

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

ВАНЄЄВОЇ Олени Олександровни

“Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації”,

представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Дисертаційна робота О.О. Ванєєвої присвячена вивченю симетрій диференціальних рівнянь. Відомо, що всі основні рівняння класичної та квантової фізики (рівняння Ньютона, Максвелла, Лапласа, Даламбера, Дірака, Шредінгера та ін.), мають нетривіальні симетрійні властивості: вони є інваріантними відносно перетворень груп Лі — багатопараметричних груп неперервних перетворень. Такі рівняння виділяються і з точки зору теорії диференціальних рівнянь в процесі розв’язання задачі групової класифікації. Ще одним важливим застосуванням симетрій є те, що вони дають змогу алгоритмічно будувати точні розв’язки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ключовими результатами дисертаційної роботи є розвиток групового аналізу диференціальних рівнянь із застосуванням теорії групоїдів, розробка нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також застосування групоїдів еквівалентності до дослідження інтегровності, класифікації симетрій і пошуку точних розв’язків у класах рівнянь математичної фізики, біології та фінансової математики.

Слід підкреслити, що дисертація О.О. Ванєєвої є прикладом сучасного дослідження у галузі математичної фізики, де поєднуються та переплітаються сильні теоретичні та вагомі прикладні компоненти.

У роботах О.О. Ванєєвої детально і ретельно вивчено сучасний стан задач, що досліджувались, належним чином враховано та процитовано відповідні публікації інших науковців, що працюють у даній галузі.

Отримані результати проаналізовано та обговорено перспективи подальших досліджень, що робить роботу цінною для інших спеціалістів.

Робота є об'ємною й інформаційно насиченою, окрім чотирьох основних розділів ряд важливих нових результатів оформлено у вигляді додатків, у яких, зокрема, вивчено кілька типів операторів редукції для рівнянь реакції–дифузії і здійснено груповий аналіз рівнянь  $K(m, n)$ , рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса та узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього й п'ятого порядків.

За основними ж розділами структура наступна.

У першому розділі вдосконалено термінологію та розвинуто теорію групового аналізу диференціальних рівнянь, що базується на групоїдах еквівалентності, введено ряд нових необхідних понять і об'єктів. Зокрема, вперше введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії, породжувальної множини допустимих перетворень, біективних функторів між групоїдами, а також наведено алгоритм проведення групової класифікації алгебраїчним методом для ненормалізованих класів.

Другий розділ дисертації присвячено класам  $(1+1)$ - і  $(2+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку ( знайдено групоїди еквівалентності, прокласифіковані ліївські, некласичні й потенціальні оператори редукції). Важливими результатами цього розділу є, зокрема, побудова ланцюжку вкладених нормалізованих підкласів класу нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, отримання групової класифікації класу рівнянь реакції–дифузії методом граничних переходів (контракцій), використання типу групи еквівалентності відкаліброваних підкласів у якості критерію оптимального калібрування.

Третій, розділ дисертації містить цілу низку застосувань групоїдів еквівалентності до групової класифікації та дослідження інтегровності рівнянь типу Кортевега–де Фріза і споріднених задач. Важливими результатами є вичерпний опис групоїда еквівалентності ненормалізованого класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами, побу-

дова ланцюжка вкладених нормалізованих підкласів класу еволюційних рівнянь довільного порядку, групова класифікація важливих для застосувань рівнянь Кавахари, застосування групоїдів еквівалентності для дослідження інтегровності та інші.

У останньому основному розділі дисертації увагу зосереджено на алгебраїчному підході до групової класифікації, який може бути застосованим, як правило, до нормалізованих класів диференціальних рівнянь. В дисертації ж цей підхід поширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Завдяки цьому виконано групову класифікацію класу еліптичних і хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Також у цьому розділі досліджено ліївські симетрії  $(1+2)$ -вимірних рівнянь Дірака, що є цікавими для застосувань.

До змісту дисертації є незначне зауваження і побажання:

1. Дисертація не містить деяких класичних означень групового аналізу, що ускладнює її прочитання спеціалістами з інших галузей. Прикладом є термін “довільний елемент” класу диференціальних рівнянь.
2. З точки зору сучасної фізики цікавим є дослідження симетрійних властивостей рівнянь Дірака в  $(2+1)$ -вимірному просторі-часі, яке, зокрема, вивчалось і в дисертаційній роботі. Крім випадку, коли хвильова функція є однозначною функцією, важливим з точки зору фізики (ефект Ааронова–Бома) є випадок, коли хвильова функція має стрибок фази на певному промені в двовимірному просторі. Цікаво дослідити можливість класифікації таких хвильових функцій з точкових зору представлень групи симетрії відповідного рівняння Дірака.

Однак, це зауваження і побажання не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати і запропоновані методи можна використати у подальших дослідженнях симетрійних

властивостей рівнянь математичної фізики, а також при розв'язанні прикладних задач, що описують реальні явища і процеси різної природи.

Усі основні результати, які визначають наукову новизну дисертаційної роботи й виносяться на захист, одержано авторкою самостійно. Вони є новими, достовірними та пройшли достатню апробацію на наукових семінарах та конференціях. Основні результати роботи опубліковано у провідних журналах з математичної фізики та прикладної математики, це 29 наукових публікацій, більшість з яких проіндексовано у міжнародних наукометрических базах Scopus або Web of Science (14 з цих робіт опубліковано в наукових журналах з Q1 та Q2 рейтингу SJR). Їх добре цитують науковці, які працюють у цих галузях. Автореферат вірно і повно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертація "Групoidи еквівалентності в задачах групової класифікації" містить важливі наукові результати з групового аналізу диференціальних рівнянь, задовільняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її авторка Олена Олександровна Ванеєва заслуговує на присудження її наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент

завідувач лабораторії теорії інтегровних систем

відділу математичних методів в теоретичній фізиці

Інституту теоретичної фізики

ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ

доктор фіз.-мат. наук,

старший науковий співробітник

М.З. Йоргов

