

Відгук
офіційного опонента
на дисертаційну роботу Конаревої Світлани Вікторівни
"Нерівності типу Джексона в гільбертових просторах", поданої на
здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз
111 — Математика

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження. Нерівностями типу Джексона в теорії апроксимації прийнято називати нерівності, в яких величина найкращого наближення функції елементами скінченного підпростору в просторі L_p оцінюється через її модуль неперервності. У 1911 році Джексон одержав першу нерівність подібного виду з неточною константою у випадку рівномірного наближення неперервних періодичних функцій тригонометричними поліномами. Для знаходження точної константи в нерівності вказаного типу було зроблено багато спроб. Тільки у 1961 році М.П.Корнейчуку вдалося отримати перший результат щодо непокрощуваності константи в нерівності типу Джексона. Наступний крок було зроблено Н.І.Черних (1967 р.), який довів нерівність Джексона з точною константою у просторі L_2 . Питання щодо обчислення точних констант у нерівностях типу Джексона також вивчалось у роботах С.Б.Стєчкіна, Л.В.Тайкова, В.Ю.Попова, В.А.Юдіна, В.В.Арестова, А.О.Лигуна, О.Г.Бабенка, В.І.Іванова, В.Ф.Бабенка, С.Б.Вакрчука, О.І.Степанця та А.С.Сердюка, М.Ш.Шабозова, а для елементів гільбертового простору — в роботах М.Л.Горбачука, Я.І.Грушки, С.М.Торби та інших авторів.

Незгасаючий інтерес до розв'язання вказаної проблеми в певній мірі пояснюється тим, що кожен новий випадок потребує залучення нових ідей і методів, які через деякий час можуть виявитися корисними при вирішенні інших екстремальних задач теорії апроксимації.

Подальший розвиток вказаної тематики пов'язаний з використанням більш загальних характеристик гладкості функцій. Нагадаємо, що нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності вивчали Шапіро та Боман, О.Г.Бабенко, С.М.Васильєв, А.І.Козко та А.В.Рождественський. Також одним із напрямів розвитку нерівностей типу Джексона стало їх дослідження для B^2 — майже періодичних функцій.

Слід зазначити, що у багатьох важливих випадках точні константи в нерівностях типу Джексона лишаються невідомими навіть для функцій одного змінного, тим паче для функцій з більш загальними областями значень. То-

му тему дисертаційної роботи, присвячену питанням про точні константи у нерівностях типу Джексона, що оцінюють наближення функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та елементів гільбертового простору через їх модулі неперервності, модулі гладкості, а також узагальнені модулі неперервності **вважаю актуальною**.

2. Основний зміст дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами; списку опублікованих наукових праць здобувача; змісту; переліку умовних позначень; вступу; 4-х розділів, останні три з яких супроводжуються висновками; загальних висновків та списку використаних джерел зі 146 найменувань, додатку. Загальний об'єм дисертації складає 170 сторінок машинописного тексту.

У вступі зазначається актуальність обраної тематики дисертаційного дослідження, вказуються мета і завдання дослідження, підкреслюється наукова новизна отриманих результатів та їх практичне значення, вказуються особистий внесок здобувача та апробація результатів дисертації тощо.

У першому розділі дисертації наводяться необхідні означення і поняття та надаються потрібні історичні відомості щодо раніше отриманих результатів у обраному напрямку досліджень. Зокрема, згадуються фундаментальні результати М.П.Корнейчука (1961 р.), В.К.Дзядика (1975 р.), М.І.Черних (1967, 1992 рр.), Л.В.Тайкова (1976, 1979 рр.), В.А.Юдіна (1976, 1981 рр.), В.Ю.Попова (1972 р.), С.М.Васильєва (2002, 2009 рр.), А.І.Козко та А.В.Рожественського (2003, 2004 рр.) тощо. Також наведена певна інформація стосовно нерівності типу Джексона при апроксимації цілими векторами експоненціального типу, деякі відомості з аналізу функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та необхідні елементи спектральної теорії.

Другий розділ дисертації присвячений нерівностям типу Джексона для функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями в гільбертовому просторі та розв'язанню на цій основі деяких екстремальних задач теорії апроксимації. Зокрема, в теоремі 2.1.1 узагальнюються відомі результати М.І.Черних 1967 року на випадок функцій зі значеннями у довільному дійсному або комплексному сепарабельному гільбертовому просторі. В наступній теоремі 2.1.3, яка теж є узагальненням одного результату М.І.Черних, дається оцінка зверху величини $E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H}$ найкращого наближення функції $f \in L_2([0; 2\pi], H)$ підпростором узагальнених тригонометричних поліномів порядку $n - 1$, виражена за допомогою нелінійного функціоналу від m -го інтегрального модуля гладкості $\omega_m(f, t)_{2,H}$. В теоремах 2.2.1 та 2.2.2 отримано нерівності типу Джексона з точними за певних умов константами, де величина $E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H}$

оцінюється зверху через модуль неперервності та модуль гладкості відповідно.

Основні ідеологічні моменти доведень перерахованих вище результатів здобувача запозичені з роботи Н.І.Черних [139].

Теореми 2.3.1 та 2.3.2 присвячені отриманню точних значень слабких поперечників за Колмогоровим класів $H_{2,H}^{1/2}$ та $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$ у просторі $L_2([0, 2\pi), H)$ відповідно.

У розділі 2.4 викладено узагальнення на випадок вектор-функцій зі значеннями у гільбертовому просторі аналогів точних нерівностей типу Джексона у $L_2^k(T^m)$, отриманих М.І.Черних в [140] при $m = 1$ та В.А.Юдіним у [144] при $m \geq 2$ (дивись теорему 2.4.1 та наслідки з неї).

Третій розділ дисертації присвячений нерівностям типу Джексона для майже періодичних функцій. Після наведення низки необхідних понять та означень формулюються теореми 3.1.1 та 3.1.2, отримані раніше Я.Г.Притулою [117] та Я.Г.Притулою і М.М.Яцемирським [118] для B^2 — майже періодичних функцій. Здобувач наводить інші їх доведення, використовуючи методи, запропоновані М.І.Черних в [140] та [139] відповідно.

Оцінці апроксимації для майже періодичних функцій Безиковича класу B^2 через узагальнений модуль неперервності присвячена теорема 3.2.1, яка узагальнює один результат С.Н.Васильєва [59] і використовує низку ідей, викладених у цій роботі.

Наступні теореми 3.3.2 та 3.3.3 фактично є аналогами теорем 3.1.1 та 3.1.2 відповідно для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі. Аналогічна картина має місце і для теорем 3.4.1 і 3.2.1.

У **розділі чотири** дисертації досліджуються нерівності типу Джексона для найкращих наближень елементів гільбертового простору підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці. У теоремі 4.1.1 отримано непокращувану за певних умов оцінку зверху величини $E_\sigma(f)$ через нелінійний функціонал від $\|U_t f - f\|^2$, а в теоремі 4.1.2 отримано точну за певних умов оцінку зверху для $E_\sigma(f)$ через функцію $\omega(f, t)$, яка є природним аналогом модуля неперервності.

3. Наукова новизна одержаних результатів, їх ступінь обґрунтованості та достовірність. Основні результати дисертаційної роботи є новими, обґрунтованими та достовірними. Вони полягають у наступному.

1) Отримано нові точні оцінки найкращого наближення узагальненими тригонометричними поліномами довільної функції зі значеннями в сепарабельному гільбертовому просторі, виражені через модуль неперервності, мо-

дуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції.

2) Знайдено точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

3) Отримано точні нерівності типу Джексона для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

4) Одержано точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору підпросторами, пов'язаними з заданим розкладом одиниці, через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору.

4. Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, викладені в дисертації, мають теоретичний характер. Їх, зокрема, можна використовувати при вивченні проблем, пов'язаних з наближенням елементів гільбертового простору різноманітними підпросторами. Методика ж отримання результатів може бути використана при подальшому вивченні питань апроксимації функцій однієї та багатьох змінних.

5. Аналіз публікацій та повнота відображення результатів в авторефераті дисертації. За результатами досліджень опубліковано 19 наукових праць, з яких 7 статей у наукових фахових виданнях у галузі фізикоматематичних наук (1 стаття надрукована у науковому періодичному виданні, що входить до наукометричної бази SCOPUS) та 12 тез на міжнародних та всеукраїнських конференціях. Наведений в дисертації перелік публікацій та їх зміст відповідають темі дисертації. В авторефераті у повній мірі відображені основні положення та необхідні висновки дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи мають широку апробацію і неодноразово доповідались на міжнародних конференціях та на наукових семінарах в українських університетах та наукових установах.

6. Відповідність дисертації встановленим вимогам, оцінка змісту дисертації та її завершеності. Структура дисертації, її обсяг та оформлення відповідають вимогам, що висуваються до кандидатських дисертацій. Дисертаційне дослідження Конаревої С.В. є завершеною науковою роботою, виконаною за актуальною темою. Робота написана чіткою мовою з логічним представленням матеріалу, що характеризує високий науковий рівень здобувача.

7. Зауваження щодо змісту дисертації.

1) Наведені на стор. 19 у 11-12 рядках зверху дві формули доцільно було б об'єднати в одну.

2) У статті Л.В.Тайкова [129] досліджувались класи функцій $K = K(r, h) =$

$\{f \in L_2^r : \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, u) du \leq 1\}$, $h > 0$, та обчислювались точні значення колмогоровських n -поперечників цих класів за умови, що $nh \leq \pi/2$. Тобто величина h ніяк напряду не пов'язана з n , як це робиться при обчисленні слабких за Колмогоровим поперечників класів $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$ (дивись стор. 20, 8 та 10 рядки зверху). Зазначений факт спостерігається і для класів $W_{2,H}^{n,r}$ при обчисленні величин $d_{2n-1}^W(W_{2,H}^{n,r}, L([0; 2\pi], H))$ (дивись стор. 28, 9 та 11 рядки знизу).

3) В списку використаних джерел треба було б зазначити роботу М.Ф.Тімана та Ю.Х.Хасанова "Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций" // Ряды Фурье : теория и приложения. Киев, Ин-т математики АН України, 1992, с. 142–146. (Ю.Х.Хасанов під керівництвом М.П.Тімана захистив по цій тематиці кандидатську дисертацію у Дніпропетровську у 1994 році).

4) На стор. 38 треба було б надати більш чіткі означення класів C та L_p ($1 \leq p \leq \infty$).

5) На стор. 41 вказано, що теорема 1.1.4 була доведена Л.В.Тайковим у роботі [130]. Але у зазначеній роботі така теорема взагалі відсутня.

6) На стор. 42 (12-13 рядки зверху) формули для оцінки зверху величини $E_\sigma(f)$ доцільно було б об'єднати в одну, пояснивши, що саме означає величина $E_\sigma(f)$.

7) Один і той же символ T використовується для позначення заданої замкненої підмножини з $[0, 2\pi]$ (стор. 23, 13-14 рядки зверху) та для позначення множини тригонометричних поліномів (стор. 45, 9 рядок зверху).

8) На стор. 67 всюди по тексту треба зазначити, що $r \rightarrow 1-$, а не $r \rightarrow 1$. У формулі $\|(r^k - 1)e^{ikt} \cdot a\| = (r^k - 1)\|a\|$ (стор. 67, 8 рядок знизу) множник $(r^k - 1)$ треба замінити на $(1 - r^k)$.

9) На стор. 75 (2 рядок зверху) не вказано номер теореми, з якої випливає точність нерівності.

10) Теорема 2.1.4' (стор. 26) розглядається як наслідок теореми 2.1.4. Однак, на відміну від класу $L_{2,H}^{\Lambda,M}$, при означенні якого сума $< \infty$ (дивись теорему 2.1.4), в теоремі 2.1.4' відповідна сума чомусь ≤ 1 , а не $< \infty$.

11) На стор. 81 аргумент синуса повинен бути $(n\nu\delta)$, а не $(n\nu\nu)$ (дивись 1, 3, 5 рядки знизу).

12) На стор. 86 другий рядок в означенні функції $\psi_k(t)$ треба записати більш акуратно.

13) Здобувач не надає пояснень, навіщо він передоводить теореми 3.1.1 та 3.1.2, отримані раніше іншим шляхом Я.Г.Притулою в [117] та Я.Г.Притулою та М.М.Яцемирським у [118].

14) Має місце певна кількість русизмів, наприклад, "у змісті" (стор. 61, 110), "у противному випадку", "слабо" (стор. 85), які використані замість виразів "у сенсі", "у протилежному випадку", "слабко". Таке є певна кількість технічних помилок, наприклад, у назві пункту 3.2 (стор. 106) пропущено слово "функцій". Це ж спостерігається і у змісті дисертації на стор. 16.

ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК. Не зважаючи на зроблені зауваження, одержані в дисертації результати та зроблені автором висновки є **правильними і обґрунтованими**. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто її автором і досить повно викладені в надрукованих ним роботах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Конаревої Світлани Вікторівни "Нерівності типу Джексона в гільбертових просторах" задовольняє вимогам пп. 9, 11-13 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Конарева Світлана Вікторівна **заслуговує** на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз, 111 — математика.

Офіційний опонент

доктор фіз.-мат. наук, професор

професор кафедри інформаційних технологій

Університету імені Альфреда Нобеля, Дніпро



С.Б.Вакарчук

Підпис засвідчую

Вчений секретар, доктор педагогічних наук,

професор



С.П.Кожушко