

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

ВАНЄЄВОЇ Олени Олександрівни

“Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації”,

представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Актуальність теми дисертації. Задача класифікації ліївських симетрій у класах нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є однією з основних задач групового аналізу. Такі симетрії, зокрема, дозволяють відібрати фізично важливі рівняння з певного класу, а також побудувати їхні точні розв’язки. Для багатьох класів рівнянь, що є важливими для застосувань, класичні методи групового аналізу не дозволяють отримати вичерпну класифікацію симетрій. Особливо це стосується класів рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Такі задачі потребують нових підходів, більшість з яких ґрунтуються на використанні скінченних точкових перетворень між рівняннями. Отже актуальними напрямками досліджень є як створення нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, так і розв’язання конкретних класифікаційних задач групового аналізу. Ці напрями розвивають кілька шкіл групового аналізу у світі, зокрема, у Канаді, Австрії, Іспанії, Росії. При цьому українська школа групового аналізу наразі займає провідні позиції у світі. Актуальність теми підтверджують і високі цитування робіт дисертантки.

Наукова новизна та значимість отриманих результатів. У дисертації отримано низку важливих і оригінальних результатів, серед яких, на мою думку, особливо слід відзначити такі:

- Розширення алгебраїчного методу групової класифікації диференціальних рівнянь на ненормалізовані класи, зокрема введення понять породжувальної множини допустимих перетворень, сингулярних та регулярних розширень ліівської симетрії тощо. Оскільки багато класів диференціальних рівнянь, важливих для застосувань, не є нормалізованими, цей результат обіцяє мати широке застосування.
- Поширення методу граничних переходів на задачі групової класифікації. Раніше цей метод використовувався лише для встановлення зв'язків між окремими випадками побудованих класифікаційних списків розширень ліівської симетрії. У дисертації ж показано, що він має ширші застосування, зокрема, дає змогу отримати вичерпний результат групової класифікації для певних класів.
- Знаходження групоїдів еквівалентності для низки класів рівнянь, як нормалізованих, так і ненормалізованих. Так, побудовану ієрархію нормалізованих підкласів в класах $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого і вищих порядків можна використати для знаходження групоїдів еквівалентності багатьох їхніх підкласів, важливих для застосувань. Зважаючи на складність задачі обчислення групоїдів еквівалентності ненормалізованих класів, слід також відзначити таке обчислення у дисертації для класу рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами, а також класу хвильових рівнянь.
- Оптимізація методу калібрування довільних елементів класу диференціальних рівнянь сім'ями перетворень з групи еквівалентності. Цей метод добре відомий, але багато авторів обирають таке калібрування навмання, що у багатьох випадках не призводить до

достатнього спрощення задачі групової класифікації. У дисертації показано, як порівняння груп еквівалентності відкаліброваних класів дозволяє обрати оптимальне калібрування. Це проілюстровано на прикладах $(2+1)$ -вимірних рівнянь Колмогорова, $(1+1)$ -вимірних рівнянь Кавахари та Фішера.

- Переформулювання понять і методів групового аналізу диференціальних рівнянь на мові теорії групоїдів. Такий розгляд у сучасному контексті безперечно вартий уваги і буде сприяти подальшому розвитку групового аналізу диференціальних рівнянь. Аналогів цьому розгляду у літературі немає.
- Багато результатів щодо класифікацій лівських та неklasичних симетрій у конкретних класах рівнянь математичної фізики, біології та фінансової математики, які дозволяють виокремити з цих класів рівняння з найширшими симетрійними властивостями, а також побудувати їхні точні розв'язки. Кілька з цих класів вже було розглянуто у літературі, але наведені класифікації були неповними. Дисертантці вдалося заповнити ці прогалини, представивши повні групові класифікації. Це, зокрема, стосується класів рівнянь Кавахари, Гарднера, Колмогорова, Кортвега–де Фріза третього і п'ятого порядків.

Зауваження та пропозиції.

- У дисертації паралельно вжито терміни "збережений струм" (наприклад, на с. 101) і "збережений вектор" (зокрема, на с. 102), які означають те саме. Не зважаючи на те, що обидва терміни зустрічаються в літературі, було б доцільно уніфікувати цю термінологію в дисертації, використовуючи виключно більш уживаний

термін “збережений струм”. Аналогічно, є паралельне використання слів “експоненціальна” і “експоненційна” щодо функцій.

- Для $(2+1)$ -вимірних рівнянь Колмогорова за знайденими в процесі їх групової класифікації ліівськими симетріями не виконано відповідні ліівські редукції. Варто було б це зробити, а також побудувати точні інваріантні розв’язки таких рівнянь.
- При дослідженні подібних між собою диференціальних рівнянь з частинними похідними використано невироджені точкові перетворення. Корисно було б дослідити, чи є такі заміни ляпуновського типу, що важливо для якісного аналізу диференціальних рівнянь.
- Класифікацію ліівських симетрій нелінійних рівнянь Дірака проведено лише частково, а саме знайдено всі нееквівалентні одновимірними розширення ліівських симетрій для таких рівнянь, що зазначено й у дисертації. Варто було б завершити цю класифікацію, розглянувши розширення всіх можливих розмірностей.

Однак, ці зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи. Частина з них можна вважати побажаннями для подальшої роботи.

Загальний висновок. Дисертація Ванеєвої О.О. є важливим і актуальним дослідженням у галузі групового аналізу диференціальних рівнянь. Введені поняття, отримані результати та розвинуті в дисертації методи мають значні перспективи щодо подальшого їх використання не тільки в груповому аналізі диференціальних рівнянь, але й у суміжних областях, зокрема, теорії інтегровності.

Оформлення дисертації задовольняє всім вимогам, які висувають до рукописів на здобуття наукового ступеня доктора наук. Результа-

ти в повній мірі опубліковано у журнальних публікаціях, збірниках наукових праць, тезах конференцій тощо. Зі статей у співавторстві в дисертацію включено результати, отримані дисертанткою особисто, що відзначено окремо по кожній роботі. Результати дисертації доповідались на багатьох семінарах і конференціях, відомі спеціалістам і їх добре цитують. Автореферат дисертації вірно й повно відображає зміст роботи.

Враховуючи все зазначене вище, вважаю, що дисертація “Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації” містить важливі наукові результати з теорії та застосування симетрій диференціальних рівнянь, задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її авторка Ванеєва Олена Олександрівна заслуговує на присвоєння наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент

завідувач кафедри загальної математики

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

доктор фіз.-мат. наук, професор

О.М. Станжицький

