 (рис. 4.2.3: 2). Якщо ж обидва кінці γ більші за v_j , то отримаємо граф 1 (рис. 4.2.3: 1). Враховуючи, що розглядаються тільки оптимальні і як наслідок полярні функції, то у отриманих графів можливий тільки єдиний тип деформацій (рис. 4.1.2: 4). Застосувавши такі деформації до графа 1 на рис. 4.2.3, отримаємо граф 2 на рис. 4.2.3. Аналогічно з

графу 3 (рис. 4.2.3) отримаємо граф 2 (рис. 4.2.3), а отже з графа 2 на рис. 4.2.3 можна отримати граф 1 (рис. 4.2.3) або ж рис. 4.2.3: 3. Тому граф деформацій загального положення має 3 вершини і 2 ребра, які послідовно з'єднують ці вершини. \square

4.3 Висновки

В цьому розділі наведено критерій існування деформації загального положення в термінах оснащеного графа Кронрода-Ріба. Встановлено зв'язок між оптимальністю та полярністю функцій Морса, m -функцій та mm -функцій на гладких компактних орієнтованих зв'язних поверхнях. Знайдено число пошарово оснащено нееквівалентних оптимальних функцій Морса на торі та на кренделі роду 2, яке дорівнює 1 та 3 відповідно. Також, на диску з діркою існує єдина пошарово оснащено та 3 \mathcal{O} -нееквівалентних оптимальних mm -функцій. Ввівши поняття деформаційного графа, наведено зв'язок між вищеописаними функціями на відповідних поверхнях.

Результати, отримані в розділі 4, опубліковано у статті [3^a].

РОЗДІЛ 5

Топологія функцій з ізольованими критичними точками на межі

5.1 Локальна топологічна класифікація

Нехай M — гладка компактна поверхня з межею ∂M і $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція задана на M зі скінченним числом критичних точок, які належать ∂M . З компактності поверхні M маємо, що скінченність числа критичних точок рівносильне їх ізольованості.

Як і в попередніх розділах через f_∂ позначатимемо обмеження функції f на межу поверхні ∂M . Розглянемо множину $\Theta_0(M)$ гладких функцій заданих на поверхні M , всі критичні точки яких є ізольованими, належать межі і також є ізольованими критичними точками відповідних обмежень функцій на ∂M , тобто

$$\Theta_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), CP(f) = ICP(f) = ICP(f_\partial)\},$$

де $CP(*)$ ($ICP(*)$) — множина (ізольованих) критичних точок функції $*$.

Лема 5.1.1. *Нехай y — регулярне значення гладкої функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, заданої на гладкій компактній поверхні M з межею. Тоді маю місце наступні твердження:*

- (i) *лінія рівня $f^{-1}(y)$ складається зі скінченного числа кіл та відрізків;*
- (ii) *для довільної відкритої множини U із гладкою трансверсальною до $f^{-1}(y)$ межею, перетин $f^{-1}(y) \cap U$ містить скінченне число компонент.*

Доведення. Спершу зауважимо, що згідно [4] прообраз регулярного рівня є 1-вимірним многовидом, тому він не містить ізольовані точки. Також границя критичних точок теж буде критичною точкою, що впливає з неперервності часткових похідних та означення критичної точки.

Нехай y — регулярне значення функції f . Покажемо, що рівень $f^{-1}(y)$ містить скінченне число відрізків. Припустимо, від супротивного, що це не так. Тоді існує компонента межі, яка перетинається із лінією рівня функції f у нескінченній кількості точок. Оскільки f набуває одного значення у цих точках, то існує критичне значення функції f_{∂} між кожними двома такими точками. Таким чином, обмеження функції f на межу поверхні має нескінченне число критичних точок. З цього випливає, що існує послідовність критичних точок, яка має границю, що належить лінії рівня $f^{-1}(y)$. Тоді y — критичний рівень функції. Отримали суперечність.

Покажемо, що рівень $f^{-1}(y)$ містить скінченне число кіл. Для цього заклеїмо всі компоненти межі ∂M 2-вимірними дисками, в результаті чого отримаємо замкнену поверхню, яку позначимо через M' . Розглянемо продовження функції f на приклеєні диски до гладкої функції F зі скінченним числом критичних точок на кожному диску (це можна зробити довільною функцією, після чого наблизити її функцією Морса). Отримаємо замкнену поверхню M' і функцію F , задану на ній, критичні точки якої є ізольованими. Тоді, в силу компактності поверхні M' і замкненості множини $F^{-1}(y)$, прообраз $F^{-1}(y)$ є компактом. Тому $F^{-1}(y)$ містить скінченне число кіл, з чого випливає те, що лінія рівня $f^{-1}(y)$ також містить скінченне число кіл на поверхні M (оскільки після опускання приклеєних 2-вимірних дисків число кіл може тільки зменшитись). \square

Функція з ізольованими критичними точками, які не є локальними екстремумами, на замкненій поверхні є локально топологічно еквівалентною функції $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого цілого k , $k \geq 1$ [35, 64]. Тому спершу розглянемо лінії рівня функції $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, заданої на поверхні $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ для $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ та у загальному випадку. Також зауважимо, що $p_0 = (0, 0)$ є ізольованою критичною точкою функції $\operatorname{Re}(x + iy)^k$, а 0 — відповідним критичним значенням.

Окремо розглянемо випадки різних значень k у формулі $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$ та відповідної структури околу $U(p_0)$ точки p_0 :

- $k = 1$: $f(x, y) = x$, $y \geq 0$, $U(p_0)$ має два сектори зі спільною межею, див. рис. 5.1.1: 1;
- $k = 2$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^2 = x^2 - y^2$, $y \geq 0$ і рівень функції $f(x, y) = 0$ складається із двох променів $y = x, y \geq 0$ and $y = -x, y \geq 0$ (рис. 5.1.1: 2);
- $k = 3$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$, $y \geq 0$. Лінії рівня функції f зображені на рис. 5.1.1: 3, а критичний рівень $f(x, y) = 0$ містить три промені $x = 0, y \geq 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0$ і $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0$;
- $k = 4$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^4 = x^4 - 4x^2y^2 + y^4$, $y \geq 0$ і лінія рівня $f(x, y) = 0$ складається із чотирьох променів $y = x\sqrt{2 + \sqrt{3}}, y \geq 0$, $y = x\sqrt{2 - \sqrt{3}}, y \geq 0$, $y = -x\sqrt{2 + \sqrt{3}}, y \geq 0$ і $y = -x\sqrt{2 - \sqrt{3}}, y \geq 0$, див. рис. 5.1.1: 4;

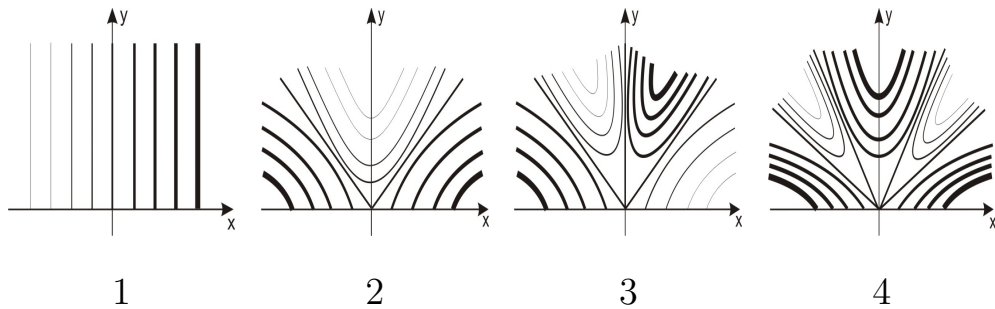


Рис. 5.1.1. Структура околу критичного рівня функції

$$\operatorname{Re}(x + iy)^k, \quad y \geq 0 \text{ для } k \in \overline{1, 4}$$

- $k = 2n + 1$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j} x^{2n+1-2j} y^{2j}$, $y \geq 0$ (рис. 5.1.2: 1);
- $k = 2n$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n}^{2j} x^{2n-2j} y^{2j}$, $y \geq 0$ (рис. 5.1.2: 2).

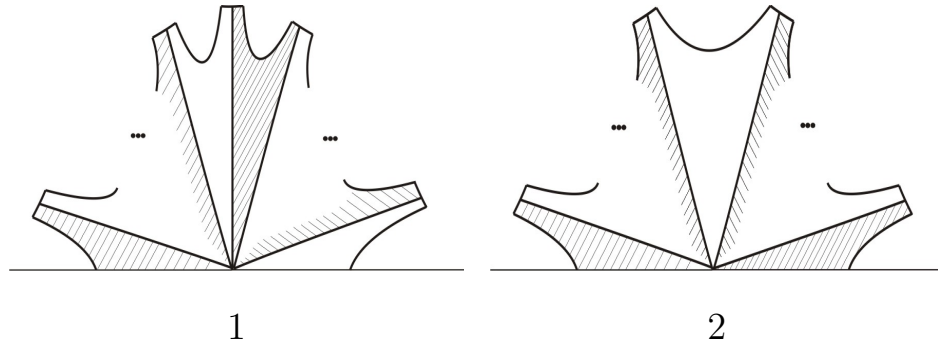


Рис. 5.1.2. Структура околу критичного рівня функції $\operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$ для довільного натурального k

Якщо $k = 1$, то f має локальне топологічне представлення $f(x, y) = x$, $y \geq 0$. Лінії рівня функції f показані на рис. 5.1.1: 1. Як наслідок, рівень $f(x, y) = 0$ є променем $x = 0, y \geq 0$.

У разі, коли $k = 2$ маємо $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^2 = x^2 - y^2$, $y \geq 0$ і лінія рівня $f(x, y) = 0$ складається із двох променів $y = x, y \geq 0$ і $y = -x, y \geq 0$ (див. рис. 5.1.1: 2).

Якщо $k = 3$, то функція має локальне представлення $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$, $y \geq 0$ і її лінії рівня показані на рис. 5.1.1: 3. Критичний рівень $f(x, y) = 0$ складається із трьох променів $x = 0, y \geq 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0$ та $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0$.

У разі, коли $k = 4$ отримаємо функцію $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^4 = x^4 - 4x^2y^2 + y^4$, $y \geq 0$ і відповідна лінія рівня $f(x, y) = 0$ складається із чотирьох променів $y = x\sqrt{2 + \sqrt{3}}, y \geq 0$, $y = x\sqrt{2 - \sqrt{3}}, y \geq 0$, $y = -x\sqrt{2 + \sqrt{3}}, y \geq 0$ та $y = -x\sqrt{2 - \sqrt{3}}, y \geq 0$, див. рис. 5.1.1: 4.

Так, для всіх $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ лінія $y = 0$ є віссю симетрії і перетинається із лінією рівня $f = 0$ функції f у єдиній точці p_0 . Надалі узагальнимо цей результат, розглядаючи для цього окремо випадки парного і непарного k .

Якщо $k = 2n + 1$ (для деякого цілого n , $n \geq 1$), то функція f має наступне

локальне топологічне представлення:

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j} x^{2n+1-2j} y^{2j}, y \geq 0.$$

Якщо ж $k = 2n$ (для деякого цілого n , $n \geq 1$), то отримаємо функцію:

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n}^{2j} x^{2n-2j} y^{2j}, y \geq 0.$$

У обох випадках лінія $y = 0$ є віссю симетрії, бо якщо точка (x_0, y_0) належить лінії рівня $f = 0$, то точка $(x_0, -y_0)$ також належатиме цій лінії рівня функції.

Лема 5.1.2. *Нехай $p_0 \in \partial M$ — критична точка функції f класу $\Theta_0(M)$, $f(p_0) = 0$ — відповідне критичне значення функції. Тоді існує окіл $U(p_0)$ і гомеоморфізм, такі що:*

$$h : f^{-1}(0) \cap cl(U(p_0)) \rightarrow \operatorname{Con}\left(\bigcup_{i=1}^k \{x_i\}\right)$$

для скінченного числа точок $\{x_i, i = \overline{1, k}\}$ і деякого $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Тут $cl(U(p_0))$ — замикання околу $U(p_0)$, $\operatorname{Con}\left(\bigcup_{i=1}^k \{x_i\}\right)$ — об'єднання k (прямих) ліній із єдиною спільною точкою, яка є їх спільним кінцем (див. рис. 5.1.3).

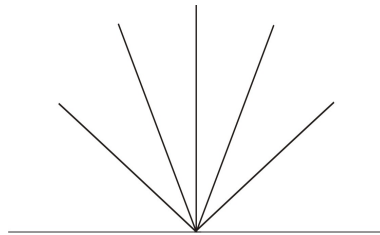


Рис. 5.1.3

Доведення. Розглянемо окіл U точки p_0 , такий що не містить інших критичних точок функції f (за винятком точки p_0). Тоді множина $K := (f^{-1}(0) \setminus \{p_0\}) \cap U$ також не містить критичних точок функції f і є 1-вимірним многовидом. Якщо K містить замкнену криву, то вздовж цієї кривої функція f матиме точку локального екстремуму, що є неможливим.

Покажемо, що K має скінченне число компонент. Припустимо, від супротивного, що їх нескінченна кількість. Завжди можна вибрати окіл U , який має гладку і трансверсальну до кожної компоненти K межу. Тоді множина $K \cap \partial U$ має граничну точку, яка належить K . З чого випливає, що ця (гранична) точка є критичною, оскільки часткові похідні функції f за напрямками ∂U і K рівні нулю в цій точці. Отримана суперечність доводить скінченність числа компонент множини K .

За необхідності, звужимо окіл U до такого, що не містить таких компонент множини K , для яких p_0 не є границею.

Тоді решту компонент разом із точкою p_0 утворюють об'єднання k прямих зі єдиною спільною вершиною p_0 , яка є їх кінцями. \square

Твердження 5.1.3. *Функція $f \in \Theta_0(M)$ є топологічно еквівалентною до функції $g(x, y) = x^2 + y^2, y \geq 0$ ($g(x, y) = -x^2 - y^2, y \geq 0$) у деякому околі своєї точки мінімуму (максимуму).*

Доведення. Твердження носить локальний характер, тому всі подальші викладки буде проведено в достатньо малому околі локального мінімуму (максимуму) p_0 .

Лінія рівня функції $f \in \Theta_0(M)$ трансверсальна до межі поверхні, на якій задана функція, тому що обмеження функції на межу не має відмінних від p_0 критичних точок. Побудуємо дотичне до межі градієнтно-подібне векторне поле X . Нехай функція f набуває значення c в точці p_0 . Розглянемо гомеоморфізм h , який переводить рівень $f^{-1}(c + \varepsilon)$ функції f (для деякого $\varepsilon > 0$) у рівень $x^2 + y^2 = \varepsilon, y \geq 0$ функції g .

Після позначення траєкторії векторного поля X , яка проходить через точку x символом $\gamma(x)$ і траєкторії, що проходить через $y = \beta(y)$, попередньо описаний гомеоморфізм може бути визначений формулою:

$$H(x) = \beta(h(\gamma(x) \cap f^{-1}(c + \varepsilon))) \cap g^{-1}(\varepsilon). \quad \square$$

Теорема 5.1.4. Нехай $f \in \Theta_0(M)$, p_0 — сідлова критична точка функції f . Тоді існує окіл $U(p_0)$ точки p_0 , такий, що обмеження функції $f|_{U(p_0)}$ топологічно еквівалентне до функції $g(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$, заданої у деякому околі точки $(0, 0)$ для певного цілого $k \geq 1$.

Доведення. Нехай $U(p_0)$ — окіл із властивостями, описаними у лемі 5.1.2. Тоді критичний рівень функції f розбиває окіл $U(p_0)$ на області. Розглянемо одну із таких областей, яку позначатимемо через V . Припустимо, що $f(x) < 0$ у V . Тоді поле градієнта $\operatorname{grad}(f)$ напрямлене всередину області V в точках перетину $\partial U(p_0) \cap \partial V$.

Будемо позначати траєкторії поля градієнта, які проходять через точку x , символом ϕ_x . Розглянемо відображення $h : \partial U(p_0) \cap \partial V \rightarrow f^{-1}(0) \cap \partial V$ задане формулами $h(x) = \phi_x \cap f^{-1}(0)$ if $\phi_x \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$ та $h(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_x(t) = p_0$ if $\phi_x \cap f^{-1}(0) = \emptyset$ (див. рис. 5.1.4). Тоді так побудоване відображення h буде неперервним.

Тоді існує точка, що переходить в точку p_0 за допомогою відображення h . Останнє означає, що існує траєкторія γ , яка проходить $\partial U(p_0) \cap \partial V$ і закінчується в точці p_0 . Якщо V має спільні точки із межею, то векторне поле $\operatorname{grad}(f)$ можна локально замінити на таке, що буде дотичним до межі. Так, траєкторія γ міститься у межі поверхні.

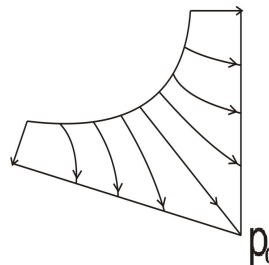


Рис. 5.1.4

Множина K із так побудованими траєкторіями γ ділить оклі $U(p_0)$ на області. Так же як у доведенні теореми 5.1.3, можна побудувати гомеоморфізм кожної із цих областей (за необхідності, після звуження околу $U(p_0)$) на відпо-

відні області функції $g(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$, що переводять лінії рівня у лінії рівня. Також якщо критична точка має єдину траєкторію, що в неї входить, то траєкторії переходять у траєкторії цим гомеоморфізмом.

Вищеописані гомеоморфізми співпадають на спільній межі, тому задають шуканий гомеоморфізм. \square

Зауважимо, що у випадку $k = 1$ окіл $U(p_0)$ складається із двох секторів зі спільними точками із межею за винятком точки p_0 (див. рис. 5.1.1: 1).

5.1.1 Атом функції

Надалі розглядатимемо тільки прості функції на гладкій компактній зв'язній поверхні M , тобто функції класу $\Theta(M) = \{f \in \Theta_0(M) \mid f \text{ — проста}\}$. Також, додатково припустимо, що p_0 є ізольованою сідловою критичною точкою функції f із відповідним критичним значенням $f(p_0) = 0$.

Зауважимо, що кожному атому відповідають два f -атоми, які можуть бути отримані один із іншого заміною знаку функції.

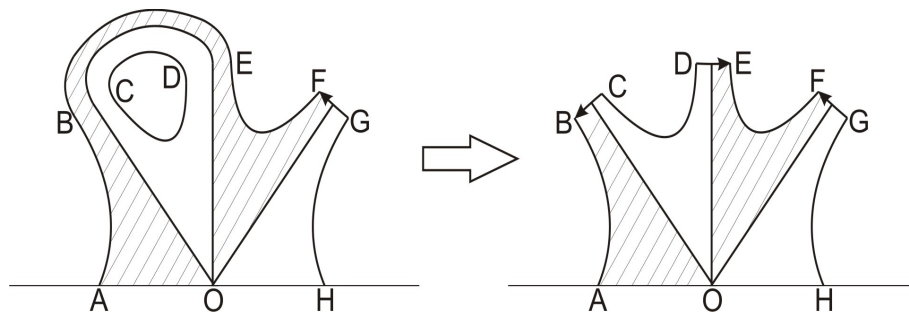


Рис. 5.1.5. Приклад розширення околу сідлової критичної точки до відповідного околу критичного рівня

Розглянемо окіл критичної точки p_0 обмежений $f^{-1}(-\varepsilon)$, $f^{-1}(\varepsilon)$ для деякого достатньо малого $\varepsilon > 0$, траєкторіями поля градієнта та межею ∂M . Частици поверхні, для яких $f > 0$ і $f < 0$, називатимемо додатніми і від'ємними секторами функції f . Ці сектори зображатимемо заштрихованими і незаштрихованими відповідно. Отримана поверхня має структуру $(2k + 2)$ -кутника. Якщо розглянутий окіл розширити до околу критичного рівня, то отримаємо окіл

гомеоморфний багатокутнику зі склеєними за лінійним гомеоморфізмами сторонами (наприклад, на рис. 5.1.5 сторона CB приклеюється до сторони DE).

Так, кожен атом має структуру $(2k + 2)$ -кутника, який зображений на одному з рис. 5.1.2: 1, 2.

Поставимо у відповідність даному багатокутнику коло з відміченими точками. Колу відповідатиме межа $(2k + 2)$ -кутника, а відміченим точкам — точки на межі, які належать перетину заштрихованих і незаштрихованих секторів, тобто відмічені точки належать критичному рівню функції.

Відмічені точки з'єднаємо хордою тоді і тільки тоді, коли відповідні сторони багатокутника склеюються при збільшенні околу. Таким чином, отримаємо коло з відміченими точками і хордами з вершинами у цих точках.

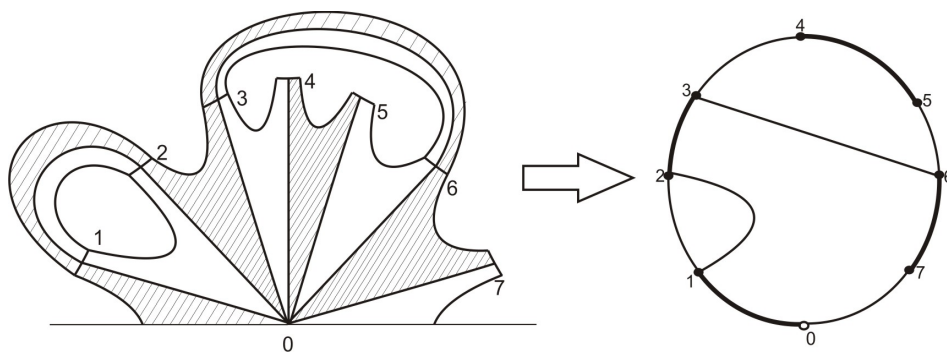


Рис. 5.1.6. Приклад побудови хордової діаграми сідлового критичного рівня

Надалі зафіксуємо орієнтацію для подальшого задання нумерації відмічених точок на колі так, щоб при зміні орієнтації отримати атом еквівалентний до початкового. Занумеруємо відмічені точки наступним чином: точка, яка поставлена у відповідність критичній точці p_0 позначимо через Q_0 , а решту точок занумеруємо відповідно до орієнтації межі починаючи від Q_1 і до Q_k , розглядаючи при цьому за точку відліку точку Q_0 . Ці точки розбивають коло на $k + 1$ чорних і сірих дуг, які відповідають областям додатності та від'ємності функції відповідно (див. рис. 5.1.6). Також зауважимо, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо, окрім тих які містять вершину Q_0) мають різний колір.

Так, кожен f -атом може бути визначений за допомогою кола з k відміченими точками та точкою Q_0 , l хордами (для деякого $l \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$) (серед яких немає петель), якщо додатково розглянути фіксоване розбиття дуг таке, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо окрім тих які містять вершину Q_0) мають різний колір. Таких розбиттів є рівно два. Коло зописаними вище елементами (побудоване з f -атома функції) називатимемо *хордовою діаграмою сідлового критичного рівня функції*.

Означення 5.1.5. *Оснащеною хордовою діаграмою* називатимемо коло, яке містить такі елементи:

- (1) відмічені точки, які є занумерованими, і серед них виділена одна точка — точка Q_0 ;
- (2) хорди з кінцями у відмічених точках, окрім точки Q_0 ;
- (3) розбиття дуг кола на чорні і сірі, таке, що кожні дві дуги (можливо, окрім тих, які містять Q_0) мають різний колір.

Занумеруємо відмічені точки оснащеної хордової діаграми від 0 до k (для деякого натурального k) за годинниковою стрілкою, починаючи з виділеної точки. Тоді хорду називатимемо *хордою 1-го (2-го) типу*, якщо вона з'єднує відмічені точки із номерами різної (однакової) парності.

Кожна хордова діаграма сідлового критичного рівня функції буде оснащеною хордовою діаграмою. Тому надалі всі поняття визначені для оснащених хордових діаграм можуть розглядатись і для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції.

Зауважимо, що так визначена хордова діаграма задає f -атом. Якщо ж у умові (3) у означенні 5.1.5 розглядати обидва такі розбиття дуг, то хордова діаграма буде задавати атом.

Означення 5.1.6. Дві оснащені хордові діаграми називаються *еквівалентними*, якщо вони можуть бути отримані одна із другої за допомогою повороту чи симетрії, що зберігають при цьому елементи (1) — (3) (див. означення 5.1.5).

Означення 5.1.7. *Вільною відміченою точкою* на оснащній хордовій діаграмі називається відмічена точка, яка не з'єднана хордою з іншими відміченими точками.

Коло оснащеної хордової діаграми позначатимемо через S^1 , відмічені точки — $0, 1, \dots, k$, а хорди, які з'єднують точки i і j — через l_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Вважатимемо, що j — номер відміченої точки Q_j . Вільні точки, за винятком Q_0 , позначимо через Q_{i^*} , де i — номер відповідної відміченої точки. Кожна відмічена точка оснащеної хордової діаграми відповідає двом вершинам багатокутника, одна з яких належить додатньому сектору ($f > 0$), а інша — від'ємному ($f < 0$). Тому ці точки позначимо через P_i і N_i , де i — номер відміченої точки Q_i .

Лема 5.1.8. *Число вільних точок $N_{f.p.}$ оснащеної хордової діаграми може бути знайдене за допомогою наступної формули:*

$$N_{f.p.} = k - 2 \cdot N_{ch.} + 1$$

де $N_{ch.}$ — число хорд хордової діаграми.

Доведення. Існує окіл критичного рівня, який можна представити у вигляді $(2k + 2)$ -кутника із $2l$ склеєними сторонами (для деякого l). Тоді відповідна хордова діаграма містить $k + 1$ відмічених точок і l хорд. З останнього випливає твердження леми, після перепозначення $N_{ch.} := l$. \square

Означення 5.1.9. З оснащеної хордової діаграми, яка містить $k + 1$ відмічену точку, побудуємо підстановку $\tau^{(k)}$ таку, що $\tau^{(k)}$ містить цикл (ij) (для деяких $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$) тоді і тільки тоді, коли відмічені точки Q_i і Q_j з'єднані

хордою. Так задана підстановка містить тільки цикли довжини 2 і називається *підстановкою склейки* на множині $\{1, 2, \dots, k\}$.

Атом разом із заданою підстановкою склейки $\tau^{(k)}$ позначатимемо як $A_{\tau^{(k)}}$.

Зауважимо, що для хордової діаграми сідлового критичного рівня функції рівносильними є наступні поняття: (1) (не)перекручений прямокутник; (2) хорда 2-го (1-го) типу; (3) підстановка (i, j) хордової діаграми, в якій $i, j > 0$ і мають однакову (різну) парність. Також, поняття (2) і (3) є рівносильними для оснащеної хордової діаграми.

Теорема 5.1.10. *Мають місце наступні твердження:*

- 1) *кожен атом сідлового критичного рівня співпадає з атомом $A_{\tau^{(k)}}$ для деякої підстановки склейки $\tau^{(k)}$ на множині $\{1, 2, \dots, k\}$ і ця підстановка задає склейку сторін атома;*
- 2) *число N_k атомів $A_{\tau^{(k)}}$ може бути знайдене із рекурентної формули:*

$$N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 4, N_k = 2 \sum_{j=1}^{k-3} P_j^{(k)} + P_{k-2}^{(k)} \quad (5.1)$$

де для кожного k $P_j^{(k)}$ є множиною чисел, визначених таким рекурентним співвідношенням для $j \in \mathbb{Z}, j \geq 3$

$$P_0^{(k)} = 1, P_1^{(k)} = k - 1, P_2^{(k)} = k - 2, P_j^{(k)} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + \dots + P_{j-2}^{(k)})(k - j) .$$

Доведення. 1) Розглянемо окіл сідлового критичного рівня відповідної критичної точки p_0 , представлений у вигляді $(2k + 2)$ -кутника із склеєними (або ж несклеєними) сторонами. Використовуючи цей багатокутник, побудуємо відповідну підстановку склейки. Кожній можливій склейці сторін багатокутника відповідає підстановка τ , задана на множині $\{1, 2, \dots, k\}$. Слід зазначити, що якщо кожна сторона не склеєна з іншими сторонами $(2k + 2)$ -кутника, то отримаємо тривіальну підстановку.

2) Число атомів рівне числу нееквівалентних хордових діаграм. Тому число нееквівалентних хордових діаграм із $k + 1$ відміченими точками і нефіксованим числом хорд (від 0 до $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$) також позначатимемо через N_k .

Спершу розглянемо число можливих з'єднань точки Q_1 із іншими відміченими точками, включаючи варіант коли Q_1 не з'єднана хордою із іншими точками. Точку Q_1 можна з'єднати із іншими відміченими точками $(k - 1)$ способами і відповідне число атомів рівне N_{k-2} . У іншому випадку отримаємо $(k - 1)$ відмічену точку і число можливих склейок буде рівне N_{k-1} . Тому має місце рекурентна формула: $N_k = N_{k-1} + (k - 1) \cdot N_{k-2}$, $g \geq 3$.

Такими ж міркуваннями можна отримати наступні рівності: $N_k = N_{k-1} + (k-1) \cdot N_k = (1+k-1) \cdot N_{k-2} + (k-2) \cdot N_{k-3} = (1+k-1+k-2) \cdot N_{k-3} + (1+k-1)(k-3) \cdot N_{k-4} = (1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)) \cdot N_{k-4} + (1+k-1+k-2)(k-4) \cdot N_{k-5} = (1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)+(1+k-1+k-2)(k-4)) \cdot N_{k-5} + (1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3))(k-5) \cdot N_{k-6} = \dots = ((1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)+(1+k-1+k-2)(k-4)+(1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3))(k-5)+\dots+(1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)+\dots+(1+k-1+k-2+\dots+(k-(k-2)+2)(k-(k-2)+1)))) \cdot N_{k-(k-2)} + ((1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)+(1+k-1+k-2)(k-4)+(1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3))(k-5)+\dots+(1+k-1+k-2+(1+k-1)(k-3)+\dots+(1+k-1+k-2+\dots+(k-(k-1)+3))((k-(k-1)+1)))) \cdot N_{k-(k-1)}$.

Розглянемо позначення: $P_0^{(k)} = 1$, $P_1^{(k)} = k - 1$, $P_2^{(k)} = k - 2$, $P_j^{(k)} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + \dots + P_{j-2}^{(k)})(k - j)$ тоді попередня рівність перепишеться у вигляді: $N_k = P_0^{(k)} \cdot N_{k-1} + P_1^{(k)} \cdot N_{k-1} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)}) \cdot N_{k-2} + P_0^{(k)} P_2^{(k)} \cdot N_{k-3} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + P_2^{(k)}) \cdot N_{k-3} + P_3^{(k)} \cdot N_{k-4} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + P_2^{(k)} + P_3^{(k)}) \cdot N_{k-4} + P_4^{(k)} \cdot N_{k-5} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + P_2^{(k)} + P_3^{(k)} + P_4^{(k)}) \cdot N_{k-5} + P_5^{(k)} \cdot N_{k-6} = \dots = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + \dots + P_{k-2-1}^{(k)}) \cdot N_{k-(k-2)} + P_{k-1-1}^{(k)} \cdot N_{k-(k-1)} = N_2 \cdot \sum_{j=0}^{k-3} P_j^{(k)} + N_1 \cdot P_{k-2}^{(k)} = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-3} P_j^{(k)} + P_{k-2}^{(k)}$. \square

За допомогою формули (5.1) можна обрахувати число N_k атомів $A_{\tau(k)}$. Деякі випадки обрахунку представлені у таблиці 5.1.1.

k	N_k	k	N_k	k	N_k	k	N_k
1	1	6	76	11	35696	16	46206736
2	2	7	232	12	140152	17	211799312
3	4	8	764	13	568504	18	997313824
4	10	9	2620	14	2390480	19	4809701440
5	26	10	9496	15	10349536	20	23758664096

Таблиця 5.1.1. Число атомів $A_{\tau(k)}$ для $k \leq 20$

5.2 Оптимальні функції

Надалі розглянемо випадок гладкої зв'язної компактної поверхні з однією компонентою межі.

5.2.1 Критерій оптимальності функції

Теорема 5.2.1. *Нехай $f \in \Theta(M)$, де M — зв'язна компактна поверхня зі зв'язною межею, яка негомеоморфна до 2-вимірного диску. Тоді функція f оптимальна тоді і тільки тоді, коли вона має лише три критичні точки, дві з яких є точками мінімуму і максимуму, а третя — сідловою.*

Доведення. Покажемо необхідність. Для доведення необхідності слід показати наступне: 1) існування гладкої функції із трьома критичними точками на поверхні M , негомеоморфній 2-вимірному диску; 2) якщо функція має дві критичні точки на поверхні N , то N гомеоморфна 2-вимірному диску. Тоді з 1) випливатиме, що оптимальна функція має не більше трьох критичних точок (на поверхні негомеоморфній 2-диску), а з 2) маємо, що число критичних точок оптимальної функції більше двох (на поверхні негомеоморфній 2-диску). Тоді отримаємо наступне: оптимальна функція має рівно три критичні точки на поверхні негомеоморфній 2-вимірному диску.

1) Спершу розглянемо випадок орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі, яка отримана склейкою атома $A_{\tau(4g+1)}$ за підстановкою $(1, 4g)(2, 4g+1)(3, 4g-2)(4, 4g-1) \dots (2i-1, 4g-2i+2)(2i, 4g-2i+3) \dots (2g-1, 2g+2)(2g, 2g+3)$. Оскільки із хордової діаграми можна знайти рід поверхні, то використовуючи дану хордову діаграму, можна побудувати єдину, з точністю до гомеоморфізму, поверхню. Тому поверхня M задається хордовою діаграмою, зображеною на рис. 5.2.1: 1.

З іншого боку, атом критичного рівня функції $\text{Re}(x + iy)^{4g+1}$, заданий на деякій неорієнтованій поверхні роду $2g+1$, можна представити у вигляді $(4g+2)$ -кутника і відповідна хордова діаграма співпадатиме із вже описаною хордовою діаграмою (див. рис. 5.2.1: 2).

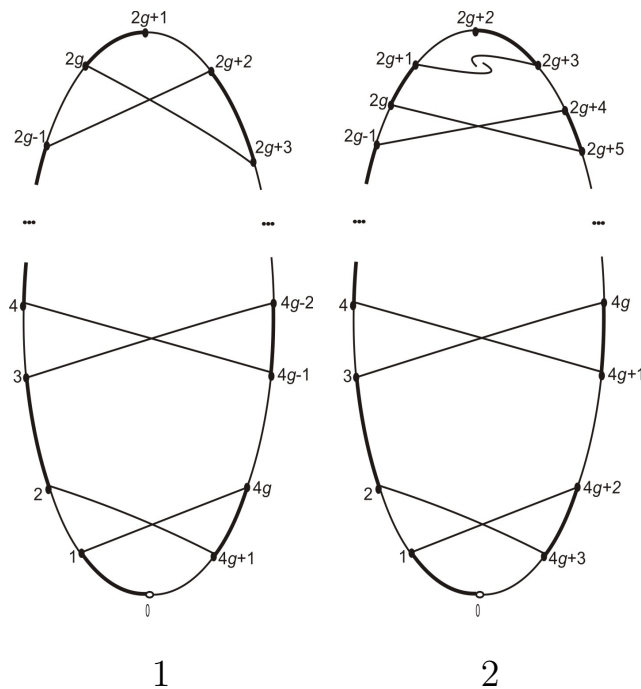


Рис. 5.2.1

Розглянемо півдиски $D_{+(-)}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq (\leq) 0\}$ і гомеоморфізми $\widehat{h}_{1,2} : [0, 4g+1] \rightarrow \partial_{\pm} D_{\pm}^2$, (де $\partial_+ D_+^2 = \{(x, y) \in \partial D_+^2 | y > 0\}$, $\partial_- D_-^2 = \{(x, y) \in \partial D_-^2 | y < 0\}$) такі, що $\widehat{h}_{1,2}(j) = (-1 + \frac{j}{4g+1}, \pm \sqrt{1 - (-1 + \frac{j}{4g+1})^2})$, $j = \overline{0, 4g+1}$ і вкладення $h_{1,2} : [0, 4g+1] \rightarrow \partial M$ такі, що $h_1(0) = P_0$, $h_1(1) = P_1, h_1(2) = P_{4g}, h_1(3) = P_{4g+1}, \dots, h_1(4g) = P_{2g}, h_1(4g+1) = P_{2g+1}$,

$h_2(0) = N_0, h_2(1) = N_{4g+1}, h_2(2) = N_2, h_2(3) = N_1, \dots, h_2(4g) = N_{2g+2}, h_2(4g+1) = N_{2g+1}$. Заклеїмо отриманий атом півдисками $D_{\pm}^2 \cup [-1, 1] \times \{0\}$ за відображенням $\widehat{h}_{1,2} \circ h_{1,2} : D_{\pm}^2 \rightarrow \partial M$.

Після цього отримаємо поверхню з однією компонентою межі. Також функція $\operatorname{Re}(x + iy)^{4g+1}$ може бути продовжена на півдиски своїми значеннями на компонентах межі, до яких приклеїли півдиски, та, за необхідності, отриману функцію можна згладити (див., наприклад, [62]).

Випадок гладкої функції із трьома критичними точками на неорієнтованій поверхні можна отримати, розглянувши аналогічні попереднім викладки для атома $A_{\tau(4g+3)}$ із підстановкою склейки $(1, 4g+2)(2, 4g+3)(3, 4g)(4, 4g+1) \dots (2i-1, 4g-2i+4)(2i, 4g-2i+5) \dots (2g-1, 2g+4)(2g, 2g+5)(2g+1, 2g+3)$ (див. рис. 5.2.1: 2), який співпадає з атомом сідлового критичного рівня функції $\operatorname{Re}(x + iy)^{4g+3}$. Також у неорієнтованому випадку слід розглянути приклеїку півдисків D_{\pm}^2 за вкладеннями $\widehat{h}_{1,2} \circ h_{1,2} : D_{\pm}^2 \rightarrow \partial M$, where $\widehat{h}_{1,2} : [0, 4g+1] \rightarrow D_{\pm}^2$, $\widehat{h}_{1,2}(j) = (-1 + \frac{j}{4g+3}, \pm \sqrt{1 - (-1 + \frac{j}{4g+3})^2})$, $j = \overline{0, 4g+3}$, and $h_{1,2} : [0, 4g+3] \rightarrow \partial M$, $h_1(0) = P_0, h_1(1) = P_1, h_1(2) = P_{4g+2}, h_1(3) = P_{4g+3}, \dots, h_1(4g+1) = P_{2g+1}, h_1(4g+2) = P_{2g+3}, h_1(4g+3) = P_{2g+2}, h_2(0) = N_0, h_2(1) = N_{4g+3}, h_2(2) = N_2, h_2(3) = N_1, \dots, h_2(4g+2) = N_{2g+1}, h_2(4g+3) = N_{2g+2}$.

Тому побудовано гладку функцію з трьома ізольованими особливостями на межі, які є також ізольованими критичними точками обмеження функції на межу поверхні.

2) Припустимо, що функція f має дві критичні точки на поверхні N . Розглянемо градієнтно-подібне векторне поле для f , яке є дотичним до N (див., наприклад, [61]). Після цього можна розглянути функцію, яка переводить лінії рівня функції f на поверхні N у відрізки $y = \text{const}$ на диску D^2 , та траєкторії градієнтно-подібного векторного поля переходять у криві $\gamma_t = \{c \cos t, t(1-c) + \sin t | c \in [0, 1]\}$, $t \in [t_c^-, t_c^+]$, де t_c^-, t_c^+ — найменші за модулем корені рівнянь $t(1-c) + \sin t = -1$ та $t(1-c) + \sin t = 1$ відповідно. Ця функція задає гомеоморфізм

N і 2-вимірним диском D^2 , оскільки через кожну точку D^2 проходить тільки одна лінія рівня і одна траєкторія.

Доведемо достатність. Припустимо, що це не так. Це означає, що існує функція, яка має три критичні точки на заданій поверхні, але не є оптимальною. Це означає, що оптимальна на цій поверхні має дві критичні точки (оскільки гладка функція на компактній поверхні має принаймні дві критичні точки). Тому, в силу умови 2) у доведенні необхідності теореми 5.2.1, ця поверхня буде 2-вимірним диском. Отримана суперечність доводить достатність даної теореми. \square

Зауваження 5.2.2. Функція $f \in \Theta(D^2)$, задана на двовимірному диску D^2 , є оптимальною тоді і тільки тоді, коли вона має дві критичні точки (точки екстремуму) і може бути реалізована за допомогою функції висоти.

Надалі у цьому розділі припустимо, що критичні значення оптимальної функції дорівнюють $-1, 0, 1$. Це можна зробити, так як існує гомеоморфізм прямої, який переводить три критичні значення функції у точки $-1, 0, 1$. Також, для спрощення викладок, на рисунках розбиття дуг не будемо зображати (тобто всі дуги будуть однакового кольору), а за умовчанням вважатимемо першу дугу зліва від точки Q_0 чорного кольору, що автоматично задає розбиття всіх дуг оснащеної хордової діаграми.

Оснащену хордову діаграму можна розглядати як граф, вершинами якого є відмічені точки, а ребрами — дуги і хорди. Тоді для хордових діаграм коректно заданим є поняття шляху та суміжності дуг і хорд (як ребер графу).

Означення 5.2.3. Шлях між відміченими точками на оснащій хордовій діаграмі називається *правильним*, якщо він задовольняє наступні умови:

- 1) хорди і дуги чергуються (під час проходження цього шляху);

- 2) кожна хорда 1-го типу розбиває своїми кінцями коло на дві частини і дві суміжні до неї дуги лежать у одній частині;
- 3) для хорди 2-го типу суміжні дуги лежать у різних частинах щодо її кінців.

Означення 5.2.4. Правильний шлях між вільними відміченими точками, який проходить через кожен хорду по одному разу, називається *повним шляхом*.

Зауважимо, що поняття правильного шляху можна розглядати у більш загальному випадку, а саме як шляху між відміченими точками, але нас цікавить тільки питання пов'язані із повним шляхом між вільними точками хордової діаграми.

Також кожен правильний шлях відповідає компоненті додатної чи від'ємної частини межі атома.

5.2.1 Випадок орієнтованої поверхні з однією компонентою межі

Теорема 5.2.5. *Хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на орієнтованій поверхні з однією компонентою межі задовольняє такі умови:*

- 1) кожна хорда ділить коло на дуги, які містять парні числа відмічених точок;
- 2) хордова діаграма має $k + 1 = 4n + 2$ відмічених точок (для певного натурального n) дві з яких є вільними відміченими точками, причому одна — точка Q_0 ;
- 3) існує два повні шляхи між вільними відміченими точками.

Доведення. Пункт 1) означає, що в умовах теореми на хордовій діаграмі можуть бути з'єднаними відмічені точки різної парності. Останнє виконується в силу орієнтованості поверхні (бо інакше атом міститиме стрічку Мюбіуса).

2) В термінах попередніх позначень, число відмічених точок рівне $k + 1$, а число хорд позначимо через m . Покажемо, що: а) k є непарним ($\Leftrightarrow k + 1$ — парне); б) хордова діаграма містить дві вільні точки і с) $2n$ хорди. Тоді з б) і с) випливатиме, що $k \equiv 1 \pmod{4}$, що означатиме, що $k + 1 = 4n + 2$ для деякого натурального n).

а) Функція f змінює знак при проходженні через критичну точку, оскільки $f(p_0) = 0$. Тоді дуги, які містять точку Q_0 , різного кольору. Тому число відмічених точок є парним, бо при проходженні кола S^1 хордової діаграми колір дуг чергується.

б) Припустимо, від супротивного, що хордова діаграма має менше $2n$ хорд і принаймні 3 вільні точки. Тоді відповідні 3 сторони атома належатимуть межі поверхні, оскільки після збільшення околу критичного рівня ці сторони не склеюються з іншими. Тому при подальшому збільшенні околу принаймні 4 півдиска D_{\pm}^2 приклеюються до поверхні. Останнє означає, що функція має не менше 5-ти критичних точок і, як наслідок, не є оптимальною.

Так, хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на орієнтованій поверхні з однією компонентою межі містить 2 вільні точки, одна з яких Q_0 , а друга відповідає критичній точці функції.

с) З'єднання відмічених точок (із номерами різної парності) рівносильне приклеїці 1-ручки (прямокутника). Це приєднання або збільшує число компонент межі на 1 (якщо 1-ручка приклеюється до одної компоненти межі), або ж зменшує на 1 (у випадку приклеївки 1-ручки до різних компонент межі поверхні). В той же час рід поверхні збільшується після кожної такого приєднання ручок.

Розглянемо півдиск $D_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ (без приклеєних 1-ручок). Початково D_+^2 має одну компоненту межі, але кожна приклеївка 1-ручки змінює число компонент межі на 1. Це означає, що поверхню з однією компонентою межі можна отримати із D_+^2 із парним числом приклеєних 1-

ручок.

3) Припустимо, від супротивного, що на заданій хордовій діаграмі не існує повного шляху. Тоді відповідна поверхня має принаймні дві компоненти межі, що суперечить умовами теореми. \square

Зауважимо, що для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції, приналежність хорди до класу хорд 1-го (2-го) типу рівносильне тому, що вона своїми кінцями розбиває коло на дуги, кожна з яких містить парне (непарне) число відмічених точок, так як згідно з умовою 3) теореми 5.2.5 загальне число відмічених точок $k + 1 = 4n + 2$ є парним.

Наслідок 5.2.6. *Підстановка склейки не містить циклу $(i, j + 1)(i + 1, j)$ для всіх можливих $i, j \in \{0, k\}$.*

Доведення. Якщо підстановка склейки містить цикл $(i, j + 1)(i + 1, j)$ для деяких i, j , то, оскільки кожен шлях із точки Q_0 у довільну точку Q_p , $p \in \{0, k\} \setminus \{i, i + 1, j, j + 1\}$ не проходить через дуги $\widehat{i, i + 1}$, $\widehat{j, j + 1}$ та хорди $l_{i, j + 1}$, $l_{i + 1, j}$, на хордовій діаграмі немає повного шляху. Тому підстановка склейки не може містити цикл $(i, j + 1)(i + 1, j)$ для всіх можливих $i, j \in \{0, k\}$. \square

Наслідок 5.2.7. *Вільна відмічена точка хордової діаграми сідлового критичного рівня, за винятком точки Q_0 , має непарний номер.*

Доведення. Із пункту 2) теореми 5.2.5 випливає, що, за винятком точки Q_0 , хордова діаграма має відмічені точки Q_1, \dots, Q_{4n+1} , серед яких рівно $2n$ відмічених точок має парний номер і $2n + 1$ — непарний. Тому інша вільна точка матиме непарний номер. \square

Теорема 5.2.8 (критерій топологічної еквівалентності). *Оптимальні функції топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних рівнів еквівалентні.*

Доведення. Покажемо необхідність. Топологічна еквівалентність оптимальних функцій індукує еквівалентність хордових діаграм, що випливає з побудови.

Доведемо достатність. Припустимо, що хордові діаграми оптимальних функцій f і h еквівалентні. Таким чином, існують гомеоморфізми між лініями рівнів функцій f , h та лініями рівня функції $\operatorname{Re}(x+iy)^k$ (див. теорему 5.1.4). Нехай φ і ψ є цими гомеоморфізмами. Тоді, гомеоморфізм деякого околу сідлової критичної точки функції f на відповідний окіл функції h може бути заданим формулою $\varphi^{-1} \circ \psi$.

Розглянемо атом критичного рівня без критичної точки. Тоді хорда або вільна точка (за винятком Q_0) певній компоненті зв'язності. Еквівалентність хордових діаграм задає бієкцію між цими компонентами, тому гомеоморфізм між околами критичних точок функцій f і g можна продовжити до гомеоморфізму околі критичних рівнів цих функцій.

У такий спосіб продовжено гомеоморфізм на хорди. Також для кожної траєкторії градієнтно-подібного векторного поля існує точка, яка лежить на хорді або ж на межі багатокутника. Це означає, що ми отримали бієктивне відображення між цими траєкторіями. Так, в силу того, що на кожній траєкторії існує єдина точка з фіксованим значенням із $(0, 1)$, можна побудувати гомеоморфізм між відповідними траєкторіями, який зберігає значення функції. Ці гомеоморфізми задають гомеоморфізм поверхні, з чого випливає шукана топологічна еквівалентність. \square

Теорема 5.2.9 (реалізація). *Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1) – 3) теореми 5.2.5, то існує оптимальна функція, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої збігається із заданою.*

Доведення. Хордова діаграма може бути задана за допомогою числа k і підстановки склейки. Тому розглянемо функцію $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{4n+1}$, $y \geq 0$,

(сідловою) ізольованою критичною точкою якої є точка $p_0 = (0, 0)$, і ε -окіл критичного рівня $f(p_0) = 0$ (для деякого $\varepsilon > 0$) представлений у вигляді $(4n + 2)$ -кутника із заданим розбиттям секторів (заштриховані і незаштриховані, див. рис. 5.1.2: 1). Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що сторони багатокутника, які перетинаються з критичним рівнем функції, є відрізками з довжиною 2ε . Занумеруємо ці сторони від S_0 до S_{4n+1} , так як це показано на рис. 5.2.2.

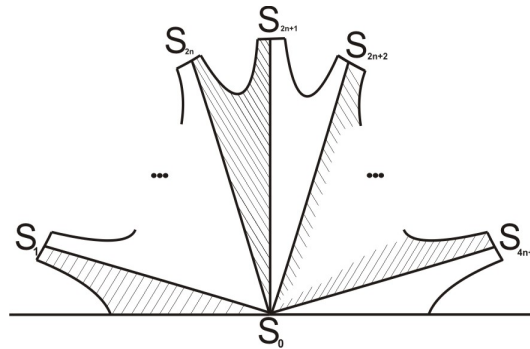


Рис. 5.2.2

Розглянемо приклеїку прямокутника $[0, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ до сторін S_i і S_j за наступним відображенням: $p : \{0, 1\} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \{S_i, S_j\}$, $p((0, -\varepsilon)) = Q_{2i}$, $p((0, \varepsilon)) = Q_{2i-1}$, $p((1, -\varepsilon)) = Q_{2j-1}$, $p((1, \varepsilon)) = Q_{2j}$ тоді і тільки тоді, коли підстановка склейки містить цикл (i, j) . Далі задамо функцію $f(x, y)$ на цьому прямокутнику її другою координатою $f(x, y) = y$. Отримаємо атом сідлового критичного рівня. Після приклеїки до цього атома півдисків $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y - \varepsilon)^2 \leq (1 - \varepsilon)^2, y \geq \varepsilon\}$, $D_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y + \varepsilon)^2 \leq (1 - \varepsilon)^2, y \leq -\varepsilon\}$ (так як це було зроблено у теоремі 5.2.1 в орієнтованому випадку) продовжимо функцію f на ці півдиски формулою $f(x, y) = y$. За необхідності отриману функцію можна згладити (див., наприклад [62]). Так, отримано поверхню і гладку функцію на ній, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої співпадає з початково заданою хордовою діаграмою, що доводить твердження теореми. \square

Із теорем 5.2.5, 5.2.8 і 5.2.9 випливає, що кожна хордова діаграма задає (з точністю до топологічної еквівалентності) оптимальну функцію на орієнтованій

поверхні із однією компонентою межі тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови 1) — 3) теореми 5.2.5.

Нагадаємо, що через $F_{i,1}$ позначається компактна орієнтована поверхня роду i із однією компонентою межі (див розділ 4).

Використовуючи властивості хордової діаграми, було обраховано число (з точністю до пошарової (топологічної) еквівалентності) оптимальних функцій, заданих на орієнтованій поверхні із однією компонентою межі у випадках:

1) поверхні роду 1: 1 (1):

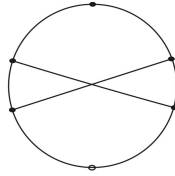


Рис. 5.2.3. Хордова діаграма оптимальних функцій на $F_{1,1}$, розглянутих з точністю до пошарово оснащеної (топологічної) еквівалентності

2) поверхні роду 2: 5 (8):

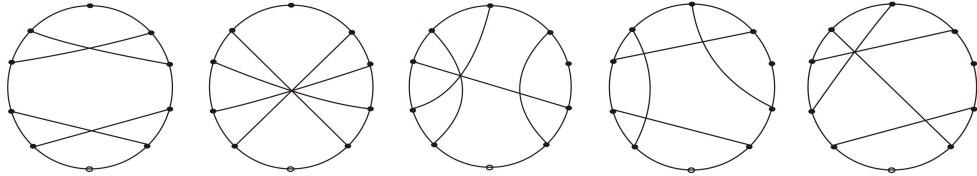


Рис. 5.2.4. Хордові діаграми оптимальних функцій на $F_{2,1}$, розглянутих з точністю до пошарово оснащеної еквівалентності

3) поверхні роду 3: 84.

У випадку орієнтованої поверхні роду 3 для обрахунків було використано хордові діаграми із 7-ма хордами на замкненій поверхні (див. рис. 1.7.2), які були раніше детально описані у розділі 1.7.2 (також див. роботу [48]).

Для знаходження числа нееквівалентних атомів і f-атомів сідлового критичного рівня розглянуто всі можливі симетрії та повороти хордових діаграм, зображених на рис. 1.7.2.

Будемо використовувати аббревіацію c.d. для позначення хордових діаграм. Опишемо кількість атомів, які можна отримати із кожної c.d. 1 — 25 (рис. 1.7.2) додаючи дві вільні відмічені точки та розглядаючи c.d. з точністю до еквівалентності (еквівалентні c.d. інколи будемо називати рівними). Так, із 1-ої c.d. отримаємо 1 атом; із 2-ої — 7, 3-ої — 4, 4-ої — 1; із c.d. 5-ої, 6-ої, 7-ої і 8-ої можна отримати по 7 атомів; 9-та c.d. співпадає із 6-ою c.d., а 10-та c.d. — із 1-ою; із 11-ої c.d. отримаємо 4 атоми; 12-та c.d. еквівалентна 4-ій, 13-та — 8-ій, а 14-та — 5-ій c.d.; із 15-ої c.d. отримаємо 7 атомів; 16-та c.d. співпадає із 15-ою, а 17-та — із 7-ою; 18-та c.d. дає нам 1 атом; 19-та — 4 атоми; 20-та c.d. еквівалентна 2-ій c.d.; із 21-ої c.d. отримаємо 4 атоми; із 22-ої — 7 атомів; 23-та і 25-та c.d. дають по 8 атомів; 24-та c.d. співпадає із 21-ою c.d.

В результаті описаних вище підрахунків отримано 84 оптимальні функції класу $\Theta(M)$ із трьома критичними точками з точністю до пошарової еквівалентності.

5.2.2 Випадок неорієнтованої поверхні з однією компонентою межі

Теорема 5.2.10. *Хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі задовольняє такі умови:*

- 1) існує принаймні одна хорда, яка розділяє коло на дві частини, кожна з яких містить непарне число відмічених точок;
- 2) існує рівно два повних шляхи між вільними точками;
- 3) хордова діаграма містить $k + 1 = 2n + 2$ відмічених точок, де n — число хорд, і існує рівно дві вільні точки, одна з яких — Q_0 .

Доведення. 1) Припустимо, що кожна хорда ділить коло на дуги з парними числами відмічених точок. Тоді окіл відповідної сідлового критичного рівня

оптимальної функції має вигляд багатокутника з приклеєними неперекрученими прямокутниками. Останнє означає орієнтованість поверхні, що суперечить умові. Отже, хордова діаграма містить хоча б одну хорду, яка розділяє коло на дуги з непарними числами відмічених точок.

2) Розглянемо наступні бієкції: (1) між компонентами зв'язності межі атому, на яких функція f приймає постійні значення та повними шляхами на хордовій діаграмі; (2) між вільними точками та компонентами зв'язності межі атому, на яких f монотонна.

З кожної вільної точки виходить рівно 2 повних шляхи. Також, якщо функція оптимальна, то за теоремою 5.2.1 число компонент зв'язності межі атому, на яких f приймає постійні значення, рівне двом. Тому, згідно вищеприказаним бієкціям, існує рівно 2 повних шляхи між вільними точками.

3) Повні шляхи, описані у доведенні пункту 2), мають 4 кінці. Тому, оскільки з кожної вільної точки виходить рівно 2 повних шляхи, то хордова діаграма містить 2 вільні точки, а отже $2n + 2$ відмічених точок, де n — число хорд. □

Також зауважимо, що так як і у орієнтованому випадку для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції, приналежність хорди до класу хорд 1-го (2-го) типу рівносильне тому, що вона своїми кінцями розбиває коло на дуги, кожна з яких містить парне (непарне) число відмічених точок, так як відповідно до умови 3) теореми 5.2.10 загальне число відмічених точок є парним.

Наслідок 5.2.11. *Підстановка склейки хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі не містить одночасно два цикли $(i, j + 1)$ та $(i + 1, j)$ для всіх $i, j \in \{0, k\}$ із однаковою парністю.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що для деяких i, j однакової парно-

сті підстановка склейки містить комбінацію циклів $(i, j + 1)(i + 1, j)$. Тоді відповідна хордова діаграма містить 2 хорди 1-го типу, а саме $\widetilde{Q_i Q_{j+1}}$ та $\widetilde{Q_{i+1} Q_j}$. У такому випадку не існує два повних шляхи, так як кожен шлях з точки Q_0 у довільну точку Q_p , $p \in \{0, k\} \setminus \{i, i + 1, j, j + 1\}$ не проходить через дуги $\widetilde{Q_i Q_{i+1}}$, $\widetilde{Q_j Q_{j+1}}$ і хорди $l_{i,j+1}$, $l_{i+1,j}$. Тому функція не є оптимальною. Отримали суперечність. \square

Зауважимо, що (на відміну від випадку орієнтованої поверхні) хордова діаграма може містити комбінацію циклів $(i, j+1)(i+1, j)$ для i, j різної парності і відповідні хорди $l_{i,j+1}$ та $l_{i+1,j}$ будуть 2-го типу, які зображатимемо так як це зроблено на рис. 5.2.5).



Рис. 5.2.5. Зображення хорди 2-го типу

Раніше ми довели критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій та теорему про існування оптимальної функції для заданої хордової діаграми з додатковими умовами у випадку орієнтованої поверхні з однією компонентою межі. Аналогічні результати можна отримати у випадку неорієнтованої поверхні з однією компонентою межі. Так, мають місце наступні твердження:

Твердження 5.2.12 (критерій топологічної еквівалентності). *Оптимальні функції на гладких неорієнтованих поверхнях з однією компонентою межі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних точок еквівалентні.*

Твердження 5.2.13 (реалізація). *Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1)–3) теореми 5.2.10, то існує оптимальна функція на гладкій неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої збігається із заданою.*

Зауваження 5.2.14. *Із теорем 5.2.1, 5.2.10 і тверджень 5.2.12, 5.2.13 випливає, що знаходження числа топологічно еквівалентних оптимальних функцій класу $\Theta(M)$ зводиться до класифікації оснащених хордових діаграм, які задовольняють умови 1) – 3) теореми 5.2.10.*

Через $\bar{F}_{i,1}$ позначатимемо компактну неорієнтовану поверхню роду i із 1-єю компонентою межі.

Твердження 5.2.15. *На листі Мюбіуса існує єдиний клас пошарової й топологічної еквівалентності оптимальних функцій.*

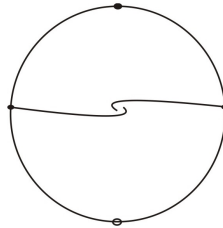


Рис. 5.2.6. Хордова діаграма оптимальних функцій на $\bar{F}_{1,1}$, розглянутих з точністю до пошарово (топологічної) еквівалентності

Доведення. Хордова діаграма оптимальної функції на неорієнтованій поверхні роду 1 містить чотири точки, дві з яких є вільними (див. теорему 5.2.10). Тоді, єдиність пошарово нееквівалентних функцій випливає з існування рівно одного способу з'єднання вершин, які не є вільними, хордою, а саме як це показано на рис. 5.2.6. Зауважимо, що дана хордова діаграма відповідає підстановці склейки (1, 3). Оскільки ця хордова діаграма є симетричною, то число нееквівалентних оптимальних функцій на листі Мюбіуса не збільшується при топологічній класифікації. Тому, враховуючи зауваження 5.2.14 на неорієнтованій поверхні роду 1 із межею існує єдина з точністю до топологічної (пошарової) еквівалентності функція. □

Твердження 5.2.16. *На плящі Клейна з діркою існує 2 (3) пошарово (топологічно) нееквівалентні оптимальні функції.*

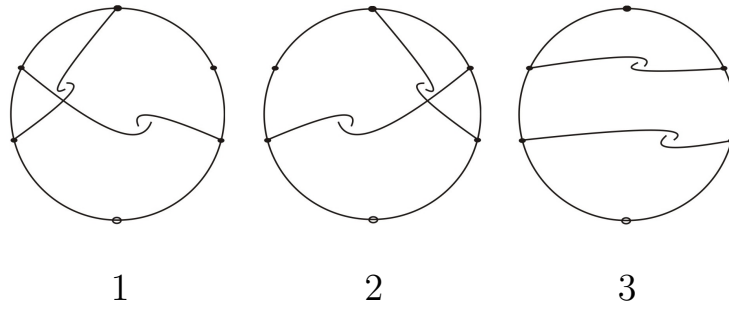


Рис. 5.2.7. Хордові діаграми оптимальних функцій на $\bar{F}_{2,1}$, розглянутих з точністю до пошарово (топологічної) еквівалентності

Доведення. Поверхня оптимальної функції гомеоморфна атому сідлової точки, який в свою чергу гомеоморфний диску з приклеєними стрічками у відповідності до розташування та типу хорд. Для того, щоб з диску отримати пляшку Клейна з діркою до нього потрібно приклеїти дві стрічки, принаймні одна з яких повинна бути перекрученою. Тому надалі задача зводиться до знаходження числа оснащених хордових діаграм, які містять 6 відмічених точок і дві хорди, хоча б одна з яких 2-го типу, та задовольняють умови 1) — 3) теореми 5.2.10.

Занумеруємо вершини оснащеної хордової діаграми від Q_0 до Q_6 . Як і раніше, вершину Q_0 вважатимемо вільною відміченою точкою (яка відповідає сідловій критичній точці функції). Зауважимо, що оснащена хордова діаграма повинна задовольняти умови 1) — 3) теореми 5.2.10. Розглянемо можливі варіанти з'єднання вершини Q_1 з іншими вершинами: (c1) Q_1 є вільною точкою; (cі) Q_1 з'єднано хордою з Q_i , $i \in \{2, 5\}$.

У випадку (c1) можливі наступні варіанти побудови хорд:

(c1): (c1-1) хорди з'єднують наступні пари точок Q_2 і Q_3 ; Q_4 і Q_5 ; (c1-2) хорди з'єднують наступні пари точок Q_2 і Q_4 ; Q_3 і Q_5 ; (c1-3) хорди з'єднують наступні пари точок Q_2 і Q_5 ; Q_3 і Q_4 .

Але у всіх варіантах побудови (c1) і (c2) хордові діаграми не задовольняють умову 3) теореми 5.2.10.

Для (с3), (с4) і (с5) розглянемо наступні можливі варіанти:

- (с3): (с3-1) вершина Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , Q_2 — вільна відмічена точка, тоді вершини Q_4 і Q_5 з'єднані хордою; (с3-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , а Q_2 — з Q_4 ; (с3-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , а Q_2 — з Q_5 ;
- (с4): (с4-1) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — вільна відмічена точка, тоді Q_3 з'єднано хордою з Q_5 ; (с4-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — з Q_3 ; (с4-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — з Q_5 ;
- (с5): (с5-1) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — вільна відмічена точка, тоді Q_3 з'єднано хордою з Q_4 ; (с5-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — з Q_3 ; (с5-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — з Q_4 .

У випадках (с3-1), (с3-2), (с4-2), (с5-1), і (с5-2) отримана оснащена хордова діаграма не містить повний шлях, тому не задовольняє умову (3) теореми 5.2.10, а хордова діаграма для варіанту (с4-3) не містить хорди 2-го типу (відповідає орієнтованій поверхні). Оснащені хордові діаграми, описані у (с3-3) (див. рис. 5.2.7: 1), (с4-1) (див. рис. 5.2.7: 2), (с5-3) (див. рис. 5.2.7: 3) задовольняють умови теореми 5.2.10 і їх підстановки склейки відповідно дорівнюють (13)(25), (14)(35) і (15)(24).

Так, зображені на рис. 5.2.7 оснащені хордові діаграми задають 3 класи топологічної еквівалентності функцій на неорієнтованій поверхні роду 2. Оскільки у випадках (с3-3) та (с4-1) оснащені хордові діаграми є взаємно-симетричними, то при розгляді пошарової еквівалентності число нееквівалентних функцій зменшується на 1. \square

Аналогічно можна отримати число пошарово (топологічно) нееквівалентних оптимальних функцій на неорієнтованій поверхні роду 3 із однією компонентою межі.

Твердження 5.2.17. *На неорієнтованій поверхні роду 3 з однією компонентою межі існує 12 пошарово і 20 топологічно нееквівалентних оптимальних функцій.*

Хордові діаграми пошарово нееквівалентних оптимальних функцій класу $\Theta(\bar{F}_{3,1})$ зображені на рис. 5.2.8.

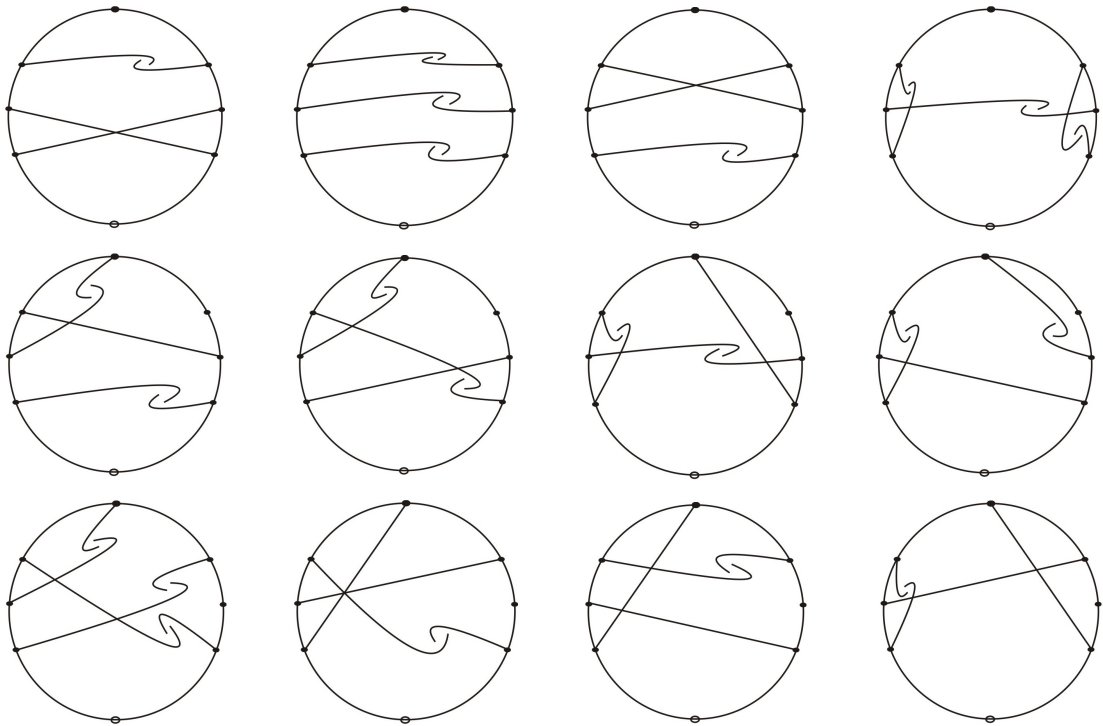


Рис. 5.2.8. Хордові діаграми оптимальних функцій на $\bar{F}_{3,1}$, розглянутих з точністю до пошарово оснащеної еквівалентності

5.3 Висновки

В даному розділі розглядались прості гладкі функції із ізольованими критичними точками на межі гладкої компактної зв'язної поверхні з однією компонентою межі, які є також ізольованими критичними точками відповідних обмежень функцій на межу. У класі цих функцій отримано такі результати: локальне представлення в околі критичної точки; критерій оптимальності; критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій вищеприписаного класу на

гладких поверхнях з однією компонентою межі в термінах попередньо означених хордових діаграм сідлового критичного рівня та інших допоміжних понять у випадку поверхні з однією компонентою межі; умови реалізації.

Результати, отримані в розділі 5, опубліковано в статтях [2^a, 5^a].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячений дослідженню гладких функцій на поверхнях із межею. Отримано такі результати:

1) для m -функцій:

- отримано локальне зображення;
- описано класифікацію простих атомів;
- знайдено критерій оптимальності простих функцій;
- отримано умови продовження простої функції Морса із межі на всю поверхню до простої оптимальної m -функції;

2) для функцій з невідродженими особливостями на компактних зв'язних орієнтованих поверхнях з межею (функції класу $\Omega_0(M)$):

- доведена топологічна еквівалентність класу m -функцій;
- отримано критерій \mathcal{O} -еквівалентності функцій в термінах оснащених КР-графів;
- для простих функцій з $\Omega_0(M)$ (позн. $\Omega(M)$) із не більш, ніж 5-ма критичними точками, описано всі оснащені КР-графи;
- знайдено формули для знаходження топологічного типу поверхні M за оснащеним КР-графом функції $f \in \Omega(M)$;

3) для функцій класу $\Sigma(M)$ одного з наступних класів:

- (a) прості функції Морса на M для $\partial M = \emptyset$,
- (b) прості m -функції на M (функції класу $\Omega(M)$),
- (c) прості m -функції,

де M — компактна зв'язна орієнтована поверхня ∂M (можливо, $\partial M = \emptyset$):

- описано деформації загального положення та деформації відповідних оснащених КР-графів;

- отримано зв'язок між оптимальністю та полярністю;
 - знайдено деформаційні графи для $F_{1,0}$, $F_{0,2}$, $F_{2,0}$, де $F_{i,j}$ — орієнтована поверхня роду i із j компонентами межі;
- 4) для функцій із ізольованими критичними точками на межі поверхні, які також є ізольованими критичними точками обмежень функцій на межу (функції класу $\Theta_0(M)$):
- узагальнюючи попередні результати для замкнених поверхонь, отримано топологічне представлення функцій в околі критичної точки;
 - описано прості атоми сідлового критичного рівня та виведено рекурентну формулу для знаходження їх числа;
 - доведено критерій оптимальності простих функцій класу $\Theta_0(M)$ (позн. $\Theta(M)$) для зв'язної компактної поверхні M зі зв'язною межею
 - знайдено критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій класу $\Theta(M)$ в термінах хордових діаграм сідлових критичних рівнів функцій;
 - описано необхідні і достатні умови реалізації оснащеної хордової діаграми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Matsumoto Y. An Introduction to Morse Theory / Y. Matsumoto // American Mathematical Society, Providence, Rhode island, 2002. — Vol. 208. — 237 pp.
- [2] Reeb G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / G. Reeb // Hermann & Cie., Paris, 1952. — № 1183: Actualités Sci. Ind. — Pp. 5–89, 155–156.
- [3] Кронрод А.С. О функциях двух переменных / А.С. Кронрод // Успехи мат. наук. — 1950. — Т. 5, № 1 (35). — С. 24–134.
- [4] Милнор Дж. Дифференциальная топология: Начальный курс / Дж. Милнор, А. Уоллес // Мир, 1972. — 280 с.
- [5] Sharko V.V. Classification of Morse functions on surfaces / V.V. Sharko // Low-Dimensional Topology and Combinatorial Group Theory. International Summer Conference, Chelyabinsk Univ. — 1996. — P. 19–25.
- [6] Болсинов А.В. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 2 (272). — С. 49–77.
- [7] Ошемков А.А. О классификации потоком Морса-Смейла на двумерных многообразиях / А.А. Ошемков, В.В. Шарко // Мат. сборник. — 1998. — Т. 189, № 8. — С. 93–140.
- [8] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамиль-

- тоновых систем / А.Т. Фоменко // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 1. — С. 145–173.
- [9] Фоменко А.Т. Топологический инвариант и критерии эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы / А.Т. Фоменко, Х. Цишанг // Известия АН СССР, сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 3. — С. 546–575.
- [10] Bolsinov A.V. On classification of flows on manifolds, I / A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, V.V. Sharko // Methods Funct. Anal. Topology. — 1996. — Vol. 2, № 2. — P. 51–60.
- [11] Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко // Изд. Дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. — Т. 1. — 444 с.
- [12] Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.
- [13] Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса / А.О. Пришляк // Труды ин-та матем. НАНУ, Ин-т математики НАНУ, Киев, 1998. — Vol. 25: Некоторые проблемы современной математики. — С. 319–325.
- [14] Пришляк А.О. Эквивалентность m -функций на трехмерных многообразиях с углами / А.О. Пришляк // Доповіді НАНУ. — 2000. — № 6. — С. 22–26.
- [15] Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А.А. Ошемков // Труды МИАН, 1994. — Т. 205: Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем. — С. 131–140.
- [16] Шарко В.В. Функции на поверхностях, I / В.В. Шарко // Труды ин-та

- матем. НАНУ, Ин-т математики НАНУ, Киев, 1998. — Vol. 25: Некоторые проблемы современной математики. — С. 408–434.
- [17] Максименко С.І. Компоненти пространств отображений Морса / С.І. Максименко // Труды ин-та матем. НАНУ, Ин-т математики НАНУ, Киев, 1998. — Vol. 25: Некоторые проблемы современной математики. — С. 135–153.
- [18] Лукова-Чуйко Н.В. Пошарова еквівалентність функцій Морса на тривимірних многовидах / Н.В. Лукова-Чуйко // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2008. — № 2. — С. 16–18.
- [19] Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях / А.О. Пришляк // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 173–174.
- [20] Личак Д.П. Геометрія функцій Морса на поверхнях / Д.П. Личак, А.О. Пришляк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 213–234.
- [21] Jankowski A. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary / A. Jankowski, R. Rubinsztein // Comment. Math. — 1972. — Vol. 16. — P. 99–112.
- [22] Максименко С.І. Классификация m -функций на поверхностях / С.І. Максименко // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 8. — С. 1129–1135.
- [23] Пришляк А.О. Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях / А.О. Пришляк // Palmarium. Academic publishing, Saarbrücken, 2012. — 123 с.
- [24] Maksymenko S.I. Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces / S.I. Maksymenko, Y.O. Polulyakh // Methods Funct. Anal. Topology. — 2016. — Vol. 22, № 3. — P. 266–282.

- [25] Пришляк О.О. Класифікація простих m -функцій на орієнтованих поверхнях / О.О. Пришляк, К.І. Міщенко, Н.В. Лукова-Чуйко, К.І. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — Т. 104, № 1. — С. 1–12.
- [26] Лукова-Чуйко Н.В. m -Функцій на неорієнтованих поверхнях / Н.В. Лукова-Чуйко, О.О. Пришляк, К.І. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — Т. 108, № 2. — С. 176–185.
- [27] Пришляк О.О. Функції загального положення на поверхнях з межею / О.О. Пришляк // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2008. — № 20. — С. 77–79.
- [28] Лукова-Чуйко Н.В. Пошарова еквівалентність m -функцій загального положення на 3-вимірних многовидах з межею / Н.В. Лукова-Чуйко, О.О. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — Т. 106, № 3. — С. 114–123.
- [29] Шарко В.В. Топологічна еквівалентність псевдо-гармонічних функцій загального положення на площині / В.В. Шарко, Є.О. Полулях, Ю.Ю. Сорока // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 6. — С. 7–47.
- [30] Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд // Наука, Москва, 1990.— 128 с.
- [31] Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений, I. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде // Наука, Москва, 1982. — 304 с.
- [32] Jongen Th.H. Nonlinear optimization in Finite Dimensions. Morse theory, Chebyshev Approximation, Transversality, Flows, Parametric Aspects / Th.H. Jongen, P. Jonker, F. Twilt // Springer-Science+Business Media, B.V., 2000. — Vol. 47: Nonconvex optimization and its applications. — 516 pp.

- [33] Кудрявцева Е.А. Топология пространств функций Морса на поверхностях / Е.А. Кудрявцева // *Мат. Заметки*. — 2012. — Т. 92, № 1–2. — С. 219–236.
- [34] Максименко С.И. Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе / С.И. Максименко, Б.Г. Фещенко // *Укр. мат. журн.* — 2014. — Т. 64, № 9. — С. 1205–1212.
- [35] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface / A.O. Prishlyak // *Topology Appl.* — 2002. — Vol. 119, № 3. — P. 257–267.
- [36] Морс М. Топологические методы теории функций комплексного переменного / М. Морс // *Изд. иностранной литературы, Москва, 1951.* — 248 с.
- [37] Максименко С.І. Функції із ізольованими особливостями на поверхнях / С.І. Максименко // *Праці Ін-ту математики НАН України, Ін-т математики НАНУ, Київ, 2010.* — Т. 7, № 4: Геометрія та топологія функцій на многовидах. — С. 7–66.
- [38] Полулях Е.А. Графы Кронрода–Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I / Е.А. Полулях // *Укр. мат. журн.* — 2015. — Т. 67, № 3. — С. 375–396.
- [39] Полулях Е.А. Графы Кронрода–Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. II / Е.А. Полулях // *Укр. мат. журн.* — 2015. — Т. 67, № 10. — С. 1398–1408.
- [40] Юрчук І.А. Властивості псевдо-гармонічних функцій на замкненій області / І.А. Юрчук // *Праці міжнародного геометричного центру.* — 2014. — Т. 4, № 4. — С. 50–59.
- [41] Bott R. Lectres on Morse theory / R. Bott // *Bull.Amer.Math.Soc.* — 1982. — Vol. 7. — P. 331–358.

- [42] Васильев В.А. Топология дополнений к дискриминантам / В.А. Васильев // ФАЗИС, Москва, 1997. — 538 с.
- [43] Матвеев С.В. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии / С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко // Изд. Моск. ун-та, Москва, 1991. — 301 с.
- [44] Stoimenov A. On the number of chord diagrams / A. Stoimenov // Discrete Math. — 2000. — Vol. 218, № 1–3. — P. 209–233.
- [45] Cori R. Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theor. Comput. Sci. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
- [46] Khruzin A. Enumeration of chord diagrams / A. Khruzin // arXiv:math.CO/008209. — 10 Pp.
- [47] Кадубовський О.А. Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях / О.А. Кадубовський // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 343–351.
- [48] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях / О.А. Кадубовський // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 6. — С. 105–145.
- [49] Lukova–Chuiko N.V. Minimal function on 3-manifolds with boundary / N.V. Lukova–Chuiko // Proc. Intern. Geom. Center. — 2015. — Vol. 8, № 3–4. — P. 46–52.
- [50] Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 1 (283). — С. 3–45.
- [51] Юрчук І.А. Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі / І.А. Юрчук // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 6. — С. 829–836.

- [52] Nicolaescu Liviu I. Morse functions statistics / Liviu I. Nicolaescu // arXiv: math.GT/0604437. — 5 pp.
- [53] Prishlyak O. Layers and topological equivalent of m-function / O. Prishlyak, V. Lisykevych // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2013. — № 4. — P. 21–26.
- [54] Шарко В.В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) / В.В. Шарко // Наук. думка, Киев, 1990. — 196 с.
- [55] Адельсон-Вельський Г.М. О множестве уровня непрерывных функций с частными производными / Г.М. Адельсон-Вельський, А.С. Кронрод // Докл. Акад. Наук СССР. — 1945. — Т. 49, № 4. — С. 239–241.
- [56] Soroka Yu.Yu. Homeotopy groups of rotated tree like non-singular foliations on the plane / Yu.Yu. Soroka // Methods Funct. Anal. Topology. — 2016. — Vol. 22, № 3. — P. 283–294.
- [57] Sharko V.V. About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold / V.V. Sharko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2006. — Vol. 12, № 4. — P. 389–396.
- [58] Polulyakh A.O. On conjugate pseudo-harmonic functions / A.O. Polulyakh // Geometry, Topology Appl. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine. — 2009. — Vol. 6, № 2. — P. 505–517.
- [59] Polulyakh E. On the pseudo-harmonic functions defined on the disk / E. Polulyakh, I. Yurchuk // Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr., Kiev, 2009. — 151 pp.
- [60] Takens F. The minimal number of critical points of a function on compact manifold and the Lusternik-Shnirelmann category / F. Takens // Inventiones Mathematicae. — 1968. — Vol. 6. — P. 197–244.
- [61] Borodzik M. Morse theory for manifolds with boundary / M. Borodzik,

- A. Nemethi, A. Ranicki // *Algebr. Geom. Topol.* — 2016. — Vol. 16, № 2. — P. 971–1023.
- [62] Коннер П. Гладкие периодические отображения / П. Коннер, Э. Флойд // Мир, 1969. — 340 с.
- [63] Sergeraent F. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications / F. Sergeraent // *Annales scientifiques de l'E.N.S.* — 1972. — Vol. 5, № 4. — P. 599–660.
- [64] Church P.T. Differentiable open maps of $(p+1)$ -manifold to p -manifold / P.T. Church, J.G. Timourian // *Pacific J.Math.* — 1973. — Vol. 48, № 1. — P. 35–45.

Додаток

Список опублікованих праць

Статті у наукових фахових виданнях

(які входять до міжнародних наукометричних баз даних)

- 1^a Гладиш Б.І. Функції з невідродженими критичними точками на межі поверхні / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. — 2016. — Т. 68, № 1. — С. 28–37.
- 2^a Hladysh Bohdana I. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold / Bohdana I. Hladysh and Alexandr O. Prishlyak // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2017. — Vol. 13, № 050. — 17 P.
- 3^a Гладиш Б.І. Деформації загального положення оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях з межею / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. — 2019. — Т. 71, № 8. — С. 1028–1039.
- 4^a Hladysh Bohdana Simple Morse functions on an oriented surface with boundary / Bohdana Hladysh and Alexandr Prishlyak // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2019. — Vol. 15, № 3. — P. 354–368.
- 5^a Гладиш Б.І. Функції з ізольованими критичними точками на межі неорієнтованої поверхні / Б.І. Гладиш // Нелінійні коливання. — 2020. — Том. 23, № 1. — С. 26–37.

Тези, опубліковані за результатами дисертації

- 6^a Prishlyak O.O. Functions with non-generated critical points on the boundary of manifold / O.O. Prishlyak, B.I. Ivanusa // International conference «Geometry in Odessa – 2015», Odesa, Ukraine, 25–31 May 2015. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2015. — P. 58.

- 7^a Ivanusa B.I. Optimal 2 mm-functions on surfaces with boundary / B.I. Ivanusa // International conference of young mathematicians, Kyiv, Ukraine, 3–9 June 2015. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — P. 15.
- 8^a Hladysh B.I. Topological aspects of surfaces by genus 3 with boundary and optimal functions defined on them in technical sciences. / B.I. Hladysh, V.V. Zhebka // International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies», Kyiv, Ukraine, 17–20 November 2015. — Kyiv: State University of Telecommunications, 2015. — P. 110.
- 9^a Гладиш Б.І. Топологічно нееквівалентні функції з трьома ізольованими критичними точками на межі орієнтованої поверхні / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Міжнародна наукова конференція «Геометрія і топологія в Одесі – 2016», Одеса, Україна, 2–8 червня 2016. — Одеса: Одеська національна академія харчових технологій, 2016. — С. 36.
- 10^a Hladysh B.I. Atoms of saddle critical level line of smooth functions on surfaces with boundary / B.I. Hladysh // XI-th summer school «Algebra, topology, analysis», Odesa, Ukraine, 1–14 August 2016. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2016. — P. 76.
- 11^a Hladysh B.I. Optimal functions with isolated critical points on the boundary of the surfaces / B.I. Hladysh, O.O. Prishlyak // International conference Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday, Kharkiv, Ukraine, 12–16 September 2016. — Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. — P. 22.
- 12^a Hladysh Bohdana. Continuation of functions, defined on the circle, to optimal Morse functions on the surface / Bohdana Hladysh and O.O. Prishlyak // International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, Lviv, Ukraine, 27 September – 1 October 2016. — Lviv: Ivan Franko

- National University of Lviv, 2016. — P. 22–23.
- 13^a Hladysh B.I. Deformations of functions with isolated critical points on the boundary of the surface / B.I. Hladysh // All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling», Mykolaiv, Ukraine, 19–21 October 2016. — Mykolaiv: Mukolaiv V.O. Sukhomlynskyi National University, 2016. — P. 12.
- 14^a Hladysh B.I. Deformation of a Morse function on a surface with the boundary / B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 31 May – 5 June 2017. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2017. — P. 50–51.
- 15^a Гладиш Б.І. Функції на поверхнях з межею та їх графи Кронрода-Ріба / Б.І. Гладиш, Н.В. Лукова-Чуйко // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917 – 2008), Київ, Україна, 7–10 червня 2017. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 16.
- 16^a Hladysh B. Functions with isolated critical points on the boundary of non-oriented surface / B. Hladysh // International conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (25.09.1949 – 07.10.2014), Kyiv, Ukraine, 25–28 September 2019. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 17–19.
- 17^a Hladysh B. Structure of functions on an oriented 2-manifold with the boundary / B. Hladysh, A. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 26–30 May 2020. — Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2020. — P. 27–28.

Апробація результатів дисертації

1. Науковий семінар відділу топології Інституту математики НАН України, 4 березня, 2015, м. Київ, Україна.
2. Семінар кафедри геометрії і топології Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова, 29 травня, 2015, м. Одеса, Україна.
3. International conference «Geometry in Odessa – 2015», May 25–31, 2015, Odessa, Ukraine.
4. Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology on Noncommutative Geometry in Astroparticle Physics and Quantum Optics, July 20 – August 2, 2015, Vienna, Austria.
5. International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies», November 17–20, 2015, Kyiv, Ukraine.
6. Семінар кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 10 грудня, 2015, м. Київ, Україна.
7. Семінар кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2 березня, 2016, м. Київ, Україна.
8. Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі – 2016», 2–8 червня, 2016, м. Одеса, Україна.
9. Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday, September 12–16, 2016, Kharkiv Ukraine.
10. The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski, September 27 – October 1, 2016, Lviv, Ukraine.
11. All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling», October 19–21,

- 2016, Mykolaiv, Ukraine.
12. Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology on Modern Problems in Noncommutative Astroparticle Physics and Categorical Quantum Theory, February 2–15, 2017, Vienna, Austria.
 13. Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology on Modern Problems in Noncommutative Astroparticle Physics and Categorical Quantum Theory, March 2–15, 2017, Vienna, Austria.
 14. Семінар кафедри геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 24 травня, 2017, м. Київ, Україна.
 15. International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», May 31 – June 5, 2017, Odesa Ukraine.
 16. Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics, June 4–18, 2018, Vienna, Austria.
 17. Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology on Categorical Quantum Mechanics of Neutron, April 24 – May 8, 2019, Vienna, Austria.
 18. Семінар кафедри геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 17 жовтня, 2019, м. Київ, Україна.