НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Ванєєва Олена Олександрівна

УДК 517.958

Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Попович Роман Омелянович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Іоргов Микола Зіновійович,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
НАН України, м. Київ,
завідувач лабораторії теорії інтегровних систем
відділу математичних методів в теоретичній фізиці;

доктор фізико-математичних наук, професор
Сєров Микола Іванович,
Національний університет "Полтавська політехніка
імені Юрія Кондратюка",
професор кафедри вищої та прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики.

Захист відбудеться 29 вересня 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 27 серпня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А.С. Романюк**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поль Дірак, лауреат Нобелівської премії з фізики й один із творців квантової механіки, зазначав: “Фізичний закон має бути математично красивим”. Математичними моделями фізичних законів часто виступають диференціальні рівняння, як звичайні, так і з частинними похідними. Виникає питання, які диференціальні рівняння математично красиві. З давніх часів саме симетрію асоціювали з красою в архітектурі, дизайні, а також вважали важливою рисою особистої привабливості. Після появи фундаментальних робіт С. Лі стало зрозуміло, що симетрію можна розглядати також як міру краси диференціальних рівнянь. Симетрією системи диференціальних рівнянь називають перетворення змінних системи, що відображає кожен розв’язок системи у розв’язок цієї самої системи. До того ж, наявність нетривіальних симетрійних властивостей — це одна з особливостей, які вирізняють диференціальні рівняння, що описують реальні фізичні процеси, з множини всіх диференціальних рівнянь. Основні рівняння математичної фізики, зокрема рівняння Ньютона, Лапласа, Даламбера, Ейлера–Лагранжа, Гамільтона–Якобі, Максвелла, Дірака, Шредінгера, інваріантні відносно багатопараметричних груп неперервних перетворень. Отже, результатом класифікації ліївських або некласичних симетрій (умовних, потенціальних, узагальнених) у певному класі рівнянь є виокремлення модельних рівнянь із нетривіальними симетрійними властивостями, які потенціально цікавіші для застосувань. Задачу класифікації допустимих груп ліївських симетрій називають задачею групової класифікації. Зважаючи на актуальність цієї тематики, груповим аналізом диференціальних рівнянь займаються у багатьох країнах світу, зокрема в Австралії (Ф. Броадбридж, Дж. Ґоард), Австрії (М. Кунцинґер), Великобританії (П. Гайдон, О. Михайлов), Італії (К. Нуччі, Е. Пуччі, Дж. Сакоманді, Р. Трачина), Іспанії (М. Брузон, М. Гандаріас), Канаді (С. Анко, А. Біло, Дж. Блюман, П. Вінтерніц, М. Ґрюндланд, Н. Камран, О. Шевяков), Китаї (Д. Хуанґ, Ч. Чу), Німеччині (М. Оберлак), Росії (В.К. Андрєєв, О.В. Боровських, Р.К. Газізов, В.А. Дородніцин, О.В. Капцов, В.В. Пухначьов, В.В. Соколов, І.В. Стєпанова, С.В. Хабіров), США (Б. Абрагам-Шраунер, Д. Арріґо, П. Олвер, В. Міллер), Таїланді (С. Мелешко), Чехії (М. Марван, С. Пошта, А. Сергєєв) і на Кіпрі (П. Ліч, К. Софоклеус). Українська школа групового аналізу, яку започаткував В.І. Фущич, наразі має провідні позиції у світі завдяки фундаментальному внеску в розвиток методів групового аналізу його учнів, зокрема А.Г. Нікітіна, В.М. Бойка, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича, М.І. Сєрова, В.А. Тичиніна, І.М. Цифри. Так, у роботах Р.О. Поповича і його учнів було введено поняття групоїда еквівалентності, розширених і розширених узагальнених груп еквівалентності, нормалізованого класу диференціальних рівнянь, модулів редукції, а також запропоновано такі методи розв'язання задач групової класифікації, як розбиття класу на нормалізовані підкласи, метод розгалуженого розщеплення й метод відображень між класами диференціальних рівнянь.

Іще одним важливим застосуванням симетрій є те, що вони дають змогу алгоритмічно будувати точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Такі рівняння моделюють найрізноманітніші процеси реального світу й виникають, зокрема, у математичній фізиці, математичній біології, фінансовій математиці. Вивчення нелінійних моделей є складною задачею, оскільки загальної теорії інтегрування для відповідних рівнянь не існує. Більшість випадків знаходження точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь пов'язані зі вдалим добором заміни змінних у рівнянні. При цьому невироджені точкові перетворення, які відповідають ліївським симетріям, є найуживанішими. Методи, що базуються на використанні невироджених точкових перетворень, — одні з найефективніших аналітичних інструментів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Модельні рівняння, що зустрічаються у застосуваннях, часто містять сталі або функціональні параметри, а отже, складають класи рівнянь. Важливою задачею є дослідження їхніх трансформаційних властивостей, а саме — опис невироджених точкових перетворень між рівняннями (системами рівнянь) з класу. Якщо дві системи диференціальних рівнянь пов'язані таким перетворенням, то їх називають еквівалентними або (у термінології Л.В. Овсянникова) подібними. Відповідно еквівалентні між собою простори локальних законів збереження, алгебри симетрій різних типів і сім'ї інваріантних розв'язків таких систем. Зокрема, метод еквівалентності дає змогу побудувати розв'язки системи із відомих розв'язків еквівалентної системи. Систематичне дослідження трансформаційних властивостей класів систем диференціальних рівнянь ініціювали Дж. Кінґстон і К. Софоклеус 1991 року. Вони назвали перетворення, що пов'язують рівняння у класі, формозберігаючими, оскільки такі перетворення зберігають структуру рівнянь класу і змінюють лише вигляд довільних елементів. 1992 року Ж.-П. Ґазо і П. Вінтерніц також почали досліджувати такі перетворення, назвавши їх дозволеними. Аналогічні перетворення у класах диференціальних рівнянь досліджувались, зокрема, у роботах П. Басараба-Горвата, Б.М. Ваґанана, Л. Ґаґнона, Ф. Ґунґора, С. Оземіра, М.І. Сєрова й Р.М. Черніги.

Розвинену теорію перетворень у класах диференціальних рівнянь сформульовано в роботах Р.О. Поповича та його співавторів, де запропоновано термін "допустимі перетворення". Допустиме перетворення у класі диференціальних рівнянь — це впорядкована трійка, що складається з двох рівнянь цього класу й невиродженого точкового перетворення, що відображає перше з цих рівнянь у друге. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда відносно операції композиції перетворень, а тому її називають групоїдом еквівалентності. Клас диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності якого породжено групою еквівалентності класу, називають нормалізованим. Використання допустимих перетворень дає можливість суттєво спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема, класифікації різних типів симетрій, побудову локальних законів збереження і точних розв'язків, а також дослідження інтегровності. Також важливо, що нормалізовані класи мають простіші трансформаційні властивості й зручніші для дослідження. Отже, важливими задачами групового аналізу, крім безпосереднього розв'язання задач групової класифікації, пошуку різних типів симетрій і точних розв'язків, є також побудова групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, цікавих для застосувань, і дослідження властивості нормалізованості таких класів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436), "Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0110U008615), "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059), "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства" (номер держреєстрації 0117U002119), "Класифікація симетрій та точні розв'язки нелінійних моделей фізичних та біологічних процесів” (номер держреєстрації 0118U003803), “Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики” (номер держреєстрації 0120U100173).

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи — розвиток теорії групоїдів еквівалентності класів диференціальних рівнянь, створення нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також розв’язання низки класифікаційних задач групового аналізу, зокрема задач класифікації ліївських і некласичних операторів редукції, законів збереження. Основну увагу в дисертації зосереджено на застосуванні групоїдів еквівалентності до дослідження інтегровності, класифікації симетрій і пошуку точних розв’язків у класах рівнянь математичної фізики, біології й фінансової математики.

Об’єктом дослідження є (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння і спеціальні класи таких рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема, рівняння типу реакції–дифузії, Фішера, Бюргерса, Кортевега–де Фріза, Кавахари, а також (1+1)-вимірні нелінійні хвильові й еліптичні рівняння, рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні й Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса, (2+1)-вимірні рівняння Колмогорова й Дірака.

Предметом дослідження є групи і групоїди еквівалентності класів диференціальних рівнянь, групова класифікація, ліївські, некласичні й потенціальні оператори редукції, закони збереження та розв’язки диференціальних рівнянь, а також контракції рівнянь, алгебр ліївської інваріантності, розв’язків і законів збереження.

Методи дослідження. Інфінітезимальний метод Лі–Овсянникова розв’язання задачі групової класифікації використано разом із техніками калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності, розгалуженого розщеплення, розбиття класів на нормалізовані підкласи, а також доповнено методом граничних переходів (контракцій). Алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Для класифікації допустимих перетворень використано узагальнення методу розгалуженого розщеплення й алгебраїчного методу Гайдона, а також оригінальні методи встановлення ізоморфізмів між групоїдами еквівалентності й побудови породжувальної множини допустимих перетворень. Для пошуку операторів редукції використано метод перетворень між класами диференціальних рівнянь. Точні розв’язки знайдено за допомогою методів ліївської й некласичної редукції, а також методу еквівалентності.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Досліджено допустимі перетворення загального класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу, для кожного з яких описано групоїд еквівалентності.
2. Проведено розширений груповий аналіз кількох класів рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Граничні переходи (контракції) застосовано для отримання групової класифікації, знаходження точних розв'язків і класифікації законів збереження класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями.
3. Для двох різних калібрувань довільних елементів виконано групову класифікацію (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами. Показано, що групу еквівалентності й, зокрема, її тип можна використовувати як критерій оптимального калібрування.
4. Знайдено групоїди еквівалентності та виконано груповий аналіз низки класів узагальнених рівнянь Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків, Кавахари й $K(m,n)$. Розв'язано кілька граничних задач для таких рівнянь. За допомогою оригінального алгоритму всі випадки розширення ліївської симетрії у згаданих класах відновлено зі списків, побудованих з точністю до відповідних груп еквівалентності.
5. Групоїд еквівалентності класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами застосовано до дослідження інтегровності цих рівнянь. Завдяки цьому знайдено всі інтегровні випадки, для яких побудовано пари Лакса.
6. З використанням методу перетворень між класами диференціальних рівнянь прокласифіковано ліївські симетрії рівнянь Гарднера, Бенджаміна–Бона–Махоні та Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі змінними коефіцієнтами, а також знайдено некласичні оператори редукції рівнянь реакції–дифузії.
7. Побудовано локальні закони збереження для кількох класів рівнянь реакції–дифузії й рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами.

8. Метод розгалуженого розщеплення й алгебраїчний метод Гайдона узагальнено для класифікації допустимих перетворень. Розвинуто такі нові техніки пошуку групоїдів еквівалентності, як встановлення ізоморфізмів між цими групоїдами й побудова породжувальної множини допустимих перетворень. Введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії, за допомогою яких алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь.
9. Запропоновані поняття і методи застосовано для вичерпного опису групоїда еквівалентності й виконання групової класифікації ненормалізованого класу (1+1)-вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь.
10. Досліджено ліївські симетрії (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Дірака. Зокрема, знайдено всі такі рівняння, що допускають чотиривимірні алгебри ліївської інваріантності.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати й запропоновані методи можна використати в подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь, зокрема, моделей математичної фізики, математичної біології, фінансової математики.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що виносяться на захист, дисертантка одержала самостійно. У роботах, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У статтях [2,4–6,8–11,13–17,20,23,29] співавтори дисертантки незалежно виконували обрахунки або перевіряли їх, а також брали участь у їхньому обговоренні. Постановка задач у цих роботах, вибір методів для їхнього розв'язання й доведення результатів належать дисертантці. У роботах [2,5,6,10,16,17,29] із цього переліку К. Софоклеусу також належить початковий вибір класів для дослідження.

У статті [7] постановка задачі, загальний план дослідження й доведення основних результатів належить М.О. Нестеренко, дисертантка показала, що певні рівняння типу Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього й п'ятого порядків, Кавахари та реакції–дифузії є інваріантними відносно алгебр Галілея чи їхніх деформацій, а також перевірила основні результати щодо реалізацій, С. Пошта брав участь у обчисленні реалізацій і обговоренні результатів.

У роботі [12] К. Софоклеусу належить постановка задачі, Н. Папаніколау й М. Крісто — чисельне розв'язання граничної задачі й побудова графіків отриманих розв'язків, дисертантці — доведення всіх результатів роботи щодо допустимих перетворень, групової класифікації, побудови точних розв'язків і редукції граничної задачі.

У статтях [22,24,27,30] усі основні результати і їхнє доведення дисертантка отримала самостійно, Р.О. Поповичу належить постановка задачі й загальний план дослідження. К. Софоклеус у роботах [22,30] та А. Біло в роботі [27] брали участь у обговоренні результатів і перевірці доведень.

У статті [18] дисертантці належить початковий вибір класу узагальнених рівнянь Бюргерса для дослідження, а також побудова графіків розв'язків. Усі обчислення проводилися дисертанткою й О.А. Почекетою незалежно з метою їх подальшого порівняння та перевірки. Р.О. Поповичу належить загальна постановка задачі й оцінка отриманих результатів.

У роботі [25] дисертантка виконала основний обсяг обчислень щодо групової класифікації, обчислення законів збереження і потенціальних симетрій із метою перевірки й порівняння результатів. К. Софоклеусу в цій роботі належить вибір класів для дослідження і перевірка результатів, Р.О. Поповичу — постановка задачі й розробка методів досліджень, а також побудова ієрархії потенціальних законів збереження і потенціальних симетрій лінійних і лінеаризованих рівнянь із досліджуваних класів, пошук додаткових потенціальних перетворень еквівалентності між випадками класифікації.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародних конференціях "Bogolyubov Kyiv Conference: Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Київ, 2019), "Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics" (Белград, Сербія, 2012, 2019), "XVII Geometrical Seminar" (Златибор, Сербія, 2012), "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2018), "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (Київ, 2018); міжнародних симпозіумах "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Протарас, Кіпр, 2012; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016, 2018), "Lie Theory and Its Applications in Physics" (Варна, Болгарія, 2011, 2013, 2015, 2019), "Supersymmetries and Quantum Symmetries" (Дубна, Росія, 2013), "The Sixth Petrov International Symposium on High Energy Physics, Cosmology and Gravity" (Київ, 2013), "Young Women in PDEs" (Бонн, Німеччина, 2012); міжнародних семінарах "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016, 2018), а також на міжнародних конференціях молодих математиків (Київ, 2015, 2017, 2019) і конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2015).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2008–2020), Вченій раді Інституту математики НАН України (2015, 2017, 2018). Також результати дисертації були предметом доповідей на засіданні Відділення математики НАН України (2015) і засіданні Президії НАН України (2017), науковому семінарі кафедри математики і статистики університету Саскачевана (Саскатун, Канада, 2010), науковому семінарі кафедри математики Чеського технічного університету у Празі (Прага, Чехія, 2013), науковому семінарі кафедри математики і статистики університету Кіпру (Нікосія, Кіпр, 2013).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 52 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [1,3,11] і наукових періодичних виданнях інших держав [2,4–10,12–26], що проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science і налічують, відповідно, 249 і 229 цитувань в цих базах. Результати дисертації додатково відображено в публікаціях [27–30], а також у тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [31–52]. Кожна зі статей [2,4,5,7,8,10,12,13,17,18,21,22,24,25] як опублікована у виданні з квартиля Q1 або Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank прирівнюється до трьох публікацій, а кожна з робіт [9,15,16] як опублікована у виданні з квартиля Q3 — до двох публікацій (п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019), отже, 26 статей, у яких відображено основні результати дисертації, зараховуються як 57 фахових публікацій. Роботи [1–8,10–14,16,18,19,21–25,29,30] проіндексовано у базах Zentrablatt Math або MathSciNet. Публікації [1,3,19,21,26,28] одноосібні.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 344 найменувань, і трьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 399 сторінок, із них список використаних джерел міститься на 35 сторінках, а додатки — на 80 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження й коротко викладено результати роботи. Основну частину роботи складають чотири розділи. На початку кожного розділу стисло описано результати, що містяться в ньому.

У **першому** розділі дисертації наведено основні означення й необхідні теоретичні відомості щодо груп і групоїдів еквівалентності й пов'язаних понять групового аналізу диференціальних рівнянь. Зауважимо, що більшість із цих понять описано в термінології групоїдів уперше.

Розгляньмо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S} = \{\mathcal{L}_\theta \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ систем диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_\theta$ з залежними змінними $u = (u^1, \dots, u^m)$ і незалежними змінними $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ — набір довільних елементів класу. Тут $\mathcal{L}_\theta$ — система диференціальних рівнянь виду $L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})) = 0$ із фіксованим набором L диференціальних функцій від u порядку p, параметризованих θ, значення яких пробігають множину $\mathcal{S}$, $u_{(p)}$ — набір похідних залежних змінних u за незалежними змінними x аж до порядку p (разом із u як похідними нульового порядку). Множину $\mathcal{S}$ складають розв'язки допоміжної системи диференціальних рівнянь $S(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}) = 0$ і нерівностей $\Sigma(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}) \neq 0$ на θ, де змінні $(x, u_{(p)})$ з простору струменів порядку p є незалежними змінними, а набір $\theta_{(q)}$ утворено похідними θ за змінними $(x, u_{(p)})$ аж до порядку q. З точністю до калібрувальної еквівалентності систем з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, яка зазвичай є тривіальною, відображення $\theta \mapsto \mathcal{L}_\theta$ з $\mathcal{S}$ у $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ бієктивне.

Групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ називають малу категорію з множиною об'єктів $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ або $\mathcal{S}$ і множиною стрілок, утвореною (локальними) дифеоморфізмами у просторі з координатами (x, u) між парами систем із $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$:

$$\mathcal{G}^\sim = \big\{\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde\theta) \mid \theta, \tilde\theta \in \mathcal{S},\ \Phi \in \mathrm{Diff}^{\rm loc}_{(x,u)} \colon \Phi_*\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}_{\tilde\theta}\big\}.$$

Елементи групоїду еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ називають *допустимими (точковими) перетвореннями* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Підняття довільного елементу θ перетворенням Φ визначено як $\Phi_*\theta = \tilde\theta$, якщо $\Phi_*\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}_{\tilde\theta}$.

З використанням термінології групоїдів визначено, зокрема, поняття звичайної, узагальненої, розширеної, розширеної узагальненої й умовної груп еквівалентності, груп точкових симетрій систем із класу, нормалізованого і напівнормалізованого класу. Також введено різні типи еквівалентності допустимих перетворень та запропоновано поняття породжувальної множини таких перетворень. Обговорено методи пошуку і класифікації допустимих перетворень, а саме прямий метод, метод розгалуженого розщеплення, метод перетворень між класами диференціальних рівнянь, розбиття класу на підкласи з кращими трансформаційними властивостями, встановлення бієктивних функторів між групоїдами еквівалентності.

Однією з основних задач групового аналізу диференціальних рівнянь є *задача групової класифікації*. Така задача для класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ із точністю до $G^\sim$-еквівалентності (або $\mathcal{G}^\sim$-еквівалентності) полягає у знаходженні ядра максимальних алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^\cap$ і вичерпного списку $G^\sim$-нееквівалентних (або $\mathcal{G}^\sim$-нееквівалентних) значень θ разом із максимальними алгебрами ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$, для яких $\mathfrak{g}_\theta \neq \mathfrak{g}^\cap$.

Стандартний алгебраїчний метод групової класифікації дає повний розв'язок такої задачі лише для нормалізованих класів диференціальних рівнянь, тобто для класів, групоїди еквівалентності яких породжено перетвореннями з відповідних груп еквівалентності. Якщо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ ненормалізований, то певні випадки розширень ліївської симетрії в цьому класі не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ цього класу.

Введено такі поняття (ϖ позначає проекцію простору з координатами $(x, u_{(p)}, \theta)$ на простір із координатами (x, u)):

Означення 1.4. Максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\mathcal{L}_\theta$ із класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ називають *регулярною* в цьому класі, якщо існує така підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, що $\mathfrak{g}_\theta = \varpi_*\mathfrak{s}$, і *сингулярною* у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ в іншому разі.

Множину $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_\gamma \in \mathcal{G}^\sim \mid \gamma \in \Gamma\}$, де Γ — множина індексів, називають *породжувальною множиною допустимих перетворень* у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ із точністю до $G^\sim$-еквівалентності, якщо будь-яке допустиме перетворення класу можна описати як композицію скінченної кількості елементів множини $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}} \cup \mathcal{G}^{G^\sim}$, де $\hat{\mathcal{B}} := \{\mathcal{T}^{-1} \mid \mathcal{T} \in \mathcal{B}\}$ — множина обернених перетворень. Мінімальна множина $\mathcal{B}$ — підмножина множини $\mathcal{G}^\sim \setminus \mathcal{G}^{G^\sim}$.

З використанням цих понять алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь.

Другий розділ дисертації присвячено групоїдам еквівалентності (1+1)- і (2+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку й їхньому застосуванню до задач групової класифікації. Зокрема, досліджено трансформаційні властивості загального класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу:

$$
\begin{aligned}
&u_t = G(t,x,u,u_x)u_{xx} + H(t,x,u,u_x),\\
&u_t = G(t,x,u)u_{xx} + H(t,x,u,u_x),\\
&u_t = G(t,x,u)u_{xx} + \sum_{k=0}^{n} F^k(t,x,u)u_x^k,\ n \geq 2,\\
&u_t = G(t,x,u)u_{xx} + F^1(t,x,u)u_x + F^0(t,x,u),\\
&S(t,x)u_t = (G(t,x,u)u_x)_x + K(t,x,u)u_x + P(t,x,u),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де функції G, H, S, K, P, $F^k, k = 0,1,2,\dots,$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $GS \neq 0$. Для всіх таких підкласів знайдено групи еквівалентності, перетворення з яких породжують відповідні групоїди еквівалентності. Зокрема, доведено таку теорему.

Теорема 2.10. *Групу еквівалентності класу (1) складають перетворення*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(t,x), \quad \tilde u = U^1(t,x)u + U^0(t,x),\\
&\tilde S = Z(t,x,S), \quad \tilde G = \frac{X_x^2}{T_t}\frac{G}{S}Z,\\
&\tilde K = \frac{X_xZ}{T_tS}\left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2\frac{U_x^1}{U^1}\right)G - 2\mathcal{U}\frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x}S\right] - G\frac{X_x}{T_t}\left(\frac{Z}{S}\right)_x,\\
&\tilde P = \frac{Z}{T_tS}\Bigg[U^1P + \frac{\mathcal{U}^2}{U^1}G_u - \mathcal{U}(K+G_x) + (U_t^1u + U_t^0)S\\
&\qquad\qquad + \left(2\frac{U_x^1}{U^1}\mathcal{U} - U_{xx}^1u - U_{xx}^0\right)G\Bigg],
\end{aligned}
$$

де $\mathcal{U} = U_x^1u + U_x^0$, T, X, U^1, U^0, Z — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_tX_xU^1Z_S \neq 0$. Клас (1) нормалізований.

Підрозділ 2.2 присвячено груповій класифікації рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями й коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної, а саме класу

$$
f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}, \tag{2}
$$

де f, g, h — довільні гладкі функції змінної x, n і m — довільні сталі, причому $fgn \neq 0$. Доведено, що цей клас не є нормалізованим, вичерпно описано його групоїд еквівалентності у термінах максимальних умовних груп еквівалентності нормалізованих підкласів цього класу.

Теорема 2.16. *Клас* (2) *можна зобразити як об'єднання його трьох нормалізованих підкласів, виокремлених умовами:*

1. $(h \neq 0,\ m \neq 0, n)$ *або* $(m = 0,\ (h/f)_x \neq 0)$;
2. $m = 0,\ (h/f)_x = 0$; 3. $m = n$.

Другий і третій підкласи мають непорожній перетин — нормалізований підклас класу (2) *з* $h = 0$.

Також прокласифіковано ліївські симетрії рівнянь із цього класу з калібруванням $g = 1$. Розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (2) не перевищує чотирьох. Доведено твердження: якщо рівняння з класу (2) інваріантне відносно чотиривимірної алгебри Лі, то воно точково-еквівалентне рівнянню $u_t = (e^u u_x)_x$ із цього класу. Якщо рівняння з класу (2) з $m \neq 0, n$ допускає тривимірну алгебру ліївської інваріантності, то перетвореннями еквівалентності його можна звести до рівняння $u_t = (e^u u_x)_x \pm e^{mu}$.

Для знаходження ліївських редукцій, точних розв'язків, законів збереження рівнянь з класу (2) використано метод граничних переходів (контракцій). Показано, що цим методом також можна отримати повну групову класифікацію, використавши відомі результати для рівнянь зі степеневими нелінійностями виду $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m$, де $fg \neq 0$ і $(n, mh) \neq (0, 0)$.

У другому розділі також прокласифіковано локальні закони збереження і потенціальні симетрії узагальнених рівнянь дифузії

$$u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x\,, \quad n \neq 0, \tag{3}$$

з точністю до перетворень з групи еквівалентності $G^{\sim}$ таких рівнянь.

Теорема 2.28. *Будь-яке рівняння* (3) *допускає закон збереження* $D_tF + D_xG = 0$, *де*

$$1.\ F = u, \quad G = -nu^{n-1}u_x - fu^m. \tag{4}$$

Повний перелік $G^{\sim}$*-нееквівалентних рівнянь* (3), *що мають додаткові (лінійно незалежні з* (4)*) закони збереження, вичерпують такі випадки:*

2. $m = n \neq 1$: $F = u\int\Phi\,\mathrm{d}x$, $G = -\int\Phi\,\mathrm{d}x\,(nu^{n-1}u_x + fu^n) + \Phi u^n$,

3. $n \neq 1$, $m = 0$: $F = xu$, $G = -x(nu^{n-1}u_x + f) + u^n + \int f\mathrm{d}x$,

4. $n \neq 1$, $m = 1$, $f = 1$: $F = (t+x)u$, $G = -(t+x)(nu^{n-1}u_x + u) + u^n$,

5. $n \neq 1$, $m = 1$, $f = \varepsilon x$: $F = e^{\varepsilon t}xu$, $G = -e^{\varepsilon t}x(nu^{n-1}u_x + xu) + e^{\varepsilon t}u^n$,

6. $n = 1$, $m = 0$: $F = \alpha u$, $G = -\alpha(u_x + f) + \alpha_x u + \int\alpha_x f dx$,

7. $n = 1$, $m = 1$: $F = \beta u$, $G = -\beta(u_x + fu) + \beta_x u$,

де $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^{\sim}$, $\Phi = e^{\int f\mathrm{d}x}$, $\alpha = \alpha(t,x)$, $\beta = \beta(t,x)$ *задовольняють лінійні рівняння* $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$ *і* $\beta_t + \beta_{xx} - f\beta_x = 0$.

Знайдені закони збереження дали змогу вичерпно прокласифікувати потенціальні симетрії рівнянь (3).

Також у другому розділі досліджено симетрійні властивості класів рівнянь Фішера $u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1-u)$, $ab \neq 0$, Ньюела–Вайтхеда–Сегеля $u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3$, $ac \neq 0$, й узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$, з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для кожного з цих класів знайдено групоїди еквівалентності, виконано вичерпні групові класифікації, побудовано сім'ї точних розв'язків, а також знайдено критерії звідності таких рівнянь до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з тих самих класів. Класи рівнянь Фішера і Ньюела–Вайтхеда–Сегеля нормалізовані, тимчасом як клас рівнянь Бюргерса ненормалізований, але його можна розбити на неперетинні нормалізовані підкласи. У класі рівнянь Бюргерса виокремлено підклас лінеаризованих рівнянь. Для класу рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля вичерпно прокласифіковано не тільки ліївські, а й некласичні регулярні оператори редукції, що є нетривіальною задачею, оскільки визначальні рівняння на коефіцієнти операторів у цьому випадку є нелінійними. Список нееквівалентних рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля і відповідних операторів редукції такий:

$$u_t = u_{xx} - e^{\pm t}u^3\colon \quad \partial_t + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{\pm\frac{1}{2}t}u\partial_x - \tfrac{1}{2}\left(3e^{\pm t}u^2 \mp \tfrac{1}{2}\right)u\partial_u;$$

$$u_t = u_{xx} - \varepsilon e^{t}u^3\colon \quad \partial_t - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{th}\left(\tfrac{1}{2}x\right)\partial_x - \tfrac{3}{4}\left(\mathrm{th}^2\left(\tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{3}\right)u\partial_u,$$

$$\partial_t - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{cth}\left(\tfrac{1}{2}x\right)\partial_x - \tfrac{3}{4}\left(\mathrm{cth}^2\left(\tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{3}\right)u\partial_u;$$

$$u_t = u_{xx} - \varepsilon e^{-t}u^3\colon \quad \partial_t + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{tg}\left(\tfrac{1}{2}x\right)\partial_x - \tfrac{3}{4}\left(\mathrm{tg}^2\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \tfrac{1}{3}\right)u\partial_u;$$

$$u_t = u_{xx} - \varepsilon u^3\colon \quad \partial_t - \tfrac{3}{x}\partial_x - \tfrac{3}{x^2}u\partial_u.$$

В останньому підрозділі другого розділу вичерпну групову класифікацію проведено для класу нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами:

$$u_t = f(t)u_{yy} - g(t)[K(u)]_x\,, \quad fgK_{uu} \neq 0. \tag{5}$$

Наведено класифікаційні переліки для двох можливих калібрувань довільних елементів $f = 1$ і $g = 1$. Калібрування $g = 1$ виявилось оптимальним, суттєво спростивши як процес розв'язання задачі групової класифікації, так і отриманий перелік розширень ліївської симетрії. Показано, що підклас класу (5), виокремлений умовою $g = 1$, допускає звичайну групу еквівалентності, а підклас, виокремлений умовою $f = 1$, — розширену узагальнену. Отже, групу еквівалентності й, зокрема, її тип можна використовувати як критерій оптимального калібрування. Це підтверджено й іншими прикладами, наведеними у дисертації, зокрема, класів рівнянь Фішера й Кавахари зі змінними коефіцієнтами.

Третій розділ дисертації присвячено застосуванню групоїдів еквівалентності в груповому аналізі й дослідженні інтегровності рівнянь типу Кортевега–де Фріза та таких пов'язаних із ними моделей, як рівняння Кавахари і рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні.

Вичерпно описано групоїд еквівалентності ненормалізованого класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}\colon \quad u_t + f(t,x)uu_x + g(t,x)u_{xxx} = 0, \quad fg \neq 0. \tag{6}$$

Виконано розбиття класу (6) на шість нормалізованих підкласів:

$$\mathcal{L}_1\colon \quad u_t + f(t)uu_x + g(t,x)u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_2\colon \quad u_t + p(t)e^{\,q(t)x}uu_x + \frac{s(t)-\dot q(t)x}{q(t)^3}u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_3\colon \quad u_t + p(t)(x+q(t))^{r(t)}uu_x + \frac{(x+q(t))^3}{r(t)(r(t)^2-1)}\left(s(t)-\dot r(t)\ln(x+q(t)) + \frac{(1-r(t))\dot q(t)}{x+q(t)}\right)u_{xxx}=0,$$

де $r \neq 0, \pm1$,

$$\mathcal{L}_4\colon \quad u_t + (p(t)x+q(t))uu_x + g(t,x)u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_5\colon \quad u_t + \frac{k(t)}{x+c}\,uu_x + g(t,x)u_{xxx} = 0,$$

і клас $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$, що є доповненням об'єднання підкласів $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, у класі $\mathcal{L}$.

Теорема 3.7. *Класи $\mathcal{L}_1$–$\mathcal{L}_5$ нормалізовані у розширеному узагальненому сенсі, групоїди еквівалентності цих класів породжено перетвореннями з відповідних розширених узагальнених груп еквівалентності $\hat{G}_i^{\sim}$, $i = 1, \ldots, 5$.*

Теорема 3.8. *Підклас $\mathcal{L}_0$ нормалізований у звичайному сенсі. Його група еквівалентності збігається зі звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}$ усього класу $\mathcal{L}$.*

Після калібрування довільних елементів класів $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, відповідні підкласи класів $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_5$ стали нормалізованими у звичайному сенсі. Трансформаційні властивості інших підкласів можна покращити методом відображення між класами, що проілюстровано на прикладі підкласу класу $\mathcal{L}_4$, для якого також виконано групову класифікацію.

У цьому самому розділі побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь довільного порядку, пов'язаних із рівняннями типу Кортевега–де Фріза і їхніми узагальненнями. Зокрема, доведено нормалізованість класу рівнянь

$$\begin{aligned} &u_t = F(t)u_n + G(t, x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad n \geqslant 2, \\ &F \neq 0, \quad G_{u_i u_{n-1}} = 0, \; i = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Він точково- й до того ж контактно-нормалізований. Властивість нормалізованості й групу еквівалентності цього класу застосовано для пошуку групоїдів еквівалентності низки класів рівнянь, розглянутих у дисертації.

Для двох класів узагальнених рівнянь типу Кортевега–де Фріза (КдФ) і модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза (мКдФ) встановлено критерії звідності до класичних рівнянь КдФ і мКдФ. Виконано групову класифікацію рівнянь КдФ зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$, а також кількох класів рівнянь, подібних до цього класу відносно точкових перетворень. Наведено оригінальний алгоритм отримання всіх випадків розширення ліївської симетрії у класі диференціальних рівнянь із переліку, побудованого з точністю до відповідної груп еквівалентності.

У третьому розділі також виконано розширену групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Кавахари

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0, \quad \alpha\beta\sigma n \neq 0, \tag{7}$$

що включає побудову групоїда еквівалентності, класифікацію ліївських симетрій і відповідних редукцій, а також знаходження точних розв'язків. Доведено, що клас (7) ненормалізований, але його можна розбити на два нормалізовані підкласи, виокремлені умовами $n \neq 1$ і $n = 1$. Розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності не перевищує двох у випадку $n \neq 1$ і трьох у випадку $n = 1$. Доведено таку теорему.

Теорема 3.23. *Рівняння (7) зі змінними коефіцієнтами можна звести точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього самого класу тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти α, β, σ задовольняють умови*

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)_t = 0, \quad \textit{якщо} \quad n \neq 1,$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\sigma\alpha^2}{\beta^3}\right)_t = 0, \quad \textit{якщо} \quad n = 1.$$

Побудовано чисельні розв'язки граничної задачі для узагальненого рівняння Кавахари зі степеневими коефіцєнтами $u_t + uu_x + \lambda t^{\frac{1}{2}} u_{xxx} + \delta t^{\frac{3}{2}} u_{xxxxx} = 0$, що описує рух хвиль у морі, вкритому кригою, товщина якої збільшується з часом.

Також у третьому розділі досліджено допустимі перетворення, ліївські симетрії й закони збереження нормалізованого класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$, $gh \neq 0$, зі змінними коефіцієнтами. Доведено, що будь-яке рівняння з цього класу допускає один закон збереження. Якщо коефіцієнти рівняння задовольняють умову $((1/h)_t/g)_t = 0$ або умову $((f/g)_t/g)_t = 0$, то воно має два закони збереження. Якщо ж коефіцієнти задовольняють обидві наведені умови, то таке рівняння допускає три закони збереження.

В останньому підрозділі третього розділу показано, як групоїди еквівалентності можна використати для дослідження інтегровності. Для прикладу розглянуто клас

$$\begin{aligned} &u_t + a(t)uu_{xxx} + b(t)u_xu_{xx} + c(t)u^2u_x + f(t)uu_x \\ &\qquad + g(t)u_{xxxxx} + h(t)u_{xxx} + m(t)u + n(t)u_x + k(t)xu_x = 0, \end{aligned}$$

де функції a, b, c, f, g, h, m, n, k — довільні гладкі функції змінної t, причому $g(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$.

Серед виокремлених інтегровних рівнянь є, зокрема, рівняння

$$u_t + 10g\Upsilon uu_{xxx} + 25g\Upsilon u_x u_{xx} + 20g\Upsilon^2 u^2 u_x + gu_{xxxxx} \\ + mu + nu_x + kxu_x = 0,$$

де $\Upsilon = \nu e^{\int (m-2k)\,\mathrm{d}t}$ з довільною ненульовою сталою ν. Для нього побудовано пару Лакса

$$L = e^{3\int k\,\mathrm{d}t}({\partial_x}^3 + 2\Upsilon u\partial_x + \Upsilon u_x),$$
$$P = 9g{\partial_x}^5 + 30g\Upsilon u{\partial_x}^3 + 45g\Upsilon u_x{\partial_x}^2 \\ +(35g\Upsilon u_{xx} + 20g\Upsilon^2 u^2 - kx - n)\partial_x + 10g\Upsilon u_{xxx} + 20g\Upsilon^2 uu_x.$$

Четвертий розділ дисертації присвячено алгебраїчному методу групової класифікації, що зазвичай застосовують до нормалізованих класів диференціальних рівнянь. У першому підрозділі групову класифікацію нормалізованого класу модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза

$$u_t + u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u = 0, \quad g \neq 0, \tag{8}$$

виконано із застосуванням алгебраїчної техніки. Спочатку знайдено групоїд еквівалентності класу і здійснено калібрування довільних елементів $h = 0$. Базис алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ нормалізованого підкласу $u_t + u^2u_x + g(t)u_{xxx} = 0$ класу (8) складають оператори

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u - g\partial_g, \quad t\partial_t + x\partial_x + 2g\partial_g.$$

Групову класифікацію цього класу виконано алгебраїчним методом. За допомогою методу еквівалентності відновлено класифікаційний список ліївських симетрій у класі (8), а також виконано групову класифікацію ще одного подібного класу рівнянь із шістьма коефіцієнтами, залежними від часу.

У підрозділі 4.2 вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для ненормалізованого класу нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь

$$u_{tt} = f(x,u)u_{xx} + g(x,u), \quad (f_u, g_{uu}) \neq (0,0). \tag{9}$$

Для цього використано нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь, що базується на класифікації допустимих перетворень у класі з точністю до групи еквівалентності цього класу, й побудові породжувальної множини допустимих перетворень. Зауважимо, що клас (9) не можна природно розбити на нормалізовані підкласи. Вичерпне розв'язання задачі групової класифікації включає виконання повної попередньої групової класифікації, а також побудову сингулярних розширень ліївської симетрії, які не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу.

Теорема 4.9. *Групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (9) складають перетворення*

$$\tilde t = c_1 t + c_0, \quad \tilde x = \varphi(x), \quad \tilde u = c_2|\varphi_x|^{1/2}u + \psi(x), \quad \tilde f = \frac{\varphi_x^2}{c_1^2} f,$$
$$\tilde g = \frac{c_2}{c_1^2}|\varphi_x|^{1/2} g - \frac{1}{c_1^2}\left(c_2\frac{2\varphi_{xxx}\varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}}u + \psi_{xx} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\psi_x\right) f,$$

де c_0, c_1, c_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1c_2 \neq 0$; φ і ψ — довільні гладкі функції змінної x, причому $\varphi_x \neq 0$.

Побудовано породжувальну множину допустимих перетворень цього класу з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності.

Теорема 4.12. *Породжувальну множину $\mathcal{B}$ допустимих перетворень класу (9), що є мінімальною і внутрішньо сумісною з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, утворюють такі сім'ї допустимих перетворень, де $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1$:*

T1. $f_x = g_x = 0$, $f_u \neq 0$ *або* $f = 1$, $\tilde f = 1/f$, $\tilde g = -g/f$,
Φ: $\tilde t = x$, $\tilde x = t$, $\tilde u = u$;

T2. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \mu(x)u^{-3} + \sigma u$, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $\tilde f = \varepsilon \tilde u^{-4}$, $\tilde g = \mu(\tilde x)\tilde u^{-3}$, $\mu = \mu(x)$ — *довільна гладка функція, причому* $\mu_x \neq 0$,

а. Φ: $\tilde t = t^{-1}$, $\tilde x = x$, $\tilde u = t^{-1}u$, *якщо* $\sigma = 0$;
б. Φ: $\tilde t = \frac{1}{2}e^{2t}$, $\tilde x = x$, $\tilde u = e^t u$, *якщо* $\sigma = 1$;
в. Φ: $\tilde t = \operatorname{tg} t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = u\cos t$, *якщо* $\sigma = -1$;

T3. $f = 1$, $g = e^{-2x}g^2(u)$, $\tilde f = 1$, $\tilde g = g^2(\tilde u)$,
Φ: $\tilde t = e^{-x}\operatorname{sh} t$, $\tilde x = e^{-x}\operatorname{ch} t$, $\tilde u = u$;

T4. $f = 1$, $g = g^1(x)g^2(u)$, $\tilde f = 1$, $\tilde g = \tilde x^{-2}g^2(\tilde u)$, а. $g^1(x)=x^{-2}$, Φ: $\tilde t=\dfrac{t}{x^2-t^2}$, $\tilde x=\dfrac{x}{x^2-t^2}$, $\tilde u=u$;

б. $g^1(x)=\cos^{-2}x$, Φ: $\tilde t=\dfrac{\cos t}{\sin t+\sin x}$, $\tilde x=\dfrac{\cos x}{\sin t+\sin x}$, $\tilde u=u$;

в. $g^1(x)=-\operatorname{ch}^{-2}x$, Φ: $\tilde t=e^t\operatorname{sh}x$, $\tilde x=e^t\operatorname{ch}x$, $\tilde u=u$;

г. $g^1(x)=\operatorname{sh}^{-2}x$, Φ: $\tilde t=e^t\operatorname{ch}x$, $\tilde x=e^t\operatorname{sh}x$, $\tilde u=u$;

T5. $f=-1$, $g=e^{-2x}g^2(u)$, $\tilde f=-1$, $\tilde g=g^2(\tilde u)$,
Φ: $\tilde t=e^{-x}\sin t$, $\tilde x=e^{-x}\cos t$, $\tilde u=u$;

T6. $f=-1$, $g=g^1(x)g^2(u)$, $\tilde f=-1$, $\tilde g=\tilde x^{-2}g^2(\tilde u)$,

а. $g^1(x)=x^{-2}$, Φ: $\tilde t=\dfrac{t}{x^2+t^2}$, $\tilde x=\dfrac{x}{x^2+t^2}$, $\tilde u=u$;

б. $g^1(x)=\cos^{-2}x$, Φ: $\tilde t=e^t\sin x$, $\tilde x=e^t\cos x$, $\tilde u=u$;

в. $g^1(x)=\operatorname{sh}^{-2}x$, Φ: $\tilde t=\dfrac{\sin t}{\cos t+\operatorname{ch}x}$, $\tilde x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\cos t+\operatorname{ch}x}$, $\tilde u=u$;

T7. $f=-1$, $g=g^2(u)\operatorname{ch}^{-2}x$, $\tilde f=-1$, $\tilde g=g^2(\tilde u)\operatorname{ch}^{-2}\tilde x$,

Φ: $\tilde t=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\gamma\ \operatorname{sh}x+\cos\gamma\sin t}{\cos t}$,

$\tilde x=\operatorname{arcth}\dfrac{\cos\gamma\ \operatorname{sh}x-\sin\gamma\sin t}{\operatorname{ch}x}$, $\tilde u=u$, $\gamma\in(0,2\pi)$;

T8. а. $f=\tilde f=1$, $g_x=0$, $\tilde g=g$,
Φ: $\tilde t=t\operatorname{ch}\gamma+x\operatorname{sh}\gamma$, $\tilde x=t\operatorname{sh}\gamma+x\operatorname{ch}\gamma$, $\tilde u=u$, $\gamma\in\mathbb{R}_{\neq0}$;

б. $f=\tilde f=-1$, $g_x=0$, $\tilde g=g$, Φ: $\tilde t=t\cos\gamma-x\sin\gamma$,
$\tilde x=t\sin\gamma+x\cos\gamma$, $\tilde u=u$, $\gamma\in(0,2\pi)$;

T9. $f=\varepsilon$, $g=\varepsilon' e^u$, $\tilde f=\varepsilon$, $\tilde g=\varepsilon' e^{\tilde u}$, Φ: $\tilde t=T(t,x)$, $\tilde x=X(t,x)$, $\tilde u=u+\ln|T_t^2-\varepsilon T_x^2|$, *де* $\varepsilon,\varepsilon'=\pm1$, *причому* $\varepsilon'=1$, *якщо* $\varepsilon=1$, (T,X) *пробігають множину представників класів еквівалентності розв'язків системи* $T_t=X_x$, $X_t=\varepsilon T_x$ *із* $(T_{tt},T_x)\neq(0,0)$ *за дією групи, яку складають перетворення* $\hat t=c_1t+c_0$, $\hat x=c_1x+c_2$, $\hat T=\tilde c_1T+\tilde c_0$, $\hat X=\tilde c_1X+\tilde c_2$, *де* c_0, c_1, c_2, $\tilde c_0$, $\tilde c_1$, $\tilde c_2$ *— довільні сталі, що задовольняють умову* $c_1\tilde c_1\neq0$.

Алгебраїчним методом спочатку знайдено всі регулярні випадки розширення ліївської симетрії, що асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу. Також знайдено всі сингулярні випадки розширення ліївської симетрії.

Лема 4.18. *Повний перелік $G^{\sim}$-нееквівалентних сингулярних розширень алгебри $\mathfrak{g}^{\cap} = \langle \partial_t \rangle$ ядра основних груп ліївської симетрії рівнянь з класу (9) вичерпують випадки рівнянь із довільними елементами виду $f = \varepsilon = \pm 1$, $g = g^1(x)g^2(u)$, наведеними в табл. 1.*

Табл. 1: Сингулярні розширення ліївської симетрії у класі (9).

f	g	Базис розширення
ε	$\hat{g}(u)$	∂_x, $x\partial_t + \varepsilon t\partial_x$
1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t})$, $\mathcal{R}(e^{x-t})$
-1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x\cos t)$, $\mathcal{R}(e^x\sin t)$
ε	$\hat{g}(u)x^{-2}$	$t\partial_t + x\partial_x$, $(t^2+\varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x$
1	$\hat{g}(u)\cos^{-2}x$	$\mathcal{R}(\cos t\,\cos x)$, $\mathcal{R}(\sin t\,\cos x)$
1	$-\hat{g}(u)\,\mathrm{ch}^{-2}\,x$	$\mathcal{R}(e^t\,\mathrm{ch}\,x)$, $\mathcal{R}(e^{-t}\,\mathrm{ch}\,x)$
1	$\hat{g}(u)\,\mathrm{sh}^{-2}\,x$	$\mathcal{R}(e^t\,\mathrm{sh}\,x)$, $\mathcal{R}(e^{-t}\,\mathrm{sh}\,x)$
-1	$\hat{g}(u)\cos^{-2}x$	$\mathcal{R}(e^t\cos x)$, $\mathcal{R}(e^{-t}\cos x)$
-1	$\hat{g}(u)\,\mathrm{sh}^{-2}\,x$	$\mathcal{R}(\cos t\,\mathrm{sh}\,x)$, $\mathcal{R}(\sin t\,\mathrm{sh}\,x)$
-1	$\hat{g}(u)\,\mathrm{ch}^{-2}\,x$	$\mathcal{R}(\cos t\,\mathrm{ch}\,x)$, $\mathcal{R}(\sin t\,\mathrm{ch}\,x)$
ε	$\varepsilon'\lvert u\rvert^q$	∂_x, $t\partial_x + \varepsilon x\partial_t$, $(q-1)t\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
1	$\varepsilon'\lvert u\rvert^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t})$, $\mathcal{R}(e^{x-t})$, $(q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
-1	$\varepsilon'\lvert u\rvert^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x\cos t)$, $\mathcal{R}(e^x\sin t)$, $(q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
ε	$\varepsilon' e^u$	$\tau\partial_t + \xi\partial_x - 2\tau_t\partial_u$

Тут $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1 \bmod G^{\sim}$, q — довільна стала, причому $q \neq 0, 1$, $\mathcal{R}(\Phi) := \Phi_x\partial_t + \Phi_t\partial_x$; $\tau = \tau(t,x)$, $\xi = \xi(t,x)$ — довільні гладкі функції, що задовольняють систему $\tau_t = \xi_x$, $\xi_t = \varepsilon\tau_x$.

Об'єднання регулярних і сингулярних випадків розширення ліївської симетрії у класі (9) дає повний розв'язок задачі групової класифікації для цього класу.

В останньому підрозділі четвертого розділу досліджено ліївські симетрії (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Дірака

$$(i\sigma_2\partial_t + \sigma_1\partial_x - \sigma_3\partial_y)\Psi = \Phi, \quad \text{де} \quad \Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ \Phi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

$u = u(t,x,y)$, $v = v(t,x,y)$ — залежні змінні, $F = F(u,v)$, $G = G(u,v)$ — довільні гладкі функції, що водночас не є лінійними за своїми аргументами, σ_1, σ_2, σ_3 — матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Встановлено, що алгебра ядра основних груп рівнянь Дірака (10) — це тривимірна алгебра $\langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle$. Знайдено всі нелінійності, для яких рівняння з класу (10) допускають чотиривимірні алгебри ліївської інваріантності. Проведено ліївську редукцію й побудовано певні точні розв'язки таких рівнянь.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Результати, що ілюструють і доповнюють результати основної частини, виокремлено у два додатки. У додатку А зібрано результати щодо класифікації ліївських і некласичних операторів редукції трьох підкласів класу квазілінійних рівнянь реакції–дифузії $f(x)u_t = g(x)u_{xx} + h(x)B(u)$, $fghB_{uu} \neq 0$. Зокрема, некласичні оператори редукції побудовано методом перетворень між класами для випадків, коли $B(u)$ — це степенева або експоненціальна функція. Вичерпний груповий аналіз проведено для двох підкласів, виокремлених, відповідно, умовами $f = g = 1$ або $B = e^{mu}$, де $m \neq 0$. Також додаток А містить класифікацію потенціальних симетрій нелінійних рівнянь дифузії $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$, $fgn \neq 0$.

У додатку Б наведено результати групового аналізу класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків, а також узагальнених рівнянь Гарднера, $K(m,n)$ та Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з коефіцієнтами, залежними від часу. Знайдені ліївські симетрії застосовано для побудови точних розв'язків і розв'язання певних граничних задач для таких рівнянь. У всіх випадках повне розв'язання задач групової класифікації стало можливим завдяки використанню групоїдів еквівалентності.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку B.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Розвинуто й формалізовано теорію групоїдів класів диференціальних рівнянь. Уведено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії. Алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. З застосуванням цього методу знайдено групоїд еквівалентності й виконано групову класифікацію ненормалізованого класу нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь.
- Досліджено трансформаційні властивості загального класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу, для яких вичерпно описано групоїди еквівалентності. Окремо розглянуто два ненормалізовані підкласи рівнянь типу реакції–конвекції–дифузії, цікаві для застосувань, і знайдено їхні групи еквівалентності.
- Проведено розширений груповий аналіз кількох класів рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, зокрема, класу рівнянь Фішера з коефіцієнтами, залежними від часу, й кількох класів рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної. За допомогою граничних переходів (контракцій) знайдено точні розв'язки й отримано класифікацію законів збереження класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями. Продемонстровано, що метод контракцій дає змогу отримати вичерпний результат групової класифікації цього класу.
- За допомогою допустимих перетворень прокласифіковано ліївські та регулярні некласичні оператори редукції рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля з коефіцієнтами, залежними від часу, а також знайдено потенціальні симетрії двох класів нелінійних рівнянь дифузії.
- Виконано розширений груповий аналіз двох подібних класів узагальнених рівнянь Бюргерса. Знайдені симетрії застосовано для знаходження точних розв'язків цих рівнянь і розв'язання граничної задачі.
- Знайдено групоїди еквівалентності та проведено розширений груповий аналіз класів узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза тре-

тього і п'ятого порядків, Кавахари й $K(m,n)$. Для певних рівнянь із цих класів знайдено точні розв'язки й розв'язано граничні задачі. Запропоновано алгоритм відновлення всіх випадків розширення ліївської симетрії з переліку, побудованого з точністю до групи еквівалентності класу. Для класів узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза й узагальнених модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза з шістьма довільними елементами групову класифікацію отримано методом еквівалентності. Побудовано чисельні розв'язки граничної задачі для узагальненого рівняння Кавахари зі степеневими коефіцієнтами, що описує рух хвиль у морі під кригою, товщина якої збільшується з часом.

• Групоїд еквівалентності класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами застосовано до дослідження інтегровності цих рівнянь. Таким чином знайдено всі інтегровні випадки, для яких побудовано пари Лакса.

• З використанням методу перетворень між класами диференціальних рівнянь виконано класифікації ліївських симетрій рівнянь Гарднера, Бенджаміна–Бона–Махоні й Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з коефіцієнтами, залежними від часу, а також знайдено некласичні оператори редукції двох класів рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної.

• Побудовано локальні закони збереження для кількох класів рівнянь реакції–дифузії й рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами.

• Знайдено всі нелінійності, для яких рівняння з класу (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Дірака допускають чотиривимірну алгебру ліївської інваріантності. Проведено ліївську редукцію й побудовано точні розв'язки таких рівнянь.

• Для двох різних калібрувань довільних елементів виконано групову класифікацію (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами. Показано, що групу еквівалентності й, зокрема, її тип можна використовувати як критерій оптимального калібрування.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Ванєєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Доповіді НАН України* (2019), № 5, С. 3–10.

2. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A. and Sophocleous C., Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), no. 1, P. 264–275.

3. Ванєєва О.О., Точні розв'язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, С. 44–49.

4. Vaneeva O. and Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), no. 10, 101504, 12 pp.

5. Vaneeva O., Pošta S. and Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), P. 19–25.

6. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, pp. 349–360, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016.

7. Nesterenko M., Pošta S. and Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), no. 11, 115203, 26 pp.

8. Vaneeva O., Kuriksha O. and Sophocleous C. Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), no. 1–3, P. 1243–1251.

9. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of Benjamin–Bona–Mahony equations with time dependent coefficients, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012016, 12 pp.

10. Vaneeva O.O., Sophocleous C. and Leach P.G.L., Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems, *J. Engrg. Math.* **91** (2015), no. 1, P. 165–176.

11. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю., Груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, *Доповіді НАН України* (2014), № 10, С. 12–20.

12. Vaneeva O.O., Papanicolaou N.C., Christou M.A. and Sophocleous C., Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries,

Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **19** (2014), no. 9, P. 3074–3085.

13. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), no. 4, 045201, 19 pp.
14. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations with time-dependent coefficients, *Lie Theory and its Application in Physics*, pp. 311–321, Springer Proc. Math. Stat. **111**, Springer, Tokyo, 2014.
15. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of variable coefficient generalized fifth-order KdV equations, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **11** (2014), no. 7, P. 990–995.
16. Charalambous K., Vaneeva O. and Sophocleous C., Group classification of variable coefficient $K(m,n)$ equations, *J. Geom. Symmetry. Phys.* **33** (2014), P. 79–90.
17. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), no. 3, 038003, 9 pp.
18. Pocheketa O.A., Popovych R.O. and Vaneeva O.O., Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping, *Appl. Math. Comput.* **243** (2014), P. 232–244.
19. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient KdV-like equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, pp. 451–459, Springer Proc. Math. Stat. **36**, Springer, Tokyo, 2013.
20. Vaneeva O. and Karadzhov Yu., Lie symmetries of (2+1)-dimensional nonlinear Dirac equations, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A* **XXVI** (2013), no. A1, P. 349–359.
21. Vaneeva O., Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), no. 2, P. 611–618.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), no. 1, P. 225–242.

23. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with an exponential source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, pp. 207–219, University of Cyprus, Nicosia, 2011.

24. Popovych R.O. and Vaneeva O.O., More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), no. 12, P. 3887–3899.

25. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. and Vaneeva O.O., Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, *Phys. A* **388** (2009), no. 4, P. 343–356.

26. Vaneeva O., Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A* **XXII** (2009), no. A1, P. 463–471.

27. Vaneeva O.O., Bihlo A. and Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.

28. Ванєєва О.О., Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями, *Вісник НАН України* (2017), № 9, С. 33–40.

29. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, pp. 225–237, University of Cyprus, Nicosia, 2013.

30. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, pp. 191–209, University of Cyprus, Nicosia, 2009.

31. Vaneeva O., Equivalence groupoids in the group classification problems, *Program & Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference* (2019, September 24–26, Kyiv), P. 119.

32. Vaneeva O., Equivalence groupoids, normalization property and group classification problems for evolution equations, *Abstracts of*

10th Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics (2019, September 9–14, Belgrade, Serbia), P. 48–49.

33. Vaneeva O., Transformation and normalization properties of evolution equations, *Abstracts of XI International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2019, June 17–23, Varna, Bulgaria), P. 20.

34. Ванєєва О.О., Нормалізовані класи квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків* (2019, 6–8 червня, Київ), Інститут математики, Київ, С. 50.

35. Ванєєва О.О., Бойко В.М., Жалій О.Ю., Точні розв'язки рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції "Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі" (21–22 червня 2018 р.)*, НУХТ, Київ, 2018, С. 14.

36. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A. and Sophocleous C., Classification of Lie and nonclassical reduction operators for a class of generalized Newell–Whitehead–Segel equations, *Book of Abstracts of the 9th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2018, June 10–14, Larnaca, Cyprus), P. 39.

37. Ванєєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра*, Т. 3, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018, С. 97–98; `http://iapmm.lviv.ua/mpmm2018`

38. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю., Ліївські та некласичні оператори редукції узагальнених рівнянь Фішера, *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків* (2017, 7–10 червня, Київ), Інститут математики, Київ, 2017, С. 79.

39. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2016, December 17–20, Kyiv, Ukraine). Abstract. `http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Vaneeva`

40. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group classification of variable coefficient nonlinear Kolmogorov equations, *Book of Abstracts of the 8th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2016, June 12–17, Larnaca, Cyprus), P. 37.

41. Vaneeva O., Group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2015, December 27–28, Kyiv, Ukraine). Abstract. `http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/Vaneeva`

42. Vaneeva O., Equivalence transformations in the study of integrability, *Abstracts of XI International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2015, June 15–21, Varna, Bulgaria), P. 27.

43. Ванєєва О.О., Сучасні техніки групової класифікації диференціальних рівнянь, *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015"* (26–28 травня 2015 р., Львів). Тези доповідей. `http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Vaneeva.pdf`

44. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю., Групова класифікація квазілінійних рівнянь реакції-дифузії, *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків* (2015, 3–6 червня, Київ), Інститут математики, Київ, 2015, С. 136.

45. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis and invariant solutions of variable coefficient Kawahara equations, *Book of Abstracts of the 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus), P. 30.

46. Vaneeva O. and Popovych R., Equivalence transformations in the study of integrability, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine). Abstract. `http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/VaneevaPopovych2013`

47. Vaneeva O., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Abstracts of X International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2013, June 17–23, Varna, Bulgaria), P. 25.

48. Vaneeva O., Admissible transformations in classes of PDEs, *Book of Abstracts of the XVII Geometrical Seminar* (2012, September 3–8, Zlatibor, Serbia), P. 83–84.

49. Vaneeva O., Point transformations in classes of differential equations, *Book of abstracts of the 6th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus), P. 46.

50. Vaneeva O., Applications of equivalence and symmetry point transformations in studying PDEs, *Abstracts of the International Workshop "Young Women in PDEs"* (2012, May 10–12, Bonn, Germany), P. 15–16.

51. Vaneeva O., Group classification of variable-coefficient mKdV equations, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine). Abstract.
`http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Vaneeva`

52. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient mKdV-like equations, *Abstracts of IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2011, June 20–26, Varna, Bulgaria), P. 24.

АНОТАЦІЇ

Ванєєва О.О. Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 "математична фізика" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено розвитку теорії групоїдів еквівалентності класів диференціальних рівнянь, створенню нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також розв'язанню низки класифікаційних задач групового аналізу, зокрема, класифікації ліївських і некласичних операторів редукції й законів збереження. Основну увагу в дисертації зосереджено на застосуванні групоїдів еквівалентності до задач групової класифікації і пошуку точних розв'язків рівнянь математичної фізики, біо-

логії й фінансової математики. Зокрема, у дисертації введено поняття регулярних і сингулярних випадків розширення ліївської симетрії, запропоновано модифікацію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь, продемонстровано застосування методу контракцій до задач групової класифікації, описано алгоритм побудови всіх випадків розширень ліївської симетрії зі списку нееквівалентних розширень, а також ефективно використано групоїди еквівалентності при дослідженні інтегровності й класифікації некласичних операторів редукції. Розширений груповий аналіз проведено для класів рівнянь $K(m,n)$, Кавахари, Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків, Фішера, Ньюела–Вайтхеда–Сегеля, реакції–дифузії, Бюргерса, Бенджаміна–Бона–Махоні, (2+1)-вимірних рівнянь Коломогорова, (1+1)-вимірних нелінійних еліптичних і хвильових рівнянь та інших.

Ключові слова: груповий аналіз диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності, ліївська симетрія, некласична симетрія, оператор редукції, група еквівалентності, закон збереження.

Ванеева Е.А. Группоиды эквивалентности в задачах групповой классификации. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 “математическая физика” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена развитию теории группоидов эквивалентности классов дифференциальных уравнений, созданию новых методов и алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений, а также решению ряда классификационных задач группового анализа, включая классификации лиевских и неклассических операторов редукции, законов сохранения. Основное внимание в диссертации сосредоточено на применении группоидов эквивалентности в задачах групповой классификации, исследовании интегрируемости и поиске решений уравнений математической физики, математической биологии и финансовой математики. В частности, в диссертации предложена модификация алгебраического метода групповой классификации для ненормализованных классов дифференциальных уравнений, продемонстрировано применение метода контракций для решения задач групповой классификации, описан алгоритм построе-

ния всех случаев расширений лиевской симметрии из списка неэквивалентных расширений, а также эффективно использованы группоиды эквивалентности при исследовании интегрируемости и классификации неклассических операторов редукции. Среди классов нелинейных уравнений, для которых выполнен расширенный групповой анализ, — классы уравнений $K(m,n)$, Кавахары, Кортевега–де Фриза третьего и пятого порядков, Фишера, Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля, реакции–диффузии, Бюргерса, Бенджамина–Бона–Махони, (2+1)-мерных нелинейных уравнений Коломогорова, (1+1)-мерных нелинейных эллиптических и волновых уравнений.

Ключевые слова: групповой анализ дифференциальных уравнений, группоид эквивалентности, лиевская симметрия, неклассическая симметрия, оператор редукции, группа эквивалентности, закон сохранения.

Vaneeva O.O. Equivalence groupoids in group classification problems. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 “Mathematical Physics” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to developing the theory of equivalence groupoids of classes of differential equations, to creating new methods and algorithms of group analysis of differential equations and to solving a wide range of group analysis problems, including classifications of Lie and nonclassical reduction operators and local conservation laws. The main attention is paid to the application of equivalence groupoids to group classification problems, studying integrability and finding solutions of equations of mathematical physics, mathematical biology and financial mathematics. In particular, the notions of regular and singular cases of Lie symmetry extensions are introduced. A modification of the algebraic method of solving group classification problems for non-normalized classes is suggested. An algorithm of the construction of all cases of Lie symmetry extensions from the list of inequivalent ones is presented. The application of contractions to group classification problems is demonstrated.

More specifically, transformational properties of the general class of (1+1)-dimensional second-order evolution equations are studied. We construct a chain of nested normalized subclasses of this class and find their equivalence groups. The equivalence groupoids of non-normalized

classes of variable coefficient Korteweg–de Vries and reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities are also described. Note that description of the equivalence groupoids for non-normalized classes is much more difficult task than for normalized ones. The exhaustive group classifications are carried out for several classes of nonlinear variable coefficient equations, e.g., for reaction–diffusion equations, Fisher equations, Newell–Whitehead–Segel equations, $K(m,n)$ equations, third- and fifth-order Korteweg–de Vries equations, Gardner equations, Kawahara equations, Burgers equations, Benjamin–Bona–Mahony equations, and for a class of (1+1)-dimensional nonlinear elliptic and wave equations. Classes of (2+1)-dimensional nonlinear Dirac equations and of (2+1)-dimensional variable coefficient nonlinear Kolmogorov equations are also studied with the Lie symmetry point of view. Two possible gaugings for arbitrary elements of the class of Kolmogorov equations are discussed in order to show how equivalence groups can serve in choice of the optimal gauging.

Local conservation laws are classified for several classes of variable–coefficient reaction–diffusion equations and Benjamin–Bona–Mahony equations. We also find some local conservation laws of variable coefficient Kawahara equations. The Kawahara equation that models long waves in water covered by ice is studied with the Lie symmetry point of view. We carry out Lie reduction of the corresponding boundary value problem to the similar problem for an ordinary differential equation, which is solved numerically. Lie reductions are also used to obtain exact and numerical solutions of boundary-value problems for Burgers and Korteweg–de Vries equations. Equivalence groupoids are applied to the study of integrability, in particular, for deriving classes of integrable variable coefficient differential equations. A class of fifth-order variable coefficient Korteweg–de Vries-like equations is considered within the above framework. The method of mapping between classes is utilized for finding regular nonclassical reduction operators of reaction–diffusion equations with spatial-dependent coefficients and of the Newell–Whitehead equations with time-dependent coefficients. For the latter equations, the construction is exhaustive.

Key words: group analysis of differential equations, equivalence groupoid, Lie symmetry, nonclassical symmetry, reduction operator, equivalence group, conservation law.

Підписано до друку 05.08.2020. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2. Умов. друк. арк. 1,8.
Наклад 100 пр. Зам. 37. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.