

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Конаревої Світлани Вікторівни

«Нерівності типу Джексона в гільбертових просторах»,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Основний напрям дисертаційного дослідження Конаревої Світлани Вікторівни пов'язаний з задачею отримання непокрощуваних нерівностей типу Джексона-Стечкина для функцій зі значеннями в абстрактному гільбертовому просторі. Нерівності такого виду, в яких найкраще рівномірне наближення функції оцінюється зверху через значення її модуля неперервності (чи її модулів гладкості) бере початок із робіт Джексона. У 60-х роках ХХ століття було отримано низку оцінок типу Джексона з точними (найменшими) константами. У 1962 р. М.П. Корнейчук одержав точну нерівність типу Джексона для найкращих наближень періодичної функції $f \in C$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$. Точні нерівності типу Джексона-Стечкина у просторі L_2 для наближення тригонометричними поліномами були отримані у 1967 р. М.І. Чернихом. Він же встановив непокрощувані нерівності, в яких найкращі середньоквадратичні наближення функції оцінюються зверху через середні значення її модуля неперервності з деякою вагою (нерівності Джексона-Черниха). Якщо вагову функцію вибрано вдало, то класичні нерівності Джексона є безпосереднім наслідком з нерівностей Джексона-Черниха. Розвитку цієї тематики присвячено праці М.П. Корнейчука, В.К. Дзядика, М.І. Черниха, І.І. Ібрагімова, В.О. Юдіна, Л.В. Тайкова, В.В. Арестова, О.Г. Бабенка, В.І. Іванова, В.Ф. Бабенка, С.Б. Вакарчука, О.І. Степанця та А.С. Сердюка, М.Ш. Шабозова, а для випадку апроксимації елементів довільного гільбертового простору – М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки, С.М. Торби та інших математиків.

Подальший розвиток досліджень нерівностей подібного вигляду, був пов'язаний із заміною класичних модулів неперервності m -го порядку більш загальними модулями неперервності (див. роботи Х. Шапіро та Дж. Бомана, О.Г. Бабенка, С.М. Васильєва, А.І. Козка та О.В. Рождественського).

Згодом вивчались питання про одержання точних нерівностей типу Джексона-Стечкина для апроксимації функцій заданих на дійсній осі цілими функціями експоненціального типу, а також апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами майже періодичних функцій.

Незважаючи на велике число результатів з даної тематики, у ряді важливих випадках точні константи в нерівностях типу Джексона залишалися невідомими навіть у випадку функцій однієї змінної. Так само залишалися відкритими питання про одержання подібних нерівностей для функцій з більш загальними областями значень.

Зважаючи на вищезазначене, вважаю тему дисертаційного дослідження С.В.Конаревої актуальною і перспективною.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 146 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 170 сторінок машинописного тексту.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету та задачі дослідження, об'єкт і предмет дослідження, зазначено методи досліджень, висвітлено наукову новизну отриманих результатів, подано інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації, описано структуру і зміст роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи носить оглядовий та допоміжний характер. В ньому наведено огляд відомих результатів за тематикою роботи а також наведено означення основних понять та викладено допоміжні відомості з теорії функцій та функціонального аналізу.

Основний зміст роботи викладено в 2 - 4 розділах (обсягом 85 сторінок) .

Другий розділ дисертації присвячено одержанню нерівностей типу Джексона-Черниха , Джексона та Джексона-Стечкина для функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями в гільбертовому просторі. Також отримано точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі.

Основними результатами підрозділу 2.1 є точні оцінки найкращого наближення $E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} = \inf_{g \in T_{2n-1}^H} \|f - g\|_{2,H}$ функції f однієї змінної зі значеннями в довільному (дійсному чи комплексному) сепарабельному гільбертовому просторі H множиною T_{2n-1}^H узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вищого за $n-1$ вигляду $T_n(x) = \sum_{|k| < n} A_k e^{ikx}$, де $A_k \in H$.

У теоремах 2.1.1 та 2.1.3 дисертантка для довільної 2π -періодичної функції f , інтегровної за Бохнером на $[0; 2\pi]$, що майже скрізь не є константою, для всіх натуральних n і m встановила нерівності

$$E^2(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f; t)_{2,H} \sin(nt) dt,$$

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{1}{2} \sqrt{n(C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f; t)_{2,H} \left(\sin \frac{nt}{2} + \frac{1}{2} \sin nt \right) dt \right\}^{1/2}$$

і довела їх непокрощуваність. Аналог нерівності Джексона-Черниха встановлено також і для аналітичних функцій з множини $\mathcal{H}^2(H)$.

У теоремі теоремі 2.1.4 наведено непокрощувану нерівність

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{n}{4|\lambda_n|} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda, M)}, t) dt.$$

для функції f із класу

$$L_{2,H}^{\Lambda,M} = \{f \in L_2([0; 2\pi], H) : \|f^{(\Lambda,M)}\|_{2,H}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) < \infty\},$$

де $f^{(\Lambda,M)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt)$; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N}$, $M = \{\mu_k\}_{k \in N}$ –

послідовності чисел такі, що $\left\{\frac{|\lambda_k|}{k}\right\}$, $\left\{\frac{|\mu_k|}{k}\right\}$, $\{|\lambda_k|\}$ і $\{|\mu_k|\}$ не спадають, коли $k \rightarrow +\infty$, $|\lambda_k| = |\mu_k|$. Зазначена нерівність є певним аналогом результату [128] Л.В.Тайкова для диференційовних функцій із простору L_2 .

В дисертації також встановлено аналог зазначеного результату Л.В.Тайкова і для аналітичних функцій з множини $\mathcal{H}^2(H)$ (див. наслідок 2.1.2).

В підрозділі 2.2 встановлено нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі. В теоремах 2.2.1 та 2.2.2 для довільної майже скрізь відмінної від константи функції $f(x) \in L_2([0; 2\pi], H)$, встановлено непокрашувані нерівності

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f, \frac{\pi}{n})_{2,H},$$

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} < (C_{2m}^m)^{-1/2} \omega_m(\frac{2\pi}{n}; f)_{2,H}.$$

Ці нерівності як за виглядом, так і за методом їх доведення є аналогами результатів М.І. Черниха [139, 140]

Підрозділ 2.3 присвячено дослідженню слабких поперечників за Колмогоровим класів $H_{2,H}^{1/2} W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$ періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі H . Основними результатами підрозділу є теорема 2.3.1 згідно з якою

$$d_{2n-1}^w(H_{2,H}^{1/2}, L_2([0; 2\pi], H)) = E(H_{2,H}^{1/2}, T_{2n-1}^H)_{2,H} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

та теорема 2.3.2, яка стверджує, що

$$d_{2n-1}^w(W_{2,H}^{\Lambda,M,n}, L_2([0; 2\pi], H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|}.$$

Зазначені теореми є узагальнюючими аналогами відповідно результатів Ю.І.Григоряна [67] і Л.В.Тайкова [128], а їх доведення при оцінці знизу слабких поперечників базується на використанні певного узагальнення теореми про поперечник кулі (див. роботу В.Ф.Бабенка [37]).

У підрозділі 2.4 встановлено точні нерівності типу Джексона для вектор-функцій, зі значеннями у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі H . Отримані результати є аналогами результатів М.І. Черниха [140] та В.О. Юдіна [145].

Третій розділ дисертації присвячено встановленню нерівностей типу Джексона для майже періодичних функцій. У підрозділі 3.1 наведено аналоги нерівностей Джексона та Джексона-Черниха для майже періодичних функцій Безиковича класу B^2 , показники Фур'є яких мають єдину граничну точку в нескінченності (теореми 3.1.1- 3.1.3).

У підрозділі 3.2 доведено теорему 3.2.1, що містить непокриту нерівність типу Джексона, в якій найкраще наближення B^2 -майже періодичних функцій оцінюється зверху за допомогою узагальнених модулів неперервності. Зазначена теорема є узагальнюючим аналогом результату С.Н.Васильєва[59].

Підрозділ 3.3 містить аналоги нерівностей Джексона та Джексона-Черниха для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі H . Доведено (теореми 3.3.2, 3.3.3 та 3.3.4), що для довільної майже періодичної функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H , яка відмінна від константи, з рядом Фур'є $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$, мають місце непокриту нерівності

$$E_{\lambda_n}^2(f) \leq \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f, t) \sin(\lambda_n t) dt,$$

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f, t) \left(\sin \frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2} \sin(\lambda_n t) \right) dt \right\}^{1/2},$$

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2} \omega_m \left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n} \right).$$

У підрозділі 3.4 встановлено нерівності типу Джексона для майже періодичних функцій $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, $A_k = M\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\}$ з узагальненими

модулями неперервності $\omega_\varphi(f, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|A_k\|^2 \varphi(\lambda_k t) \right]^{1/2}$, де $\varphi(\lambda_k t) =$

$\left| \sum_{j=0}^m \mu_j e^{i\lambda_k j t} \right|^2$ – невід'ємна 2π -періодична функція, що перетворюється в нуль при

$t = 0$. Доведено (теорема 3.4.1.), що для кожної такої функції φ існує точка $\gamma > 0$, залежна лише від функції φ , така, що для довільної майже періодичної

функції f виконується нерівність $E_{\lambda_n}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}} \omega_\varphi \left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n} \right)$. і при цьому

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B^2} \frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_\varphi \left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n} \right)} = \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}, \text{ де } I(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt.$$

Четвертий розділ дисертації містить результати, що стосуються нерівностей типу Джексона наближення елементів гільбертового простору H підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці.

У підрозділі 4.1 для найкращого наближення елемента $f \in H$ функціями із класу W_σ $E_\sigma(f) = \inf_{g \in W_\sigma} \|f - g\|$, $W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g : g \in H \right\}$, $\sigma > 0$ та модуля неперервності $\omega(f; t) = \sup_{|\delta| \leq t} \|U_\delta f - If\|$, що визначається за допомогою групи унітарних операторів $U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f$, ($0 \leq t < \infty$), встановлені наступні нерівності (теореми 4.1.1 та 4.1.2.):

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \|U_t f - f\|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}, \quad E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f; \frac{\pi}{\sigma}).$$

Вказано умови непокрашуваності цих нерівностей. Крім того показано (теорема 4.1.3), що

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f, t) \left(\sin \frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{2} \sin \sigma t \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Ці результати є аналогами відповідних нерівностей, отриманих М.І. Чернихом [139, 140] та В.Ю. Поповим [116] для найкращих середньоквадратичних наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу σ .

У підрозділі 4.2 встановлено точні нерівності типу Джексона для елементів гільбертового простору H з узагальненими модулями неперервності.

А саме, для оператора узагальненого зсуву $\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{its}) dE(s)x$ розглянуто характеристику

$$\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0, \delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_t^\varphi x\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p}$$

і показано (теорема 4.2.2) що для довільної неперервної в інтервалі $(-\sigma, \sigma)$, обмеженої, комплекснозначної функції $\lambda(t)$, такої, що $\lambda(t) \equiv 1$ в $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \sigma$, лінійного методу наближення $\Lambda x = \int_{|t| < \sigma} \lambda(t) dE(t)x$, будь-якого елемента $x \in H$, такого, що $x \neq U_t x$ для деякого t , довільного елемента $f \in H$ і будь-якої ваги $V(t)$ має місце точна нерівність

$$|(x - \Lambda x, f)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E(t)f, f)}{\Gamma(V; \delta t)} \right)^{1/2} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0, \delta])), \quad \text{де } \Gamma(V; t) = \int_0^1 \psi(tv) V(v) dv.$$

Зокрема,
$$\left\| x - \int_{|t| < \sigma} dE(t)x, f \right\| \leq \left(\int_{|t| \geq \sigma} \frac{d(E(t)f, f)}{\Gamma(V; \delta t)} \right)^{1/2} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0, \delta])).$$

На думку опонента, дисертаційна робота Конаревої Світлани Вікторівни виконана на високому науковому рівні. Одержані в ній основні математичні результати є новими, обґрунтованими, науково значимими та достовірними.

Результати дисертаційної роботи опубліковано у 7 наукових статтях у фахових виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук, з них одна стаття – в Українському математичному журналі, який входить до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science. Отримані результати неодноразово доповідалися на фахових наукових семінарах у провідних наукових центрах України, а також пройшли апробацію на багатьох міжнародних та всеукраїнських математичних конференціях. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Дисертаційна робота Конаревої Світлани Вікторівни є завершеною науковою працею, яка містить цікаві та змістовні результати теоретичного характеру.

Зауваження та недоліки.

1. Перелік умовних позначень в дисертації неповний. До нього варто було б віднести позначення для просторів B^p , W_σ , класів $\mathcal{H}^2(H)$, $L_{2,H}^{\Lambda,M}$, $L_{2,H}^r$, $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$, $H_{2,H}^{1/2}$, величин $E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H}$, $M\{f(x)\}$, $E_{\lambda_n}^2(f)$ та ін.

2. На с.59 (7 і 5 стрічки знизу) підсумовування ведеться по параметру n , а під знаком суми знаходяться послідовності залежні від k .

3. Невірні посилання на формули: на с.61 (6 і 7 стрічки знизу) замість (1.11) потрібно (1.15); на с.82 (2 стрічка знизу) замість (2.2) треба (2.3).

4. На с.61, 62 під знаком скалярного добутку в одних випадках пишеться індекс H , а в інших – ні.

5. На с.65 вираз, що задається інтегралом у 2-ій стрічці зверху має залежати від параметра t .

6. На с.66, 67 у формулюванні теореми 2.1.2. та при її доведенні треба вказати область значень параметра z .

7. На с.71 (8 стрічка зверху) замість $\omega^2(f;t)_2$ треба $\omega^2(f;t)_{2,H}$. На с.72, 74, 75, 88 замість $\omega(f^{(\Lambda,M)};t)$ треба писати $\omega(f^{(\Lambda,M)};t)_{2,H}$.

8. При доведенні теореми 2.1.4. дисертантка забула вказати з чого має випливати непокращуваність нерівності (2.5).

9. У формулюванні теореми 2.1.5. треба додати умови про не зростання послідовності норм $\{\|Q_k\|\}$ операторів Q_k з ростом $|k|$.

10. На с.81 (5, 3 та 1-й стрічках знизу) замість $\frac{\sin n\nu\nu}{n\nu}$ треба писати $\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}$.

11. На с.86 (11 стрічка зверху) треба писати $0, t \in [1, (k-1)\pi/n) \cup [k\pi/n, 2\pi)$.

12. На с.96 у формулюванні теореми 2.4.2. треба писати $E_n(f; T)_{2,H}$ і $\omega(\frac{\tau}{n} f; T)_{2,H}$ замість $E_n(f; T)_2$ і $\omega(\frac{\tau}{n} f; T)_2$ відповідно.

13. На с.101 (4 стрічка зверху) пропущено слово «мають» (мають єдину граничну точку).

14. Доведення деяких теорем дисертації можна було б скоротити. Так, зокрема, доведення теореми 3.4.1. – в ідейному і технічному плані повторює доведення теореми 3.2.1. з тією відмінністю, що скрізь замість $|A_k|$ розглядаються $\|a_k\|$. Так само можна було б скоротити розмір текстових запозичень з робіт М. І. Черниха, С. Н. Васильєва, Л. В. Тайкова та ін.

15. На с.136 у нерівності, що знаходиться у 3 стрічці зверху треба вказати область зміни параметрів k, s, σ і дати пояснення чому ця нерівність має місце.

16. У формулюванні теореми 4.2.1. перед нерівністю (4.12) замість слова «якщо» треба написати «виконується нерівність».

17. На с.141 (10 стрічка зверху) пропущено номер нерівності – потрібно (4.12).

18. На с.142 (1 і 2 стрічки знизу) під знаком супремума треба писати « $\|f\| = 1$ » замість « $PfP = 1$ ».

19. На с. 31 зазначено, що теореми 3.1.2 і 3.1.3 були раніше отримані Я.Г. Притулою та М.М. Яцимірським (мова йде про роботу [118]) і далі говориться про незалежність доведення цих теорем від робіт Я.Г. Притули та М.М. Яцимірського. На думку опонента так писати не можна. Оскільки робота [118] опублікована у 1983 році, а відповідна робота [21] дисертантки опублікована на 27 років пізніше (у 2011 році). Тому треба говорити не про незалежність результатів, а про їх перевідкриття за причини незнання авторів [21] про існування роботи [118].

20. Трапляються невірні посилання на роботи. Так на с. 48 та с. 124 замість [63] потрібно [66]; на с. 86 замість [65] потрібно [67]; на с. 90 замість [144] потрібно [145]. Крім того, на с. 57 при посиланні на підручник з функціонального аналізу [42] трьох авторів (Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель) вказано лише прізвище першого автора і в ініціалах Юрія Макаровича допущено помилку (Ю.Н. замість Ю.М.).

21. Трапляються помилки при написанні чоловічих прізвищ у тих чи інших відмінках: замість «отримані (запропоновані) М.І. Черних» треба писати «отримані (запропоновані) М.І. Чернихом», або замість «роботи (результати, метод, теорема) М.І. Черних» треба писати «роботи (результати, метод, теорема) М.І. Черниха» (с. 2, 4, 5, 28, 64, 68, 69, 90, 102, 132) замість «вивчалися Л.І. Козко» треба «вивчалися Л.І. Козком» (с. 3), замість «введене (вивчалися) Бабенко» треба «введене (вивчалися) Бабенком» (с. 4, 43, 132), замість «належить В.Ф. Бабенко» треба «належить В.Ф. Бабенку» (с. 21).

22. Зустрічаються помилки у написанні прізвищ: замість «Корнейчук» треба «Корнейчук» (с. 2), замість «Василєв» треба «Васильєв», а також на с.8 замість «Dzyadyka» треба «Dzyadyk», замість «Stepantsa» треба «Stepanets», замість «Таукова» треба «Таиков».

23. В роботі часто зустрічаються русизми на кшталт «функції одного змінного» (с. 3), «праць на тему» (с. 12), «дійсного змінного» (с. 19), «поперечник по Колмогорову» (с. 17), «обертається в нуль (в рівність)» (с. 33, 106, 119, 136, 140, 141), «сумовних зі ступенем» (с. 45), «з властивості слідує» (с. 60), «згідно теоремі» (с. 76), термін «вимірність» вживається в сенсі «розмірність» (с. 87), «з нормой» (с. 89), «кусково-гладкой» (с. 91), «має вид» (с. 95), «сумовних зі степенню» (с. 100), «слідує із» (с. 103, 109, 114, 121), «задав є» (с. 130), «являються аналогами» (с. 132), «неперетинаючихся» (с. 138), «він визначен» (с. 138), «наприклад» (с. 145), «обращения» (с. 146), «зліковна» (с. 146), «нерівність» (с. 76). Є невдалі висловлювання «константа не покращується» (с. 114).

24. Трапляються граматичні помилки (с. 5, 25, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 45, 59, 60, 78, 79, 90, 96, 104, 114, 115, 137, 138, 141, 144, 146).

Наведені недоліки не є принциповими, вони носять здебільшого технічний чи редакційний характер і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Зважаючи на вищесказане вважаю, що дисертаційна робота Конаревої Світлани Вікторівни є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати і задовольняє вимогам пп. 9, 11-14 «Порядку присудження наукових ступенів» щодо кандидатських дисертацій, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами), а її авторка, Конарева Світлана Вікторівна, заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України,
доктор фіз.-мат. наук



Надійшов 17 вересня 2020 р.