Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Конарева Світлана Вікторівна

УДК 517.5

Дисертація

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА В ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________ С.В. Конарева

Науковий керівник: **Бабенко Владислав Федорович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ - 2020

АНОТАЦІЯ

Конарева С.В. Нерівності типу Джексона в гільбертових просторах. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 математичний аналіз. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена питанням про точні константи у нерівностях типу Джексона-Стєчкіна, що оцінюють наближення функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та елементів гільбертового простору через їх модулі неперервності, модулі гладкості, а також узагальнені модулі неперервності.

Основоположними в оцінках апроксимації неперервної періодичної функції через модуль неперервності цієї функції в деякій точці вважаються дослідження Д. Джексона. Зміст нерівностей типу Джексона-Стєчкіна полягає в тому, що вони дають оцінку швидкості збіжності до нуля найкращого наближення функції в залежності від її диференціально-різницевих властивостей. У 60-х роках XX століття було отримано ряд оцінок типу Джексона з найкращими константами. У 1962 р. Корнейчук М.П. отримав точну нерівність типу Джексона для найкращих наближень періодичної функції $f \in C$ тригонометричними поліномами порядку n-1. Точні нерівності типу Джексона-Стєчкіна в просторі L_2 отримані у 1967 році М.І. Черних. Розвитку даної тематики для функцій з різними областями визначення були присвячені роботи М.П. Корнейчука, В.К. Дзядика, М.І. Черних, В.О. Юдіна, Л.В. Тайкова, О.Г. Бабенка, В.І. Іванова, В.Ф. Бабенка, С.Б. Вакарчука, О.І. Степанця та А.С. Сердюка, М.Ш. Шабозова, а для елементів гільбертового простору – М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки та С.М. Торби та інших математиків. Подальший розвиток

досліджень нерівностей, що оцінюють найкраще наближення функції, був пов'язаний із заміною модулів неперервності m-го порядку більш загальними модулями неперервності. Питання про нерівності з узагальненими модулями неперервності вивчалися Х. Шапіро та Дж. Боманом, О.Г. Бабенко, С.М. Василєвим, А.І. Козко та А.В. Рождєственським. Також одим із напрямків розвитку нерівностей типу Джексона-Стєчкіна було дослідження таких нерівностей для B^2-майже періодичних функцій.

Разом з тим у багатьох важливих випадках точні константи в нерівностях типу Джексона лишаються невідомими навіть у випадку функцій одного змінного. Зокрема, важливим і цікавим є питання про виконання подібних нерівностей для функцій з більш загальними областями значень. Так нерівності типу Джексона-Стєчкіна для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі можуть бути застосовані для оцінок наближення випадкових процесів.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків і списку використаних джерел, який містить 149 найменувань.

Основними об’єктами дослідження дисертаційної роботи є нерівності виду

$$E(f, \mathcal{M})_X \le \chi\ \omega\left(f, \frac{\eta}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$E(f, \mathcal{M})_X \le \chi\ \omega_m\left(f, \frac{\eta}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а також нерівності з більш загальними модулями неперервності.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об’єкт, предмет, мету і задачі, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувача.

У першому розділі представлений огляд відомих результатів за тематикою роботи, а також наводяться необхідні відомості та означення, які стосуються періодичних, а також аналітичних в одиничному колі функцій зі значеннями у гільбертовому просторі. Наведені також деякі елементи спектральної теорії.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений нерівностям типу Джексона та Джексона-Стєчкіна для наближення узагальненими тригонометричними поліномами функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями у гільбертовому просторі. У підрозділі 2.1 та 2.2 для довільної функції f зі значеннями в сепарабельному гільбертовому просторі отримані нові точні оцінки найкращого наближення узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості самої функції та модуль неперервності похідної r-го порядку цієї функції. Ці результати є узагальненням відповідних класичних результатів Черних М.І, Тайкова Л.В. Також були отримані нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичними в одиничному колі.

У підрозділі 2.3 отримано точні значення слабких поперечників по Колмогорову деяких класів функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі, означених за допомогою модулів неперервності. Поняття слабких поперечників було введене В.Ф. Бабенко і С.О. Пічуговим для порівняння апроксимативних характеристик нескінченновимірних підпросторів.

Точні нерівності типу Джексона, отримані В.О. Юдіним для числових функцій з простору $L_2(T^m)$, були узагальнені на випадок функцій зі значеннями у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі H у підрозділі 2.4. Встановлено, що константа у цьому випадку залишається такою ж.

Третій розділ присвячений точним оцінкам апроксимації числових B^2-майже періодичних функцій та майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі, що містять модуль неперервності та модуль гладкості. В підрозділах 3.1 та 3.2 наводяться результати, що стосуються числових B^2-майже періодичних функцій. Перед формулюваннями та доведеннями результатів у підрозділі 3.3 наведені означення та основні властивості майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі. Одержані тут результати узагальнюють відомі результати Притули Я.Г., а також Притули Я.Г. і Яцимірського М.М. У підрозділі 3.4 доведена точна оцінка апроксимації для майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі через узагальнений модуль неперервності.

Нерівності типу Джексона-Стєчкіна для апроксимації елементів гільбертового простору цілими векторами експоненціального типу самоспряженого оператора були отримані Горбачуком М.Л., Грушкою Я.І. та Торбою С.М. У четвертому розділі дисертаційної роботи отримані нові точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору H підпросторами $W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\}$ та $W_{-\sigma,\sigma} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\}$ ($\sigma > 0$), пов'язаними з заданим розкладом одиниці через модулі неперервності та узагальнені модулі неперервності елементів цього простору. Зазначені умови точності цих нерівностей. Підрозділ 4.1 присвячений узагальненню класичних нерівностей типу Джексона. Наведені в цьому підрозділі точні оцінки апроксимації елементів гільбертового простору являються аналогами нерівностей, отриманих М.І. Черних та В.Ю. Поповим для найкращих L_2-наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу σ, а також нерівностей, отриманих В.Ф. Бабенко і Г.С. Жигановою для найкращих наближень частковими сумами рядів по системі вейвлетів Шеннона-Котельникова.

У підрозділі 4.2 введено поняття узагальнених модулів неперервності типу $\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta]))$, при означенні яких замість рівномірної норми узагальненої різниці $\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{its}\right) dE(s)x$ береться вагова L_p – норма, тобто замість $\omega_\varphi(x; \delta) = \max_{|t|\le\delta} \left\|\Delta_t^\varphi x\right\|$ розглядається

$$\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left\|\Delta_t^\varphi x\right\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p} \quad (V(t) \text{ - вагова функція}).$$

Це дозволяє з єдиної точки зору розглядати класичні та інтегральні нерівності типу М.І. Черних, а також інтегральні нерівності типу Л.В. Тайкова.

Одержано точні оцінки значення довільного обмеженого функціонала на різниці *x* - *Λx* наближуваного елемента *x* і значення на ньому лінійного метода *Λ* його наближення через введені узагальнені модулі неперервності. Одержані також точні нерівності, що оцінюють || *x* - *Λx* ||, й найкраще наближення елемента *x* через введені узагальнені модулі неперервності. Для доведення зазначених результатів були доведені деякі цікаві і самі по собі нерівності для обмежених операторів, що діють у гільбертовому просторі.

Наведені в цьому підрозділі результати містять в собі ряд точних нерівностей типу Джексона–Стєчкина для найкращих L_2-наближень періодичних функцій тригонометричними поліномами, результати щодо найкращих L_2-наближень функцій, заданих на всій осі цілими функціями експоненціального типу, а також аналогічні результати для майже періодичних функцій. Уже в цих конкретних випадках деякі результати є новими.

Ключові слова: нерівності типу Джексона, точні оцінки апроксимації, найкраще наближення функції, модуль неперервності, модуль гладкості, узагальнений модуль неперервності, функція зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі, слабкий поперечник, майже періодична функція зі значеннями у гільбертовому просторі, елемент гільбертового простору, підпростори пов’язані з розкладом одиниці.

ABSTRACT

Konareva S.V. Inequalities of Jackson type in Hilbert spaces. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for a Candidate Degree of Physical and Mathematical Sciences, in the specialty 01.01.01 – mathematical analysis – Oles Honchar Dnipro National University – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the questions about exact constants in Jackson - Stechkin type inequalities, which estimate the approximation of functions with values in Hilbert space and Hilbert space elements through their continuity modules, modules of smoothness, and generalized continuity modules.

Studies of D. Jackson are considered fundamental in the estimates of the approximation of a continuous periodic function through the modulus of continuity of this function at some point. The content of Jackson-Stechkin type inequalities is that they estimate rate of convergence to zero of the best approximation of a function, depending on its properties of differential-difference.

In the 1960s, a number of Jackson-type estimates with the best constants were obtained. In 1962, Korneichuk M.P. obtained an exact Jackson type inequality for the best approximations of the periodic function $f \in C$ with

trigonometric polynomials of order n-1. Exact Jackson-Stechkin type inequalities in L_2 space determined in 1967 by M. I. Chernykh. The works of M. P. Korneychuk, V. K. Dzyadyka, M. I. Chernykh, V. O. Yudina, L. V. Taykova, A. G. Babenko, V. I. Ivanova, V. F. Babenko, S. B. Vakarchuk, A. I. Stepantsa and A. S. Serdyuk, M. Sh. Shabozov were devoted to the elaboration of this topic for functions with different domains of definition, and works of M. L. Gorbachuk, Y. I. Grushka and S. M. Torba and other mathematicians for elements of a Hilbert space. Further development of inequalities studies, which estimate the best approximation of a function, was associated with the replacement of m-th order continuity modules with more general continuity modules. The issues of inequalities with generalized continuity modules were studied by H. Shapiro and J. Boman, O. G. Babenko, S. M. Vasilyev, A. I. Kozko and A. V. Rozhdestvenskiy. Also, one of the directions for the development of inequalities of the Jackson-Stechkin type was the study of such inequalities for B^2-almost periodic functions.

At the same time, in many important cases, the exact constants in Jackson type inequalities remain unknown even in the case of functions of one variable. Particularly, an important and interesting issue is the implementation of such inequalities with more general ranges of values. Thus, Jackson-Stechkin type inequalities for functions with values in a Hilbert space can be applied to estimate the approximation of random processes.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and English, a list of symbols, an introduction, four sections divided into subsections, general conclusions and a list of used literature containing 149 items.

The main objects of research of the dissertation work is the inequality of the form

$$E\,(f,\mathcal{M})_X \leq \chi\;\omega\left(f,\frac{\eta}{n}\right) \qquad (n = 1, 2,\ldots),$$

$$E\,(\,f\,,\,\mathcal{M}\,)_X\;\le\;\chi\;\;\omega_m\left(\,f\,,\frac{\eta}{n}\right)\qquad\qquad (n=1,\,2,\ldots),$$

as well as inequalities with more general continuity modules.

The introduction substantiates the relevance of the research, defines the object, subject, purpose and objectives, indicates the scientific novelty of the study and the personal contribution of the applicant.

The first section presents an overview of the known results on the subject of the paper, and also provides the necessary information and definitions concerning periodic as well as analytic functions in a unit circle with values in a Hilbert space. Some elements of the spectral theory are also given.

The second section of the dissertation is devoted to inequalities of Jackson type and Jackson-Stechkin type for approximating functions of one and many variables with values in a Hilbert space of generalized trigonometric polynomials. In Subsections 2.1 and 2.2, for an derivative of a function *f* with values in a separable Hilbert space, we obtain new exact estimates of the best approximation by generalized trigonometric polynomials in terms of the modulus of continuity, the modulus of smoothness of the function itself, and the modulus of continuity of the *r*-order derivative of this function. These results are a generalization of the corresponding classical results of Chernykh M. I., Taykov L. V. New exact Jackson type inequalities were also obtained for functions with values in Hilbert space that are analytic in a single circle.

In Section 2.3, we obtain the exact values of weak widths Kolmogorov of some classes of functions with values in separable Hilbert space defined by the continuity modules. The concept of weak widths was introduced by V. F. Babenko and S. O. Pichugov to compare approximate characteristics of infinite-dimensional subspaces.

Exact Jackson type inequalities obtained by V. O. Judin for the numerical functions from the space $L_2(T^m)$, they were generalized to the case of functions with values in the complex separable Hilbert space H in Section 2.4. It is established that the constant in this case remains the same.

The third section devoted to an accurate estimates of the approximation of B^2-almost periodic functions and almost periodic functions with values in Hilbert space containing a continuity module and a smoothness module. In Section 3.1 and 3.2 results are presented that relate to numerical B^2-almost periodic functions.

Before formulating and proving the results in Section 3.3, the definitions and basic properties of almost periodic functions with values in Hilbert space are given. The results obtained here summarize the well-known results of Pritula Y. G., as well as Pritula Y. G. and Yatsimirsky M. M. In Section 3.4, we give an accurate estimate of the approximation for almost periodic functions with values in Hilbert space through the generalized continuity module.

Jackson-Stechkin type inequalities for the approximation of Hilbert space elements by whole vectors of exponential type of a self-adjoint operator were obtained by Gorbachuk M. L, Grushka Y. I. and Torba S. M. In the fourth section of the dissertation new exact estimates of the best approximation of the elements of a separable Hilbert space H by subspaces are obtained

$$W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\} \text{ and } W_{-\sigma,\sigma} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\} \ (\sigma > 0),$$

related to expansion units through continuity modules and generalized continuity modules of elements of this space. The conditions of accuracy of these inequalities are indicated. Section 4.1 deals with the generalization of classical Jackson type inequalities. In this section, the exact estimates of the approximation of the elements of the Hilbert space are analogues of the inequalities obtained by M. I. Chernykh and V. Yu. Popov for the best L^2-approximations of functions by trigonometric polynomials and integer functions of exponential type σ, as well as inequalities obtained by V. F. Babenko and

G. S. Zhiganova for the best approximations to partial sums of the series on the Shannon-Kotelnikov wavelet system.

Section 4.2 introduces the notion of generalized modules of continuity of type $\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta]))$, in which the weight L_p is taken instead of the uniform norm of the generalized difference $\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{its}) dE(s)x$ – that is , instead of $\omega_\varphi(x;\,\delta) = \max_{|t|\le\delta} \|\Delta_t^\varphi x\|$ considered

$$\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_t^\varphi x\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p} \quad (V(t) \text{ - weight function})$$

This allows us to consider the classical and integral inequalities of the Chernykh M. I. type, as well as integral inequalities of the L. V. Taikov type.

Exact estimates of the value of an arbitrary bounded functional on the difference between *x* - *Λx* approaching element *x* and the value of the linear method *Λ* and its approximation are obtained through the generalized continuity modules introduced. Exact inequalities are obtained, which estimate || *x* - *Λx* || and the best approximation of the element *x* is through the introduced generalized continuity modules. Some interesting and inequalities for bounded operators operating in Hilbert space have been proved to prove these results.

The results presented in this section include a series of exact Jackson-Stechkin inequalities for the best L^2-approximations of periodic functions by trigonometric polynomials, the results for the best L^2-approximations of functions given on the whole axis by integer exponential-type functions, as well as similar ones. Already in these specific cases, some results are new.

Keywords: Jackson inequalities, exact approximation estimates, best approximation of function, continuity modulus, smoothness modulus,

generalized continuity modulus, function with values in separable Hilbert space, weak widths, almost periodic function with values in Hilbert space, subspace related expansion unit.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА НА ТЕМУ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 9. - С. 1155–1165.
2. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 19, № 6/1 – С. 8–14.
3. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 20, № 6/1 – С. 60–66.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2008. – Т. 16, № 6/1 – С. 10–20.
5. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Зб. праць Інстит. матем. НАН України – 2013. – Т. 10, № 1 – С. 18–27.
6. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – Т. 18, № 6/1 – С. 49–58.
7. *Савела С.В.* О поперечниках некоторых классов функций со значениями в гильбертовом пространстве / С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Т. 17, № 6/1 – С. 105–111.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнарод. конф. присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О.І. Степанця, 28 травня – 3 червня 2012 р.: тези допов. – Кам'янець-Подільський, Україна, 2012. – С. 19.
2. *Бабенко В.Ф*. Неравенства типа Джексона с обобщенными модулями непрерывности для оценки наилучшего приближения элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Сборник тезисов Международной конференции по Современному Анализу, 20–23 июня 2011 г.: тезисы докл. – Донецк, Украина, 2011. – С. 23.
3. *Бабенко В.Ф.* Нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Всеукраїнська наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка. Тези доповідей. – 3–5 жовтня 2019. – Дніпро. – С. 27.
4. *Бабенко В.Ф.* О некоторых неравенствах типа Джексона в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // FM-2009 Conference „Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III", August 22–26, 2009. – Village Svityaz, Volyn, 2009. – С. 17–18.
5. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Боголюбовські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнарод. наук. конф., 16–21 червня 2008 р.: тези допов. – Мелітополь, 2008. – С. 13.
6. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 23–25 травня 2007 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 13–14.
7. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела //

Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 12–13.

8. *Бабенко В.Ф.* О точности неравенств типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теория приближений и её приложения: международ. конф. памяти Н.П. Корнейчука, 14–17 июня 2010 г.: тезисы докл. – Днепропетровск, 2010. – С. 17–18.
9. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Український математичний конгрес: міжнарод. конф., 27-29 травня 2009 р.: тези допов. – Київ. – [Електроний ресурс] . – http://www.imath.kiev.ua/ congress2009.
10. *Конарева С.В.* Нерівності типу Джексона-Стєчкіна у гільбертовому просторі / С.В. Конарева // "Теорія наближення функцій та її застосування", міжнародна конференція присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2017 р. : тези допов. – Слов’янськ, Україна – 2017. – С. 64.
11. *Конарева С.В.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / С.В. Конарева // "Теорія наближень і її застосування", міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В.П. Моторного, 8-11 жовтня 2015 р.: тези допов. – Дніпропетровськ. – 2015. – С. 39.
12. *Савела С.В.* Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах / С.В. Савела // Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013р.: тези допов. – Севастополь, Україна – С. 266.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень **17**

Вступ **18**

Розділ 1. **Необхідні відомості та огляд відомих результатів** **38**

1.1. Огляд відомих результатів 38

1.2. B^2 – майже періодичні функції 45

1.3. Нерівності типу Джексона при апроксимації цілими векторами експоненціального типу 47

1.4. Деякі відомості з аналізу функцій зі значеннями у гільбертовому просторі 49

1.5. Аналітичні функції зі значеннями у гільбертовому просторі 55

1.6. Елементи спектральної теорії 57

Розділ 2. **Нерівності типу Джексона для функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями в гільбертовому просторі і пов'язані з ними екстремальні задачі теорії наближення** **64**

2.1. Інтегральні нерівності типу Джексона для функцій однієї змінної .. 64

2.2. Нерівності типу Джексона для функцій однієї змінної, що містять модулі неперервності.. 80

2.3. Наближення класів функцій і слабкі поперечники Колмогорова...... 85

2.4. Нерівності типу Джексона для функцій багатьох змінних................. 89

Висновки до розділу 2 99

Розділ 3. **Нерівності типу Джексона для майже періодичних функцій** **100**

3.1. Аналог класичних нерівностей для B^2-майже періодичних функцій 100

3.2. Оцінки апроксимації для B^2-майже періодичних через узагальнений модуль неперервності 106

3.3. Аналог класичних нерівностей для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі 109

3.4. Нерівності типу Джексона-Стєчкіна для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, що містять узагальнений модуль неперервності 118

Висновки до розділу 3 123

Розділ 4. **Нерівності типу Джексона для найкращих наближень елементів гільбертового простору підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці 124**

4.1. Узагальнення класичних нерівностей 125

4.2. Узагальнені модулі неперервності та нерівності з ними 136

Висновки до розділу 4 148

Загальні висновки 149

Список використаних джерел 151

Додаток 167

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

H – сепарабельний гільбертовий простір.

$x \in$ A – елемент x належить множині A.

A $\cap$ B – перетин множин A та B.

A$\cup$B – об’єднання множин A та B.

A $\subset$ B – множина A міститься у множині B.

$\{\lambda_k\}$ – числова послідовність.

$\| x \|$ – норма елементу x.

$\inf\limits_{x\in A} f(x)$ – точна нижня межа функції $f(x)$ на множині A.

$\sup\limits_{x\in A} f(x)$ – точна верхня межа функції $f(x)$ на множині A.

$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1}$ – множина узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вище $n–1$.

$\omega(f;t)$ – модуль неперервності функції f.

$\omega_m(f;t)$ – модуль гладкості m-го порядку функції f.

$E\,(f, F)_X$ – найкраще наближення функції f підпростором F в метриці простору X.

$L_2^B\,([0; 2\pi), H)$ – клас інтегрованих за Бохнером функцій зі значеннями у гільбертовому просторі H.

$d^{\,w}_{2n-1}\,(F, X)$ – слабкий поперечник по Колмогорову класу F у просторі X.

$E(t)$ (або E_t) – розклад одиниці.

U_t – група унітарних операторів.

ВСТУП

У дисертації досліджуються питання про точні константи у нерівностях типу Джексона щодо наближення функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та елементів гільбертового простору через їх модулі неперервності та модулі гладкості.

Актуальність теми. В роботах М.П. Корнєйчука, В.К. Дзядика, М.І. Черних, В.О. Юдіна, Л.В. Тайкова, А.Г. Бабенка, В.І. Іванова, В.Ф. Бабенка, С.Б. Вакарчука, А.І. Степанця та А.С. Сердюка, М.Ш. Шабозова, М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки та С.М. Торби та інших математиків досліджувались точні нерівності, котрі оцінюють найкраще наближення дійснозначних (чи комплекснозначних) функцій тригонометричними поліномами або цілими функціями через значення модуля неперервності або модуля гладкості цих функцій в деякій точці. Нерівності такого типу називаються нерівностями Джексона-Стєчкіна.

Разом з тим у багатьох важливих випадках точні константи в нерівностях типу Джексона лишаються невідомими навіть у випадку функцій одного змінного. Зокрема, важливим і цікавим є питання про виконання подібних нерівностей для функцій з більш загальними областями значень. Одержані результати можуть бути застосовані для розв'язку ряду екстремальних задач теорії наближення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана згідно загальному плану досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету ім. О. Гончара, а також згідно з держбюджетною темою №1-221-10 «Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних» (НДР 0110U001282), ММФ-76-16 «Теорія оптимальних алгоритмів та екстремальні задачі аналізу» (НДР 0116U002256), №1-326-17 «Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова» (НДР 0117U001208).

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є узагальнення відомих для числових функцій результатів щодо оцінки найкращих наближень функцій та класів функцій на випадок функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі через модулі неперервності, модулі гладкості і узагальнені модулі неперервності цих функцій.

Задачі роботи полягають в знаходженні точних констант в нерівностях типу Джексона-Стєчкіна.

Об'єктом дослідження є нерівності виду

$$E\,(\,f\,,\,\mathcal{M}\,)_X\;\leq\;\chi\;\;\omega\!\left(\,f\,,\frac{\eta}{n}\right)\qquad\qquad(n = 1,\,2,\ldots),$$

$$E\,(\,f\,,\,\mathcal{M}\,)_X\;\leq\;\chi\;\;\omega_m\!\left(\,f\,,\frac{\eta}{n}\right)\qquad\qquad(n = 1,\,2,\ldots),$$

а також нерівності з більш загальними модулями неперервності.

Предметом дослідження є точні константи у нерівностях типу Джексона-Стєчкіна для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, а також для елементів довільного гільбертового простору.

Методи дослідження. Робота виконана за допомогою методів теорії функцій дійсної і комплексної змінної, функціонального аналізу, а також методів розв'язку екстремальних задач теорії наближення.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Для довільної функції f зі значеннями в сепарабельному гільбертовому просторі отримано нові точні оцінки найкращого наближення узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції.

2. Одержано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичними в одиничному крузі.
3. Знайдені точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями у гільбертовому просторі. Зокрема доведено, що

$$d^{w}_{2n-1}\ (H^{1/2}_{2,H}\,,\ L_2\ ([0;\ 2\pi],\ H)) = E\ (H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}\,,\ T^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,,$$

де $H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}$ клас 2π – періодичних функцій f, інтегровних за

Бохнером на $[0;\ 2\pi]$, для яких $\omega\ (f;\ t)_{2,H} \le \sqrt{t}$;

а також для класу

$$\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},n}_{2,\mathrm{H}} \ = \left\{ f(t) \in L_2([0;2\pi),\mathrm{H}) : \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,\mathrm{M})}, t)dt \le 1 \right\},$$

де $f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt)$, $|\lambda_n| = |\mu_n|$,

$$d^{w}_{2n-1}\ (W^{\Lambda,\mathrm{M},n}_{2,\mathrm{H}}\,,\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \frac{n}{4\,|\,\lambda_n\,|}\ .$$

4. Отримано точні нерівності типу Джексона-Стєчкіна для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.
5. Одержано точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору H підпросторами, пов’язаними з заданим розкладом одиниці через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. Вони, а також методика їх отримання, можуть бути використані при подальшому вивченні питань наближення функції однієї та багатьох змінних. Зокрема, результати можна застосовувати при дослідженні питань наближення елементів гільбертового простору різноманітними підпросторами.

Особистий внесок здобувача. Визначення напряму дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові професору Владиславу Федоровичу Бабенко. Основні результати одержано здобувачем самостійно. У спільних працях співавторові належить постановка проблем, обговорення ідей і підходів, аналіз одержаних результатів. Докладне доведення теорем належить здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на конференціях:

- Міждержавній науково-методичній конференції „Проблеми математичного моделювання” (23–25 травня 2007 р., 28–30 травня 2008р. м. Дніпродзержинськ);
- Міжнародній науковій конференції „Боголюбовські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (16 – 21 червня 2008 р., м. Мелітополь);
- Міжнародній наукові конференції „Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів ІІІ” пам’яті В.К. Дзядика (22–26 серпня 2009 р., о. Світязь, Волинь);
- Українському математичному конгресі – 2009 (до 100 – річчя від дня народження М.М. Боголюбова) (секція „Теорія наближень та гармонійний аналіз”, 27 – 29 серпня 2009 р., м. Київ);
- Міжнародній конференції „Теория приближений и её приложения” присвяченій 90-річчю з дня народження М.П. Корнійчука (14–17 червня 2010р., м. Дніпропетровськ);
- Міжнародній конференції „по Современному Анализу” (20–23 червня 2011р., м. Донецьк);

- Міжнародній конференції „Теорія наближення функцій та її застосування” присвяченій 70-річчю з дня народження професора О.І. Степанія (28 травня–3 червня 2012 р., м. Кам’янець-Подільський);
- Міжнародній математичній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (23-30 червня 2013р., м. Севастополь)
- Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75-річчя В.П. Моторного (8–11 жовтня 2015р., м. Дніпропетровськ);
- Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов’янськ);
- Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка (3–5 жовтня 2019р., м. Дніпро);
- підсумкових конференціях кафедри математичного аналізу ДНУ, 2006-2013 рр., 2015-2019рр.;
- семінарах кафедри математичного аналізу та теорії функцій ДНУ імені Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор В.П. Моторний);
- науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А.С. Романюк);
- міжкафедральному науковому семінарі механіко-математичного факультету ДНУ імені Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор В.П. Моторний).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано:

- у наукових журналах – 7 статтей [20-22, 24, 34, 35 120], всі вони опубліковані у наукових фахових виданнях України; одна стаття з яких у науковому журналі, що входить до міжнародної науково метричної бази даних Scopus та відноситься до видань з третього квартиля (Q3).
- у збірниках тез доповідей – 12 [23, 25-29, 32, 33, 36, 90, 91, 119].

Структура і обсяг роботи.

Дисертаційна робота обсягом 170 сторінок складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 146 найменувань. Кожний з її розділів розбитий на підрозділи, які нумеруються у межах розділу. Нумерація теорем та наслідків здійснюється у межах певного розділу.

Зміст роботи. У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету та задачі дослідження, об'єкт та предмет дослідження, перелічено методи досліджень, висвітлено наукову новизну отриманих результатів, подано інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації, описано структуру та зміст роботи.

У *першому розділі* дисертаційної роботи проводиться огляд відомих результатів за тематикою роботи, наводяться відомості про B^2-майже періодичні функції. Також у розділі наводяться означення основних понять, таких як найкраще наближення функції зі значеннями у гільбертовому просторі, найкраще наближення класу функцій, модуль неперервності та модуль гладкості функції зі значеннями у гільбертовому просторі, розвинення функції зі значеннями у гільбертовому просторі в ряд Фур'є. Зазначені основні відомості про аналітичні функції у гільбертовому просторі та деякі відомості спектральної теорії стосовно поняття розкладу одиниці та спектрального інтегралу.

Другий розділ роботи присвячений нерівностям типу Джексона та Джексона-Стєчкіна для функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями у гільбертовому просторі, отримані точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

Основними результатами підрозділу 2.1 є точні інтегральні оцінки найкращого наближення $E(f, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} = \inf\limits_{g\in T^{H}_{2n-1}} \| f - g \|_{2,\mathrm{H}}$ функції однієї змінної зі значеннями у гільбертовому просторі множиною $\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1}$ узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$ вигляду $\mathrm{T}_n(x) = \sum\limits_{|k|<n} A_k e^{ikx}$, де $A_k \in \mathrm{H}$.

Теорема 2.1.1. *Для довільної 2π – періодичної функції f, інтегровної за Бохнером на $[0; 2\pi]$, що не є сталою величиною (з точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n мають місце нерівності*

$$E^2(f, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,H} \le \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \omega^2(f;t)_{2,H}\sin(nt)\,dt.$$

У випадку дійсного гільбертового простору рівність досягається на узагальнених тригонометричних поліномах виду

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1\cos nx + \beta_1\sin nx \quad (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathrm{H}),$$

у випадках комплексного гільбертового простору – на поліномах

$$f(x) = h_n e^{inx} \quad (h_n \in \mathrm{H}).$$

Теорема 2.1.3. *Для довільної інтегровної за Бохнером функції $f(x) \in L_2^B([0; 2\pi), H)$ та довільних натуральних m і $n = 1, 2, \ldots$ справедливі нерівності*

$$E(f, T^{H}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{2}\sqrt{n(C^m_{2m})^{-1}}\left\{\int\limits_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f;t)_{2,H}\left(\sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt\right)dt\right\}^{1/2}.$$

Для довільних фіксованих m і n > m константа $\frac{1}{2}\sqrt{n(C_{2m}^{m})^{-1}}$ *не покращується.*

Встановлено значення найкращого наближення функцій $a \cdot z^n$ ($a \in$ H, z $\in \mathbb{C}$) множиною алгебраїчних поліномів порядку не вище *n-1*. Нехай $\mathscr{H}^2$ (H) клас усіх функцій

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k ,$$

аналітичних при |z| < 1, і таких, що інтеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| u(re^{it}) \|_H^2 \, dt \qquad (0 \le r < 1)$$

обмежений незалежним від *r* числом.

Теорема 2.1.2. *Для довільного елементу a* $\in$ H, $a \neq \theta$

$$E(a \cdot z^n, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} = \| a \|_H \ ,$$

де P_n *– множина алгебраїчних поліномів порядку не вище n-1.*

Важливим наслідком з теореми 2.1.1 є інтегральна оцінка апроксимації для аналітичної функції $u(z)$ з класу $\mathscr{H}^2$ *(H)* через модуль неперервності функції $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot a_k$, які пов'язані співвідношенням

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-s)v(s)ds, \ \ 0 \le r < 1,$$

де $P_r(t)$ – ядро Пуассона $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$.

Наслідок 2.1.1. *Для функцій* $u(z)$ *з класу* $\mathscr{H}^2$ *(H) має місце нерівність*

$$E^2(u, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} \omega^2(v,t) \sin(nt) \, dt .$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z) = a \cdot z^n$, $a \neq \theta$, $a \in$ H *і* $v(t) = e^{int} \cdot a$.

В наступній теоремі наведена точна оцінка найкращого наближення функції f з класу

$$\mathrm{L}^{\Lambda,\mathrm{M}}_{2,\mathrm{H}} = \{\, f \in \mathrm{L}_2([0;2\pi),\mathrm{H}): \ \|f^{(\Lambda,\mathrm{M})}\|^2_{2,\mathrm{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) < \infty \,\},$$

де $f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt)$; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\mathrm{M} = \{\mu_k\}_{k\in N}$ послідовності чисел такі, що $\left\{\frac{|\lambda_k|}{k}\right\}$, $\left\{\frac{|\mu_k|}{k}\right\}$, $\{|\lambda_k|\}$ і $\{|\mu_k|\}$ не спадають коли $k \to +\infty$, $|\lambda_k| = |\mu_k|$.

Теорема 2.1.4. *Для довільної функції f(x) і будь-якого натурального n має місце нерівність, що не покращується*

$$E(f, T^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,H} \le \frac{n}{4|\lambda_n|} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,\mathrm{M})}, t)\,dt.$$

Як наслідок з цієї теореми для функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та аналітичних функцій отримано наступні узагальнення нерівності Тайкова для диференційованих функцій з простору L_2.

Теорема 2.1.4′. *Для довільної диференційовної функції* $f(x) \in \mathrm{L}^r_{2,\mathrm{H}}$,

$\mathrm{L}^r_{2,\mathrm{H}} = \left\{ f(t): \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2r} (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) \le 1 \right\}$ *та будь-якого натурального n та r має місце нерівність*

$$E(f, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t)\,dt.$$

Наслідок 2.1.2. *Для функцій $u(z)$ з класу $\mathscr{H}^2$ (H), що пов'язана з функцією $v(t)$ співвідношеннями (1.13) та (1.14), натурального r має місце нерівність*

$$E^2(u, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(v^{(r)}; t)\,dt,$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z) = a \cdot z^n$, $a \neq \theta$, $a \in \mathrm{H}$ *і* $v(t) = e^{int} \cdot a$.

Теорема 2.1.5. *Для довільної функції f та відповідної їй функції* $f_Q^{(-1)}(t) = \sum\limits_{k \neq 0} \frac{1}{ik} Q_k(c_k)\, e^{ikt}$ *має місце точна нерівність*

$$E_n\,(f_Q^{(-1)}) \leq \frac{1}{4} s_{n,1} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f ,t) dt ,$$

рівність в якій досягається на функціях $f(t) = \varphi_{n1}\, e^{int}$.

У підрозділ 2.2 містяться оцінки найкращого наближення функцій зі значеннями в гільбертовому просторі безпосередньо через модуль неперервності та модуль гладкості цієї функції. Наведені в цьому підрозділі нерівності, як і інтегральні нерівності з підрозділу 2.1 є аналогами результатів Черних М.І.

Теорема 2.2.1. *Для довільної 2π – періодичної функції f зі значеннями у дійсному або комплексному гільбертовому просторі, що відмінна від сталої величини (з точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n вірні нерівності*

$$\mathrm{E}\,(f ,\, \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega(f, \frac{\pi}{n})_{2,\mathrm{H}} ,$$

і при кожному n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ у правій частині зменшена бути не може.

Теорема 2.2.2. *Для довільної функції f (x)* $\in$ *L₂ ([0; 2π), H), що відмінна від тотожної сталої, та для будь-яких натуральних чисел m і n виконується нерівність*

$$E\,(f, T^{H}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} < (\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1/2}\ \omega_{\mathrm{m}}\,(\frac{2\pi}{\mathrm{n}}; f\,)_{2,\mathrm{H}} .$$

При n > m константу $(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1/2}$ *у правій частині даної нерівності занінити меншою неможливо.*

Підрозділ 2.3 присвячено наближенню класів функцій зі значеннями у гільбертовому просторі, зокрема класу $H^{1/2}_{2,H}$ 2π – періодичних функцій f для яких $\omega\ (f\,;\ t)_{2,\mathrm{H}} \le \sqrt{t}$, та значенням слабких поперечників за Колмогоровим класів $H^{1/2}_{2,H}$ та $\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},\mathrm{n}}_{2,\mathrm{H}}$ = $\left\{ f(t) \in L_2([0;2\pi),H) : \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,\mathrm{M})},t)dt \le 1 \right\}$. Основним результатом є знаходження точних значень величин

$$\mathrm{d}^{\,w}_{2\mathrm{n}-1}\ (H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{L}_2\ ([0;\ 2\pi],\ \mathrm{H})) = \inf_{w-\dim G \le 2n-1} \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{G})_{2,\mathrm{H}}\ ,$$

$$\mathrm{d}^{\,w}_{2\mathrm{n}-1}\ (\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},\mathrm{n}}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{L}_2\ ([0;\ 2\pi),\ \mathrm{H})) = \inf_{w-\dim G \le 2n-1} \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},\mathrm{n}}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{G})_{2,\mathrm{H}}\ –$$

слабких $(2n–1)$-поперечників за Колмогоровим класу $H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}$ та $\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},\mathrm{n}}_{2,\mathrm{H}}$ у просторі L_2 ($[0;2\pi]$, H), що наводиться у наступній теоремі.

Теорема 2.3.1. *Для довільного* n = *1, 2, ...*

$$d^{\,w}_{2\mathrm{n}-1}\ (H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, L_2\ ([0;\ 2\pi],\ H)) = E\ (H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, T^{\mathrm{H}}_{2\mathrm{n}-1})_{2,H}\ =\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{n}}}\ .$$

Теорема 2.3.2 *Для будь-якого* n = *1, 2, …*

$$d^{\,w}_{2\mathrm{n}-1}\ (W^{\Lambda,\mathrm{M},\mathrm{n}}_{2,\mathrm{H}}, L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \frac{n}{4\,|\,\lambda_n\,|}\ .$$

Теорема 2.3.2′. *Якщо* $W^{\mathrm{n,r}}_{2,\mathrm{H}}$ = $\left\{ f(t) : \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)},t)dt \le 1 \right\}$, *то для довільного* n = *1, 2, …*

$$\mathrm{d}^{\,w}_{2\mathrm{n}-1}\ (\mathrm{W}^{\mathrm{n,r}}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{L}_2\ ([0;\ 2\pi],\ \mathrm{H})) = \frac{1}{4n^{r-1}}\ .$$

У підрозділі 2.4 точні нерівності типу Джексона, отримані М.І. Черних та В.О. Юдіним у просторі $\mathrm{L}_2(\mathrm{T}^{\mathrm{m}})$, узагальнюються на випадок вектор-функцій зі значеннями у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі H. Встановлено, що константа у цьому випадку залишається такою ж.

Нехай $T^m = [0;\ 2\pi)^m$ – m-вимірний тор. Простір L_2^H (T^m) – простір вектор-функцій зі значеннями в H. Для функції $f \in L_2^H$ (T^m)

$$f \sim \sum_{\mu \in Z^m} \hat{f}_\mu e^{i\mu x},$$

$$\hat{f}_\mu = \int_{T^m} f(x) e^{-i\mu x} d\nu \quad \in H, \qquad (f_\mu = \overline{f_{-\mu}}) \ -$$

її розклад у ряд Фур'є,

$$E_R (f, T^m)_{2,H} = \inf_{c_\mu \in H,\, c_\mu = \overline{c_{-\mu}}} \| f(x) - \sum_{|\mu| < R} c_\mu e^{i\mu x} \|_{2,H} \ -$$

найкраще наближення в L_2^H (T^m) сферичними тригонометричними вектор-поліномами порядку меншого R;

$$\omega (\delta, f, T^m, X^m)_{2,H} = \sup_{|t| \le \delta} \| \Delta_t f \|_{2,H} \ -$$

її модуль неперервності в L_2^H (T^m).

Для функції

$$\psi(x) = -\int_{\Gamma^m} \varphi(x-u) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) du$$

її перетворення Фур'є має вигляд

$$\hat{\psi}(s) = -\hat{\varphi}(s) \int_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu} du = (\lambda_1 - |s|^2)^{-1} \left(\int_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu} du \right)^2 .$$

Покладемо

$$\Phi_R (x) = \psi(R\lambda_1^{-1/2} x).$$

Розглянемо періодизацію $\Phi_R (x)$, тобто функцію $\Psi_R (x) = \sum_{k \in Z^m} \Phi_R (x + 2\pi k)$.

Теорема 2.4.1. *Для довільної вектор-функції* $f \in L_2^H$ *(T^m) мають місце точні нерівності*

$$E_R (f, T^m)_{2,H} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\hat{\Psi}_R(0)} \int_{T^m} \| \Delta_t f \|_{2,H}^2 \ \Psi_R(t) d\nu \right)^{1/2},$$

$$E_R (f, T^m)_{2,H} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m \right)_{2,H} .$$

Теорема 2.4.2. *Константа*

$$\tau_2(n) = min \left\{ \tau > 0: \ D_2\left(\frac{\tau}{n}, n, T\right)_2 = \sup_{f \in L_2^H(T)} \frac{E_n(f,T)_2}{\omega\left(\frac{\tau}{n}, f, T\right)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \pi.$$

Третій розділ дисертації присвячений встановленню нерівностей типу Джексона для майже періодичних функцій. У підрозділі 3.1 розглянуті аналоги нерівностей Черних М.І. для майже періодичних функцій Безиковича класу B^2, показники Фур'є яких мають єдину граничну точку у нескінченності. Для B^2-майже періодичної функції $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, $A_k = M\left\{ f(x) e^{-i\lambda_k x} \right\}$ величиною найкращого наближення є

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[M\left\{ | f(x) - g(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \ n = 1, 2, \dots ,$$

де G_{λ_n} – множина B^2-м. п. функцій, показники Фур'є яких знаходяться в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$.

Функція

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h| \le t} \left[M\left\{ | \Delta_h^{(m)} f(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \qquad t \ge 0,$$

де $\Delta_h^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x + jh)$, $m = 1, 2, \dots$. є аналог модуля гладкості m-го порядку.

Теорема 3.1.1. *Для довільної B^2-м. п. функції f(x), що відмінна від константи і яка має ряд Фур'є (3.1) має місце нерівність, що не може бути покращена.*

$$E_{\lambda_n}^2(f) \le \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f,t) \sin(\lambda_n t)\, dt .$$

Теорема 3.1.2. *Для довільної B^2-м. п. функції $f(x)$, що має ряд Фур'є (3.1), і будь-якого натурального m справедлива нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f,t)(\sin\frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2}\sin(\lambda_n t))dt \right\}^{1/2} . \qquad (3.3)$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}}$ не покращується.

Теорема 3.1.3. *Для довільної B^2-м. п. функції $f(x)$ з рядом Фур'є (3.1), відмінної від константи, і будь-якого натурального m має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2} \, \omega_m^2\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right). \qquad (3.5)$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині даної нерівності зменшити неможливо.

Оцінки з теорем 3.1.1 та 3.1.2 були раніше отримані Притулою Я.Г. та Яцимірський М.М., результат теореми 3.1.3 при m=1 Притулою Я.Г. В дисертаційній роботі наведено інше доведення цих результатів за допомогою методу, який використовував Черних М.І. Доведення отримані незалежно від робіт Притули Я.Г. та Яцимірського М.М.

У другому підрозділі наводиться оцінка найкращого наближення B^2-майже періодичної функції за допомогою узагальненого модуля неперервності.

Позначимо через Φ клас всіх неперервних 2π-періодичних невід'ємних ненульових функції φ, таких, що φ(0) = 0. Для узагальненого модуля неперервності, визначеного наступним чином

$$\omega_\varphi(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \varphi(\lambda_k t) \right]^{1/2},$$

має місце теорема

Теорема 3.2.1. *Для кожної функції* $\varphi \in \Phi$ *існує точка* $\gamma > 0$, *залежна тільки від функції* φ, *така, що для довільної* B^2*-м.п. функції* f *виконується нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\,\omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right). \tag{3.6}$$

При цьому

$$\sup_{n\in\mathrm{N}}\sup_{f\in B^2}\frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}. \tag{3.7}$$

$I(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt$ - середнє значення функції на періоді.

Третій підрозділ містить аналоги результатів першого підрозділу, але у випадку апроксимації майже періодичної функції зі значеннями у гільбертовому просторі H. А саме,

Теорема 3.3.2. *Для довільної м. п. функції f(x) зі значеннями у гільбертовому просторі H, що відмінна від константи з рядом Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *має місце нерівність, що не може бути покращена.*

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{\lambda_n}{4}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(f,t)\sin(\lambda_n t)\,dt.$$

Теорема 3.3.3. *Для довільної м. п. функції f(x) зі значеннями у гільбертовому просторі H, що має ряд Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *і будь-якого натурального m справедлива нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}}\left\{\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega^2_m(f,t)\left(\sin\frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2}\sin(\lambda_n t)\right)dt\right\}^{1/2}.$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}}$ *не покращується.*

Теорема 3.3.4. *Для довільної м. п. функції f(x) зі значеннями у гільбертовому просторі H, що має ряд Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *, відмінної від константи, і будь-якого натурального* m *має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2}\ \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ *у правій частині даної нерівності зменшити неможливо.*

У підрозділі 3.4 міститься доведення нерівностей типу Джексона-Стечкіна для майже періодичних функцій $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, $A_k = M\left\{ f(x) e^{-i\lambda_k x} \right\}$ з узагальненими модулями неперервності

$$\omega_\varphi(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|A_k\|^2 \varphi(\lambda_k t)\right]^{1/2},$$

де $\varphi(\lambda_k t) = \varphi_M(\lambda_k t) = \left|\sum_{j=0}^{m} \mu_i e^{i\lambda_k j t}\right|^2$ – невід'ємна 2π-періодична функція, що обертається в нуль у точці t = 0.

Позначимо через $I(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt$ - середнє значення функції на періоді.

Основною в цьому підрозділі є

Теорема 3.4.1. *Для кожної функції* $\varphi \in \Phi$ *існує точка* $\gamma > 0$*, залежна тільки від функції* φ*, така, що для довільної* B^2*-м.п. функції* f *виконується нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\,\omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

При цьому

$$\sup_{n\in\mathrm{N}}\sup_{f\in B^2}\frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}.$$

Дана теорема узагальнює теорему С. Н. Васильєва з роботи [59].

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений оцінкам наближення елементів гільбетрового простору H. У підрозділі 4.1 розглядаються найкращі наближення елементу простору H підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці та вказані умови точності отриманих нерівностей. У випадку підпростору

$$W_\sigma=\left\{\int_{-\infty}^{\sigma}dE_s g\ :\ g\in H\right\},\quad \sigma>0,$$

коли $E_\sigma(f) = \inf_{g\in W_\sigma}\| f-g\|$ – це величина найкращого наближення елементу $f\in$ H функціями із класу W_σ, а функція $\omega(f;t)=\sup_{|\delta|\le t}\|U_\delta f-If\|$, що визначається за допомогою групи унітарних операторів $U_t f = \int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}dE_s f$, $(0\le t<\infty)$, є природнім аналогом модуля неперервності функції f із простору L_2 маємо наступні оцінки

Теорема 4.1.1. *Нехай $f\in$ H. Тоді для довільного $\sigma>0$ справедлива нерівність*

$$E_\sigma(f)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\|U_t f-f\|^2\sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}.$$

Якщо існує такий $f\in$ H, що для будь-якого додатнього ε елементи $f_{\sigma,\varepsilon}=\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}dE_s f$ ненульові, то нерівність теореми не покращується.

Наслідок 4.1.1. *Нехай A – самоспряжений оператор, породжений заданим розкладом одиниці E_s $(-\infty<s<\infty)$. Причому $Af=\int_{-\infty}^{\infty}sdE_s f$. Тоді* *для будь-якого натурального r, довільного $\sigma > 0$ і довільного $f \in D(A^r)$ має місце нерівність*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sigma^r}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f) - A^r f \|^2 \sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}.$$

Теорема 4.1.2. *Для довільного елемента $f \in H$ і довільного $\sigma > 0$ вірна нерівність*

$$E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega(f;\frac{\pi}{\sigma}).$$

Якщо на кожному відрізку $[\nu\sigma;\ \nu\sigma + \varepsilon]$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ існують ненульові елементи $f_{\nu\sigma} \in (E_{\nu\sigma+\varepsilon} - E_{\nu\sigma})H$, то наведена нерівність є точною.

Теорема 4.1.3. *Нехай* $f \in$ H. *Тоді для довільного натурального m і будь-якого $\sigma > 0$ має місце нерівність*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\sigma(C_{2m}^m)^{-1}}\left\{\int_0^{2\pi/\sigma}\omega_m^2(f,t)(\sin\frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{2}\sin\sigma t)dt\right\}^{1/2}.$$

Наведені результати являються аналогами нерівностей, отриманих М.І. Черних [139], [140] та В.Ю. Поповим [116] для найкращих L_2-наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу σ.

У другому підрозділі розглядаються узагальнені модулі неперервності елементу x гільбертового простору H та точні нерівності типу Джексона елементів з H з цими модулями неперервності.

Позначимо через Φ множину неперервних невід'ємних 2π-періодичних функцій ψ, що мають ніде не щільну множину нулів і таких, що $\psi(0) = 0$. Нехай φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – неперервна функція, така, що $\psi(t) = |\varphi(e^{it})|^2 \in \Phi$. Зокрема, $\varphi(1) = 0$ і на довільній дузі кола $|z| = 1$ функція $\varphi(z)$ відмінна від тотожного нуля. Визначемо узагальнену різницю елемента $x \in H$ з кроком t покладаючи

$$\Delta_t^{\varphi} x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{its}\right) dE(s)x.$$

Узагальненим модулем неперервності елемента x гильбертового простору H є функція

$$\omega_{\varphi}(x;\delta) = \max_{0\le t\le\delta} \left\|\Delta_t^{\varphi} x\right\| = \left\|\left\|\Delta_t^{\varphi} x\right\|\right\|_{C([0,\delta])} = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(st) d\left(E(s)x, x\right)\right\|_{C([0,\delta])}^{1/2}.$$

Окрім $\omega_{\varphi}(x;\delta) = \omega_{\varphi}(x; C([0,\delta]))$, розглядаються характеристики $\omega_{\varphi}(x; L_{p,V}([0,\delta]))$, в яких $1 \le p < \infty$, $V(t)$ є вага, тобто є невід'ємна інтегровна на $[0,1]$ функція, відмінна від нуля на множині повної міри. Покладемо

$$\omega_{\varphi}(x; L_{p,V}([0,\delta])) = \left(\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} \left\|\Delta_t^{\varphi} x\right\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt\right)^{1/p}.$$

Ясно, що

$$\omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0,\delta])) = \left(\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} V\left(\frac{t}{\delta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(st) d\left(E(s)x, x\right) dt\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(V;\delta s) d\left(E(s)x, x\right)\right)^{1/2},$$

де

$$\Gamma(V;t) = \int_0^1 \psi(t\upsilon) V(\upsilon) d\upsilon.$$

Основні результати цього підрозділа містяться в теоремах:

Теорема 4.2.2. *Для довільної неперервної в* $(-\sigma,\sigma)$, *обмеженої, комплекснозначної функції* $\lambda(t)$ *такої, що* $\lambda(t) \equiv 1$ *в* $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \sigma$ *, лінійного методу наближення* $\Lambda x = \int_{|t|<\sigma} \lambda(t) dE(t)x$, *будь-якого елемента* $x \in H$ *такого, що* $x \ne U_t x$ *для деякого* t, *довільного елемента* $f \in H$ *і будь-якої ваги* $V(t)$ *має місце точна нерівність*

$$|(x - \Lambda x, f)| \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 \, d(E(t)f, f)}{\Gamma(V;\delta t)}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0,\delta])).$$

Зокрема,

$$\left|\left(x-\int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x,\, f \right)\right| \le \left(\int\limits_{|t|\ge\sigma} \frac{d(E(t)f,\, f)}{\Gamma(V;\delta t)} \right)^{1/2} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta])).$$

Теорема 4.2.3. *Для будь-якого елемента* $x\in H$ *такого, що* $x \ne U_t x$ *при деякому* t, *справедлива нерівність*

$$\|x-\Lambda x\|^2 \le \max\left\{ H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)} \right\} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2,$$

де $\quad H(V,\lambda,\delta,\sigma) = \sup\limits_{|t|<\sigma} \dfrac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(V;\delta t)}, \quad G(V,\delta,\sigma) = \inf\limits_{|t|\ge\sigma} \Gamma(V;\delta t).$

Зокрема, для найкращого наближення елементу $x\in H$ *підпростором* $W_\sigma = \left\{ \int\limits_{|t|<\sigma} dE(s)g \;\;:\;\; g\in H \right\},\;\; \sigma>0$ *маємо*

$$E_\sigma(x)^2 = \left\| x-\int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x \right\|^2 \le \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2.$$

Якщо розклад одиниці такий, що $E([t,t+\varepsilon]) \ne 0$ *для довільних* $t\in\mathbb{R}$ *і* $\varepsilon>0$, *то нерівності теореми є точними.*

Наслідок 4.2.2. *В умовах теореми 4.2.3 при* $2\le p\le\infty$ *має місце нерівність*

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)^{\frac{1}{2}}} \omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])).$$

На закінчення висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові Владиславу Федоровичу Бабенко за постановку задач, корисні поради та всіляку підтримку в роботі.

РОЗДІЛ 1
НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ ТА ОГЛЯД ВІДОМИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

1.1. Огляд відомих результатів.

Нехай C та L_p $(1\le p \le \infty)$ простори 2π-періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з відповідними нормами $\| f\|_C$ і $\| f\|_{L_p} = \| f\|_p$. Нехай $X = C$ або $X = L_p$.

Означення 1.1.1 Модулем неперервності функції $f \in X$ у просторі X називається функція

$$\omega\,(f;\,t)_X = \sup_{|u|\le t} \| f(\,\cdot + u\,) - f(\,\cdot\,)\|_X\,, \qquad t \ge 0;$$

а модулем гладкості m-го порядку – функція

$$\omega_m\,(f;\,t\,)_X = \sup_{|u|\le t} \| \Delta_u^{(m)} f(x)\|_X\,,$$

де

$$\Delta_u^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x+ju)\,, \quad t \ge 0.$$

Означення 1.1.2 Якщо $\mathrm{H} \subset X$ – деякий підпростір, то найкращим наближенням функції $f \in X$ підпростором H в метриці простору X називається величина

$$E\,(f,\mathrm{H})_X = \inf_{h\in H} \| f - h\|_X\,.$$

Означення 1.1.3 Найкращим наближенням класу $\mathcal{M} \subset \mathrm{X}$ підпростором H в метриці простору X називається величина

$$E\,(\mathcal{M},\mathrm{H})_X = \sup_{f\in M} E\,(f,\mathrm{H})_X\,.$$

Означення 1.1.4 Величина

$$d_n\,(\mathcal{M}, X) = \inf_{\dim H = n} E\,(\mathcal{M},\mathrm{H})_X$$

називається n-поперечником за Колмогоровим класу $\mathcal{M}$ у просторі X.

Вперше нерівність, яка дає оцінку величини найкращого наближення через значення модуля неперервності в деякій точці, отримав у 1911 році

Джексон [3]. Зокрема, він довів, що для найкращих рівномірних наближень неперервних 2π-періодичних функцій тригонометричними поліномами $\boldsymbol{T}_{2n-1}$ порядку не вище n – 1 має місце нерівність

$$E(f, T_{2n-1})_C \le \chi\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

де константа χ не залежить ні від *f*, ні від *n*. Це, а також аналогічні цьому співвідношення в інших функціональних просторах відомі в теорії наближення як нерівності (теореми) типу Джексона (Джексона-Стєчкіна у випадку модулів гладкості при m ≥ 2). Зміст їх полягає в тому, що вони дають оцінку швидкості збіжності до нуля найкращого наближення функції в залежності від диференціально-різницевих властивостей функції, що наближується.

Нехай $\omega(t)$ – заданий модуль неперервності. Через H^{ω} позначимо клас функцій *f* із *C*, для яких $\omega(f; t)_C \le \omega(t)$. У 1961 році М.П. Корнейчук [93] довів, що якщо $\omega(t)$ опуклий вгору модуль неперервності, то

$$E(H^{\varpi}, T_{2n-1})_C = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)_C .$$

За допомогою цієї рівності у 1962 році Корнейчук М.П. [95] для найкращих наближень функції $f \in C$ тригонометричними поліномами порядку *n*-1 отримав нерівність Джексона з найкращою константою:

Теорема 1.1.1. *Для довільної функції $f \in C$, $f \ne Const$ мають місце нерівності*

$$E(f, T_{2n-1})_C < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

при чому незалежна ні від f, ні від n константа 1 перед $\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C$ зменшена бути не може.

Далі у 1963 році ним [96] була доведена

Теорема 1.1.2. Якщо $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, то

$$d_{2n-1}\,(H^{\omega},\, C) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)_C .$$

Аналогічний теоремі 1.1.1 результат для найкращих рівномірних наближень функції $f \in C(\mathbb{R})$ цілими функціями експоненціального типу σ був отриманий Дзядиком В.К. у 1975 році. [73].

Теорема Джексона була узагальнена С.Б. Стєчкіним (1967 р.) [127] на випадок, коли замість модуля неперервності використовується модуль гладкості m-го порядку.

Точні нерівності типу Джексона в просторі L_2 отримані у 1967 році М.І. Черних [139]. Він, зокрема, довів:

Теорема 1.1.3. *Для довільної функції f із L_2, яка не є константою (з точністю до множини міри нуль), має місце нерівність*

$$E\,(f\,,T_{2n-1})_2 \;<\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_2 \qquad n = 1, 2,\dots ; \tag{1.1}$$

причому для будь-якого натурального фіксованого n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *покращена бути не може*.

Ним же в роботі [139] була отримана точна нерівність

$$E(f,T_{2n-1})_2 \;<\; (C_{2m}^{m})^{-1/2}\;\; \omega_m\left(f,\frac{2\pi}{n}\right)_2, \qquad n = 1, 2,\dots ;\; m \geq 2. \tag{1.2}$$

Слід зауважити, що при доведенні нерівностей (1.1) та (1.2) М.І. Черних довів наступні інтегральні нерівності, які мають і самостійний інтерес:

$$E^2(f,T_{2n-1})_2 \leq \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(f;t)_2\;\sin nt\,dt \tag{1.3}$$

і

$$E^2(f,T_{2n-1})_2 \leq \frac{n}{4C_{2m}^{m}}\int\limits_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f;t)_2\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin nt\,dt\,. \tag{1.4}$$

Насправді (дивись підрозділ 2.1), нерівності типу (1.3) і (1.4) теж можна розглядати як нерівності типу Джексона, а їх праві частини як значення в точці $\frac{\pi}{n}$ або $\frac{2\pi}{n}$ деяких узагальнених модулів неперервності.

Для класу функцій $\mathrm{H}_2^{1/2} = \left\{ f \in L_2([0;2\pi]) : \omega(f;t)_2 \le t^{1/2} \right\}$ М.І. Черних [139] довів, що

$$E(H_2^{1/2}, T_{2n-1})_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \;.$$

У 1973 році Ю.І. Григоряном [67] отримане точне значення поперечника за Колмогоровим

$$d_{2n-1}\,(H_2^{1/2}, L_2([0;\,2\pi])) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,. \tag{1.5}$$

Оцінки апроксимації функцій із простору L_2 аналогічні (1.1) у подальшому були узагальнені на багатовимірний випадок В.А. Юдіним [144, 145]. Пізніше, у 1992 році М.І. Черних [138] довів точну нерівність Джексона і в просторі L_p, $1 \le p < 2$.

У 1977 році Л.В. Тайковим [128] отримана точна нерівність, що дає оцінку найкращого наближення періодичної диференційованої функції $f(x) \in L_2\,(0;\,2\pi)$ через модуль неперервності її похідної деякого порядку

$$E_n\,(f) \le \frac{1}{4n^{(r-1)}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, x)dx \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots); \tag{1.6}$$

В роботі [130] ним була доведена наступна теорема

Теорема 1.1.4. *Якщо* $W_2^{\mathrm{r,n}} = \left\{ f(x) : \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, x)dx \le 1 \right\}$, *то*

$$d_{\mathrm{2n-1}}\,(W_2^{\mathrm{r,n}}, L_2\,([0;\,2\pi]))\,) = \frac{1}{4n^{r-1}}\,.$$

У подальшому результати про поперечники класів такого типу отримувались багатьма авторами, зокрема самим Тайковим Л.В., Вакарчуком С.Б. та іншими (див. роботи [48, 51-56, 71,79, 86,141,142, 146]).

Ібрагімов І.І. та Насібов Ф.Г. [83] вивчали питання про найкраще наближення сумовної функції на дійсній осі в метриці простору $L_2(-\infty;\infty)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу σ. У 1970 р. були доведені нерівності:

$$E(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_1\Big(f, \frac{\pi}{\sigma}\Big)_2,$$

$$E(f)_2 < \frac{1}{2}\,\omega_2\Big(f, \frac{\pi}{\sigma}\Big)_2.$$

У 1972 році, незалежно від Ібрагімова І.І. та Насібова Ф.Г., Попов В.Ю. [116] отримав точні інтегральні нерівності:

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\omega^2(f,t)\sin(\sigma t)\,dt\right)^{1/2},$$

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma^r}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\omega^2(f^{(r)},t)\sin(\sigma t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Для найкращих наближень частинними сумами рядів по системі вейвлет Шеннона-Котельникова нерівності типу Джексона отримані Бабенко В.Ф., Жигановою Г.С. (2006 р.) [30]:

$$E(f, V_{n-1})_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_1\Big(f, \frac{1}{2^n}\Big)_2.$$

Дослідження, пов'язані з точними нерівностями типу Джексона-Стєчкіна, розвивалися у різних напрямках. Так ряд праць був присвячений нерівностям такого типу для функцій багатьох змінних [8], зокрема для функцій, заданих на $\mathbb{R}^d$, на d-вимірному торі, на багатовимірній сфері [9, 10, 17] та інших многовидах. В роботі В.Ф. Бабенко та С.О. Пічугова [19] вивчалися задачі аппроксимації неперервних, визначених на метричному компакті, функцій зі значеннями у довільному метричному просторі. Точні нерівності типу Джексона в просторі L_2 для функцій зі значеннями в $\mathrm{R}^{\mathbf{n}}$ розглядали В.І.Іванов и О.І.Смірнов [84]. В роботах [44 - 48] вивчалися також нерівності типу Джексона для апроксимації функцій із L_2 лінійними методами наближення, відмінними від сум Фур'є в просторі L_2.

Подальший розвиток досліджень нерівностей типу Джексона-Стєчкіна пов'язаний із заміною модулів неперервності m-го порядку більш загальними модулями неперервності. В роботах Шапіро та Бомана було запропоновано узагальненим модулем неперервності функції $f \in L_2$ (**T**) називати величину

$$\omega_{\psi}(f,T)_{L_2(\mathrm{T})} = \max_{t\in T}\left(\sum_{s\in Z}\psi(st)\,|\,\hat{f}_s\,|^2\right)^{1/2},$$

де $\hat{f}_s$ – s-й коефіцієнт Фур'є функції f, $\psi(\cdot)$ – задана неперервна невід'ємна 2π – періодична функція, $\psi(0) = 0$, $\psi(\cdot) \neq 0$, а T – задана замкнена підмножина [0; 2π].

Сукупність узагальнених модулів неперервності такого типу включає в себе, окрім класичних, модулі неперервності, породжені більш загальними, в порівнянні з $\Delta_t^m f$ скінченно різницевими операторами, модулі неперервності, породжені різницевими операторами дробових порядків та багато інших.

Питання про точні нерівності з узагальненими модулями неперервності вивчалися А.Г. Бабенко [13], С.М. Васильєвим [58, 59], А.І. Козко та А.В. Рождєствєнским [87, 88]. Зокрема, С.М. Васильєвим отримані наступні результати. Позначимо через

$$I(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt$$

середнє значення функції φ на періоді.

Теорема 1.1.5. *Для кожної функції φ існує точка* $\gamma > 0$, *залежна тільки від функції φ, така що для довільних $f \in L_2$ ($\mathbf{T}$) і $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$E_{n-1}(f)_{L_2(\mathrm{T})} \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{n}\right)_{L_2(\mathrm{T})}, \tag{1.7}$$

і для довільного $\gamma > 0$

$$\sup_{n\in N}\ \sup_{f\in L_2(\mathrm{T})} \frac{E_{n-1}(f)_{L_2(\mathrm{T})}}{\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{n}\right)_{L_2(\mathrm{T})}} \ge \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}.$$

При більш жорстких припущеннях відносно функції φ:

1) $\varphi(-t) = \varphi(t)$ і $\varphi(\pi - t) = \varphi(\pi + t)$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(u)\,du \le I(\varphi)$ для $t \in (0;\ 2\pi)$

(сукупність таких функцій позначимо через Ψ), має місце

Теорема 1.1.6. *Для довільних* $\psi \in \Psi$, $n \in \mathbb{N}$ і $\delta > \frac{1{,}4\pi}{n}$ вірна нерівність

$$E_{n-1}(f)_{L_2(\mathrm{T})} \le \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}}\omega_\psi(f,\delta)_{L_2(\mathrm{T})}$$

причому константа $\frac{1}{\sqrt{I(\psi)}}$ в цій нерівності зменшена бути не може.

А.І. Степанець та А.С. Сердюк [125] вивчали апроксимаційні властивості простору S^p, $1 \le p < \infty$ – простору 2π-періодичних сумовних функцій f ($f \in L$), заданих на дійсній осі, для яких

$$\| f \|_{S^p} = \left(\sum_{\nu\in Z} |\,\hat f(\nu)\,|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

де $\hat f(\nu)$ – коефіцієнти Фур'є функції f по тригонометричній системі $(2\pi)^{-1/2}e^{i\nu x}$, $\nu \in Z$. Вони довели прямі та обернені теореми наближення в просторі S^p у термінах найкращих наближень і модулів неперервності, подібні до теорем Д. Джексона та С.Н. Берштейна.

1.2. B² – майже періодичні функції

Одним із напрямків розвитку нерівностей типу Джексона- Стєчкіна було дослідження таких нерівностей для B^2 – майже періодичних функцій.

Розглянемо клас B^p – сукупність функцій, вимірних і сумовних зі ступенем p, $p \geq 1$, у кожному скінченному інтервалі дійсної осі з метрикою

$$D_{B^p}[f(x),\ g(x)] = \left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\ f(x)-g(x)\ |^p\ dx\right]^{1/p}.$$

Нехай також $\boldsymbol{T}$ **–** множина тригонометричних поліномів виду

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x}\ ,$$

де λ_k – довільні дійсні числа, a_k – комплексні коефіцієнти. Замикання в просторі B^p множини $\boldsymbol{T}$ називається класом B^p майже періодичних функцій (B^p-м.п. функцій).

Як відомо, $B^{p_2}-м.п. \subset B^{p_1}-м.п.$, якщо $p_1 < p_2$. Для кожної функції $f \in B^1$-м.п. існує середнє значення

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx\,.$$

Функція $a(\lambda, f) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, може відрізнятися від нуля не більш, ніж на зліченні множині значень; у результаті нумерації яких у довільному порядку виникає послідовність $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ показників Фур'є функції f. Числа $A_{\lambda_k} = a(\lambda_k, f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції f. Функції $f \in B^1$-м.п. відповідає ряд Фур'є виду

$$f(x) \sim \sum_{k} A_{\lambda_k} e^{i\lambda_k x}\ .$$

Через G_{λ_n} – позначимо множину B^2-м. п. функцій, показники Фур'є яких знаходяться в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$.

Означення 1.2.1 Величина

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[M\left\{ | f(x) - g(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \; n = 1, 2, \dots ;$$

називається найкращим наближення B^2-м. п. функції f.

Означення 1.2.2 Модулем гладкості m-го порядку B^2-м. п. функції f називається величина

$$\omega_m(f, t) = \sup_{|h| \le t} \left[M\left\{ | \Delta_h^{(m)} f(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \qquad t \ge 0,$$

де

$$\Delta_h^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x + jh), \quad m = 1, 2, \dots .$$

У випадку, коли $m = 1$ вважаємо $\omega_1(f, t) = \omega(f, t)$.

У роботі [49] Є.А. Бредіхіна встановила таку нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \le K \, \omega\left(f, \frac{\pi}{\lambda_n} \right) \tag{1.8}$$

з константою $K = 1$.

Найкраще значення константи K встановив Я.Г. Притула [117].

Теорема 1.2.1. *а) Нехай* $f(x) \ne Const$ *є* B^2*-м. п. функція, що має ряд Фур'є виду* $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ *. Тоді має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le 2^{-1/2} \, \omega\left(f, \frac{\pi}{\lambda_n} \right). \tag{1.9}$$

б) Існують B^2*-м. п. функції* $g(x)$*, що мають ряд Фур'є зазначеного виду, для яких співвідношення* $\dfrac{E_{\lambda_n}(g)}{\omega(g, \pi / \lambda_n)}$ *як завгодно близько до* $2^{-1/2}$.

У роботі 1983 року [118] Притула Я.Г. та Яцимірський встановили інтегральні оцінки найкращого наближення B^2-м. п. функції з модулем неперервності та модулем гладкості функції.

Теорема 1.2.2. *Нехай f (x) – B^2-м. п. функція з рядом Фур'є* $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$.

Тоді має місце нерівність

$$\left[M\left\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2\right\}\right]^{1/2} \le 2^{-1/2}\left[\frac{\lambda_n}{2}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt\right]^{1/2},$$

де $\sigma_{\lambda_n}(x,f)=\sum_{|j|<n}\left(1-\frac{|\lambda_j|}{\lambda_n}\right)A_j e^{i\lambda_j x}, \quad n=1,2,...$

Наслідком з цієї теореми є точна нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \le 2^{-1/2}\left[\frac{\lambda_n}{2}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt\right]^{1/2}. \qquad (1.10)$$

Теорема 1.2.3. *Для будь-яких натуральних m і n та будь-якої f (x) – B^2-м. п. функція з рядом Фур'є* $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ *має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le K_{n,m}\left[\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(t,f)\,\varphi_n(t)\,dt\right]^{1/2},$$

де $\varphi_n(t)=\sin\frac{\lambda_n t}{2}+\frac{1}{2}\sin\lambda_n t, \quad K_{n,m}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n\left(C_{2m}^m\right)^{-1}}$.

І для будь-яких фіксованих m і n при m < n константа $K_{n,m}$ найкраща.

1.3. Нерівності типу Джексона при апроксимації цілими векторами експоненціального типу.

В роботі Горбачука М.Л., Грушки Я.І. і Торби С.М. [66] були розглянуті аналоги нерівностей (1.1), (1.2) в абстрактному випадку, також як і деякі більш загальні нерівності. У 2005 р. вони довели подібні теореми у випадку наближення вектора гладкого для самоспряженого оператора в гільбертовому просторі, цілими векторами експоненціального типу цього оператора.

Нехай A – замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у банаховому просторі Ӽ над полем комплексних чисел.

Позначимо через $C^\infty(A)$ множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора A:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\notin N_0} D(A^n), \text{ де } N_0 = N \cup \{0\}.$$

Для числа α > 0 покладемо

$$G^\alpha(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \colon \exists c = c(x) > 0 \quad \forall k \in N_0 \quad \| A^k x \| \le c\alpha^k \right\}.$$

Множина $G^\alpha(A)$ є банаховим простором відносно норми

$$\| x \|_{G^\alpha(A)} = \sup_{n\in N_0} \frac{\| A^n x \|}{\alpha^n}.$$

Тоді $G(A) = \bigcup_{\alpha>0} G^\alpha(A)$ – лінійний локально-опуклий простір відносно топології індуктивної границі бананових просторів $G^\alpha(A)$:

$$G(A) = \liminf_{\alpha\to\infty} G^\alpha(A)$$

Елементи простору $G(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A. Під типом $\sigma(x, A)$ вектора $x \in G(A)$ розуміється число

$$\sigma(x, A) = \inf \left\{\alpha > 0 \colon \ x \in G^\alpha(A)\right\} = \limsup_{n\to\infty} \| A^n x \|^{1/n}.$$

Скрізь у подальшому оператор A самоспряжений в H, а $\mathcal{E}(\Delta)$ – його спектральна міра.

Для довільного $x \in$ H визначено, дотримуючись [63],

$$\mathrm{E}_r(x, A) = \inf_{y\in G(A)\colon \sigma(y,A)\le r} \| x - y \|, \qquad r > 0,$$

тобто $\mathrm{E}_r(x, A)$ – найкраще наближення елемента x цілими векторами y експоненціального типу оператора A, для яких $\sigma(y, A) \le r$. При фіксованому x $\mathrm{E}_r(x, A)$ не зростає і $\mathrm{E}_r(x, A) \to 0$, $r \to \infty$. Зрозуміло, що

$$\mathrm{E}_r\,(x, A) = \|\, x - \mathcal{E}\,(\,[-r, r]\,)\, x\,\| = \|\, x - \mathrm{F}(\,[0, r]\,)\, x\,\|\,,$$

де $F(\Delta)$ – спектральна міра оператора $|\,A| = \sqrt{A^* A}$.

Для $x \in \mathfrak{X}$, $t \in (0, \infty)$ та $k \in \mathbb{N}$ визначено узагальнені модулі гладкості як

$$\omega_k\big(t, x, A\big) = \sup_{0 \le \tau \le t} \|\, \Delta_\tau^k\, x\,\|,$$

$$\widetilde{\omega}_k\big(t, x, A\big) = \sup_{|\tau| \le t} \|\, \Delta_\tau^k\, x\,\|, \quad \Delta_h^0 \equiv 1,$$

де

$$\Delta_h^k \equiv \big(U(h) - \mathrm{I}\big)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_j^k\, U(jh), \quad k \in \mathbb{N}_0, \; h \in \mathbb{R},$$

$U(h) = e^{ihA}$ – група унітарних операторів в $\mathfrak{X}$ з генератором iA.

Нехай $g(\lambda)$ – майже скрізь скінченна вимірна функція на $\mathbb{R}$. Під функцією $g(B)$ від оператора B розуміється $g(B) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, dE(\lambda)$. Для довільного вектора x з області визначення $D(g(B))$ та будь-якого $k \in \mathbb{N}$

$$E_r\,(x, B) \le \frac{\sqrt{k+1}}{2^k G(r)}\, \omega_k\!\left(\frac{\pi}{r}, g(B)x, B\right), \quad r > 0. \tag{1.11}$$

Однак, точність цих нерівностей у випадку довільного гільбертового простору не була вивчена. У представленій дисертаційній роботі наводиться доведення точності цих оцінок.

1.4. Деякі відомості з аналізу функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

Наведемо деякі необхідні відомості з аналізу функції зі значеннями у довільному дійсному або комплексному сепарабельному гільбертовому просторі (докладно див. [85, гл. 5], [110, гл. 6, §7]).

Нехай H – дійсний або комплексний сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. Функція $f : [a; b] \to$ H називається слабко вимірною, якщо для довільного елемента $z \in$ H функція

$$[a; b] \ni t \to (z, f(t))$$

вимірна за Лебегом.

У множині слабко вимірних функцій, які задовольняють умову

$$\int_a^b ||f(t)||^2 dt < +\infty,$$

означимо скалярний добуток

$$(f, g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x), g(x))dx$$

і норму

$$\| f \|_{2,H}^2 := \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(f(x), f(x)\big)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b ||f(x)||^2 dx$$

(обидва інтеграли – інтеграли Лебега).

Множина класів еквівалентності слабко вимірних функцій відносно цієї норми представляє собою простір L_2 ([$a; b$], H). Простір L_2 ([$a; b$], H) є гільбертовим. Якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис простору H і для $t \in [a; b]$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) e_n \ ,$$

де $\varphi_n(t) = (f(t), e_n)$, то функція $f \in L_2$ ([$a; b$], H) тоді і тільки тоді, коли

1) функції $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ вимірні за Лебегом ;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left|\varphi_n(t)\right|^2 dt < +\infty.$

Означення 1.4.1 Найкращим наближенням функції $f \in L_2$ ([a, b], H) підпростором G $\subset L_2$ ([$a; b$], H) називається величина

$$E(f, G)_{2,\mathrm{H}} = \inf_{g \in G} \| f - g \|_{2,\mathrm{H}} .$$

Означення 1.4.2 Найкращим наближенням деякого класу функцій $Q \subset L_2([a, b], \mathrm{H})$ підпростором G називається величина

$$E(Q, G)_{2,\mathrm{H}} = \sup_{f \in Q} E(f, G)_{2,\mathrm{H}} .$$

У подальшому розглядаємо простір $L_2([0; 2\pi], \mathrm{H})$ 2π – періодичних функцій зі значеннями у дійсному або комплексному сепарабельному гільбертовому просторі H.

В якості G, коли H – дійсний гільбертовий простір, будемо використовувати множину T^{H}_{2n-1} узагальнених тригонометричних поліномів порядку n-1, що мають вигляд

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx \right),$$

де $A_0, A_к, B_k \in \mathrm{H}$.

Кожній функції $f \in L_2([0; 2\pi], \mathrm{H})$ поставимо у відповідність ряд, який називається рядом Фур’є даної функції:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right),$$

де

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt , \; k \geq 0,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt , \; k \geq 1.$$

Через $S_n(f;t)$ позначимо часткову суму ряду Фур’є:

$$S_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right).$$

Відомо, що має місце рівність Парсеваля

$$\| f \|_{2,H}^2 = \frac{\| a_0 \|_{2,H}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\| a_k \|_{2,H}^2 + \| b_k \|_{2,H}^2).$$

Окрім того, в просторі узагальнених тригонометричних поліномів порядка (n-1) найкраще наближення функції f у метриці L_2 ([0; 2π], H) реалізують часткові суми ряду Фур'є [74], тобто суми

$$S_n (f ; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

А це означає, що

$$E^2 (f, T_{2n-1}^{H})_{2,\mathrm{H}} = \| f - S_n(f) \|_2^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt - \pi \left(\frac{1}{2} \|a_0\|_{2,H}^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\| a_k \|_{2,H}^2 + \| b_k \|_{2,H}^2 \right).$$

В силу рівності Парсеваля будемо мати

$$E^2 (f, T_{2n-1}^{\mathrm{H}})_{2,\mathrm{H}} = \| f - S_n(f) \|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (||a_k||^2 + ||b_k||^2).$$

Означення 1.4.3 2π-періодична функція $f : \mathbb{R} \to \mathrm{H}$ називається простою, якщо існують елементи $C_k \in \mathrm{H}$, k= 1, 2 … n; множини $E_k \subset [0; 2\pi]$ такі, що E_k – вимірні, мають скінчену міру, $E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$, і $f(t) = C_k$, якщо $t \in E_k$.

Для визначеної таким чином простої функції $f(t)$ інтеграл Бохнера визначається співвідношенням

$$(\mathrm{B}) \int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=1}^{n} C_k m(E_k)$$

(dt) – міра Лебега). Якщо для 2π-періодичної функції $f : \mathbb{R} \to \mathrm{H}$ існує послідовність 2π-періодичних простих функцій $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ така, що для майже всіх $t \in [0; 2\pi]$

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(t) - f(t) \| = 0,$$

то функція $f(t)$ називається сильно вимірною.

Означення 1.4.4 2π-періодична функція *f(t)* інтегровна за Бохнером на [0; 2π], якщо вона сильно вимірна на цій множині, і якщо для довільної послідовності простих інтегровних функцій $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n(t) - f(t) \| = 0$ майже скрізь на [0; 2π], має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \| f_n(t) - f(t) \| \, dm(t) = 0.$$

Тоді існує границя

$$\lim_{n\to\infty} (B) \int_0^{2\pi} f_n(t) dm(t) = (\mathrm{B}) \int_0^{2\pi} f(t) dm(t),$$

яка називається інтегралом Бохнера від функції *f* на [0; 2π].

Множина функцій $f : [0; 2\pi] \to \mathrm{H}$, інтегровних за Бохнером на [0; 2π], є лінійним простором. Для функцій із даного простору визначимо скалярний добуток

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x), g(x)) dx$$

і норму

$$\| f \|_{2,\mathrm{H}}^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x), f(x)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f(x) \|^2 \, dx.$$

Множина класів еквівалентності відносно цієї норми являє собою простір L_2^B ([0; 2π), H). Простір L_2^B ([0; 2π), H) є гільбертовим.

Найкраще наближення функції $f \in L_2^B$ ([0; 2π], H) підпростором і найкраще наближення деякого класу функцій Q $\subset L_2^B$ ([0; 2π], H) підпростором визначаються згідно означенням 2.1.1 та 2.1.2.

Означення 1.4.5 Модулем неперервності функції у просторі L_2^B ([0; 2π], H) називається функція

$$\omega (f; t)_{2,\mathrm{H}} = \sup_{|u|\le t} \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|_{2,\mathrm{H}}, \quad t \ge 0,$$

а m-м модулем гладкості – функція

$$\omega_m\,(f;\,t)_{2,\mathrm{H}} = \sup_{|u|\le t} \|\, \Delta_u^{(m)} f(x) \,\|_{2,\mathrm{H}}\,, \qquad t \ge 0$$

де

$$\Delta_u^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x + ju)\,, \quad m = 1, 2, \dots .$$

В якості підпростору G, коли Н – комплексний гільбертовий простір, будемо використовувати множину $\boldsymbol{T}_{2n-1}^{\mathrm{H}}$ узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вище $n–1$ вигляду

$$\mathrm{T_n}\,(\mathrm{x}) = \sum_{|\mathrm{k}|<\mathrm{n}} A_\kappa\, e^{ikx}\,, \qquad \text{де } A_\kappa \in \mathrm{H}\,.$$

Кожній 2π – періодичній функції f, інтегрованій за Бохнером на [0; 2π], поставимо у відповідність ряд, котрий називається рядом Фур’є даної функції:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{ikt}\,, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де

$$h_\kappa \,:=\, \frac{1}{2\pi}\ (\mathrm{B}) \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через $s_n(f;t)$ позначимо часткову суму ряду Фур'є: $s_n(f;t) = \sum_{|k|<n} h_k e^{ikt}$.

Відомо, (див. напр.[74]) що має місце рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| h_k \|^2\,.$$

Крім того

$$E^2\,(f,\,\boldsymbol{T}_{2n-1}^{\mathrm{H}})_{2,\mathrm{H}} = \|\, f - s_n(f)\,\|_{2,\mathrm{H}}^2 = \pi \sum_{|k|\ge n} \| h_k \|^2\,. \tag{1.12}$$

1.5. Аналітичні функції зі значеннями у гільбертовому просторі.

Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір. Розглянемо простір L_2(H) функцій [121], норма яких визначається наступним чином:

$$\| v \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| v(t) \|_H^2 \, dt \quad < \infty.$$

Для довільного цілого k H_k – підпростір в L_2(H), утворений функціями виду $e^{ikt} \cdot a$ ($a \in$ H). Очевидно, що $\mathrm{H}_k \perp \mathrm{H}_j$ коли $k \neq j$. Далі

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{H}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_k \, .$$

Важливий підпростір в L_2(H) утворюють функції, коефіцієнти Фур'є яких дорівнюють нулю при $k < 0$. Позначимо його через L_2^+(H). Візьмемо функцію

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot a_k \quad \in \quad L_2^+(\mathrm{H}).$$

Поставимо їй у відповідність функцію комплексної змінної z

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k \, . \tag{1.13}$$

Ця функція визначена і аналітична крузі $|z| < 1$.

Функцію $v(t)$ можливо відтворити за функцією $u(z)$ як радіальну границю у середньо квадратичному:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| v(t) - u(re^{it}) \|_H^2 \, dt \to 0, \qquad r \to 1\text{–}0.$$

Окрім цього

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| u(re^{it}) \|_H^2 \, dt \le \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \|_H^2 < \infty, \;\; 0 \le r < 1.$$

Позначимо $\mathscr{H}^2$ (H) клас усіх функцій

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k \, ,$$

аналітичних при $|z| < 1$, і таких, що інтеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| u(re^{it})\|_H^2\ dt \qquad (0 \le r < 1)$$

обмежений незалежним від r числом. Оскільки цей інтеграл дорівнює $\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\| a_k \|_H^2$, то наведена вище умова еквівалентна умові збіжності ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\| a_k \|_H^2 \ < \infty.$$

Отже, кожна функція $u(z) \in \mathscr{H}^2$ (H) отримується зазначеним чином із функції $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\cdot a_k$. А класи $\mathscr{H}^2$ (H) і L_2^+(H) можливо ототожнити наділивши $\mathscr{H}^2$ (H) структурою подібною L_2^+(H), і розглядати $\mathscr{H}^2$ (H) як підпростір в L_2(H).

Функції $u(z)$ і $v(t)$ пов’язані формулою Пуассона

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-s)v(s)ds,\ \ 0 \le \mathrm{r} < 1, \qquad (1.14)$$

де $P_r(t)$ – ядро Пуассона

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\ .$$

Використовуючи формулу (1.14) можна довести, що $v(t)$ є не тільки радіальною границею в середньо квадратичному для $u(re^{it})$, але також границею майже скрізь. Точніше $u(z)$ сильно (в H) прямує до $v(t)$, коли z недотично прямує до e^{it}, залишаючись в одиничному колі, для довільної точки t, для якої

$$\frac{1}{2s}\int_{t-s}^{t+s} v(t)dt \ \to v(t) \text{ сильно } (\mathrm{s} \to 0),$$

тобто майже скрізь.

Маючи це на увазі, дозволяємо собі писати $u(re^{it})$ замість $v(t)$ якщо мова йде про функції з підпростору L_2^+(H).

У $\mathscr{H}^2$ (H) можливо ввести норму

$$\| f \|^2 = \sup_{r\in[0;1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f(re^{it}) \|_H^2 \, dt$$

або так

$$\| f \|^2 = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f(re^{it}) \|_H^2 \, dt .$$

Будь-яка функція $v(t) \in L_2^+$(H) породжує функцію $u(z) \in \mathscr{H}^2$ (H). Ця функція визначена аналітична в одиничному крузі $|z| < 1$. У розділі 2 буде вивчено залежність найкращих наближень функцій $u(z)$ алгебраїчними поліномами від гладкості породжуючих функцій $v(t)$.

Гарним поліномом для оцінок апроксимації функції з класу $\mathscr{H}^2$ (H) є поліном

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot a_k$$

(для функції $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k$). Цей поліном відіграє роль, яку відіграють часткові суми ряду Фур'є для функцій з L_2(H).

Означення 1.5.1 Найкращим наближенням у класі функцій $\mathscr{H}^2$ (H) узагальненими алгебраїчними поліномами називається величина

$$E(u, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} = \inf_{p\in P_n} \| u - p \|_{\mathscr{H}^2(H)},$$

де P_n – множина алгебраїчних поліномів порядку не вище *n-1*.

1.6. Елементи спектральної теорії

Елементи спектральної теорії та означення спектральних інтегралів наведемо згідно книзі Березанського Ю.Н. [42]. Означимо спочатку поняття розкладу одиниці. Нехай R – абстрактний простір, $\mathscr{R}$ - деяка σ – алгебра його множин. Іншими словами, заданий вимірний простір ‹ R, $\mathscr{R}$ ›. Крім того, H – гільбертовий простір. Операторнозначна функція $\alpha \to E(\alpha)$ називається розкладом одиниці (на R), якщо виконані наступні умови:

а) для довільного $\alpha \in \mathscr{R}$ $E(\alpha)$ – проектор в H; $E(\varnothing)=0$, $E(R)=I$.

б) має місце зчисленна адитивність, тобто для довільної послідовності (α_j), що складається із множин з $\mathscr{R}$, які не перетинаються, справедлива рівність

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}E(\alpha_j),$$

де ряд збігається в смислі сильної збіжності операторів (тобто на кожному векторі $f \in$ H за нормою H).

Розклад одиниці має наступні властивості:

1. Ортогональність:

$$E(\alpha)\,E(\beta)=E(\alpha\cap\beta)\quad(\alpha,\beta\in\mathscr{R}).$$

З цієї властивості випливає, що оператори $E(\alpha)$ ($\alpha \in \mathscr{R}$)– комутують.

2. В умові б) сильну збіжність ряду можна замінити його слабкою збіжністю.

3. Монотонність: для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$

$$\alpha\subseteq\beta\ \Rightarrow\ E(\alpha)\le E(\beta),$$

де нерівність між операторами означає, що

$$A\le B\ \Leftrightarrow\ (Af,f)_H\le(Bf,f)_H$$

5. Нехай (α_j), (β_j) – спадаюча та зростаюча послідовності множин $\alpha_j, \beta_j \in \mathscr{R}$. Тоді у сенсі сильної збіжності в H

$$\lim_{n\to\infty}E(\alpha_n)=E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right),\ \lim_{n\to\infty}E(\beta_n)=E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\beta_n\right).$$

6. Нехай E – розклад одиниці на алгебрі $\mathscr{R}$, тоді існує його продовження до розкладу одиниці E_σ на її σ-оболонці $\mathscr{R}_\sigma$, тобто звуження $E_\sigma \uparrow \mathscr{R} = E$. E_σ по E визначається однозначно.

Нехай $\alpha \to E(\alpha)$ – розклад одиниці. Зафіксуємо $f \in H$, тоді функція множин

$$\alpha \to (E(\alpha)f, f)_H = \| E(\alpha) f \|_H^2 \geq 0$$

є невідємною скінченною мірою на $\mathscr{R}$. При фіксованих $f, g \in H$ функція множин

$$\alpha \to (E(\alpha)f, g)_H \in \mathbb{C}$$

буде комплексно значною мірою (зарядом) на $\mathscr{R}$.

Опишемо процес побудови спектральних інтегралів, тобто інтегралів, що є операторами в H, від комплекснозначних функцій $\lambda \to F(\lambda) \in \mathbb{C}$ ($\lambda \in R$) за розкладом одиниці:

$$\int_R F(\lambda)\, dE(\lambda)\,.$$

Інтеграл від простих функцій. Нехай S – сукупність усіх простих функцій. Кожна проста комплекснозначна функція $F(\lambda)$, $\lambda \in R$ може бути записана у вигляді лінійної комбінації індикаторів множин, які не перетинаються:

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} F_k\ \chi_{\alpha_k}(\lambda), \qquad (F_k \in C;\ \alpha_k \cap \alpha_j = \varnothing, k \neq j;\ \lambda \in R)$$

За означенням покладаємо

$$\int_R F(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_R \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_k\ \chi_{\alpha_k}(\lambda) \right) dE(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} F_k\ E(\alpha_k)\,.$$

Побудований інтеграл має ряд властивостей (наведемо їх без доведення):

1. лінійність: для $a, b \in \mathbb{C}$ та $F(\lambda)$, $G(\lambda) \in S$

$$\int_R \big(a F(\lambda) + bG(\lambda)\big) dE(\lambda) \ = \ a\int_R F(\lambda)\, dE(\lambda) \ + b\int_R G(\lambda)\, dE(\lambda)\,;$$

2. мультиплікативність:

$$\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda) \cdot \int_R G(\lambda)\,dE(\lambda) = \int_R F(\lambda)G(\lambda)\,dE(\lambda)\ .$$

З цієї властивості слідує комутивність довільних двох інтегралів.

3. $\left(\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda)\right)^* = \int_R \overline{F(\lambda)}\ \ dE(\lambda)\ .$

4. $\left(\left(\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda)\right) f,\, g\right)_H = \int_R F(\lambda)\,d\big(E(\lambda)\,f, g\big),$ для $F(\lambda) \in$ S і $f, g \in$ H.

5. $\left\| \left(\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda)\right) f \right\|_H^2 = \int_R |F(\lambda)|^2 d\big(E(\lambda)\,f, f\big)_H\ .$

6. $\left\|\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda)\right\| \le \sup\big\{|F(\lambda)| : \lambda \in R\big\}$

Інтеграл від обмежених вимірних функцій. Позначимо сукупність всих обмежених вимірних функцій, повязаних з вимірним простором ‹ R, $\mathscr{R}$ ›, через L_∞(R, $\mathscr{R}$) = L_∞. Ця сукупність є алгеброю відносно звичайних алгебраїчних операцій. Кожну функцію $F \in L_\infty$ можна рівномірно апроксимувати певним чином підібраною послідовністю (F_n) простих функцій F_n. Для $F \in L_\infty$ за означенням покладемо:

$$\int_R F(\lambda)\,dE(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int_R F_n(\lambda)\ dE(\lambda)\ ,$$

де границя розуміється по нормі операторів.

Властивості 1 – 6 зберігаються для інтегралів від обмежених вимірних функцій $F,G \in L_\infty$.

Інтеграл від необмежених вимірних функцій. Нехай L_0 (R, $\mathscr{R}$, E) = L_0 – сукупність функцій виду $\lambda \to F(\lambda) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, вимірних відносно $\mathscr{R}$ і майже всюди скінченних відносно операторнозначної міри E, тобто E ({λ∈R : F(λ) = ∞}) = 0. Спектральній інтеграл для необмеженої вимірної функції визначається наступним чином. Для $F \in L_0$ і $N \ge 0$ позначимо через F_N її зрізку – обмежену функцію вигляду $F_N(\lambda) = F(\lambda)$ при $\{\lambda\in R : F(\lambda) \le N\}$ й $F_N(\lambda) = N$ для інших $\lambda\in R$. Множина

$$D_F = \left\{ f \in H : \quad \int_R |F(\lambda)|^2 d(E(\lambda) f, f)_H < \infty \right\}$$

є лінійною та всюди щільною в H. За визначенням для $f \in D_F$ покладемо у змісті сильної збіжності в H

$$I_F f = \int_R F(\lambda) dE(\lambda) f = \lim_{N\to\infty} \int_R F_N(\lambda)\, dE(\lambda) f \ .$$

Ця границя існує. Інтеграл I_F існує як, взагалі кажучи, необмежений оператор зі щільною в H областю визначення $D(I_F) = D_F$.

Спектральна теорема. *Нехай A – обмежений самоспряжений оператор. Тоді на σ-алгебрі $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ борелівських множин на осі визначений розклад одиниці E такий, що має місце спектральний розклад*

$$A = \int_R \lambda\, dE(\lambda) \ .$$

Спектральна теорема (для необмежених операторів). *Нехай A – довільний самоспряжений оператор. Тоді на σ-алгебрі $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ борелівських множин на осі визначений розклад одиниці E оператора A такий, що має місце спектральний розклад*

$$A = \int_R \lambda\, dE(\lambda) \ , \quad D(A) = \left\{ f \in H : \int_R \lambda^2\, d(E(\lambda) f, f)_H < \infty \right\}. \qquad (1.15)$$

В (1.11) $\mathbb{R}$ можна замінити на спектр $S(A)$ оператора A. Розклад одиниці E з (1.11) визначається однозначно.

При цьому

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d(E(\lambda) f, f) \ < \infty$$

Функцією $\varphi(A)$ від самоспряженого оператора A називається оператор, що задається рівністю

$$\varphi(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)\, f$$

на всих тих векторах $f \in$ H, для яких виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)f, f) < \infty .$$

При цьому

$$\| \varphi(A)f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)f, f) .$$

Теорема 1.6.1. *Нехай E – розклад одиниці (міра), заданий на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Тоді для $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\lambda \to E_\lambda = E((-\infty, \lambda)) \tag{1.16}$$

є розкладом одиниці (функцією). Навпаки, по заданому розкладу одиниці E_λ можна на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ побудувати розклад одиниці E такий ,що E_λ і E будуть пов'язані (1.16).

Теорема 1.6.2. *Нехай A – довільний нормальний оператор. Тоді на σ-алгебрі $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ борелівських множин комплексної площини визначено розклад одиниці E оператора A такий, що має місце спектральне представлення*

$$A = \int_C \lambda\, dE(\lambda) , \quad D(A) = \left\{ f \in H : \int_C |\lambda|^2\, d(E(\lambda)f, f)_H < \infty \right\}. \tag{1.17}$$

В (1.17) $\mathbb{C}$ можна замінити на спектр *S(A)* оператора *A*. Розклад одиниці *E* з (1.17) визначається однозначно.

Нехай A – самоспряжений оператор, що діє у гільбертовому просторі H, E – його розклад одиниці. За функцією ‹ λ, t › $\to e^{it\lambda} \in \mathbb{C}$ для довільного $t \in \mathbb{R}$ будується операторнозначна функція

$$t \to U(t) = \int_R e^{it\lambda}\, dE(\lambda) = e^{itA} \in L(\mathrm{H}) \tag{1.18}$$

Із властивостей спектральних інтегралів випливає, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унітарний і має місце рівність $U(t+s) = U(t)\,U(s) \quad (t, s \in \mathbb{R})$. Функція $U(t)$ є сильно неперервною та сильно неперервно диференційовною.

Теорема Стоуна. *Сильно неперервна однопараметрична унітарна група* $U(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ *завжди допускає представлення (1.18) з деяким однозначно визначеним за нею розкладом одиниці* E.

РОЗДІЛ 2. НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ

2.1. Інтегральні нерівності типу Джексона для функцій однієї змінної.

У цьому підрозділі узагальнюються наведені з розділі 1 результати М.І.Черних [139], [140] на випадок функцій зі значеннями у довільному дійсному або комплексному сепарабельному гільбертовому просторі.

Теорема 2.1.1. *Для довільної 2π – періодичної функції f, інтегровної за Бохнером на $[0; 2\pi]$, що не є сталою величиною (з точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n мають місце нерівності*

$$E^2\,(f, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1}\,)_{2,H} \;\le\; \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n}\omega^2(f;t)_{2,H}\,\sin(nt)\,dt. \tag{2.1}$$

У випадку дійсного гільбертового простору рівність досягається на узагальнених тригонометричних поліномах виду

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos nx + \beta_1 \sin nx \quad (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathrm{H}\,),$$

у випадках комплексного гільбертового простору – на поліномах

$$f(x) = h_n\, e^{inx} \quad (h_n \in \mathrm{H}\,).$$

Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли H – комплексний гільбертовий простір. Для доведення твердження теореми будемо застосовувати метод М.І.Черних [139] (див. також [74]), що був використаний при доведенні нерівності (1.1). Як зазначалося в параграфі 1.4.

$$E^2\,(f, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1}\,)_{2,\mathrm{H}} = \pi \sum_{|k|\ge n}\| h_k \|^2$$

Використовуючи рівність Парсеваля, отримаємо

$$\| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|^2_{2,H} = \int_0^{2\pi} \| f(x+u) - f(x) \|^2_{2,H}\, dx =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| h_k \|^2 (1-\cos kt).$$

Отже для довільного $t \geq 0$ можемо записати

$$\omega^2(f;t)_{2,\text{H}} = \sup_{|u|\leq t} \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|^2_{2,\text{H}} \geq \| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|^2_{2,\text{H}} \geq$$

$$\geq 2\pi \sum_{|k|\geq n} \| h_k \|^2 (1-\cos kt) = 2 E^2 (f, \boldsymbol{T}^{\text{H}}_{2n-1})_{2,\text{H}} - 2\pi \sum_{|k|\geq n} \| h_k \|^2 \cos kt,$$

або

$$\text{E}^2 (f, \text{T}^{\text{H}}_{2n-1})_{2,\text{H}} \leq \frac{1}{2}\omega^2(f;t)_{2,\text{H}} + \pi \sum_{|k|\geq n} \| h_k \|^2 \cos kt.$$

З цієї рівності, як і у випадку дійснозначних функцій, виводимо нерівність теореми. Для повноти викладення наведемо доведення.

При $t \in [0; \frac{\pi}{n}]$ помножимо обидві частини останньої нерівності (вони невід'ємні) на $sin(nt)$ та проінтегруємо по t від 0 до $\frac{\pi}{n}$. Це можливо, тому що ряд у правій частині нерівності мажорується на всій осі збіжним рядом $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \| h_k \|^2_{2,H}$. Отримаємо

$$\int_0^{\pi/n} E^2(f, T^H_{2n-1})_{2,H} \sin nt dt = \frac{2}{n} \text{E}^2 (f, \text{T}^H_{2n-1})_{2,\text{H}}$$

й

$$\frac{2}{n} \text{E}^2 (f, \text{T}^H_{2n-1})_{2,\text{H}} \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f;t)_{2,H} \sin nt dt + \pi \sum_{|k|\geq n} \| h_k \|^2 \rho_k,$$

де

$$\rho_\kappa = \int_0^{\pi/n} \sin nt \cos kt dt. \tag{2.2}$$

Якщо $|\kappa| = n$, то $\rho_\kappa = 0$, якщо ж $|\kappa| > n$, то $\rho_\kappa \leq 0$. Тому

$$\text{E}^2 (f, \text{T}^H_{2n-1})_{2,\text{H}} \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f;t)_{2,H} \sin nt dt.$$

Покажемо точність даної нерівності на поліномах $f(x) = h_n e^{inx}$ ($h_n \in \text{H}$).

З одного боку

$$E^2\,(h_n\, e^{inx},\, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1}\,)_{2,\mathrm{H}} \;=\pi\,\sum_{|k|\ge n}\|\,h_k\,\|^2 \;=\pi\,\|\,h_n\,\|^2\,;$$

з іншого

$$\omega\,^2(f;\,t)_{2,\mathrm{H}} \;=\; \sup_{|u|\le t}\|\,f(\cdot\,+\,u)-f(\cdot)\,\|^2_{2,\mathrm{H}} \;=\; \sup_{|u|\le t}\;\; 2\pi\sum_{|k|\ge n}\|\,\mathrm{h}_k\,\|^2\,(1-\cos ku)\;=$$

$$=\sup_{|u|\le t}\;\; 2\pi||h_n||^2(1-\cos nu) = \;2\pi||h_n||^2(1-\cos nt)\,,$$

$$\frac{n}{4}\int_0^{\pi/n}\omega^2(\,f\,;t)_{2,H}\sin ntdt \;=\; \frac{n}{4}\,2\pi\,\|\,h_n\,\|^2\int_0^{\pi/n}(1-\cos nt)\sin ntdt \;=\; \frac{n}{4}\cdot\frac{4\pi}{n}\,\|\,h_n\,\|^2 =$$

$$=\pi\,\|\,h_n\,\|^2\,.$$

Теорема доведена.

Наслідок 2.1.1. *Для функцій* $u(z)$ *з класу* $\mathscr{H}^2$ *(H) має місце нерівність*

$$E^2(u,\,P_n\,)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n}\varpi^2\,(v;t)\,\sin(nt)\,dt\,.$$

(Тут функція v пов'язана з функцією $u(z)$ *співвідношеннями (1.13) та (1.14).)*

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z)\;=\;a\cdot z^n$ *,* $a\ne\theta$*,* $a\in\mathrm{H}$ *і* $v(t)=e^{int}\cdot a$ *.*

Спочатку доведемо допоміжну теорему.

Теорема 2.1.2. *Для довільного елементу* $a\in\mathrm{H}$, $a\ne\theta$

$$E(a\cdot z^n\,,P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} = \|\,a\,\|_H \;\;,$$

де P_n *– множина алгебраїчних поліномів порядку не вище* n*-1.*

Доведення. Нерівність

$$E(a\cdot z^n\,,P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \|\,a\,\|_H$$

очевидна, оскільки

$$E(a\cdot z^n, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \| a\cdot z^n \|_H = \| a \|_H .$$

Покажемо, що найкраще наближення $a\cdot z^n$ в $\mathscr{H}^2$ (H) буде дорівнювати $\| a \|_H$. Припустимо, що це не так. Тобто знайдеться такий поліном $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot z^k$, що

$$\left\| z^n \cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot z^k \right\|_{\mathscr{H}^2(H)} < \| a\cdot z^n \|_H = \| a \|_H .$$

Для цього поліному буде виконуватися нерівність

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| r^n e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot r^k e^{ikt} \right\|_H^2 dt \le (1-\varepsilon) \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| r^n e^{int}\cdot a \right\|_H^2 dt .$$

Функція $r^n e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot r^k e^{ikt}$ неперервно залежить від $r \in [0,1]$. Для неї границя при $r\to 1$ існує і дорівнює $e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot e^{ikt}$. Ця збіжність є рівномірною по t. Дійсно, $r^k e^{ikt}\cdot a$ рівномірно збігається до $e^{ikt}\cdot a$ при $r\to 1$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) оскільки

$$\left\| (r^k - 1) e^{ikt}\cdot a \right\| = (r^k - 1)\| a \|$$

не залежить від t. Тим самим показали рівномірну збіжність для окремих доданків суми, а значить і

$$\left\| r^n e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot r^k e^{ikt} \right\|_H \rightrightarrows \left\| e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot e^{ikt} \right\|_H \quad \text{при } r \to 1.$$

Маємо можливість перейти до границі під знаком інтеграла і отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| e^{int}\cdot a - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot e^{ikt} \right\|_H^2 dt < \frac{(1-\varepsilon)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| e^{int}\cdot a \right\|_H^2 dt .$$

Але це суперечить мінімальній властивості сум Фур'є. Твердження теореми доведено.

Отже, для отримання оцінок апроксимації аналітичних функцій можна використовувати поліном Тейлора і у випадку, коли рівність реалізується на $e^{int}\cdot a$, отримані оцінки будуть точними.

Доведення наслідку 2.1.1. Якщо $a_к$ –коефіцієнти Фур'є функції v, а $\sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot z^k$ – це частинна сума ряду, що визначає функцію $u(z)$, то

$$E^2(u,\ P_n)_{H^2(H)} \le \left\| u(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot z^k \right\|^2_{\mathcal{H}^2(H)} = \left\| \sum_{k\ge n} a_k\cdot z^k \right\|^2_{\mathcal{H}^2(H)} =$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \sum_{k\ge n} a_k\cdot r^k e^{ikt} \right\|^2 dt = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\ge n} \| a_k \|^2 \cdot r^{2k} dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \sum_{k\ge n} \| a_k \|^2 = E^2(v,\ T^H_{n-1})_{L_2(H)}.$$

Застосовуючи теорему Черних М.І., отримаємо

$$E^2(u,\ P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} \omega^2(v;t)\ \sin(nt)dt.$$

Доведемо точність цієї нерівності. Розглянемо функції $u(z) = a\cdot z^n$ та $v(t) = e^{int}\cdot a$. Для них:

$$E^2(u,\ P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} = E^2(a\cdot z^n,\ P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} = \| a \|^2_H,$$

$$\omega^2(v;t) = \omega^2(a\cdot e^{\mathrm{int}};t) = \| a(e^{\mathrm{int}/2} - e^{-\mathrm{int}/2}) \|^2_H = 4\ \| a\cdot \sin(nt/2) \|^2_H =$$

$$= 4\ \| a \|^2_H \sin^2(nt/2) = 2\ \| a \|^2_H (1-\cos nt),$$

$$\frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} \omega^2(v;t)\ \sin(nt)dt = \frac{n}{4}\cdot 2\|a\|^2_H \int_0^{\pi/n} (1\text{-}\cos nt)\sin(nt)dt = \frac{n}{4}\cdot 2\|a\|^2_H\ \frac{2}{n} = \| a \|^2_H.$$

Наслідок доведено.

Наступна теорема дає оцінку найкращого наближення $E^2(f,\ T^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}}$ функції $f(x)$ через m-й інтегральний модуль гладкості $\omega_m(f\ ;\ t)_{2,\mathrm{H}}$.

Теорема 2.1.3. *Для довільної інтегровної за Бохнером функції f (x)* $\in$ L_2^B *([0; 2π), H) та довільних натуральних m і n = 1, 2, ... справедливі нерівності*

$$E\,(f,\,T^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \;\le\; \frac{1}{2}\sqrt{n(C^m_{2m})^{-1}}\,\left\{\int_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f;t)_{2,H}\,(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt)dt\right\}^{1/2}. \qquad (2.3)$$

Для довільних фіксованих m і n > m константа $\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{n}(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1}}$ *не покращується.*

Доведення. Будемо використовувати міркування, запропоновані М.І. Черних у роботі [139] з відповідними змінами стосовно функцій *f (x)* $\in$ L_2^B ([0; 2π), H). Нехай

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{ikx}$$

ряд Фур'є функції *f (x)* $\in$ L_2^B ([0; 2π), H).

Використовуючи формули Ейлера, отримаємо

$$\|\,\Delta_t^{(m)} f(x)\,\|^2_{2,H} \;=\; \int_0^{2\pi}\|\,\Delta_t^{(m)} f(x)\|^2_{2,H}\,dx \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\,h_k\,\|^2_{2,H}\left(2\sin\frac{kt}{2}\right)^{2m} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\,h_k\,\|^2_{2,H}\left[C^m_{2m} - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C^{m-j}_{2m}\cos(jkt)\right].$$

Тому

$$\omega^2_m\,(f;\,t)_{2,\mathrm{H}} \;=\; \sup_{|t|\le\delta}\|\,\Delta_t^{(m)} f(x)\,\|_{2,\mathrm{H}} \;\ge\; \sum_{|k|\ge n}\|\,h_k\,\|^2_{2,H}\left[C^m_{2m} - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C^{m-j}_{2m}\cos(jkt)\right],$$

звідки

$$\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}}\;\mathrm{E}^2\,(f,\,\boldsymbol{T}^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \;=\; \mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}}\sum_{|k|\ge n}\|\,h_k\,\|^2_{2,H} \;\le\; \omega^2_m\,(f;\,t)_{2,\mathrm{H}} +$$

$$+\;2\sum_{|k|\ge n}\|\,h_k\,\|^2_{2,H}\;\sum_{s=1}^{[m/2]}C^{m-2s+1}_{2m}[\cos(2s-1)kt) - \frac{m-2s+1}{m+2s}\cos(2skt)] \;+$$

$$+\ 2\,\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*}\sum_{|k|\ge n}\| h_k \|_{2,H}^2 \cos(mkt)\ , \qquad (2.4)$$

де $\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*} = 1$ для парних m, $\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*} = 0$ для непарних m, $[\,\mathrm{m}/2\,]$ – ціла частина числа $\frac{m}{2}$. Розглянемо функцію

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt, & t \in [0; \frac{2\pi}{n}]; \\ 0, & t \in [\frac{2\pi}{n}; \pi]. \end{cases}$$

Нехай $\varphi_n(t)$ має ряд Фур'є:

$$\varphi_n(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos kt \qquad (\,0 \le t \le \pi).$$

Оскільки $\varphi_n(t) \ge 0$ і

$$\int_0^{\pi} \varphi_n(t)dt\ = \frac{4}{n}\,,$$

то, інтегруючи нерівність (2.4) по відрізку $[0;\,\pi]$ з ваговою функцією $\varphi_n(t)$, отримаємо

$$\mathrm{E}^2(f, \boldsymbol{T}_{2n-1}^{H})_{2,\mathrm{H}} \le \frac{n}{4}(\mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}})^{-1}\int_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f;t)_{2,H}\,\varphi_n(t)dt + \frac{\pi \mathrm{n}}{4}(\mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}})^{-1}\times$$

$$\times\left\{C_{2m}^{*}\sum_{|k|\ge n}\| h_k \|_{2,H}^2\ d_{mk} + \sum_{|k|\ge n}\| h_k \|_{2,H}^2 \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s+1}\left(d_{(2s-1)k} - \frac{m-2s+1}{m+2s}d_{2sk}\right)\right\}.$$

У подальшому, маємо

$$d_k\ =\ -\ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{4n}{4k^2-n^2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{n}{k^2-n^2}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}\ \le\ 0\ ,$$

формула вірна й для $k = n$, якщо вважати другий доданок рівним нулю. Звідси, після перетворень, отримуємо

$$(m + 2s)\ d_{(2s\text{-}1)k}\ -\ (m - 2s + 1)\ d_{2sk}\ =\ -\ \frac{6(m-2s+1)n^3\cos^2\frac{2sk\pi}{n}}{\pi(16s^2k^2-n^2)(4s^2k^2-n^2)}\ -$$

$$- \frac{2n}{\pi} \frac{1}{(4s^2k^2 - n^2)(4(2s-1)^2k^2 - n^2)} \times$$

$$\times \ [4k^2 ((4s - 1)m + 16s^3 - 12s^2 + 6s - 1) - n^2 (3m + 10s - 1)] -$$

$$- \frac{6(m+2s)n^3 \sin^2 \frac{(2s-1)k\pi}{n}}{\pi(4(2s-1)^2k^2 - n^2)((2s-1)^2k^2 - n^2)} \leq 0,$$

якщо $1 \leq s \leq \frac{m}{2}$, $k \geq n$, $m \geq 2$.

Із нерівності (2.4), $d_k \leq 0$, і останньої нерівності випливає, що

$$\mathrm{E}^2 (f, \boldsymbol{T}^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \leq \frac{n}{4} (\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1} \int_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f;t)_{2,H} \varphi_n(t) dt,$$

а тоді

$$\mathrm{E} (f, \boldsymbol{T}^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{n(C^m_{2m})^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f;t)_2 (\sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt) dt \right\}^{1/2}.$$

Точність даної оцінки буде випливати із доведення точності оцінки, що містить модуль неперервності і буде розглянуто у теоремі 2.2.3.

У подальшому розглядається клас функцій $\mathrm{L}^{\Lambda,\mathrm{M}}_{2,\mathrm{H}}$ простору $\mathrm{L}_2([0; 2\pi), \mathrm{H})$ (H – дійсний гільбертовий простір), що задається наступним чином. Нехай послідовності чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N}$, $\mathrm{M} = \{\mu_k\}_{k \in N}$ такі, що $\left\{\frac{|\lambda_k|}{k}\right\}$, $\left\{\frac{|\mu_k|}{k}\right\}$, $\{|\lambda_k|\}$ і $\{|\mu_k|\}$ не спадають коли $k \to +\infty$, $|\lambda_k| = |\mu_k|$. Для функцій $f \in \mathrm{L}_2([0; 2\pi), \mathrm{H})$ та послідовностей Λ і М покладемо

$$f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt).$$

Нехай

$$\mathrm{L}^{\Lambda,\mathrm{M}}_{2,\mathrm{H}} = \{ f \in \mathrm{L}_2([0; 2\pi), \mathrm{H}): \ \|f^{(\Lambda,\mathrm{M})}\|^2_{2,\mathrm{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) < \infty \}.$$

І ще, для довільного натурального n, також будемо розглядати клас функцій

$$W_{2,H}^{\Lambda,M,n} = \left\{ f(t) \in L_2([0;2\pi),H) : \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt \le 1 \right\}.$$

Нижче наведена точна оцінка найкращого наближення функції $f \in L_{2,H}^{\Lambda,M}$ за допомогою модуля неперервності функції $f^{(\Lambda,M)}$, а у параграфі 2.3 знайдені значення слабких поперечників класу функцій $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$.

Теорема 2.1.4. *Для довільної функції f(x) і будь-якого натурального n має місце нерівність, що не покращується*

$$E(f, T_{2n-1}^{H})_{2,H} \le \frac{n}{4|\lambda_n|} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt. \tag{2.5}$$

Доведення. При доведенні будемо суттєво використовувати метод, викладений у роботі [128].Оскільки

$$E^2(f, T_{2n-1}^{H})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|_{2,H}^2,$$

$$\omega(f^{(\Lambda,M)} - s_n(f^{(\Lambda,M)}), x) \le \omega(f^{(\Lambda,M)}, x),$$

можна обмежитися розглядом функцій *f(x)*, які ортогональні всім поліномам $\{T_{n-1}\}$ порядку не вище за *n-1*.Тоді, через те що послідовності $\frac{|\lambda_k|}{k}$ та $\frac{|\mu_k|}{k}$ не спадають з ростом *k*, будемо мати

$$E^2(f, T_{2n-1}^{H})_{2,H} = \| f \|_{2,H}^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2) =$$

$$= \pi \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k^2} (\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2) \frac{k^2}{|\lambda_k|^2} \le \frac{n^2}{|\lambda_n|^2} \| f^{(\Lambda_1,M_1)} \|_{2,H}^2,$$

де $\Lambda_1 = \left\{ \frac{\lambda_k}{-k} \right\}_{k \in N}$, $M_1 = \left\{ \frac{\mu_k}{k} \right\}_{k \in N}$.

Розглянемо оператор

$$\mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)},x)=\frac{n}{2}\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x+t)\cos(nt)dt=$$

$$=\frac{n}{2}\int_{0}^{\pi/2n}[f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x+t)+f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x-t)]\cos(nt)dt.$$

Очевидно, що

$$\| f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}\|_{2,\mathrm{H}}\le \| f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(\mathrm{x})-\mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)},x)\|_{2,\mathrm{H}}+\|\mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)},x)\|_{2,\mathrm{H}}\ .$$

Для кожного доданку у правій частині останньої нерівності запишемо оцінку зверху. Оскільки

$$f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x)-\mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)},x)=n\int_{0}^{\pi/2n} f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x)\cos(nt)dt-$$

$$-\frac{\mathrm{n}}{2}\int_{0}^{\pi/2n}[f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x+t)+f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x-t)]\cos(nt)dt=$$

$$=-\frac{\mathrm{n}}{2}\int_{0}^{\pi/2n}[f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x+t)-2f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x)+f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x-t)]\cos(nt)dt=$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi/2n}[\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k A_k(\sin k(x-t)-\sin k(x+t))+\mu_k B_k(\cos k(x-t)-\cos k(x+t))](1-\sin(nt))dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2n}[f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x-t)-f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x+t)](1-\sin(nt))dt,$$

то

$$\| f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}(x)-\mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)},x)\|_{2,\mathrm{H}}\le\ \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi/2n}\| f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x+t)-f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x-t)\|(1-\sin(nt))dt.$$

Для другого доданку вірна оцінка

$$\| \mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}, x) \|_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{n^2} \| \mathrm{A}^{(\Lambda_0)}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}, x) \|_{2,\mathrm{H}} ,$$

де

$$\mathrm{A}^{(\Lambda_0)}(f^{(\Lambda_1)}, x) = \frac{\mathrm{n}}{2} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^2 \left[\frac{\lambda_k}{-k} A_k (\cos k(x+t) + \cos k(x-t)) + \frac{\mu_k}{k} B_k (\sin k(x+t) + \sin k(x-t)) \right] \right) \cos(nt) dt$$

Оскільки

$$\frac{1}{n^2} \mathrm{A}^{(\Lambda_0)}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}, x) = \frac{1}{\mathrm{n}^2} \frac{\mathrm{n}}{2} \times$$

$$\times$$

$$\int_0^{\pi/2n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (-k)\lambda_k A_k (\cos k(x+t) + \cos k(x-t)) + k\mu_k B_k (\sin k(x+t) + \sin k(x-t)) \right) \cos(nt) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2n} [\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k A_k (\sin k(x-t) - \sin k(x+t))](1-\sin(nt)) dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2n} [\sum_{k=n}^{\infty} \mu_k B_k (\cos k(x-t) - \cos k(x+t))](1-\sin(nt)) dt ,$$

тоді

$$\| \mathrm{A}(f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)}, x) \|_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2n} \| f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x+t) - f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x-t) \| \sin(nt) dt .$$

Поєднуючи ці оцінки, отримаємо

$$\| f^{(\Lambda_1,\mathrm{M}_1)} (x) \|_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2n} \| f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x+t) - f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x-t) \| dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \| f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x+\frac{t}{2}) - f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(x-\frac{t}{2}) \| dt \le \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,\mathrm{M})}, t) dt .$$

Враховуючи оцінку для норми функції f, будемо мати

$$E\,(f,\,T^{\text{H}}_{2\text{n}-1})_{2,\text{H}} = \| f \|_{2,\text{H}} \le \frac{n}{4\,|\,\lambda_n\,|}\int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,\text{M})},t)dt\,.$$

Точність цієї нерівності буде випливати із теореми ….

Теорема 2.1.4 доведена.

Як наслідок з доведеної теореми отримаємо наступне узагальнення нерівності Тайкова Л.В.

Теорема 2.1.4′. *Для довільної диференційованої функції f(x)* $\in L^{\text{r}}_{2,\text{H}}$, $L^{\text{r}}_{2,\text{H}} = \left\{ f(t) : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2r} (\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2) \le 1 \right\}$ *та будь-якого натурального n та r має місце нерівність*

$$E\,(f,\,\boldsymbol{T}^{\text{H}}_{2\text{n}-1})_{2,\text{H}} \le \frac{1}{4n^{r-1}}\int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)},t)dt\,.$$

Наслідок 2.1.2. *Для функцій* $u(z)$ *з класу* $\mathscr{H}^2$ *(H), що пов'язана з функцією v (t) співвідношеннями (1.13) та (1.14), натурального r має місце нерівність*

$$E^2(u,\,P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \frac{1}{4n^{r-1}}\int_0^{\pi/n} \omega\,(v^{(r)};t)\,dt\,.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z) = a \cdot z^n$, $a \neq \theta$, $a \in \text{H}$ *і* $v(t) = e^{int} \cdot a$.

Доведення. Як вже було доведено у наслідку 2.1.1

$$E^2(u,\,P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le \left\| u(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot z^k \right\|^2_{\mathscr{H}^2(H)} \le E^2(v,\,T^H_{n-1})_{L_2(H)}\,.$$

Тоді використовуючи нерівність теореми 2.1.4′ для функції *v (t)* будемо мати

$$E(u,\,P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} \le E(v,\,T^H_{n-1})_{L_2(H)} \le \frac{1}{4n^{r-1}}\int_0^{\pi/n} \omega\,(v^{(r)};t)\,dt\,.$$

Доведемо точність цієї нерівності. Для функції $u(z) = a \cdot z^n$ та $v(t) = e^{int} \cdot a$ маємо

$$E^2(u, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} = E^2(a \cdot z^n, P_n)_{\mathscr{H}^2(H)} = \| a \|_H^2 \text{ (згідно теоремі 2.1.2).}$$

Для значень $t \in [0; \pi / n]$

$$\omega^2(v^{(r)};t) = \omega^2(a \cdot (in)^r e^{\mathrm{int}};t) = \| a\,(in)^r (e^{\mathrm{int}/2} - e^{-\mathrm{int}/2}) \|_H^2 =$$

$$= 4 \, \| a\,(in)^r \cdot \sin(nt/2) \|_H^2 = 4\, \| a \|_H^2 \, |(in)^r| \sin^2(nt/2),$$

$$\frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega\,(v^{(r)};t)\,dt = \frac{1}{4n^{r-1}} 2\| a \|_H \, n^{2r} \int_0^{\pi/n} \sin\frac{nt}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4n^{r-1}} \, 2\| a \|_H \, n^r \, \frac{2}{n} = \| a \|_H \, .$$

Наслідок доведено.

Далі розглянемо інтегральну оцінку найкращого наближення функції через модуль неперервності похідної цієї функції. Насамперед отримаємо наступну нерівність.

Твердження 2.1.1. *Для довільної 2π – періодичної функції f та для всіх натуральних n вірна нерівність*

$$E_n(f) \le \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f',t)dt \, .$$

Доведення. Покладемо для функції $F = f - S_{n-1}(f)$

$$A(F,t) = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/2n} [f(t+s) + f(t-s)] \cos ns\, ds$$

(оператор введений Тайковим Л.В.).

Маємо

$$F(t) - A(F,t) = -\frac{n}{2} \int_0^{\pi/2n} [F(t+s) - 2F(t) + F(t-s)] \cos ns\, ds =$$

(застосуємо інтегрування частинами)

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2n}\left[F'(t+s)+F'(t-s)\right](1-\sin ns)\,ds.$$

Тоді

$$\| F-A(F,t)\| \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2n}\| F'(t+s)-F'(t-s)\|(1-\sin ns)\,ds.$$

До оператор *A(F, t)* також застосуємо метод інтегрування частинами і представимо його у вигляді

$$A(F,t)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2n}[F'(t+s)-F'(t-s)]\sin ns\,ds,$$

а отже

$$\| \mathrm{A(F, t)} \| \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2n}\| F'(t+s)-F'(t-s)\|\sin ns\,ds.$$

З отриманих оцінок виводимо

$$E_n(f)\le \| F \| \le \|F-A(F)\| + \|A(F)\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2n}\| F'(t+s)-F'(t-s)\|ds =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/n}\left\| F'\left(t+\frac{s}{2}\right)-F'\left(t-\frac{s}{2}\right)\right\|ds \le \frac{1}{4}\int_0^{\pi/n}\omega(f',s)\,ds.$$

Твердження 2.1.1 доведено.

[62] Нехай H_1 та H_2 – гільбертові простори, A – компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, A* - спряжений оператор. Оператор A*A: $H_1 \to H_1$ є додатним, компактним і самоспряженим. Зважаючи на теорему Гільберта-Шмідта в H_1 існує ортонормована система $\{\varphi_n\}$ власних векторів цього оператора, що відповідають власним значенням $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n \ne 0)$, така що кожен елемент $\xi \in H_1$ має єдине представлення:

$$\xi=\xi'+\sum_k c_k\varphi_k, \quad \xi'\in Ker A^*A,$$

при цьому

$$A^*A\xi=\sum_k \lambda_k c_k\varphi_k,$$

і, якщо система $\{\varphi_n\}$ нескінчена, то $\lambda_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

Оскільки оператор A*A додатний, його ненульові власні значення додатні. Покладемо $s_n = \sqrt{\lambda_n}$. Оскільки Ker A*A = Ker A, то з представлення елементу ξ отримаємо

$$A\xi = \sum_k c_k A\varphi_k = \sum_k s_k c_k \frac{1}{s_k} A\varphi_k = \sum_k s_k c_k \psi_k \ ,$$

де позначено $\psi_k = \frac{1}{s_k} A\varphi_k$. Неважко перевірити, що $\{\psi_n\}$- ортонормована система у просторі H_2. Таким чином, якщо A – компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, то в H_1 і H_2 існують ортонормовані системи $\{\varphi_n\}$ і $\{\psi_n\}$ такі, що $A\varphi_n = s_n\psi_n$, довільний елемент $\xi \in H_1$ записується єдиним чином у вигляді:

$$\xi = \xi' + \sum_k (\xi, \varphi_k)\varphi_k \ , \qquad \xi' \in KerA,$$

і при цьому

$$A\xi = \sum_k s_k (\xi, \varphi_k)\psi_k \ .$$

У випадку $H_1 = H_2$, числа будемо називати s-числами оператора *A*, а представлення – канонічним представленням цього оператора [62].

Розглянемо послідовність операторів Q_k, $k \in \mathbb{Z}$, в якій $Q_0 = I$ й Q_k ($k \neq 0$) – компактні оператори, що діють у гільбертовому просторі H.

Функції $f(x) \in L_2\ (H)$ з рядом Фур’є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

поставимо у відповідність нову функцію

$$f_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k (c_k) e^{ikt} \ .$$

Для кожного $k \neq 0$ запишемо канонічне зображення оператора Q_k:

$$Q_k x = \sum_j s_{kj} (x, \varphi_{kj}) \psi_{kj} \ ,$$

де λ_{kj} власні числа оператора $Q_k^*Q_k$, φ_{kj} – відповідні власні елементи, $s_{kj} = \sqrt{\lambda_{kj}}$ – s-числа оператора Q_k і $\psi_{kj} = \frac{1}{s_{kj}} A\varphi_{kj}$.

Зауважимо, що для довільного $k \neq 0$

$$\|Q_k\| = s_{k1} .$$

Дійсно,

$$\|Q_k c_k\|^2 = \sum_j s_{kj}^2 \, |(c_k, \varphi_{kj})|^2 \le s_{k1}^2 \sum_j |(c_k, \varphi_{kj})|^2 \le s_{k1}^2 \| c_k \|^2 .$$

Для елементу $x = \varphi_{k1}$ маємо

$$\| Q_k x \| = s_{k1} \| \varphi_{k1} \| = s_{k1} ,$$

отже

$$\| Q_k \| = s_{k1} .$$

Для найкращого наближення функції f_Q будемо мати оцінку

$$E_n^2(f_Q) = \sum_{|k| \ge n} \| Q_k c_k \|^2 \le \sum_{|k| \ge n} \| Q_k \|^2 \cdot \| c_k \|^2 = \sum_{|k| \ge n} s_{k1}^2 \| c_k \|^2 .$$

Припустимо, що оператори Q_k такі, що послідовність $\{\| Q_k \|\}$ не зростає з ростом $|k|$. Тоді

$$E_n^2(f_Q) \le s_{n1}^2 \; E_n^2(f).$$

Поставимо у відповідність функції f функцію

$$f_Q^{(-1)}(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} Q_k(c_k) \, e^{ikt} .$$

Тоді для неї маємо

$$E_n^2(f_Q^{(-1)}) \le \| Q_n \|^2 E_n^2(f^{(-1)}) .$$

Застосовуючи твердження 2.1.1 для функції $f_Q^{(-1)}(t)$ отримаємо

$$E_n(f_Q^{(-1)}) \le \frac{1}{4} \| Q_n \| \int_0^{\pi/n} \omega(f, t) dt = \frac{1}{4} s_{n,1} \int_0^{\pi/n} \omega(f, t) dt .$$

Нехай $f(t) = \varphi_{n1}\, e^{int}$. Покажемо, що для цієї функції попередня нерівність перетворюється на рівність. Так, зліва маємо

$$E_n\,(\,f_Q^{(-1)}) \;=\; \|\,\tfrac{1}{in}\,Q_n(\varphi_{n1})\,\| \;=\; \frac{s_{n1}}{n}\,.$$

У правій частині

$$\omega(f,t) = |\,e^{in\frac{t}{2}} - e^{-in\frac{t}{2}}\,| = \;2\sin\frac{nt}{2}$$

і

$$\frac{1}{4}s_{n,1}\int_0^{\pi/n}\omega(f,t)dt = \frac{1}{4}s_{n,1}\int_0^{\pi/n}2\sin\frac{nt}{2}dt = \frac{1}{4}s_{n,1}\frac{4}{n} \;=\; \frac{s_{n,1}}{n}\;.$$

Отже, отримали однакові значення.

Тим самим доведена наступна теорема.

Теорема 2.1.5. *Для довільної функції f та відповідної їй функції* $f_Q^{(-1)}(t)$ $= \sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{1}{ik}\,Q_k(c_k)\,e^{ikt}$ *має місце точна нерівність*

$$E_n\,(\,f_Q^{(-1)}) \;\le\; \frac{1}{4}s_{n,1}\int_0^{\pi/n}\omega(f,t)dt\,,$$

рівність в якій досягається на функціях $f(t) = \varphi_{n1}\, e^{int}$.

2.2. Нерівності типу Джексона для функцій однієї змінної, що містять модулі неперервності.

Теорема 2.2.1. *Для довільної 2π – періодичної функції f зі значеннями у дійсному або комплексному гільбертовому просторі, що відмінна від сталої величини (з точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n вірні нерівності*

$$\mathrm{E}\,(\,f,\;\mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \;<\; \frac{1}{\sqrt{2}}\;\omega(f,\;\frac{\pi}{n})_{2,\mathrm{H}}\,, \qquad (2.6)$$

і при кожному n константа $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ у правій частині зменшена бути не може.

Доведення. Якщо функція $f(x)$ не є сталою величиною , то

$$\omega(f;\frac{\pi}{n})_{2,\mathrm{H}} > 0$$

і

$$\int_0^{\pi/n}\omega^2(f;t)_{2,H}\sin nt\,dt \;<\; \omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\int_0^{\pi/n}\sin nt\,dt \;=\; \frac{2}{n}\,\omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\;,$$

але тоді

$$\mathrm{E}\,(f,\mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \;<\; \frac{1}{2}\left\{n\frac{2}{n}\omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\right\}^{1/2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\omega(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\;.$$

Доведемо, що оцінка (2.6) не покращується. Знову наші міркування будуть близькими до доведення точності нерівності (1.1) для дійснозначних функцій.

Зафіксуємо n та задамо δ ($0 < \delta < \frac{\pi}{n}$). Побудуємо парну $\frac{2\pi}{n}$-періодичну неперервну на всій осі функцію $g_n(\delta;t)$, покладаючи

$$g_n(\delta;t) = \begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{2\delta}\right), & 0 \le t \le 2\delta;\\ 0, & 2\delta \le t \le \pi/n.\end{cases}$$

Ця функція $g_n(\delta;t)$ розкладається в ряд Фур'є :

$$g_n(\delta;t) = \frac{\delta}{\pi} + \frac{2}{\pi\delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\nu\nu}{n\nu}\right)^2\cos n\nu t\,,$$

причому $g_n(\delta;0) = 1$ і $g_n(\delta;t) \ge 0$ для $0 \le t \le \frac{\pi}{n}$. Покладемо

$$F_n(t) = F_n(\delta;t) = h_0\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin n\nu\nu}{n\nu}\cos n\nu t\,,$$

де h_0 – деякий ненульовий елемент гільбертового простору H. Тоді

$$\|F_n(\cdot+u)-F_n(\cdot)\|^2_{2,\mathrm{H}} = 2\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\|h_0\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\frac{\sin n\nu\nu}{n\nu}\right\|^2(1-\cos n\nu u) =$$

$$= 2\pi \frac{2}{\pi\delta} \ || h_0 ||^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \right)^2 (1-\cos n\nu u) = 2\pi \, [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; u)] \, || h_0 ||^2 .$$

Оскільки $g_n(\delta; t)$ (як функція від t) не зростає на $[0; \frac{\pi}{n}]$, то ураховуючи рівність Парсеваля, будемо мати

$$\omega^2(F_n; \frac{\pi}{n})_{2,\mathrm{H}} = 2\pi \, || h_0 ||^2 \ [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; \frac{\pi}{n})] = 2\pi \, || h_0 ||^2$$

і

$$\mathrm{E}^2(F_n, \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| h_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \right\|^2 =$$

$$= \pi \ || h_0 ||^2 [g_n(\delta; 0) - \frac{\delta}{\pi}] = || h_0 ||^2 [\pi - \delta].$$

Тобто,

$$\omega^2(F_n; \frac{\pi}{n})_{2,\mathrm{H}} = 2\,\mathrm{E}^2(F_n, \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \frac{\pi}{\pi - \delta} .$$

Так як δ може бути наскільки завгодно близьким до нуля, точність оцінки (2.6) доведена.

Теорема 2.2.1 доведена.

Теорема 2.2.2. *Для довільної функції* $f(x) \in L_2([0; 2\pi), H)$, *що відмінна від тотожної сталої, та для будь-яких натуральних чисел* m *і* n *виконується нерівність*

$$E(f, T^H_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} < (C^m_{2m})^{-1/2} \, \omega_m(\frac{2\pi}{n}; f)_{2,\mathrm{H}} . \tag{2.7}$$

При $n > m$ *константу* $(C^m_{2m})^{-1/2}$ *у правій частині даної нерівності занінити меншою неможливо.*

Доведення. Оцінка (2.7) безпосередньо випливає з нерівності (2.2), оскільки при $t \leq \frac{2\pi}{n}$

$$\omega_m\,(t; f\,)_{2,\mathrm{H}} \;\le\; \omega_m\,(\frac{2\pi}{n}; f\,)_{2,\mathrm{H}}\;.$$

Тоді за теоремою 2.1.3

$$\mathrm{E}\,(f,\, \boldsymbol{T}^{H}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \;\le\; \frac{1}{2}\sqrt{n(C^m_{2m})^{-1}}\left\{\int_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f;t)_{2,H}\,\varphi_n(t)dt\right\}^{1/2} \le$$

$$\le\; \frac{1}{2}\sqrt{n(C^m_{2m})^{-1}}\;\;\omega_\mathrm{m}\,(f;\,\frac{2\pi}{n})_{2,\mathrm{H}}\sqrt{\frac{4}{n}} \;=\; (C^m_{2m})^{-1/2}\;\omega_\mathrm{m}\,(f;\,\frac{2\pi}{n})_{2,\mathrm{H}}\;.$$

Тобто

$$\mathrm{E}\,(f,\, \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2\mathrm{n}-1})_{2,\mathrm{H}} \;\le\; (\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1/2}\;\omega_\mathrm{m}\,(f;\,\frac{2\pi}{\mathrm{n}})_{2,\mathrm{H}}\;.$$

Доведемо тепер, що для будь-яких фіксованих чисел m і $n > m$ та для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує функція

$$f\,(x;\,\varepsilon) \in \mathrm{L}_2\,([0;\,2\pi),\;\mathrm{H})$$

така, що

$$\frac{E(f(x;\varepsilon),T^H_{2n-1})_{2,H}}{\omega_m\left(\dfrac{2\pi}{n};\,f(x;\varepsilon)\right)_{2,H}} \;>\; (\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1/2} \;-\; \varepsilon \qquad (2.8)$$

За основу візьмемо парну $(\frac{2\pi}{N})$-періодичну функцію $\Phi_\varepsilon(t)$ – функцію, що ввів М.І. Черних (див. [139, стр.520])

$$\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon - t}{\varepsilon}, & t \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & t \in [\varepsilon, \pi/N], \end{cases}$$

де $N = [(n-1)/m] \ge 1$ та $\varepsilon \in (\,0,\;\frac{2\pi \mathrm{m}}{\mathrm{n}}(\mathrm{n}-1))$, $(\varepsilon < \frac{\pi}{\mathrm{N}})$.

Ця дійснозначна функція розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon\,(t) = \frac{\varepsilon N}{2\pi} \;+\; \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2\cos(Nts) \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

де

$$\mathrm{A}_\mathrm{s}^2 \;=\; \mathrm{A}_\mathrm{s}^2(\varepsilon) \;=\; \frac{4}{\pi N s^2}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\sin^2\frac{sN\varepsilon}{2}\;.$$

Покладемо

$$f\,(t,\,\varepsilon)\;=\;h^{*}\,\sum_{s=1}^{\infty}A_{s}\cos(Nts)$$

(h^{*} – елемент простору H).

Оскільки $sN \le n-1$ тільки коли $s \le [\,(n-1)/N] = Q\,(n, N)$, то будемо мати

$$E^{2}\,(f(x;\,\varepsilon),\,\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}_{2\mathrm{n}-1})_{2,\mathrm{H}} = \sum_{s=Q(n,N)+1}^{\infty}\| h^{*}A_{s}\|^{2} = \| h^{*}\|^{2}\;\left[\Phi_{\varepsilon}\,(0)\;-\;\frac{\varepsilon\mathrm{N}}{2\pi}\;-\;\sum_{s=1}^{Q(n,N)}A_{s}^{2}\;\right].$$

Далі

$$\|\,\Delta_{t}^{(m)}\,f(x,\,\varepsilon)\,\|_{2,H}^{2}\;=\;\sum_{s=1}^{\infty}A_{s}^{2}\,\|\,h^{*}\,\|^{2}\left\{C_{2m}^{m}-2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C_{2m}^{m-j}\cos(jsNt)\right\}\;=$$

$$=\;2\;\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C_{2m}^{m-j}\{\Phi_{\varepsilon}(0)-\Phi_{\varepsilon}(jt)\}\;\|\,h^{*}\,\|^{2}\,.$$

Звідси та з властивостей функції $\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}\,(t)$ (див. [139, стр.521]) отримаємо

$$\frac{E^{2}(\,f\,(x;\varepsilon),T^{H}_{2n-1})_{2,H}}{\omega_{m}^{2}(\dfrac{2\pi}{n};\,f\,(x,\varepsilon))_{2,H}}\;=\;(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1}\;\frac{\|\,h^{*}\,\|^{2}\left[\dfrac{\Phi_{\varepsilon}(0)}{h^{*}}-\dfrac{\varepsilon N}{2\pi}-\displaystyle\sum_{s=1}^{Q(n,N)}A_{s}^{2}\right]}{h^{*}\,\dfrac{\|\,h^{*}\,\|^{2}}{h^{*}}}\;=$$

$$=\;(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1}\;\left[\Phi_{\varepsilon}(0)-\frac{\varepsilon N}{2\pi}-\sum_{s=1}^{Q(n,N)}A_{s}^{2}(\varepsilon)\right]=$$

$$=(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1}\left\{1-\frac{\varepsilon N}{2\pi}-\sum_{s=1}^{Q(n,N)}A_{s}^{2}(\varepsilon)\right\}\;\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\;(\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_{2\mathrm{m}})^{-1},$$

що доводить точність оцінки (2.7).

Тоді маємо, що і константу $\dfrac{1}{2}\sqrt{n(C_{2m}^{m})^{-1}}$ в теоремі 2.1.3 зменшити неможливо, так як у протилежному випадку константа $(C_{2m}^{m})^{-1}$ в оцінці (2.7) була б теж неточною.

2.3. Наближення класів функцій і слабкі поперечники Колмогорова

Позначимо через $H^{1/2}_{2,H}$ клас 2π – періодичних функцій *f*, інтегровних за Бохнером на $[0; 2\pi)$ та для яких $\omega(f; t)_{2,\mathrm{H}} \le \sqrt{t}$. Із оцінки (2.1) отримаємо, що для довільної функції *f* із $H^{1/2}_{2,H}$

$$\mathrm{E}\,(f, \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} t \sin nt \, dt = \frac{\pi}{4n}.$$

Отже,

$$\mathrm{E}(H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1})_{2,\mathrm{H}} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}. \tag{2.9}$$

Насправді в (2.9) має місце рівність, що буде випливати із наступної теореми.

Нехай G – деякий підпростір простору L_2 ([0; 2π], H). Будемо говорити, що елементи деякої сукупності $\{g_k\} \subset L_2$ ([0; 2π), H) є слабо лінійно залежними, якщо для довільного ненульового функціонала $F \in \mathrm{H}^* = \mathrm{H}$ числові функції $< F, g_k >$ є лінійно залежними. У противному випадку елементи $\{g_k\}$ назвемо слабо лінійно незалежними. Будемо вважати, що підпростір G має слабку вимірність *n* (і записувати $\mathrm{w} - \dim \mathrm{G} = n$), якщо:

1) знайдуться *n* елементів із G, які слабо лінійно незалежні;

2) довільні $(n + 1)$ елементи із G слабо лінійно залежні (див. [19]).

Зауважимо, що $\mathrm{w} - \dim \mathrm{T}^{\mathrm{H}}_{2n-1} = 2n - 1$.

Означення 2.3.1. Величину

$$d^{w}_{2n-1}\,(H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, L_2([0; 2\pi], \mathrm{H})) = \inf_{w-\dim G \le 2n-1} \mathrm{E}_n(H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}, \mathrm{G})_{2,\mathrm{H}}$$

назвемо слабким $(2n–1)$-поперечником за Колмогоровим класу $H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}$ у просторі L_2 ([0;2π] , H).

Поняття слабкого поперечника введено В.Ф. Бабенко й С.О. Пічуговим у роботі [19] (див. також [37]).

Теорема 2.3.1. *Для довільного n = 1, 2, ...*

$$d^{w}_{2n-1}\,(H^{1/2}_{2,H},\ L_2\,([0;\,2\pi],\,H)) = E\,(H^{1/2}_{2,H},\ T^{H}_{2n-1})_{2,H} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,.$$

Доведення. Нерівність

$$d^{w}_{2n-1}\,(H^{1/2}_{2,H},\ L_2\,([0;\,2\pi],\,H)) \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

випливає з (2.9). Доведемо нерівність протилежного змісту.

При доведенні співвідношення (1.5) Ю.І.Григоряном [65] встановлено наступне. Розглянемо $2n$ – вимірний лінійний многовид $S_{2n,0}$, що складається із функцій вигляду

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \psi_k(t),$$

де

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & ((k-1)\pi)/n \le t < k\pi/n), \\ 0, & (0 \le t < (k-1)\pi)/n \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Куля

$$U\rho = \{g \in S_{2n,0}:\ \|\,g\,\|_2 \le \rho\},\ \ \rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,,$$

має наступні дві властивості:

1) $\forall g \in U_\rho \ \ g \in H^{1/2}_2$;

2) для довільного ($2n$-1) – вимірного підпростору $M_{2n-1} \subset L_2$ у кулі $U\rho$ знайдеться функція $g \in S_{2n,0}$, для якої

$$E\,(U_\rho,\ M_{2n-1})^2_2 \ge \rho^2\,. \qquad (2.10)$$

Розглянемо підпростір W_{2n-1} в L_2 ([0; 2π], H) такий, що w – dim $W_{2n-1} \le$ *2n–1*, і довільний функцірнал $F \in H$, $\|\,F\,\| = 1$. Функціонал F породжує підпростір $\langle F,\ W_{2n-1}\rangle = \{\ \langle F,\ h\rangle : h \in W_{2n-1}\} \subset L_2$ ([0;2π], **R**), вимірність якого не перевищує (*2n–1*). Розглянемо також клас $F\cdot U\rho = \{g(t)F : g(t) \in U\rho\}$. Як неважко перевірити, $F\cdot U\rho \subset H^{1/2}_{2,H}$, і, тоді,

$$E(H^{1/2}_{2,H}, W_{2n-1})_{2,H} \geq E(F\cdot U\rho, W_{2n-1})_{2,H} . \qquad (2.11)$$

Переконаємося в тому, що

$$E(F\cdot U\rho, W_{2n-1})_{2,H} \geq E(<F,F\cdot U\rho>, <F,W_{2n-1}>)_2 = E(U\rho, <F,W_{2n-1}>)_2 . \quad (2.12)$$

Дійсно,

$$E(F\cdot U\rho, W_{2n-1})_{2,H} = \sup_{f\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} \|f(t)-h(t)\|^2_{2,H} dt \right)^{1/2} \geq$$

$$\geq \sup_{f\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} (F,f(t)-h(t))^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{f\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} |(F,f(t))-(F,h(t))|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{g\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} |g(t)-(F,h(t))|^2 dt \right)^{1/2} = E(U\rho, <F,W_{2n-1}>)_2.$$

Таким чином, із включення $F\cdot U\rho \subset H^{1/2}_{2,H}$ та нерівностей (2.10), (2.12) випливає, що

$$d^w_{2n-1}(H^{1/2}_{2,H}, L_2([0; 2\pi], H)) \geq \rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} .$$

У порівнянні із (2.9) отримуємо

$$d^w_{2n-1}(H^{1/2}_{2,H}, L_2([0; 2\pi], H)) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Теорема 2.3.1 доведена.

Далі знайдемо наближення та поперечник класу функцій зі значеннями гільбертовому просторі, що задовольняють умову $\int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t)dt \leq 1$.

Слабким ($2n$–1)-поперечником за Колмогоровим класу $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$ у просторі L_2 ([0;2π) , H) є величина

$$d_{2n-1}^{w}\ (W_{2,H}^{\Lambda,M,n},\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \inf_{w-\dim G\le 2n-1} E_n(W_{2,H}^{\Lambda,M,n},\ G)_{2,H}\ .$$

Теорема 2.3.2. *Для будь-якого* $n = 1, 2, \ldots$

$$d_{2n-1}^{w}\ (W_{2,H}^{\Lambda,M,n},\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|}. \qquad (2.13)$$

Доведення. Із теореми 2.1.4 безпосередньо випливає, що

$$d_{2n-1}^{w}\ (W_{2,H}^{\Lambda,M,n},\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) \le \frac{n}{4|\lambda_n|}. \qquad (2.14)$$

При оцінці знизу будемо використовувати метод, заснований на теоремі про поперечник кулі [128], [134]. Точніше, будемо використовувати узагальнення цієї теореми на випадок слабких поперечників, запропоноване в [37]. Розглянемо довільний узагальнений поліном

$$T_n^{(\Lambda,M)}\ (t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k a_k \cos kt + \mu_k b_k \sin kt), \qquad (a_k,\ b_k \in H)$$

заданого порядку n і оцінимо $\omega(T_n^{(\Lambda,M)},\ x)$ для $0 \le x \le \frac{\pi}{n}$.

Маємо

$$\|\ T_n^{(\Lambda,M)}\ (t + x) - T_n^{(\Lambda,M)}\ (t)\ \|_{2,H}^{2} \le$$

$$\pi \sum_{k=1}^{n}(\| a_k \|^2 + \| b_k \|^2)\, |\lambda_k|^2\ 2(1-\cos kx) \le 4\ |\lambda_n|^2\ \sin^2\frac{nx}{2}\ \|\ T_n\ \|_{2,H}^{2}\ .$$

Отже,

$$\omega(T_n^{(\Lambda,M)},\ x) \le\ 2\ |\lambda_n|\ \sin\frac{nx}{2}\ \|\ T_n\ \|_{2,H}$$

і

$$\int_0^{\pi/n} \omega(T_n^{(\Lambda,M)}, x)dx\ \le\ \frac{4|\lambda_n|}{n}\ \|\ T_n\ \|_{2,H}\ . \qquad (2.15)$$

Далі розглянемо кулю слабкої вимірності $2n+1$ у просторі L_2 ([0; 2π), H)

$$S_{2n+1}^{H} = \left\{ T_n(x) \in T_{2n-1}^{H} : \| T_n \|_{2,H} \le \frac{n}{4|\lambda_n|} \right\}.$$

В силу (2.15) ясно, що $S^{H}_{2n+1} \subset W^{\Lambda,M,n}_{2,H}$, і тоді за теоремою про слабкий поперечник кулі (див. [36])

$$d^{w}_{2n-1}\ (W^{\Lambda,M,n}_{2,H},\ L_2\ ([0;\ 2\pi],\ H)) \ge\ d^{w}_{2n-1}\ (S_{2n+1},\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \frac{n}{4\,|\,\lambda_n\,|}$$

у поєднанні з (2.14) дістаємо

$$d^{w}_{2n-1}\ (W^{\Lambda,M,n}_{2,H},\ L_2\ ([0;\ 2\pi),\ H)) = \frac{n}{4\,|\,\lambda_n\,|} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема 2.3.2 доведена.

Теорема 2.3.2′. *Якщо* $W^{n,r}_{2,H} = \left\{ f(t) : \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t)dt \le 1 \right\}$, *то для довільного* n = 1, 2, ...

$$d^{w}_{2n-1}\ (W^{n,r}_{2,H},\ L_2\ ([0;\ 2\pi],\ H)) = \frac{1}{4n^{r-1}}\ .$$

2.4 Нерівності типу Джексона для функцій багатьох змінних

Нижче викладено узагальнення на випадок вектор-функцій зі значеннями у гільбертовому просторі точних нерівностей типу Джексона, отриманих М.І.Черних [140] і В.А.Юдіним [144] у просторі $L_2(T^m)$. Встановлено, що константа у цьому випадку залишається такою ж.

Нехай $T^m = [0;\ 2\pi)^m$ – m-вимірний тор, $d\nu = (2\pi)^{-m}\, dx$; для $x \in T^m$, $\mu \in \mathbb{Z}^m$

$$\mu\, x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i\ , \quad |\,x\,| = \left(\sum_{i=1}^{m} |\,x_i\,|^2 \right)^{1/2} \quad ;$$

$X^m = (R^m, \|\cdot\|)$ - m-вимірний дійсний простір з нормой $\|\cdot\|$, зокрема,

$$l_p^m = \left\{ x \in R^m \mid \|\,x\,\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |\,x_i\,|^p \right)^{1/p}, 1 \le p < \infty,\ \|\,x\,\|_\infty = \max|\,x_i\,|,\ p = \infty \right\} \quad (\,|\,x\,| = \|\,x\,\|_2);$$

$\{e^{i\mu x}\}_{\mu \in Z^m}$ – кратна тригонометрична система (система характерів T^m).

Позначимо $L^{k}_{2}\ (T^m)$ – простір комплексних вектор-функцій

$$f : \mathrm{T}^m \to \mathrm{C}^k \quad \left(\| f \|_{L_2^k} = \| f \|_2 = \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} | f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2} \right).$$

Для функцій з цього простору визначимо величину

$$E_R\,(f,\ T^m)_2 = \inf_{c_\mu \in C^k,\, c_\mu = \overline{c_{-\mu}}} \| f(x) - \sum_{|\mu|<R} c_\mu e^{i\mu x} \|_2 ,$$

яка називається найкращим наближенням вектор-функції в L_2^k (T^m) сферичними тригонометричними многочленами степеня, меншого за R;

$$\omega\,(\delta, f, \mathrm{T}^m, \mathrm{X}^m)_2 = \sup_{|t|\le\delta} \| \Delta_t f \|_2 \ \ -$$

її модуль неперервності в L_2^k (T^m), що відповідає нормі простору X^m.

Нерівності типу Джексона у $L_2^k(T^m)$ з точною константою були доведені М.І.Черних [140] при $m = 1$ та В.А.Юдіним [144] при $m \ge 2$ і мають вигляд:

$$\mathrm{E}_R\,(f\,, \mathrm{T}^m)_2 \ \le \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega\,(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}\,, f\,, \mathrm{T}^m\,, \mathrm{X}^m\,)_2.$$

Нехай H – комплексний сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. У множині інтегрованих за Бохнером функцій [див.85] $f : \mathrm{T}^m \to \mathrm{H}$ визначимо скалярний добуток

$$(\mathrm{f}, \mathrm{g}) \ = \ \int_R (f(x), g(x)) dx$$

та норму

$$\| \mathrm{f} \|_{2,H}^2 \ := (B) \int_R (f(x), f(x)) dx = \int_{\mathrm{R}} \| f(x) \|^2 \, dx\,.$$

Будемо розглядати простір L_2^H (T^m) – простір вектор-функцій зі значеннями у просторі H. Для функції $f \in L_2^H$ (T^m)

$$f \sim \sum_{\mu \in Z^m} \hat{f}_\mu e^{i\mu x} ,$$

$$\hat{f}_\mu \ = \ \int_{T^m} f(x) e^{-i\mu x} d\nu \quad \in \mathrm{H}, \qquad (f_\mu = \overline{f_{-\mu}} \ ) \ -$$

її розклад у ряд Фур'є,

$$\mathrm{E}_R\,(f,\ \mathrm{T}^m)_{2,\mathrm{H}} = \inf_{c_\mu \in H,\, c_\mu = \overline{c_{-\mu}}} \| f(x) - \sum_{|\mu|<R} c_\mu e^{i\mu x} \|_{2,\mathrm{H}} \ \ -$$

найкраще наближення в L_2^H (T^m) сферичними тригонометричними вектор-поліномами порядку меншого *R*,

$$\omega(\delta, f, T^m, X^m)_{2,H} = \sup_{\|t\|\le\delta} \| \Delta_t f \|_{2,H} \quad –$$

її модуль неперервності в L_2^H (T^m).

Нехай $B^m = \{x \in X^m : \| x \| \le 1\}$ – одинична куля в X^m, Γ^m – її границя. У подальшому будемо вважати границю кусково-гладкой.

Розглянемо задачу на власні значення

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\Gamma^m} = 0, \quad \Delta u \in L_2(B^m),$$

де

$$\Delta = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad –$$

оператор Лапласа. Відомо (див.[101, с.312]), що оператор Лапласа має зліченну множину точок спектра $\{\lambda_k(B^m)\}$, $\lambda_k(B^m) > 0$ та зліченну множину власних функцій скінченої кратності. Візьмемо першу власну функцію $u_1(x)$, що відповідає першому власному значенню λ_1, і покладемо

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in B^m, \\ 0, & x \notin B^m. \end{cases}$$

Відомо також ([85,с.382,388]), що

$$\varphi(x) > 0, \quad x \in B^m, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma^m} \le 0, \tag{2.16}$$

де $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ - похідна φ по зовнішній нормалі до Γ^m.

Знайдемо перетворення Фур"є функції $\varphi(x)$. Оскільки

$$\hat{\varphi}(s) = \int_{R^m} \varphi(x) e^{-isx} dx = -\lambda_1^{-1} \int_{B^m} \Delta\varphi(x) e^{-isx} dx,$$

то за другою формулою Гріна:

$$(|s|^2 - \lambda_1)\ \hat{\varphi}(s) = -\int_{\Gamma^m}\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{-isx}\right)\varphi(x)dx + \int_{\Gamma^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)e^{-isx}dx\ .$$

Зважаючи на крайову умову $\varphi\ (x)\ |_{\Gamma^m} = 0$, перший доданок дорівнює нулю, тому

$$\hat{\varphi}(s) = -\ (\lambda_1 - |s|^2)^{-1}\int_{\Gamma^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)e^{-isx}dx.$$

Введемо функцію

$$\psi(x) = -\int_{\Gamma^m}\varphi(x-u)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(u)du\,. \tag{2.17}$$

Її перетворення Фур'є має вигляд

$$\hat{\psi}(s) = -\ \hat{\varphi}(s)\int_{\Gamma^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(u)e^{-isu}du = (\lambda_1 - |s|^2)^{-1}\left(\int_{\Gamma^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(u)e^{-isu}du\right)^2. \tag{2.18}$$

Покладемо

$$\Phi_R\,(x) = \psi(\,R\lambda_1^{-1/2}x).$$

Так як

$$\hat{\Phi}_R\,(s) = \lambda_1^{m/2}R^{-m}\ \hat{\psi}(\lambda_1^{-1/2}R^{-1}s),$$

то

$$\hat{\Phi}_R\,(s) = \lambda_1^{(m-2)/2}R^{2-m}\,(R^2 - |s|^2)^{-1}\left(\int_{\Gamma^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)e^{-i\lambda_1^{1/2}R^{-1}sx}dx\right)^2. \tag{2.19}$$

Розглянемо періодизацію $\Phi_R\,(x)$, тобто функцію

$$\Psi_R\,(x) = \sum_{k\in Z^m}\Phi_R(x+2\pi k)\,. \tag{2.20}$$

Їй, з огляду на (2.16)-(2.19), притаманні наступні важливі властивості:

1) $supp\ \Psi_R\,(x) \subset 2\lambda_1^{1/2}R^{-1}\,B^m$,

2) $\Psi_R\,(x) \geq 0$,

3) $\hat{\Psi}_R\,(\mu) \leq 0,\ |\mu| \geq R,\ \mu \in Z^m$,

де $supp\ \Psi_R\,(x)$ – носій функції $\Psi_R\,(x)$,

$$\lambda B^m = \{x \in R^m \ : \ \frac{x}{\lambda} \in B^m\} -$$

гомотет кулі B^m з коефіцієнтом $\lambda > 0$.

Третя властивість випливає з рівностей

$$\hat{\Psi}_R(\mu) = \int_{T^m} \Psi_R(x) e^{-i\mu x} d\nu = \int_{T^m} \sum_{k\in Z^m} \Phi_R(x+2\pi k) e^{-i\mu x} d\nu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R^m} \Phi_R(x) e^{-i\mu x} dx = (2\pi)^{-m} \hat{\Phi}_R(\mu).$$

Якщо $f \in L_2^H(T^m)$, то проінтегруємо $\| \Delta_t f \|_{2,H}^2$ з ваговою функцією $\Psi_R(t)$ по T^m. З рівності Парсеваля і враховуючи властивості 2), 3),

$$\int_{T^m} \| \Delta_t f \|_{2,H}^2 \ \Psi_R(t)\, d\nu \geq 2 \int_{T^m} \left\{ \sum_{|\mu|\geq R} | f_\mu |^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\mu|\geq R} | f_\mu |^2 \left(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}\right) \right\} \Psi_R(t) d\nu =$$

$$= 2 \left\{ \hat{\Psi}_R(0) \sum_{|\mu|\geq R} | f_\mu |^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\mu|\geq R} \left(\hat{\Psi}_R(\mu) + \hat{\Psi}_R(-\mu)\right) | f_\mu |^2 \right\} \geq$$

$$\geq 2 \hat{\Psi}_R(0)\, E_R^2(f, T^m)_{2,H}.$$

З іншого боку, в силу властивості 1),

$$\int_{T^m} \| \Delta_t f \|_{2,H}^2 \ \Psi_R(t)\, d\nu \leq \hat{\Psi}_R(0)\, \omega^2 \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m\right)_{2,H}.$$

Тому має місце наступна теорема.

Теорема 2.4.1. *Для довільної вектор-функції $f \in L_2^H(T^m)$ мають місце точні нерівності*

$$E_R(f, T^m)_{2,H} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\hat{\Psi}_R(0)} \int_{T^m} \| \Delta_t f \|_{2,H}^2 \ \Psi_R(t) d\nu \right)^{1/2}, \qquad (2.21)$$

$$E_R(f, T^m)_{2,H} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\, \omega \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m\right)_{2,H}. \qquad (2.22)$$

Розглянемо частинні випадки (2.22). Нехай $X^m = l_2^m$, $B_2^m = \{x \in l_2^m : |x| \le 1\}$ – одинична евклідова куля, $\Gamma_2^m = \{x \in l_2^m : |x| = 1\}$ – її границя, $n = \frac{m}{2} - 1$, $J_n(t)$ – функція Бесселя першого роду порядку n, q_m – її перший додатній нуль,

$$\varphi_2(x) = \frac{J_n(q_m|x|)}{|x|^n}\chi_{B_2^m}(x), \quad G_n(t) = 2^n\,\Gamma(n+1)\frac{J_n(t)}{t^n}.$$

Відомо [101], що функція $\varphi_2(x)$ є першою власною функцією оператора Лапласа в кулі B_2^m, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = q_m^2$ ($q_1 = \frac{\pi}{2}$, $q_3 = \pi$, q_5 – перший додатній нуль функції $\operatorname{tg} t - t$, $q_m \sim \frac{m}{2}$ ($m \to \infty$)).

Оскільки

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2^m} = \text{const},$$

а [122, с.176]

$$\int_{\Gamma_2^m} e^{-ixu}du = (2\pi)^{n+1}\frac{J_n(|x|)}{|x|^n},$$

то в силу (2.18), (2.19) вагова функція $\Psi_{R,2}(x)$, що визначена рівністю (2.20), $\hat{\Psi}_{R,2}(0) = 1$ має вигляд

$$\Psi_{R,2}(x) = \sum_{\mu\in Z^m}\lambda_{m,2}\left(\frac{|\mu|}{R}\right)e^{i\mu x},$$

де для $|x| = t \in [0; 1]$

$$\lambda_{m,2}(t) = \frac{G_n^2(q_m t)}{1-t^2}.$$

Наслідок 2.4.1. *Для довільної вектор-функції* $f \in L_2^H(T^m)$ *вірна точна нерівність*

$$E_R\,(f\,,\,T^m)_{2,H}\ \le\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \omega\,(\frac{2q_m}{R}\,,f\,,T^m\,,\ l_2^m\,)_{2,H}\,.$$

Нехай $X^m = l_\infty^m$, $B_\infty^m = \{x \in l_\infty^m :\ \|x\|_\infty \le 1\}$, $\Gamma_\infty^m = \{x \in l_\infty^m : \|x\|_\infty = 1\}$,

$$\varphi_\infty\,(x) = \left(\prod_{i=1}^{m}\cos\frac{\pi}{2}x_i\right)\ \chi_{B_2^m}\,(x).$$

Функція $\varphi_\infty\,(x)$ є першою власною функцією оператора Лапласа в кулі B_∞^m, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m$.

Обчислення інтеграла

$$\int\limits_{\Gamma_\infty^m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(u)e^{-ixu}\,du\,,$$

показує, що вагова функція $\Psi_{R,\infty}\,(x)$, $\hat{\Psi}_{R,\infty}\,(0) = 1$ у цьому випадку має вид

$$\Psi_{R,\infty}\,(x) = \sum_{\mu\in Z^m}\lambda_{m,\infty}\left(\frac{\mu}{R}\right)e^{i\mu x}\,,$$

де

$$\lambda_{m,\infty}\,(\,x) = (1 - |\,x|^2)\ \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{m}x_i}{1-mx_i^2}\right)^2.$$

Наслідок 2.4.2. *Для довільної вектор-функції* $f \in L_2^H\ (T^m)$ *має місце точна нерівність*

$$E_R\,(f\,,\,T^m)_{2,H}\ \le\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \omega\,(\frac{\pi\sqrt{m}}{R}\,,f\,,T^m\,,\ l_\infty^m\,)_{2,H}\,.$$

Запишемо (2.22) коли $m = 1$.

Наслідок 2.4.2.′ *Для довільної вектор-функції* $f \in L_2^H\ (T)$ *має місце точна нерівність*

$$E_n\,(f\,,\,T)_{2,H}\ \le\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \omega\,(\frac{\pi}{n}\,,f\,,T)_{2,H}\,.$$

Тут $E_n(f,\ T)_{2,H}$ – величина найкращого наближення $f \in L_2^H(T)$ узагальненими тригонометричними поліномами порядку $n-1$.

Теорема 2.4.2. *Константа*

$$\tau_2(n) = min\left\{\tau > 0:\ D_2\left(\frac{\tau}{n}, n, T\right)_2 = \sup_{f\in L_2^H(T)} \frac{E_n(f,T)_2}{\omega\left(\frac{\tau}{n}, f, T\right)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \pi.$$

Доведення. Нехай $\tau < \pi$. Побудуємо функцію

$$F_\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(\tau)\cos kt, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(\tau) < \infty, \tag{2.23}$$

строго додатню на відрізку $[0, \tau]$. Виберемо $\varepsilon = \varepsilon(\tau) > 0$ так, що для

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$

виконується нерівність $\tau < \pi - 2\,\delta(\varepsilon)$, та визначимо функцію

$$g(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1-\dfrac{\pi A^2}{2}t, & 0 \le t \le 2\delta, \\ -\varepsilon^2, & 2\delta \le t \le \pi, \end{cases}$$

$$g(-t, \varepsilon) = g(t, \varepsilon), \quad g(t+2\pi, \varepsilon) = g(t, \varepsilon), \quad A = \frac{1+\varepsilon^2}{\pi\varepsilon}.$$

Її розклад має вид

$$g(t, \varepsilon) = 2A^2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\sin l\delta}{l}\right)^2\cos lt.$$

Далі покладемо

$$\psi_\tau(t) = g(t, \varepsilon) - g(\pi - t, \varepsilon) = 4A^2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2l+1)\delta}{2l+1}\right)^2\cos(2l+1)t =$$

$$= \begin{cases} 1+\varepsilon^2 - \dfrac{\pi A^2}{2} t, & 0 \le t \le 2\delta, \\ 0, & 2\delta \le t \le \pi - 2\delta, \\ -\left(1+\varepsilon^2 + \dfrac{\pi A^2}{2}(t-\pi)\right), & \tau < \pi - 2\delta \le t \le \pi, \end{cases} \tag{2.24}$$

оскільки для $0 \le t \le \tau$ $\psi_\tau(t) \ge 0$. Для отримання строгої нерівності, розглянемо ядро Пуассона

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r^k \cos kt = \frac{1-r^2}{2(1+2r\cos t + r^2)} \qquad (0 < r < 1).$$

Диференціюючи цю тотожність по r двічі, отримаємо

$$\varphi(t, r) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1) r^{k-2} \cos kt =$$

$$= \frac{2(2\cos^2 t + (r^3+3r)\cos t + 3r^2 - 1)}{(1+2r\cos t + r^2)^3}. \tag{2.25}$$

Оскільки φ (t, r) как функція t ортогональна 1 на $[0, \pi]$,

$$\varphi(0, r) = \frac{2}{(1+r)^3} > 0, \qquad \varphi(\pi, r) = \frac{2}{(1-r)^3} > 0,$$

чисельник (2.28) є квадратичною функцією cos t, тоді існує рівно дві точки $t_1 = t_1(\tau)$, $t_2 = t_2(\tau)$, $0 < t_1 < t_2 < \pi$, для яких

$$\varphi(t_1, r) = \varphi(t_2, r) = 0.$$

В цих точках

$$\cos t_i(r) = -\frac{r^3+3r}{4} + (-1)^r \frac{r-1}{4} \sqrt{r^4 + 2r^3 + 9r^2 + 16r + 8}$$

(i = 1, 2, $0 < r < 1$).

При $r \to 1$ $t_i(r) \to \pi$ (i = 1, 2). Виберемо $r = r(\tau) < 1$ так, щоб $r < t_i(\pi)$, и покладемо

$$F_\tau(t) = \psi_\tau(t) + \rho\, \varphi(t, r(\tau)), \quad \rho > 0.$$

Зважаючи на (2.24), (2.25), $F_\tau(t) > 0$ для $0 \le t \le \tau$ і

$$F_\tau(t) = 4A^2 \sin^2\delta\ \cos t + \sum_{l=1}^{\infty} 2\rho l(2l-1)r^{2l-2}\cos 2lt\ + \sum_{l=1}^{\infty} b_{2l+1}\cos(2l+1)t\ ,$$

де

$$b_{2l+1} = 4A^2\left(\frac{\sin(2l+1)\delta}{2l+1}\right)^2 - 2\ \rho l(2l+1)\ r^{2l-1}.$$

За рахунок вибору

$$0 < r = r(\tau) < 1, \quad 0 < \varepsilon = \varepsilon(\tau) < \frac{1}{2}, \quad \rho > 0,$$

$$A = \frac{1+\varepsilon^2}{\pi\varepsilon}, \quad \delta = \frac{\pi\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$

коефіцієнти b_{2l+1} ($l \geq 1$) можна зробити невід”ємними.

Отже, функція $F_\tau(t)$ (2.23) побудована. Для неї, зокрема,

$$\inf_{|t|\le\tau} F_r(t) = \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2(\tau) > 0 \tag{2.26}$$

Нехай h_0 – деякий елемент гільбертового простору H і

$$f_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_0 a_k \cos kt\ , \quad a_k^2 = \rho_k^2(\tau).$$

Тоді

$$2E_1^2(f_r, T)_{2,H} = \sum_{k=1}^{\infty} \| h_0 \|_{2,H}^2\ \rho_k^2(\tau) = F_\tau(0)\ \| h_0 \|_{2,H}^2$$

$$2\omega^2(\tau, f_r, T)_{2,H} = \sup_{|t|<r} 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(\tau)(1-\cos kt) = 2(F_\tau(0) - \inf_{|t|\le r} F_\tau(t))\ \| h_0 \|_{2,H}^2\ .$$

Зважаючи на (2.26)

$$\frac{E_1^2(f_\tau, T)_{2,H}}{\omega^2(\tau, f_\tau, T)_{2,H}} > \frac{1}{2}.$$

Тому $\tau_2(1) = \pi$. Для довільного n необхідно розглянути функцію $f_r(nt)$.

Теорема 2.4.2 доведена.

Висновки до розділу 2.

Отримано узагальнення результатів М.І. Черних, стосовно оцінки найкращого наближення періодичної функції f узагальненими тригонометричними поліномами через її модуль неперервності та модуль гладкості, на випадок функцій зі значеннями в гільбертовому просторі. Також для функцій зі значеннями у гільбертовому просторі отримано нерівності типу Джексона-Стєчкіна у випадку функцій багатьох змінних.

Одержано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичними в одиничному колі.

Отримано точні значення слабких поперечників деяких класів функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі, означених за допомогою модулів неперервності.

РОЗДІЛ 3. НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА ДЛЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Аналог класичних нерівностей для B^2-майже періодичних функцій

У розділі 1 вже зазначалося, що деякі нерівності типу Джексона для B^2 майже періодичних функцій були отримані Бредіхіною А.Є. [50], Притулою Я.Г. і Яцимірським М.М. [117], [118]. Нагадаємо, що B^p – це сукупність функцій, вимірних і сумовних зі степенню p, p ≥ 1, у кожному скінченному інтервалі дійсної осі з метрикою

$$D_{B^p}[f(x),\, g(x)] = \left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\, f(x)-g(x)\,|^p\, dx\right]^{1/p}.$$

Нехай також ***T*** **–** множина тригонометричних поліномів виду

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x},$$

де λ_k – довільні дійсні числа, a_k – комплексні коефіцієнти. Замикання в просторі B^p множини ***T*** називається класом B^p майже періодичних функцій (B^p-м.п. функцій).

Як відомо, $B^{p_2} - м.п. \subset B^{p_1} - м.п.$, якщо $p_1 < p_2$. Для кожної функції $f \in B^1$-м.п. існує середнє значення

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Функція $a(\lambda, f) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, може відрізнятися від нуля не більш, ніж на зліченні множині значень; у результаті нумерації яких у довільному порядку виникає послідовність $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ показників Фур'є функції *f*. Числа $A_{\lambda_k} = a(\lambda_k, f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції *f*. Функції $f \in B^1$-п.п. відповідає ряд Фур'є виду

$$f(x) \sim \sum_k A_{\lambda_k} e^{i\lambda_k x} .$$

Далі отримаємо аналоги нерівностей (1.1) – (1.4) для майже періодичних функцій Безиковича класу B^2 (B^2-м. п. функції), показники Фур'є яких єдину граничну точку у нескінченності. Для таких функцій *f(x)* ряди Фур'є будемо записувати у наступній симетричній формі

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}, \quad A_k = M\left\{ f(x) e^{-i\lambda_k x} \right\}, \tag{3.1}$$

де $\lambda_{-k} = -\lambda_k$; $|A_k| + |A_{-k}| > 0$, $k \neq 0$; $\lambda_k > 0, \lambda_{k+1} > \lambda_k$ при $k > 0$. Нехай G_{λ_n} – множина B^2-м. п. функцій, показники Фур'є яких знаходяться в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$. Визначимо величину найкращого наближення B^2-м. п. функції *f*

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[M\left\{ | f(x) - g(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, n = 1, 2, \ldots ;$$

і функцію, аналог модуля гладкості m-го порядку,

$$\omega_m(f, t) = \sup_{|h| \le t} \left[M\left\{ | \Delta_h^{(m)} f(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \qquad t \ge 0,$$

де

$$\Delta_h^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x + jh), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

У випадку, коли $m = 1$ будемо вважати $\omega_1(f, t) = \omega(f, t)$.

Із рівності Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} | A_k |^2 = M\left\{ | f(x) |^2 \right\}$$

випливає, що

$$E_{\lambda_n}(f) = \left[\sum_{|k| \ge n} | A_k |^2 \right]^{1/2} .$$

Наведені нижче результати теорем 3.1.1 та 3.1.2 були отримані Притулою Я.Г. [117], Притулою Я.Г. та Яцимірським М.М. [118]. У роботі [117] отримана оцінка найкращого наближення функції f через модуль неперервності цієї функції, а робота [118] містить ще й інтегральні нерівності з модулем неперервності та з модулем гладкості функції. Наведемо ще одне доведення цих результатів, яке ґрунтується на використанні методу М.І. Черних. В доведеннях Я.Г. Притули та М.М. Яцимірського був застосований інший метод наближення.

Наступна теорема є аналогом нерівності (1.3).

Теорема 3.1.1. *Для довільної B^2-м. п. функції $f(x)$, що відмінна від константи і яка має ряд Фур'є (3.1) має місце нерівність, що не може бути покращена.*

$$E_{\lambda_n}^2(f) \le \frac{\lambda_n}{4}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(f,t)\sin(\lambda_n t)\,dt. \tag{3.2}$$

Доведення. При доведенні теореми будемо використовувати метод М.І.Черних [140] (див. також [98]), з необхідними змінами. Нехай $f(x)$ B^2-м. п. функція, що має ряд Фур'є (3.1). Використовуючи рівність Парсеваля, маємо

$$M\left\{|f(x+h)-f(x)|^2\right\} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_k|^2(1-\cos(\lambda_k h)).$$

Отже, для будь-якого $t \ge 0$ можемо записати

$$\omega^2(f,t) = \sup_{|h|\le t} M\left\{|f(x+h)-f(x)|^2\right\} \ge M\left\{|f(x+t)-f(x)|^2\right\} \ge$$

$$\ge 2\sum_{|k|\ge n}|A_k|^2(1-\cos(\lambda_k t)) = 2E_{\lambda_n}^2(f) - 2\sum_{|k|\ge n}|A_k|^2\cos(\lambda_k t),$$

або

$$E_{\lambda_n}^2(f) \le \frac{1}{2}\omega^2(f,t) + \sum_{|k|\ge n}|A_k|^2\cos(\lambda_k t).$$

Помножимо обидві частини нерівності на $\sin(\lambda_n t)$ і проінтегруємо по t на відрізку $[0,\pi/\lambda_n]$. Враховуючи, що $\int_0^{\pi/\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\,dt = \frac{2}{\lambda_n}$, отримаємо

$$\frac{2}{\lambda_n} E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f,t) \sin(\lambda_n t)\, dt + \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \int_0^{\pi/\lambda_n} \cos(\lambda_k t) \sin(\lambda_n t)\, dt .$$

Аналогічно тому, як це робилося в [140] для $\lambda_n = n$, встановлюємо, що сума в правій частині останньої нерівності недодатня, тому

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f,t) \sin(\lambda_n t)\, dt .$$

Точность даної нерівності слідує із точності нерівності (1.1), оскільки кожна 2π-періодична функція є B^2 майже періодичною.

Теорема 3.1.1 доведена.

Далі наведено аналог нерівності (1.4).

Теорема 3.1.2. *Для довільної B^2-м. п. функції $f(x)$, що має ряд Фур'є (3.1), і будь-якого натурального m справедлива нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega^2_m(f,t)(\sin\frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2}\sin(\lambda_n t))dt \right\}^{1/2} . \qquad (3.3)$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}}$ не покращується.

Доведення. Тут будемо використовувати метод з роботи [139] з деякою його модифікацією, що використовується в роботі [116].

Оскільки

$$M\left\{ |\Delta_h^{(m)} f(x)|^2 \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^m |A_k|^2 (1-\cos(\lambda_k h))^m =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 \left(2\sin\frac{\lambda_k h}{2} \right)^{2m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 \left[C^m_{2m} - 2\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C^{m-j}_{2m} \cos(j\lambda_k h) \right],$$

то

$$\omega^2_m(f,t) = \sup_{|h|\le t} \left[M\left\{ |\Delta_h^{(m)} f(x)|^2 \right\} \right]^{1/2} \ge \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \left[C^m_{2m} - 2\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C^{m-j}_{2m} \cos(j\lambda_k t) \right]$$

і

$$\mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}} \ E_{\lambda_n}^2(f) = \ \mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}} \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \ \le$$

$$\le \ \omega_m^2(f,t) \ + \ 2 \ \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \left[\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_{2m}^{m-j} \cos(j\lambda_k t) \right] \ =$$

$$= \omega_m^2(f,t) \ + 2 \ \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \ \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s+1} \left(\cos((2s-1)\lambda_k t) - \frac{m-2s+1}{m+2s} \cos(2s\lambda_k t) \right) \ +$$

$$+ \ 2\, \mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*} \ \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \cos(m\lambda_k t), \qquad (3.4)$$

де $\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*} = 1$ для парних m, $\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{*} = 0$ для непарних m, $[m/2]$ – ціла частина числа $\frac{m}{2}$. Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda_n}(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{\lambda_n t}{2} + \dfrac{1}{2}\sin(\lambda_n t), & t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{\lambda_n}\right]; \\ 0, & t \in \left[\dfrac{2\pi}{\lambda_n}; \infty\right]. \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_{\lambda_n}(t) \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \int_0^{\infty} \varphi_{\lambda_n}(t)dt \ = \ \frac{4}{\lambda_n}.$$

Косинус-перетворення Фур’є функції $\varphi_{\lambda_n}(t)$ дорівнює

$$\Phi_{\lambda_n}(x) \ = -\frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{4}{4x^2 - \lambda_n^2} \left(1 + \cos\frac{2\pi x}{\lambda_n} \right) + \frac{1}{x^2 - \lambda_n^2} \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{\lambda_n} \right) \right\}.$$

Інтегруючи нерівність (3.4) по відрізку $[0, \infty]$ з вагою $\varphi_{\lambda_n}(t)$, отримуємо

$$\frac{4C_{2m}^m}{\lambda_n} \ E_{\lambda_n}^2(f) \le \ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f,t) \ \varphi_{\lambda_n}(t)\,dt \ +$$

$$+ 2 \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \ \sum_{s=1}^{[m/2]} \int_0^{2\pi/\lambda_n} C_{2m}^{m-2s+1} \left(\cos((2s-1)\lambda_k t) - \frac{m-2s+1}{m+2s} \cos(2s\lambda_k t) \right) \varphi_{\lambda_n}(t)\,dt \ +$$

$$+ \ 2\, C_m^{*} \ \sum_{|k|\ge n} |A_k|^2 \ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \cos(m\lambda_k t) \ \varphi(t)\,dt \ = \ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f,t) \ \varphi_{\lambda_n}(t)\,dt \ +$$

$$+\ 2\sum_{|k|\ge n}|A_k|^2\ \sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\Phi_{\lambda_n}((2s-1)\lambda_k)-\frac{m-2s+1}{m+2s}\Phi_{\lambda_n}(2s\lambda_k)\right)+$$

$$+\ 2\,C_m^*\ \sum_{|k|\ge n}|A_k|^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \Phi_{\lambda_n}(m\lambda_k)\,.$$

Вираз $\left(\Phi_{\lambda_n}((2s-1)\lambda_k)-\frac{m-2s+1}{m+2s}\Phi_{\lambda_n}(2s\lambda_k)\right)$ недодатній (див. [116], [139]), тому останні два доданки у наведеній вище нерівності є недодатніми й, як наслідок,

$$E_{\lambda_n}^2(f)\ \le\ \frac{\lambda_n}{4C_{2m}^m}\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(f,t)\ \varphi_{\lambda_n}(t)\,dt\,.$$

Нерівність (3.3) доведено.

Твердження про точність цієї нерівності випливає із точності нерівності (1.4). Теорема 3.1.2 доведена.

Теорема 3.1.3. *Для довільної B^2-м. п. функції $f(x)$ з рядом Фур'є (3.1), відмінної від константи, і будь-якого натурального m має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f)\ <\ (C_{2m}^m)^{-1/2}\ \omega_m^2\left(f,\frac{2\pi}{\lambda_n}\right). \qquad (3.5)$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині даної нерівності зменшити неможливо.

Доведення. Оцінка (3.5) безпосередньо випливає з нерівності (3.3), так як при $t\le\frac{2\pi}{\lambda_n}$

$$\omega_m(f,t)\ \le\ \omega_m\left(f,\frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Тоді за теоремою 3.1.2

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f,t)\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \;\; \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right)\sqrt{\frac{4}{\lambda_n}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}\; \omega_m^2\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Оскільки кожна сумовна з квадратом періодична функція є і B^2-м.п. функцією, точність нерівності (3.5) випливає з точності нерівності (1.2).

Теорема 3.1.3 доведена.

3.2. Оцінки апроксимації для B^2-майже періодичних через узагальнений модуль неперервності

Позначимо через М = $\{\mu_j\}_{j=0}^m$ - ненульовий набір комплексних чисел таких, що $\sum_{j=0}^{m}\mu_j = 0$. Набору М поставимо у відповідність різницевий оператор і модуль неперервності

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j \; f(x + jt),$$

$$\omega_M(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[M\left\{|\,\Delta_t^{(m)}\; f(x)\,|^2\right\}\right]^{1/2}, \qquad t \ge 0.$$

Оскільки

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j \; f(x + jt) \; = \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}\left(\sum_{j=0}^{m} \mu_i e^{i\lambda_k jt}\right),$$

то

$$M\left\{|\,\Delta_t^{(m)}\; f(x)\,|^2\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\,A_k\,|^2 \left|\sum_{j=0}^{m} \mu_i e^{i\lambda_k jt}\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\,A_k\,|^2 \;\; \varphi(\lambda_k t),$$

де $\varphi(\lambda_k t) = \varphi_M(\lambda_k t) = \left|\sum_{j=0}^{m} \mu_i e^{i\lambda_k jt}\right|^2$ – невід’ємна 2π-періодична функція, що обертається в нуль у точці t = 0.

Позначимо через Ф клас всіх неперервних 2π-періодичних невід'ємних ненульових функції φ, таких, що φ(0) = 0. Введемо узагальнений модуль неперервності

$$\omega_{\varphi}(f,\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A_k|^2\varphi(\lambda_k t)\right]^{1/2}.$$

Позначимо через $I(\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt$ - середнє значення функції на періоді.

Теорема 3.2.1. *Для кожної функції* $\varphi\in\Phi$ *існує точка* $\gamma>0$*, залежна тільки від функції* φ*, така, що для довільної* B^2*-м.п. функції* f *виконується нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f)\le\frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\omega_{\varphi}\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right). \tag{3.6}$$

При цьому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B^2}\frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_{\varphi}\left(f,\dfrac{\gamma}{\lambda_n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}. \tag{3.7}$$

Дана теорема узагальнює теорему С. Н. Васильєва з роботи [59]. При доведенні теоремы 3.2.1 будемо суттєво використовувати її результати.

Доведення. Із рівності Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A_k|^2=M\left\{|f(x)|^2\right\}$$

слідує, що

$$E_{\lambda_n}(f)=\left[\sum_{|k|\ge n}|A_k|^2\right]^{1/2}.$$

Розглянемо функцію $\psi(t)=(\varphi(t)-\varphi(-t))/2$, яка належить класу Ф і є парною. При $|t|<\delta$ із визначення $\omega_{\varphi}(f,\delta)$

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \varphi(\lambda_k t)$$

та

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \varphi(-\lambda_k t).$$

Звідки отримуємо, що

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \psi(\lambda_k t).$$

Нехай v – деяка вагова функція на $[0;1]$, тобто невід'ємна интегровна функція, відмінна від нуля на множині додатньої міри. Для будь-якого числа $\delta > 0$ і вагової функції v маємо

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)v(t/\delta)dt \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \int_0^\delta \psi(\lambda_k t)v(t/\delta)dt \geq \delta \sum_{|k|\geq n} |A_k|^2 \int_0^1 \psi(\lambda_k \delta t)\, v(t)dt.$$

Визначимо для $h \in R$ величину

$$\Gamma(v,h) = \inf\left\{ \int_0^1 \psi(xt)v(t)dt \ \ : \ |x| \geq |h|, \quad x \in R \right\},$$

тоді

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)\, v(t/\delta)dt \geq \delta \sum_{|k|\geq n} |A_k|^2\, \Gamma(v,\lambda_k\delta) \geq \delta\Gamma(v,\lambda_n\delta)\, E_{\lambda_n}^2(f).$$

Покладемо $P(v) = \int_0^1 v(t)dt = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta v(t/\delta)dt$.

Оскільки модуль неперервності не спадає, то з останнього ланцюжка нерівностей маємо

$$E_{\lambda_n}^2(f) \leq \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)v(t/\delta)dt}{\delta\Gamma(v,\lambda_n\delta)} = \frac{\int_0^\delta v(t/\delta)dt}{\delta\,\Gamma(v,\lambda_n\delta)} \cdot \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)v(t/\delta)dt}{\int_0^\delta v(t/\delta)dt} =$$

$$= \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)} \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)v(t/\delta)dt}{\int_0^\delta v(t/\delta)dt} \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)}\omega_\varphi^2(f,\delta).$$

У роботі [59] доведено, що для довільної функції $\varphi \in \Phi$ існує вага v така, що $\Gamma(v,\gamma) \ge I(\varphi)P(v)$ при деякому $\gamma > 0$. Використовуючи таку вагу, з попередньої нерівності виводимо

$$E_{\lambda_n}(f)^2 \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\gamma)}\omega_\varphi^2(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}) \le \frac{1}{I(\varphi)}\omega_\varphi^2\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Отже,

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Нерівність (3.6) доведено. Співвідношення (3.7) слідує з його справедливості для періодичних функцій. Теорема повністю доведена.

3.3. Аналог класичних нерівностей для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі

Будемо позначати $\mathbb{R}$ – числова вісь, X –повний метричний простір з метрикою $\rho = \rho(x_1, x_2)$. Нехай *f(t)* : $\mathbb{R}$ → X є неперервна функція зі значеннями в X.

Означення 3.3.1. Множина $E \subset \mathbb{R}$ дійсних чисел називається відносно щільною (в. щ.), якщо існує таке число *l* > 0, що у кожному інтервалі (α, α + *l*) ⊂ $\mathbb{R}$ довжини *l* міститься хоча б одне число множини E.

Означення 3.3.2. Число τ називається ε-майже періодом (ε -м.п.) функції $f: \mathbb{R} \to$ X, якщо

$$\sup_{t\in R} \rho(f(t+\tau), f(t)) \le \varepsilon .$$

Означення 3.3.3. Неперервна функція *f* : $\mathbb{R}$ → X називається майже періодичною (м. п.), якщо для кожного ε > 0 існує відносно щільна множина ε -майже періодів функції f, тобто існує таке число $l = l(\varepsilon) > 0$, що у кожному інтервалі $(\alpha,\ \alpha + l) \subset \mathbb{R}$ довжини l знайдеться хоча б одне число $\tau = \tau_\varepsilon$, що задовольняє нерівність

$$\sup_{t\in R} \rho(f(t+\tau), f(t)) \le \varepsilon .$$

Властивості майже періодичних функцій [103]:

1) М. п. функція $f : \mathbb{R} \to X$ компактна у тому змісті, що замикання множини значень функцій є компактом.

2) Якщо $f : \mathbb{R} \to X$ – неперервна м. п. функція, то f - рівномірно неперервна на R.

3) Нехай послідовність неперервних м.п. функцій $f_n : \mathbb{R} \to X$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ до функції f . Тоді гранична функція f – також неперервна м. п. функція.

4) Нехай $x = f(t)$ – неперервна м. п. функція зі значеннями у метричному просторі X, $y = g(x)$ – функція зі значеннями у метричному просторі X_1, неперервна на замиканні множини значень функції f . Тоді $g(f(t))$ – м. п. функція зі значеннями в X_1.

5) Нехай f – м. п. функція зі значеннями у банаховому просторі X. Якщо існує (сильна) похідна f' і якщо f' рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$, то f' – м. п. функція.

6) Сума $f(t) + g(t)$ двох м. п. функцій є м. п. функція. Добуток м.п. функції $f(t)$ та числової м. п. функції $\varphi(t)$ є м. п. функція.

7) Нехай $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ – м. п. функції з $\mathbb{R}$ у банахові простори X_1, X_2, …, X_n. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує спільна для всіх функцій $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ відносно щільна множина ε-майже періодів.

Теорема Бохнера. *Нехай $f : \mathbb{R} \to X$ – неперервна функція. Для того щоб f була м. п. функцією, необхідно і достатньо, щоб сімейство $S = \{f^s\} = \{f(t + s)\}$ було компактним у $C(X)$. ($C(X)$ – банаховий простір неперервних обмежених функцій $f : \mathbb{R} \to X$ з нормою $\| f(t) \|_{C(X)} = \sup_{t\in R} \| f(t) \|$.)*

Теорема апроксимації. *Для кожної неперервної м. п. функції f :* $\mathbb{R} \to$ *X і кожного ε > 0 існує такий тригонометричний многочлен*

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{\nu=1}^{N_\varepsilon} b_{\nu,\varepsilon} e^{i\lambda_{\nu,\varepsilon} t} \qquad \left(b_{\nu,\varepsilon} \in X,\ \lambda_{\nu,\varepsilon} \in R\right),$$

що

$$\sup_{t \in R} \| f(t) - P_\varepsilon(t) \| < \varepsilon .$$

Теорема про середнє значення. *Для кожної м. п. функції f (t) існує середнє значення:*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) dt = M\{f\} .$$

Більш того, границя

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} f(t) dt = M\{f\}$$

існує рівномірно по *a*.

Зазначимо тепер, що для кожної м. п. функції f і будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ функція $f(t)e^{-i\lambda t}$ є м. п. функція. Тому функція

$$a(\lambda; f) = M_t\left\{f(t)e^{-i\lambda t}\right\}$$

визначена для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$. Функція $a(\lambda; f)$ називається перетворенням Бора функції *f*.

Твердження 3.3.1 Функція $a(\lambda; f)$ може відрізнятися від нуля щонайбільше для зліченної множини значень λ.

Множина $\{\lambda_n\}$ всіх тих λ, для яких $a(\lambda; f) \neq 0$, називається спектром функції *f*. Нехай $a_n = a(\lambda_n; f)$. Кожній м. п. функції f поставимо у відповідність ряд Фур'є

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} .$$

Елементи $a_n \in X$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції *f*. Числа $\{\lambda_n\}$ називаються показниками Фур'є функції *f*.

Твердження 3.3.2. Показники Фур'є апроксимуючих многочленів

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} e^{i\lambda_{k,\varepsilon} t}$$

можна обирати з показників Фур'є функції *f(t)*; коефіцієнти Фур'є апроксимуючих многочленів можна вважати добутками коефіцієнтів Фур'є функції на деякі додатні числа (залежні від ε та показників Фур'є функції).

Теорема єдиності. *Нехай f(t) і g(t) дві м. п. функції. Якщо*

$$a(\lambda; f) \equiv a(\lambda; g), \text{ то } f \equiv g.$$

Для довільної м. п. функції *f*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Розглянемо тепер м. п. функції у комплексному гільбертовому просторі H. Нехай G_{λ_n} – множина м. п. функцій, показники Фур'є яких знаходяться в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$.

Означення 3.3.4. Величиною найкращого наближення м. п. функції *f* зі значеннями в гільбертовому просторі H називається величина

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g\in G_{\lambda_n}} \left[M\left\{ | f(x) - g(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \; n = 1, 2, \dots .$$

Означення 3.3.5. Модулем гладкості m-го порядку м. п. функції *f* зі значеннями в гільбертовому просторі називається величина

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h|\le t} \left[M\left\{ | \Delta_h^{(m)} f(x) |^2 \right\} \right]^{1/2}, \qquad t \ge 0,$$

де

$$\Delta_h^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f(x + jh), \quad m = 1, 2, \dots .$$

У випадку, коли $m = 1$ будемо вважати $\omega_1(f,t) = \omega(f,t)$.

Теорема 3.3.1. *Для кожної м. п. функції f*

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} \; : \; \mathbb{R} \to H$$

має місце рівність Парсеваля

$$M_t\{(f(t), f(t))\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n, a_n),$$

(a_n, a_n) – скалярний добуток у просторі H.

Для довільних $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathrm{H}$ і довільних чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$M_t\left\{\| f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k t} \|^2\right\} = M_t\{(f(t), f(t))\} - \sum_{k=1}^{n} \| a_k \|^2$$

яка є мінімальною властивістю сум Фур'є.

Оскільки в останній тотожності ліва частина невід'ємна, то

$$\sum_{k=1}^{n} \| a_k \|^2 \le M_t\{(f(t), f(t))\}.$$

Ця нерівність називається нерівністю Бесселя. Оскільки в нерівності Бесселя n довільне, то з нею, зокрема, випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \|^2$.

Теорема 3.3.2. *Для довільної м. п. функції f(x) зі значеннями у гільбертовому просторі H, що відмінна від константи з рядом Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *має місце нерівність, що не може бути покращена.*

$$E_{\lambda_n}^2(f) \le \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f,t) \sin(\lambda_n t)\, dt. \qquad (3.8)$$

Доведення. Використовуючи рівність Парсеваля, маємо

$$M\left\{| f(x+h) - f(x) |^2\right\} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \| a_k \|^2 (1 - \cos(\lambda_k h)).$$

Отже, для будь-якого $t \ge 0$ можемо записати

$$\omega^2(f,t) = \sup_{|h|\le t} M\left\{|f(x+h)-f(x)|^2\right\} \ge M\left\{|f(x+t)-f(x)|^2\right\} \ge$$

$$\ge 2\sum_{|k|\ge n}||a_k||^2(1-\cos(\lambda_k t)) = 2E^2_{\lambda_n}(f) - 2\sum_{|k|\ge n}||a_k||^2\cos(\lambda_k t),$$

або

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\omega^2(f,t) + \sum_{|k|\ge n}\|a_k\|^2\cos(\lambda_k t).$$

Помножимо обидві частини нерівності на $\sin(\lambda_n t)$ і проінтегруємо по t на відрізку $[0,\pi/\lambda_n]$. Враховуючи, що $\int\limits_0^{\pi/\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\,dt = \frac{2}{\lambda_n}$, отримаємо

$$\frac{2}{\lambda_n}E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(f,t)\sin(\lambda_n t)\,dt + \sum_{|k|\ge n}\|a_k\|^2\int\limits_0^{\pi/\lambda_n}\cos(\lambda_k t)\sin(\lambda_n t)\,dt.$$

Сума в правій частині останньої нерівності недодатня, тому

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{\lambda_n}{4}\int\limits_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(f,t)\sin(\lambda_n t)\,dt.$$

Точность даної нерівності слідує із точності нерівності (2.1).

Теорема 3.3.2 доведена.

Теорема 3.3.3. *Для довільної м. п. функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H, що має ряд Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$ *і будь-якого натурального m справедлива нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}}\left\{\int\limits_0^{2\pi/\lambda_n}\omega^2_m(f,t)\left(\sin\frac{\lambda_n t}{2}+\frac{1}{2}\sin(\lambda_n t)\right)dt\right\}^{1/2}. \qquad (3.9)$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C^m_{2m})^{-1}}$ *не покращується.*

Доведення. Оскільки

$$M\left\{|\Delta^{(m)}_h f(x)|^2\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^m\|a_k\|^2(1-\cos(\lambda_k h))^m =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| a_k \|^2 \left(2\sin\frac{\lambda_k h}{2} \right)^{2m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| a_k \|^2 \left[C_{2m}^m - 2\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_{2m}^{m-j} \cos(j\lambda_k h) \right],$$

то

$$\omega_m^2(f,t) = \sup_{|h|\le t} \left[M \left\{ | \Delta_h^{(m)} f(x) |^2 \right\} \right]^{1/2} \ge$$

$$\sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \left[C_{2m}^m - 2\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_{2m}^{m-j} \cos(j\lambda_k t) \right]$$

і

$$C_{2m}^m \ E_{\lambda_n}^2(f) = C_{2m}^m \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \le$$

$$\le \omega_m^2(f,t) + 2 \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \left[\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_{2m}^{m-j} \cos(j\lambda_k t) \right] =$$

$$= \omega_m^2(f,t) + 2 \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s+1} \left(\cos((2s-1)\lambda_k t) - \frac{m-2s+1}{m+2s} \cos(2s\lambda_k t) \right) +$$

$$+ 2 C_m^* \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \cos(m\lambda_k t), \tag{3.10}$$

де $C_m{}^* = 1$ для парних m, $C_m{}^* = 0$ для непарних m, $[m/2]$ – ціла частина числа $\frac{m}{2}$. Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda_n}(t) = \begin{cases} \sin\frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2}\sin(\lambda_n t), & t \in [0; \frac{2\pi}{\lambda_n}]; \\ 0, & t \in [\frac{2\pi}{\lambda_n}; \infty]. \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_{\lambda_n}(t) \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \int_0^{\infty} \varphi_{\lambda_n}(t)dt = \frac{4}{\lambda_n}.$$

Косинус-перетворення Фур'є функції $\varphi_{\lambda_n}(t)$ дорівнює

$$\Phi_{\lambda_n}(x) = -\frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{4}{4x^2-\lambda_n^2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)+\frac{1}{x^2-\lambda_n^2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)\right\}.$$

Інтегруючи нерівність (3.10) по відрізку [0, ∞] з вагою $\varphi_{\lambda_n}(t)$, отримуємо

$$\frac{4C_{2m}^m}{\lambda_n}\,E_{\lambda_n}^2(f) \le \int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(f,t)\;\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt\;+$$

$$+\,2\sum_{|k|\ge n}\|\,a_k\,\|^2\sum_{s=1}^{[m/2]}\int_0^{2\pi/\lambda_n}C_{2m}^{m-2s+1}\left(\cos((2s-1)\lambda_k t)-\frac{m-2s+1}{m+2s}\cos(2s\lambda_k t)\right)\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt+$$

$$+\;2\,C_m{}^*\sum_{|k|\ge n}\|\,a_k\,\|^2\int_0^{2\pi/\lambda_n}\cos(m\lambda_k t)\;\varphi(t)\,dt\;=\;\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(f,t)\;\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt\;+$$

$$+\,2\sum_{|k|\ge n}\|\,a_k\,\|^2\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\Phi_{\lambda_n}((2s-1)\lambda_k)-\frac{m-2s+1}{m+2s}\Phi_{\lambda_n}(2s\lambda_k)\right)+$$

$$+\;2\,C_m{}^*\sum_{|k|\ge n}\|\,a_k\,\|^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\Phi_{\lambda_n}(m\lambda_k)\,.$$

Вираз $\left(\Phi_{\lambda_n}((2s-1)\lambda_k)-\frac{m-2s+1}{m+2s}\Phi_{\lambda_n}(2s\lambda_k)\right)$ недодатній (див. [116], [139]), тому останні два доданки у наведеній вище нерівності є недодатніми й, як наслідок,

$$E_{\lambda_n}^2(f) \le \frac{\lambda_n}{4C_{2m}^m}\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(f,t)\;\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt\,.$$

Нерівність (3.9) доведено.

Твердження про точність цієї нерівності випливає із точності нерівності (2.3). Теорема 3.3.3 доведена.

Теорема 3.3.4. *Для довільної м. п. функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H, що має ряд Фур'є* $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$*, відмінної від константи, і будь-якого натурального m має місце нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2} \; \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right). \tag{3.11}$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині даної нерівності зменшити неможливо.

Доведення. Оскільки при $t \leq \dfrac{2\pi}{\lambda_n}$

$$\omega_m(f, t) \leq \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Тоді за теоремою 3.3.3

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f,t)\varphi_{\lambda_n}(t)\,dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \; \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right)\sqrt{\frac{4}{\lambda_n}} = (C_{2m}^m)^{-1/2} \; \omega_m^2\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Оскільки кожна сумовна з квадратом періодична функція є і B^2-м.п. функцією, точність нерівності (3.11) випливає з точності нерівності (2.7).

Теорема доведена.

Позначимо через $H^{1/2}$ клас м. п. функцій f зі значеннями у гільбертовому просторі та для яких $\omega\ (f\ ;\ t) \leq \sqrt{t}$. Використовуючи твердження теореми 3.3.2 отримаємо, що для довільної функції f із $H^{1/2}$

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{\lambda_n}{4}\int\limits_0^{\pi/\lambda_n} t\,\sin(\lambda_n t)\,dt \;=\; \frac{\lambda_n}{4}\frac{\pi}{\lambda_n^2} \;=\; \frac{\pi}{4\lambda_n}\,.$$

Отже,

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}}\,.$$

3.4. Нерівності типу Джексона-Стєчкіна для майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, що містять узагальнений модуль неперервності

Як і в попередньому підрозділі G_{λ_n} – множина м. п. функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, показники Фур’є яких знаходяться в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$.

Нехай М = $\{\mu_j\}_{j=0}^m$ - ненульовий набір комплексних чисел таких, що $\sum\limits_{j=0}^{m}\mu_j = 0$. Набору М поставимо у відповідність різницевий оператор і модуль неперервності

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j\; f(x + jt)\,,$$

$$\omega_M(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[M\left\{|\,\Delta_t^{(m)}\; f(x)\,|^2\right\}\right]^{1/2}, \qquad t \ge 0.$$

Оскільки

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j\; f(x + jt) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k x}\left(\sum_{j=0}^{m}\mu_i e^{i\lambda_k jt}\right),$$

то

$$M\left\{|\,\Delta_t^{(m)}\; f(x)\,|^2\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|\,a_k\|^2\left|\sum_{j=0}^{m}\mu_i e^{i\lambda_k jt}\right|^2 \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|\,a_k\|^2\;\varphi(\lambda_k t)\,,$$

де $\varphi(\lambda_k t) = \varphi_M(\lambda_k t) = \left|\sum_{j=0}^{m} \mu_i e^{i\lambda_k jt}\right|^2$ – невід'ємна 2π-періодична функція, що обертається в нуль у точці t = 0.

Через Φ позначимо клас всіх неперервних 2π-періодичних невід'ємних ненульових функції φ, таких, що φ(0) = 0. Введемо узагальнений модуль неперервності

$$\omega_\varphi(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|a_k\|^2 \varphi(\lambda_k t)\right]^{1/2}.$$

Позначимо через $I(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt$ - середнє значення функції на періоді.

Теорема 3.4.1. *Для кожної функції* $\varphi \in \Phi$ *існує точка* $\gamma > 0$*, залежна тільки від функції* φ*, така, що для довільної м.п. функції* f *зі значеннями в гільбертовоу просторі виконується нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\,\omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right). \tag{3.12}$$

При цьому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_f \frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}. \tag{3.13}$$

При доведенні теоремы 3.4.1 будемо суттєво використовувати результати роботи С. Н. Васильєва [59].

Доведення. Розглянемо функцію $\psi(t) = (\varphi(t) - \varphi(-t))/2$, яка належить класу Φ і є парною. При $|t| < \delta$ із визначення $\omega_\varphi(f,\delta)$

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \ge \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|a_k\|^2 \varphi(\lambda_k t)$$

та

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \ge \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a_k \|^2 \varphi(-\lambda_k t).$$

Звідки отримуємо, що

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \ge \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a_k \|^2 \psi(\lambda_k t).$$

Нехай v – деяка вагова функція на $[0;1]$, тобто невід'ємна интегровна функція, відмінна від нуля на множині додатньої міри. Для будь-якого числа $\delta > 0$ і вагової функції v маємо

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)\, v(t/\delta)dt \ \ge \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a_k \|^2 \int_0^\delta \psi(\lambda_k t) v(t/\delta)dt \ge \ \delta \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \int_0^1 \psi(\lambda_k \delta\, t)\ v(t)dt.$$

Визначимо для $h \in R$ величину

$$\Gamma(v,h) = \inf \left\{ \int_0^1 \psi(xt)v(t)dt \ \ : \ |\, x \,|\ge|\, h \,|, \quad x \in R \right\}.$$

Тоді, враховуючи, що $E_{\lambda_n}(f) = \left[\sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \right]^{1/2}$, маємо

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)\, v(t/\delta)dt \ \ge \ \delta \sum_{|k|\ge n} \| a_k \|^2 \ \Gamma(v,\lambda_k \delta) \ \ge \ \delta\, \Gamma(v,\lambda_n \delta) \ E_{\lambda_n}^2(f).$$

Покладемо $P(v) = \int_0^1 v(t)dt = \dfrac{1}{\delta} \int_0^\delta v(t/\delta)dt$.

Оскільки модуль неперервності не спадає, то з останнього ланцюжка нерівностей маємо

$$E_{\lambda_n}^2(f) \ \le \ \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t) v(t/\delta)dt}{\delta\, \Gamma(v,\lambda_n \delta)} \ = \ \frac{\int_0^\delta v(t/\delta)dt}{\delta\ \Gamma(v,\lambda_n \delta)} \cdot \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t) v(t/\delta)dt}{\int_0^\delta v(t/\delta)dt} \ =$$

$$= \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)} \frac{\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)v(t/\delta)dt}{\int_0^\delta v(t/\delta)dt} \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)} \omega_\varphi^2(f,\delta).$$

У роботі [59] доведено, що для довільної функції $\varphi \in \Phi$ існує вага v така, що $\Gamma(v,\gamma) \ge I(\varphi)P(v)$ при деякому $\gamma > 0$. Використовуючи таку вагу, з попередньої нерівності виводимо

$$E_{\lambda_n}(f)^2 \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\gamma)} \omega_\varphi^2\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right) \le \frac{1}{I(\varphi)} \omega_\varphi^2\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Отже,

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}} \omega_\varphi\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Нерівність (3.12) доведено. Співвідношення (3.13) слідує з його справедливості для періодичних функцій. Теорема повністю доведена.

Також наведемо (без доведення) аналоги тверджень із роботи [57], які відносяться до задачі знаходження мінімальної точки δ > 0 такої, що для довільної функції *f* має місце нерівність $E_n(f) < \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \omega_m(f,\delta), \quad m \ge 2.$.

Доведення можуть бути наведені аналогічно доведенням з цієї роботи.

Теорема 3.4.2. *Для довільних* $\varphi \in \Phi$, *f-м.п. зі значеннями в гільбертовому просторі,* $\delta \ge \frac{7}{5\lambda_n}$ *і вагової функції*

$$v(t) = \begin{cases} \frac{2t}{7}, & t \in \left[0, \frac{1}{7}\right], \\ \frac{-t^2}{2} + \frac{3t}{7} - \frac{1}{98}, & t \in \left[\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right], \\ \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{5}{7}, 1\right], \end{cases}$$

виконується нерівність

$$E_{\lambda_n}\left(f\right)\le \frac{1}{I(\varphi)}\left(\frac{\int_0^\delta \omega_\varphi(f,t)v(t/\delta)dt}{\int_0^\delta v(t/\delta)dt}\right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

З цієї теореми випливає

Теорема 3.4.3. *Для довільних* $\varphi\in\Phi$, *f-м.п. зі значеннями в гільбертовому просторі*, $\delta\ge\frac{7}{5\lambda_n}$

$$E_{\lambda_n}\left(f\right)\le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\ \omega_\varphi\left(f,\delta\right).$$

Для функції $\varphi(t)=4\sin^2(t/2)$, що породжує звичайний модуль неперервності *m*-го порядку, отримуємо

Наслідок 3.4.1. *Для довільної функції f-м.п. зі значеннями в гільбертовому просторі при всіх* $n\in\mathbb{N}$

$$E_n(f)<\frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f,\frac{1{,}4\pi}{\lambda_n}\right).$$

Висновки до розділу 3

У третьому розділі отримані точні оцінки апроксимації для числових майже періодичних функцій та майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі, що містять модуль неперервності, модуль гладкості, або узагальнений модуль неперервності.

РОЗДІЛ 4.
НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА ДЛЯ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ЕЛЕМЕНТІВ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ ПІДПРОСТОРАМИ, ПОРОДЖЕНИМИ ЗАДАНИМ РОЗКЛАДОМ ОДИНИЦІ

Нехай A – замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі Н над полем комплексних чисел.

Позначимо через $C^{\infty}(A)$ множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора А:

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \notin N_0} D(A^n), \text{ де } N_0 = N \cup \{0\}.$$

Для числа α > 0 покладемо

$$G^{\alpha}(A) = \left\{ x \in C^{\infty}(A) \colon \ \exists c = c(x) > 0 \quad \forall k \in N_0 \ \ \| A^k x \| \le c\alpha^k \right\}.$$

Множина $G^{\alpha}(A)$ є банаховим простором щодо норми

$$\| x \|_{G^{\alpha}(A)} = \sup_{n \in N_0} \frac{\| A^n x \|}{\alpha^n}.$$

Тоді $G(A) = \bigcup_{\alpha > 0} G^{\alpha}(A)$ – лінійний локально-опуклий простір відносно топології індуктивної границі бананових просторів $G^{\alpha}(A)$:

$$G(A) = \lim_{\alpha \to \infty} ind \ G^{\alpha}(A)$$

Елементи простору $G(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A. Під типом $\sigma(x, A)$ вектора $x \in G(A)$ розуміється число

$$\sigma(x, A) = \inf \left\{ \alpha > 0 \colon \ x \in G^{\alpha}(A) \right\} = \limsup_{n \to \infty} \| A^n x \|^{1/n}.$$

Скрізь у подальшому оператор A самоспряжений в Н, а $\mathcal{E}(\Delta)$ – його спектральна міра.

Для довільного $x \in$ Н покладемо, дотримуючись [63],

$$\mathrm{E}_r(x, A) = \inf_{y \in G(A) \colon \sigma(y, A) \le r} \| x - y \|, \qquad r > 0,$$

тобто $E_r\,(x, A)$ – найкраще наближення елемента x цілими векторами y експоненціального типу оператора A, для яких $\sigma(y, A) \le r$. При фіксованому x $E_r\,(x, A)$ не зростає і $E_r\,(x, A) \to 0$, $r \to \infty$. Зрозуміло, що

$$E_r\,(x, A) = \| x - \mathcal{E}\,(\,[-r, r]\,)\, x \| = \| x - F(\,[0, r]\,)\, x \|,$$

де $F(\Delta)$ – спектральна міра оператора $|A| = \sqrt{A^* A}$.

4.1. Узагальнення класичних нерівностей

Нехай H – комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$, в якому задано розклад одиниці.

. Будемо розглядати оцінки найкращого наближення елементів простору H підпросторами виду

$$W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \ \ : \ \ g \in H \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Нехай $E_\sigma(f) = \inf\limits_{g \in W_\sigma} \| f - g \|$ – це величина найкращого наближення елементу $f \in H$ функціями із класу W_σ .

Заданий розклад одиниці породжує групу унітарних операторів [12, § 73]

$$U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f\,, \qquad (0 \le t < \infty)$$

(інтеграл у правій частині – це операторний інтеграл Стілт’єса).

Для $t \ge 0$ визначимо функцію $\omega\,(f;\ t) = \sup\limits_{|\delta| \le t} \| U_\delta f - If \|$, яка є природнім аналогом модуля неперервності функції f із простору L_2 .

Теорема 4.1.1. *Нехай* $f \in H$. *Тоді для довільного* $\sigma > 0$ *справедлива нерівність*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t)\, dt \right)^{1/2} . \tag{4.1}$$

Якщо існує такий $f \in$ H, *що для будь-якого додатнього* ε *елементи* $f_{\sigma,\varepsilon} = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} dE_s f$ *ненульові, то нерівність (4.1) не покращується*

При доведенні цього і подальших результатів цього параграфу будемо базуватися на методах викладених в роботах [139], [140].

Доведення. Елемент f гільбертового простору H може бути представлений у вигляді інтеграла

$$f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE_s f .$$

Тоді маємо

$$\mathrm{E}_\sigma^2(f) = \int\limits_{\sigma}^{\infty} d(E_s f, f) . \tag{4.2}$$

Розглянемо різницю

$$U_t f - f = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ist}) dE_s f$$

і

$$\| U_t f - f \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{ist}| \, d(E_s f, f) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos ts) d(E_s f, f) \geq$$

$$\geq 2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} (1 - \cos ts) d(E_s f, f) .$$

Таким чином, враховуючи (4.2),

$$\| U_t f - f \|^2 \geq 2 \, \mathrm{E}_\sigma^2(f) - 2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} \cos(ts) d(E_s f, f) ,$$

$$\mathrm{E}_\sigma^2(f) \leq \frac{1}{2} \| U_t f - f \|^2 + \int\limits_{\sigma}^{\infty} \cos(ts) d(E_s f, f) .$$

Помножимо обидві частини останньої нерівності на функцію $sin(\sigma t)$ та проінтегруємо обидві частини отриманої нерівності по відрізку $[0; \frac{\pi}{\sigma}]$. Отримаємо

$$\int_0^{\pi/\sigma} \sin(\sigma t) E_\sigma^2(f)dt \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t)dt +$$

$$+ \int_0^{\pi/\sigma}\int_\sigma^\infty \sin(\sigma t)\cos(st)d(E_s f, f)dt. \qquad (4.3)$$

Розглянемо останній інтеграл

$$\int_\sigma^\infty \left(\int_0^{\pi/\sigma} \sin(\sigma t)\cos(st)dt \right) d(E_s f, f) = \int_\sigma^\infty \left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/\sigma} [\sin(\sigma + s)t + \sin(\sigma - s)t]dt \right) d(E_s f, f) =$$

$$= \int_\sigma^\infty \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma + s} + \frac{1}{\sigma - s} + \frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma + s} + \frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma - s} \right] d(E_s f, f) =$$

$$= \int_\sigma^\sigma \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{s\pi}{\sigma}\right)\frac{2\sigma}{(\sigma - s)(\sigma + s)} d(E_s f, f).$$

Якщо $s > \sigma$, то $\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{s\pi}{\sigma}\right)\frac{2\sigma}{(\sigma - s)(\sigma + s)} \le 0$, тому другий доданок у нерівності (4.3) недодатний і

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t)dt \right)^{1/2}.$$

Залишилося довести точність цієї нерівності. Для цього розглянемо ненулеві елементи простору H

$$f_{\sigma,\varepsilon} = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} dE_s f ,$$

де σ – фіксована величина, а ε – довільне додатнє число. Тоді, згідно визначення $f_{\sigma,\varepsilon}$,

$$\mathrm{E}_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon}) = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} d(E_s f, f)$$

і

$$\| U_t f_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon} \|^2 = 2\ \mathrm{E}_\sigma^2 (f_{\sigma,\varepsilon}) - 2 \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \cos(ts) d(E_s f, f).$$

Повторюючи наведенні вище міркування, але вже для елемента $f_{\sigma,\varepsilon} \in \mathrm{H}$, маємо

$$\int\limits_0^{\pi/\sigma} \| U_t f_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon} \|^2 \sin(\sigma t) dt = 2\ \mathrm{E}_\sigma^2 (f_{\sigma,\varepsilon}) \frac{2}{\sigma} - 2 \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \left(\int\limits_0^{\pi/\sigma} \cos(st) \sin(\sigma t) dt \right) d(E_s f, f).$$

Підрахуємо інтеграл у правій частині останньої рівності.

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \left(\int\limits_0^{\pi/\sigma} \cos(st) \sin(\sigma t) dt \right) d(E_s f, f) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \left[\frac{1}{\sigma+s} + \frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma+s} + \frac{1}{\sigma-s} + \frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma-s} \right] d(E_s f, f).$$

Покажемо, що підінтегральна сума є нескінченно малою величиною при $s \to \sigma$ (тобто, при $\varepsilon \to 0$). Очевидно, що

$$\left(\frac{1+\cos s\pi/\sigma}{\sigma+s} \right) \to 0, \quad \text{при } s \to \sigma$$

і

$$\left(\frac{1+\cos s\pi/\sigma}{\sigma-s} \right) \sim \mathrm{K} \left(1 - \frac{s}{\sigma} \right) \to 0, \quad \text{при } s \to \sigma\ (\mathrm{K} - \mathrm{const}).$$

Отже, відношення

$$\frac{E_\sigma (f_{\sigma,\varepsilon})}{\left(\frac{\sigma}{2} \int\limits_0^{\pi/\sigma} \| U_t f_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon} \|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}}$$

при достатньо малих ε як завгодно близько до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, що і доводить точність константи $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в нерівності (4.1).

Теорема доведена.

Наслідок 4.1.1. *Нехай A – самоспряжений оператор, породжений заданим розкладом одиниці E_s ($-\infty < s < \infty$). Причому $Af = \int_{-\infty}^{\infty} s dE_s f$. Тоді для будь-якого натурального r, довільного $\sigma > 0$ і довільного $f \in D(A^r)$ має місце нерівність*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma^r} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t(A^r f) - A^r f \|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

Якщо існує такий $f \in H$, що для довільного додатнього ε елементи $f_{\sigma,\varepsilon} = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} dE_s f$ ненульові, то нерівність (4.4) не покращується.

Доведення. Доведення твердження безпосередньо випливає із доведення теореми 4.1.1 та ланцюга нерівностей

$$E_\sigma^2(f) = \int_\sigma^\infty d(E_s f, f) = \int_\sigma^\infty \frac{s^{2r}}{s^{2r}} d(E_s f, f) \le \frac{1}{\sigma^{2r}} \int_\sigma^\infty s^{2r} d(E_s f, f) =$$

$$\frac{1}{\sigma^{2r}} E_\sigma^2 (A^r f) \le \frac{1}{\sigma^{2r}} \frac{\sigma}{4} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t(A^r f) - A^r f \|^2 \sin(\sigma t) dt.$$

Теорема 4.1.2. *Для довільного елемента $f \in H$ і довільного $\sigma > 0$ вірна нерівність*

$$E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f; \frac{\pi}{\sigma}). \tag{4.5}$$

Якщо на кожному відрізку $[\nu\sigma; \nu\sigma + \varepsilon]$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ існують ненульові елементи $f_{\nu\sigma} \in (E_{\nu\sigma+\varepsilon} - E_{\nu\sigma})H$, то наведена нерівність є точною.

Доведення. В силу нерівності (4.1), а також означення функції $\omega(f; t)$ та її монотонності, можемо записати

$$\mathrm{E}_\sigma^2(f) \le \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)\omega^2(f;t)dt \;<\; \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{2}\,\omega^2(f;\frac{\pi}{\sigma})\int_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)dt \;=\; \frac{1}{2}\,\omega^2(f,\frac{\pi}{\sigma}).$$

Перейдемо до доведення точності нерівності (4.5). Розглянемо $\sigma > 0$ і точки на півосі $\nu\sigma$ й $\nu\sigma + \varepsilon$, $\nu \in \mathbb{N}$. На кожному відрізку $[\nu\sigma;\ \nu\sigma + \varepsilon]$, $\nu \in N$ виберемо елемент $f_{\nu\sigma} \in (\mathrm{E}_{\nu\sigma+\varepsilon} - \mathrm{E}_{\nu\sigma})H$ з нормою $\| f_{\nu\sigma} \| = 1$. Побудуємо елемент

$$F = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)f_{\nu\sigma}.$$

Оскільки елементи $f_{\nu\sigma}$ мають одиничні норми та ортогональні один одному при різних ν, то

$$\mathrm{E}_\sigma^2(F) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2$$

і

$$\| U_t F - F \|^2 \;=\; 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ts)d(E_sF,F).$$

Якщо $s < \sigma$, то $(\mathrm{E}_s F, F) = 0$, а якщо $\nu\sigma + \varepsilon < s < (\nu + 1)\sigma$, то $(\mathrm{E}_s F, F) = \left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2$. Тоді останній інтеграл Стілт'єса можна записати в вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ts)d(E_sF,F) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2\cos(\sigma\nu t)$$

й

$$\| U_t F - F \|^2 \;=\; 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2\big(1-\cos(\sigma\nu t)\big). \tag{4.6}$$

Зафіксуємо σ і задав ε $(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{\sigma})$, побудуємо парну $\frac{2\pi}{\sigma}$- періодичну неперервну на всій числовій осі функцію

$$g(\varepsilon, t) = \begin{cases} 1-\dfrac{t}{2\varepsilon}, & 0 \le t \le 2\varepsilon,\\ 0, & 2\varepsilon \le t \le \dfrac{\pi}{\sigma}. \end{cases}$$

Функція $g\ (\varepsilon, t)$ допускає розклад у ряд Фур'є:

$$g\ (\varepsilon, t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{2}{\pi\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu} \right)^2 \cos(\sigma\nu t),$$

причему $g\ (\varepsilon, 0) = 1$, $g\ (\varepsilon, \frac{\pi}{\sigma}) = 0$. Рівність (4.6) тоді набуває вид

$$\| U_t F - F \|^2 = \pi\varepsilon\, [g\ (\varepsilon, 0) - g\ (\varepsilon, u)]$$

і, оскільки $g\ (\varepsilon, t)$ не зростає на $[0; \frac{\pi}{\sigma}]$,

$$\omega^2\ (F; \frac{\pi}{\sigma}) = \pi\varepsilon\, [g\ (\varepsilon, 0) - g\ (\varepsilon, \frac{\pi}{\sigma})] = \pi\varepsilon.$$

Отже

$$\mathrm{E}_\sigma^2 (F) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu} \right)^2 = \frac{\pi\varepsilon}{2} \left(g(\varepsilon, 0) - \frac{\varepsilon}{\pi} \right) = \frac{\pi\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \right)$$

та

$$\omega^2\ (F; \frac{\pi}{\sigma}) = 2\ \mathrm{E}_\sigma^2 (F)\ \frac{\pi}{\pi - \varepsilon}.$$

Враховуючи, що ε може бути наскільки завгодно малим, отримуємо твердження теореми.

Теорема 4.1.2 доведена.

Розглянемо нерівність

$$\mathrm{E}_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \sin(\sigma t)\, \omega^2 (f ; t) dt \right)^{1/2} \qquad (4.7)$$

Якщо функція $\omega^2(f ; t)$ опукла вгору на $[0; \frac{\pi}{\sigma}]$, то існує лінійна функція $l(t)$ така, що

$$l(\frac{\pi}{2\sigma}) = \omega^2(f ; \frac{\pi}{2\sigma}) ;$$

$$\omega^2 (f ; t) \le l(t) \qquad (0 \le t \le \frac{\pi}{\sigma}).$$

маємо

$$\int\limits_0^{\pi/\sigma}\omega^2(f;t)\sin(\sigma t)dt = \int\limits_0^{\pi/\sigma}[\omega^2(f;t)-\mathrm{l}(t)]\sin(\sigma t)dt +$$

$$+\int\limits_0^{\pi/\sigma}[\mathrm{l}(t)-\omega^2(f;\frac{\pi}{2\sigma})]\sin(\sigma t)dt + \omega^2(f;\frac{\pi}{2\sigma})\int\limits_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)dt.$$

Перший інтеграл у правій частині недодатній, другий інтеграл дорівнює нулю. Тоді отримуємо оцінку

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{2}\left\{\sigma\omega^2(f;\frac{\pi}{2\sigma})\int\limits_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)dt\right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega^2(f;\ \frac{\pi}{2\sigma}), \qquad (4.8)$$

що є вірною для довільного елемента $f \in$ H, у якого $\omega^2(f;\ t)$ – опукла вгору функція на $[0;\ \frac{\pi}{\sigma}]$.

Нехай $\mathrm{H}^{1/2}$ клас елементів f гільбертового простору H, для яких

$$\omega\ (f;\ t) \le \sqrt{t}\ .$$

Зважаючи на оцінки (4.7) та (4.8) приходимо до нерівності

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}, \qquad \forall f \in \mathrm{H}^{1/2}. \qquad (4.9)$$

При припущеннях теореми 4.1.2 оцінка (4.9) не покращується на класі $\mathrm{H}^{1/2}$.

Наведені результати являються аналогами нерівностей, отриманих М.І. Черних [139], [140] та В.Ю. Поповим [116] для найкращих L_2-наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу σ, а також нерівностей, отриманих В.Ф. Бабенко і Г.С. Жигановою [30] для найкращих наближень частковими сумами рядів по системі вейвлетів Шеннона-Котельникова.

Розглянемо ще один підпростір

$$W_{-\sigma,\sigma} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Оцінки апроксимації елементів гільбертового простору підпростором $W_{-\sigma,\sigma}$ будуть аналогічними оцінкам в теоремах 4.1.1 і 4.1.2, тобто

$$E_{-\sigma,\sigma}\ (f,\ W_{-\sigma,\sigma}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2},$$

$$E_{-\sigma,\sigma}(f,\ W_{-\sigma,\sigma}\ ) \ < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f; \frac{\pi}{\sigma}).$$

Для $t \geq 0$ визначемо функцію $\omega_m\ (f;\ t) = \sup_{|\delta| \leq t} \| (U_\delta - I)^m f \|$, де I – тотожній оператор.

Теорема 4.1.3. Нехай $f \in$ H. Тоді для довільного натурального m і будь-якого σ > 0 має місце нерівність

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sigma (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f,t)(\sin\frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{2}\sin\sigma t) dt \right\}^{1/2}. \qquad (4.10)$$

Доведення. Елемент f гільбертового простору H може бути представлений у вигляді $f = \int_{-\infty}^{\infty} dE_s f$. Тоді маємо

$$E_\sigma^2(f) = \int_\sigma^\infty d(E_s f, f).$$

Розглянемо різницю

$$(U_t - I)^m f = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ist} - 1)^m dE_s f$$

і

$$\| (U_t - I)^m f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | e^{ist} - 1 |^{2m}\ d(E_s f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} (2(1 - \cos ts))^m d(E_s f, f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(4\sin^2\frac{st}{2})^m d(E_s f, f) = \int_{-\infty}^{\infty}(2\sin\frac{st}{2})^{2m} d(E_s f, f).$$

Оскільки $(2\sin\frac{st}{2})^{2m} = C_{2m}^m - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)$, то

$$\| (U_t - I)^m f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[C_{2m}^m - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)\right]d(E_s f, f) \geq$$

$$\geq \int_{\sigma}^{\infty}\left[C_{2m}^m - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)\right]d(E_s f, f) = \int_{\sigma}^{\infty}C_{2m}^m d(E_s f, f) -$$

$$- 2\int_{\sigma}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)d(E_s f, f) = \mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}\, E_{\sigma}^2(f) -$$

$$2\int_{\sigma}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)d(E_s f, f).$$

Звідси маємо

$$\mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{E}_{\sigma}^2(f) \leq \omega_m^2(f, t) + 2\int_{\sigma}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)d(E_s f, f).$$

Розглянемо функцію

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \sin\frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{2}\sin\sigma t, & t \in [0; \frac{2\pi}{\sigma}]; \\ 0, & t \in (\frac{2\pi}{\sigma}; \pi]. \end{cases}$$

Із визначення $\varphi_\sigma(t)$ випливає, що $\varphi_\sigma(t) \geq 0$ при $0 \leq t < \infty$, причому $\int_0^{\pi}\varphi_\sigma(t)dt = \frac{4}{\sigma}$. Інтегруємо останню нерівність по відрізку $[0; \pi]$ з ваговою функцією $\varphi_\sigma(t)$:

$$\frac{4}{\sigma}\,\mathrm{C}_{2\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}\, E_{\sigma}^2(f) \leq \int_0^{2\pi/\sigma}\omega_m^2(f, t)\varphi_\sigma(t)dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi/\sigma}2\int_{\sigma}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)\varphi_\sigma(t)d(E_s f, f)dt. \tag{4.11}$$

Перетворимо другий доданок правої частини останньої нерівності.

$$\int_0^{2\pi/\sigma} 2\int_\sigma^\infty \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)(\sin\frac{\sigma t}{2}+\frac{1}{2}\sin\sigma t)d(E_s f,f)dt =$$

$$= 2\int_\sigma^\infty\left[\int_0^{2\pi/\sigma}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)(\sin\frac{\sigma t}{2}+\frac{1}{2}\sin\sigma t)dt\right]d(E_s f,f) =$$

$$= 2\int_\sigma^\infty\left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\int_0^{2\pi/\sigma}\left(\cos(kst)\sin\frac{\sigma t}{2}+\frac{1}{2}\cos(kst)\sin\sigma t\right)dt\right]d(E_s f,f).$$

$$\int_0^{2\pi/\sigma}\left(\cos(kst)\sin\frac{\sigma t}{2}+\frac{1}{2}\cos(kst)\sin\sigma t\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi/\sigma}\left(\frac{1}{4}\sin(\sigma+ks)t+\frac{1}{4}\sin(\sigma-ks)t+\sin(\frac{\sigma}{2}+ks)t+\sin(\frac{\sigma}{2}-ks)t\right)dt=$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma+\mathrm{ks})t}{\sigma+\mathrm{ks}}\Bigg|_0^{2\pi/\sigma}-\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma-\mathrm{ks})t}{\sigma-\mathrm{ks}}\Bigg|_0^{2\pi/\sigma}-\frac{\cos(\frac{\sigma}{2}+\mathrm{ks})t}{\frac{\sigma}{2}+\mathrm{ks}}\Bigg|_0^{2\pi/\sigma}-\frac{\cos(\frac{\sigma}{2}-ks)t}{\frac{\sigma}{2}-ks}\Bigg|_0^{2\pi/\sigma} =$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma+\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma+\mathrm{ks}}-\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma-\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma-\mathrm{ks}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma+\mathrm{ks}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma-\mathrm{ks}}-$$

$$-\frac{\cos(\sigma/2+\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma/2+\mathrm{ks}}-\frac{\cos(\sigma/2-\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma/2-\mathrm{ks}}+\frac{1}{\sigma/2+\mathrm{ks}}+\frac{1}{\sigma/2-\mathrm{ks}} =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma+\mathrm{ks}}+\frac{1}{\sigma-\mathrm{ks}}\right)+\frac{1}{\sigma/2+\mathrm{ks}}+\frac{1}{\sigma/2-\mathrm{ks}}-\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma+\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma+\mathrm{ks}}-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\cos(\sigma-\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma-\mathrm{ks}}-\frac{\cos(\sigma/2+\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma/2+\mathrm{ks}}-\frac{\cos(\sigma/2-\mathrm{ks})\,2\pi/\sigma}{\sigma/2-\mathrm{ks}} =$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2\sigma}{(\sigma+\mathrm{ks})(\sigma-\mathrm{ks})}+\frac{\sigma}{(\sigma/2+\mathrm{ks})(\sigma/2-\mathrm{ks})}-\frac{1}{4}\frac{\cos(2\pi)\cdot\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma+\mathrm{ks}}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\sin(2\pi)\cdot\sin(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma+\mathrm{ks}}-\frac{1}{4}\frac{\cos(2\pi)\cdot\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma-\mathrm{ks}}-\frac{1}{4}\frac{\sin(2\pi)\cdot\sin(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma-\mathrm{ks}}-$$

$$-\frac{\cos\pi\cdot\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma/2+\mathrm{ks}}+\frac{\sin\pi\cdot\sin(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma/2+\mathrm{ks}}-\frac{\cos\pi\cdot\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma/2-\mathrm{ks}}-\frac{\sin\pi\cdot\sin(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma/2-\mathrm{ks}} =$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2\sigma}{(\sigma+\mathrm{ks})(\sigma-\mathrm{ks})}+\frac{\sigma}{(\sigma/2+\mathrm{ks})(\sigma/2-\mathrm{ks})}-\frac{1}{4}\frac{\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma+\mathrm{ks}}-\frac{1}{4}\frac{\cos(2\pi\mathrm{ks}/\sigma)}{\sigma-\mathrm{ks}}+$$

$$+\ \frac{\cos(2\pi ks/\sigma)}{\sigma/2+ks}+\frac{\cos(2\pi ks/\sigma)}{\sigma/2-ks}=\frac{1}{4}\frac{2\sigma}{(\sigma+ks)(\sigma-ks)}+\frac{\sigma}{(\sigma/2+ks)(\sigma/2-ks)}-$$

$$-\cos\frac{2\pi ks}{\sigma}\left[\frac{1}{4}\frac{2\sigma}{(\sigma+ks)(\sigma-ks)}-\frac{\sigma}{(\sigma/2+ks)(\sigma/2-ks)}\right]=$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\frac{2\sigma}{(k^2s^2-\sigma^2)}\left(1-\cos\frac{2\pi ks}{\sigma}\right)+\frac{2\sigma}{(k^2s^2-(\sigma/2)^2)}\left(1+\cos\frac{2\pi ks}{\sigma}\right)\right]\ \le\ 0.$$

Значить, інтеграл

$$\int_0^{2\pi/\sigma}2\int_\sigma^\infty\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos(kst)\varphi_\sigma(t)d(E_sf,f)dt$$

буде недодатним і з нерівності (4.11) отримуємо

$$\frac{4}{\sigma}C_{2m}^m E_\sigma^2(f)\ \le\ \int_0^{2\pi/\sigma}\omega_m^2(f,t)\varphi_\sigma(t)dt\,,$$

що й доводить теорему.

4.2. Узагальнені модулі неперервності та нерівності з ними.

Як і в проперeдніх розділах, H - комплексний гільбертовий простір. Нехай $S,T:H\to H$ – лінійні обмежені оператори, такі, що $ST=TS$. Будемо припускати, що оператор $S|_{T(H)}:T(H)\to S(T(H))$ має обернений $(S|_{T(H)})^{-1}$. Через T^* і S^* будемо позначати спряжені оператори. Наведемо теорему для обмежених операторів, яку будемо використовувати у подальшому.

Теорема 4.2.1. *Для довільних $f\in H$ і $x\in H$ якщо*

$$|(Tx,f)|\le\|Sx\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^*f\right\|. \tag{4.12}$$

Якщо

$$\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^*(H)\subset S(T(H)), \tag{4.13}$$

то нерівність (4.12) є точною та обертається в рівність для

$$\tilde{x}=(S|_{T(H)})^{-1}\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^*f. \tag{4.14}$$

Доведення. Маємо

$$|(Tx,f)| = |((S|_{T(H)})^{-1}S|_{T(H)}Tx,f)| = |((S|_{T(H)})^{-1}STx,f)| =$$

$$= |((S|_{T(H)})^{-1}TSx,f)| = \left|\left(Sx,\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right)\right| \le \|Sx\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\|.$$

Нерівність доведено.

Для елементу $\tilde{x}$ маємо

$$S\tilde{x} = S(S|_{T(H)})^{-1}\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f = S|_{T(H)}(S|_{T(H)})^{-1}\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f = \left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f.$$

Отже,

$$(T\tilde{x},f) = \left(S\tilde{x},\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right) = \left(\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f,\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right) =$$

$$= \left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\|^{2} = \left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\| =$$

$$= \|S\tilde{x}\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\|.$$

Теорема доведена.

Наслідок 4.2.1. *Для довільного* $x \in H$

$$\|Tx\| \le \|Sx\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}\right\|. \qquad (4.15)$$

Якщо виконується умова (4.13), то нерівність (4.15) є точною.

Доведення. Із нерівності (4.12) отримуємо

$$\|Tx\| = \sup_{f\in H,\|f\|\le 1}|(Tx,f)| \le \|Sx\| \sup_{f\in H,\|f\|\le 1}\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}f\right\| = \|Sx\|\cdot\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}\right\|.$$

Доводимо точність отриманої нерівності. Нехай елемент $\tilde{f} \in H$, $\|\tilde{f}\| = 1$, такий, що

$$\left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}\tilde{f}\right\| = \left\|\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}\right\|.$$

Покладемо

$$\tilde{x} = (S|_{T(H)})^{-1}\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*}\tilde{f}.$$

Тоді будемо мати

$$\| T\tilde{x} \| \geq |(T\tilde{x}, \tilde{f})| = \| S\tilde{x} \| \cdot \| \left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^* \tilde{f} \| = \| S\tilde{x} \| \cdot \| \left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^* \|.$$

Наслідок доведено.

Наведемо деякі відомості із спектральної теорії операторів у гільбертовому просторі H. Говорять (див. [42, гл. XIII, 1]) що на σ-алгебрі B борелівських підмножин числової прямої задано розклад одиниці E, якщо кожному $\beta \in B$ поставлено у відповідність проектуючий оператор $E(\beta)$ в H причому виконуються наступні умови:

1. $E(\varnothing) = 0,\ E(\mathbb{R}) = I$;

2. Для довільної послідовності $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B$, що складається із

попарно неперетинаючихся множин,

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \beta_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\beta_j).$$

Заданий розклад одиниці породжує [42, гл. XIII, 6, 7] групу унітарних операторів U_t і самоспряжений оператор A:

$$U_t x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dE(s)x, \quad (t \in \mathbb{R}), \quad Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE(t)x.$$

Вимірна і майже всюди скінченна функція F: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ визначає функцію $F(A)$ від самоспряженого оператора A:

$$F(A)x = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dE(t)x.$$

При цьому

$$D(F(A)) = \left\{ x \in H : \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 d(E(t)x, x) < \infty \right\}$$

і

$$\| F(A) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 d(E(t)x, x).$$

Для самоспряженого оператора $F(A)^*$ і для оператора, оберненого до $F(A)$ (якщо він визначен) маємо

$$F(A)^* x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t)} dE(t)x \qquad \text{і} \qquad F(A)^{-1} x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F(t)} dE(t)x .$$

Далі визначимо узагальнені модулі неперервності елементів гільбертового простору. Позначимо через Φ множину неперервних невід'ємних 2π - періодичних функцій ψ, що мають ніде не щільну множину нулів і таких, що $\psi(0) = 0$. Нехай $\hat{f}_s$ - коефіцієнти Фур'є функції f, $\psi(\cdot) \in \Phi$. В роботах [1, 2, 5] було запропоновано узагальненим модулем неперервності функції $f \in L_2(\mathrm{T})$ називати функцію

$$\omega_\psi (f;\delta)_{L_2(\mathrm{T})} = \max_{t \in [0,\delta]} \left(\sum_{s \in \mathrm{Z}} \psi(st) \mid \hat{f}_s \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \delta \geq 0.$$

Нехай φ: ℂ → ℂ – неперервна функція, така, що $\psi(t) = |\varphi(e^{it})|^2 \in \Phi$. Зокрема, $\varphi(1) = 0$ і на довільній дузі кола $|z| = 1$ функція $\varphi(z)$ відмінна від тотожного нуля. Визначемо узагальнену різницю елемента $x \in H$ з кроком t покладаючи

$$\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{its}\right) dE(s)x.$$

Зрозуміло, що

$$\left\|\Delta_t^\varphi x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{its}\right)\right|^2 d\left(E(s)x, x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(st\right) d\left(E(s)x, x\right).$$

Відмітимо, що $\left\|\Delta_t^\varphi x\right\|$ неперервно залежить від t і $\left\|\Delta_t^\varphi x\right\| \to 0, t \to 0$.

Узагальненим модулем неперервності елемента x гильбертового простору H назвемо

$$\omega_\varphi(x;\delta) = \max_{0 \leq t \leq \delta} \left\|\Delta_t^\varphi x\right\| = \left\|\left\|\Delta_t^\varphi x\right\|\right\|_{C([0,\delta])} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(st\right) d\left(E(s)x, x\right) \right\|_{C([0,\delta])}^{1/2} . \qquad (4.16)$$

Окрім $\omega_\varphi(x;\delta)=\omega_\varphi(x;C([0,\delta]))$, будемо розглядати характеристики $\omega_\varphi(x;L_{p,V}([0,\delta]))$, в яких $1\le p<\infty$, $V(t)$ є вага, тобто є невід'ємна інтегровна на $[0,1]$ функція, відмінна від нуля на множині повної міри. Покладемо

$$\omega_\varphi(x;L_{p,V}([0,\delta]))=\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\left\|\Delta_t^\varphi x\right\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right)dt\right)^{1/p}.$$

Ясно, що

$$\omega_\varphi(x;L_{2,V}([0,\delta]))=\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta V\left(\frac{t}{\delta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(st)d(E(s)x,x)dt\right)^{1/2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(V;\delta s)d(E(s)x,x)\right)^{1/2},$$

де

$$\Gamma(V;t)=\int_0^1\psi(t\upsilon)V(\upsilon)d\upsilon.$$

Функція $\Gamma(V;t)$ неперервно залежить від t і обертається в нуль тільки в точці нуль. Зауважимо, що при довільному $\delta>0$ буде $\omega_\varphi(x;L_{p,V}([0,\delta]))\to\omega_\varphi(x;C([0,\delta]))$, якщо $p\to\infty$.

Нижче нам буде зручно припускати, що $\|V(\cdot)\|_1:=\|V(\cdot)\|_{L_1([0,1])}=1$. Тоді, в силу нерівності Гельдера, для $2\le p\le\infty$ при всіх $\delta>0$

$$\omega_\varphi(x;L_{2,V}([0,\delta]))\le\omega_\varphi(x;L_{p,V}([0,\delta])). \tag{4.17}$$

Розглядаються задачі апроксимації елементів гільбертового простору підпросторами виду

$$W_\sigma=\left\{\int_{|t|<\sigma}dE(s)g\ \ :\ \ g\in H\right\},\quad \sigma>0.$$

Для аппроксимації будемо використовувати лінійні методи наближення виду

$$\Lambda x=\int_{|t|<\sigma}\lambda(t)dE(t)x,$$

де $\lambda(t)$ - неперервна в $(-\sigma,\sigma)$, обмежена, комплекснозначна функція, тотожньо рівна одиниці в деякому інтервалі $(-\varepsilon,\varepsilon), 0<\varepsilon<\sigma$. Тоді

$$(I-\Lambda)x = x-\Lambda x = \int\limits_{|t|<\sigma} \big(1-\lambda(t)\big) dE(t)x + \int\limits_{|t|\ge\sigma} dE(t)x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(t)dE(t)x,$$

де $\theta(t)=1-\lambda(t)$, якщо $|t|<\sigma$, і $\theta(t)=1$, якщо $|t|\ge\sigma$.

Для довільного елемента $x\in H$ такого, що $x\ne U_t x$ при деякому t, розглянемо значення функціонала $f\in H^*=H$ на різниці $x-\Lambda x$. Отримаємо нерівності, що пов'язують $|(x-\Lambda x, f)|$ і $\omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))$. У теоремі 1 покладемо $S=\Gamma(V;\delta\cdot)^{1/2}(A)$, $T=I-\Lambda$. T і S – обмежені оператори. При цьому, в силу того, що $\theta(t)\equiv 0$ для $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, а неперервна функція $\Gamma(V;\delta t)$ обертається в нуль тільки в точці нуль, оператор $\left(S|_{T(H)}\right)^{-1}$ існує,

$$\left(S|_{T(H)}\right)^{-1}T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(t)dE(t)}{\Gamma(V;\delta t)^{1/2}}, \quad \left(\left(S|_{T(H)}\right)^{-1}T\right)^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}dE(t)}{\Gamma(V;\delta t)^{1/2}}$$

(як зазвичай, вважаємо, що $0/0=0$) і для довільних $x, f\in H$

$$\|Sx\|^2 = \omega_\varphi(F(A)x; L_{2,V}([0,\delta]))^2, \quad \left\|\left(\left(S|_{T(H)}\right)^{-1}T\right)^* f\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2\, d(E(t)f,f)}{\Gamma(V;\delta t)}. \quad (4.18)$$

Використовуючи нерівність (), отримаємо

$$|(x-\Lambda x, f)| \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2\, d(E(t)f,f)}{\Gamma(V;\delta t)}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta])). \quad (4.19)$$

Як слідує з теореми 4.2.1 ця нерівність обертається в рівність для елементу

$$\tilde{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V;\delta t)} dE(t)f.$$

Дійсно, використовуючи властивість мультиплікативності спектральних інтегралів див. [42, гл. XIII, 2], можна перевірити, що для визначенних у даному параграфі операторів S і T умова (4.13) виконується. Неважко також перевірити, що для $x\in S(T(H))$

$$(S|_{T(H)})^{-1}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(V;\delta t)^{1/2}} dE(t)x.$$

Використовуючи формулу (4.14) із теореми 4.2.1 і властивість мультиплікативності спектральних інтегралів, отримаємо що нерівність (4.19) обертається в рівність для елемента

$$\tilde{x} = (S|_{T(H)})^{-1}\left((S|_{T(H)})^{-1}T\right)^{*} f =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(V;\delta t)^{1/2}} dE(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V;\delta t)^{1/2}} dE(t) f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V;\delta t)} dE(t) f.$$

Таким чином, доведена

Теорема 4.2.2. *Для довільної неперервної в* $(-\sigma,\sigma)$, *обмеженої, комплекснозначної функції* $\lambda(t)$ *такої, що* $\lambda(t) \equiv 1$ *в* $(-\varepsilon,\varepsilon), 0 < \varepsilon < \sigma$ *, лінійного методу наближення* $\Lambda x = \int_{|t|<\sigma} \lambda(t) dE(t) x$, *будь-якого елемента* $x \in H$ *такого, що* $x \neq U_t x$ *для деякого* t, *довільного елемента* $f \in H$ *і будь-якої ваги* $V(t)$ *має місце точна нерівність (4.19). Зокрема,*

$$\left| \left(x - \int_{|t|<\sigma} dE(t)x, f \right) \right| \le \left(\int_{|t|\ge\sigma} \frac{d(E(t)f,f)}{\Gamma(V;\delta t)} \right)^{1/2} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0,\delta])).$$

Із нерівності (4.15) з урахуванням (4.18) виводимо

$$\|x - \Lambda x\|^2 \le \left\| \left((S|_{T(H)})^{-1} T \right)^{*} \right\|^2 \cdot \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2.$$

Покладемо

$$H(V,\lambda,\delta,\sigma) = \sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(V;\delta t)}, \quad G(V,\delta,\sigma) = \inf_{|t|\ge\sigma} \Gamma(V;\delta t).$$

Будемо мати

$$\left\| \left((S|_{T(H)})^{-1} T \right)^{*} \right\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 \, d(E(t)f,f)}{\Gamma(V;\delta t)} \le$$

$$\le \sup_{\|f\|=1} \left(\sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(V;\delta t)} \int_{|t|<\sigma} d(E(t)f,f) + \sup_{|t|\ge\sigma} \frac{1}{\Gamma(V;\delta t)} \int_{|t|\ge\sigma} d(E(t)f,f) \right) \le$$

$$\leq \max\left\{H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}\right\}.$$

Покажимо, що якщо розклад одиниці такий, що $E([t,t+\varepsilon]) \neq 0$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$, то

$$\left\| \left((S|_{T(H)})^{-1} T \right)^* \right\|^2 = \max\left\{H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}\right\}. \tag{4.20}$$

Розглянемо випадок, коли $\max\left\{H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}\right\} = \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}$.

Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $t_\varepsilon, |t_\varepsilon| \geq \sigma,$ таке, що $\Gamma(V;\delta t_\varepsilon) \leq G(V,\delta,\sigma) + \varepsilon$ (для визначенності будемо вважати, що $t_\varepsilon \geq \sigma$.). Нехай $\gamma > 0$ настільки мале, що в інтервалі $[t_\varepsilon, t_\varepsilon + \gamma]$ виконується нерівність $\Gamma(V;\delta t) \leq \Gamma(V;\delta t_\varepsilon) + \varepsilon$ (в силу неперервності функції $\Gamma(V;\delta t)$ такий вибір γ можливий). Виберемо елемент $f_\varepsilon \in E([t_\varepsilon, t_\varepsilon + \gamma])(H)$ такий, що $\|f_\varepsilon\| = 1$. Будемо мати

$$\sup_{\|f\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 \, d(E(t)f,f)}{\Gamma(V;\delta t)} \geq \int_{[t_\varepsilon, t_\varepsilon+\gamma]} \frac{d(E(t)f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\Gamma(V;\delta t)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)+2\varepsilon} \int_{[t_\varepsilon, t_\varepsilon+\gamma]} d(E(t)f_\varepsilon, f_\varepsilon) = \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)+2\varepsilon}.$$

В силу довільного вибору ε у випадку, що розглядається, співвідношення (4.20) доведено. Випадок, коли $\max\left\{H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}\right\} = H(V,\lambda,\delta,\sigma)$, розбирається аналогічно.

Таким чином, доведена

Теорема 4.2.3. *Для будь-якого елемента* $x \in H$ *такого, що* $x \neq U_t x$ *при деякому* t*, справедлива нерівність*

$$\|x - \Lambda x\|^2 \leq \max\left\{H(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)}\right\} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2. \tag{4.21}$$

Зокрема, для найкращого наближення елементу $x \in H$ підпростором W_σ маємо

$$E_\sigma(x)^2 = \left\| x - \int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x \right\|^2 \le \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2. \qquad (4.22)$$

Якщо розклад одиниці такий, що $E([t,t+\varepsilon]) \ne 0$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$, то нерівності (4.21) і (4.22) є точними.

Наслідок 4.2.2. *В умовах теореми 4.2.3 при* $2 \le p \le \infty$ *має місце нерівність*

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{G(V,\delta,\sigma)^{\frac{1}{2}}} \omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])). \qquad (4.23)$$

Наведемо узагальнення деяких результатів із [57, 59].

Якщо знайдеться така вагова функція $V = \tilde{V}$ (нагадаємо, що $\|V\|_1 = 1$), що для неї при деякому $\gamma > 0$ виконується нерівність

$$G(V,\frac{\gamma}{\sigma},\sigma) = G(V,1,\gamma) \ge I(\psi), \qquad (4.24)$$

де $I(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t)dt$, то із (16) при $2 \le p \le \infty$ будемо мати

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}} \omega_\varphi\left(x; L_{p,\tilde{V}}\left(\left[0,\frac{\gamma}{\sigma}\right]\right)\right). \qquad (4.25)$$

Зокрема, при $p = \infty$

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}} \omega_\varphi\left(x; C\left(\left[0,\frac{\gamma}{\sigma}\right]\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}} \omega_\varphi\left(x; \frac{\gamma}{\sigma}\right). \qquad (4.26)$$

В [59] доведено, що така вагова функція існує, і наведена схема побудови функції $\tilde{V}(t)$. Таким чином встановлено наступне твердження.

Теорема 4.2.4. *Для довільної функції* $\varphi: \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ *такої, що* $\psi \in \Phi$, *існує точка* $\gamma > 0$ *така, що для довільного* $x \in H$ *і будь-якого* $\sigma > 0$ *виконуються нерівності (4.25) і (4.26).*

Звузимо в порівнянні з Φ клас функцій ψ, що розглядаємо. Через Ψ позначимо (см. [57]) сукупність функцій $\psi \in \Phi$ таких, що

1. $\psi(-t)=\psi(t)$ і $\psi(\pi-t)=\psi(\pi+t)$ для $t\in\mathbb{R}$,

2. $\frac{1}{t}\int\limits_0^t\psi(s)ds\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\psi(s)ds$ для довільного $t\in(0,\pi)$.

Нехай

$$Z(t)=\begin{cases}\frac{2t}{7}, & t\in\left[0,\frac{1}{7}\right],\\ \frac{-t^2}{2}+\frac{3t}{7}-\frac{1}{98}, & t\in\left[\frac{1}{7},\frac{5}{7}\right],\\ \frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}, & t\in\left[\frac{5}{7},1\right].\end{cases}$$

Покладемо $V^*(t)=Z(t)/\|Z(\cdot)\|_1$. Із результатів роботи [57, теорема 1] випливає, що для вагової функції $V=V^*$, для $\psi\in\Psi$ і будь-якого $\gamma\ge\frac{7\pi}{5}$ виконується нерівність (4.24). Тому має місце

Теорема 4.2.5. *Для довільної функції* $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *такої, що* $\psi\in\Psi$, *для будь-якого* $\gamma\ge\frac{7\pi}{5}$, *довільного* $x\in H$ *і довільного* $\sigma>0$ *виконується нерівність (4.25) (з заміною* $\tilde{V}$ *на* V^**) і (4.26).*

Тепер розглянемо іншу вагову функцію

$$\hat{V}(t)=\begin{cases}5/4, & t\in[0,1/2],\\ 3/4, & t\in(1/2,1].\end{cases}\qquad \|\hat{V}\|_1=1.$$

У [57, теорема 2] показано, що для $\psi\in\Psi$ і $\gamma=\pi$ виконується нерівність

$$G(\hat{V},\frac{\gamma}{\sigma},\sigma)\ge\frac{3}{4}I(\psi).$$

Із (4.23) виводимо, що має місце

Теорема 4.2.6. *Для довільної функції* $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *такщї, що* $\psi\in\Psi$, *довільного* $x\in H$ *і будь-якого* $\sigma>0$ *виконується нерівність*

$$E_\sigma(x)\le\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{I(\psi)}}\,\omega_\varphi\left(x;L_{p,\hat{V}}\left(\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right]\right)\right),\qquad 2\le p\le\infty. \tag{4.27}$$

Наведені вище результати містять в собі ряд точних нерівностей типу Джексона – Стєчкина (см., например, [57, 59]) для найкращих L_2 -

наближень періодичних функцій тригонометричними поліномами, результати щодо найкращих L_2 - наближень функцій, заданих на всій осі цілими функціями експоненціального типу, а також аналогічні результати для майже періодичених функцій. Уже в цих конкретних випадках деякі результати є новими.

Результати для періодичних функцій отримуються, якщо у просторі $L_2(\mathrm{T})$ обрати розклад одиниці наступним чином. Для довільного борелівської множини $\beta \subset \mathrm{T}$ і функції $x \in L_2(\mathrm{T})$

$$E(\beta)x(t) := \sum_{k\in\beta} \hat{x}_k e^{ikt}.$$

Результати для функцій із $L_2(\mathrm{R})$ отримуються, якщо в цьому просторі обрати розклад одиниці, що відповідає оператору $\frac{1}{i}\frac{d}{du}$, для якого, в силу формули обращения перетворення Фур'є,

$$E([s,t])x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(z-u)} - e^{is(z-u)}}{i(z-u)} x(z)dz,\ s,t \in \mathrm{R}, s < t.$$

Докладно зупинимося на випадку майже періодичних функцій. У лінійному просторі Π функцій, майже періодичних по Бору, можна ввести скалярний добуток (см. [72, Дополнение, §7]) $(x,y) = M[x(t)\overline{y(t)}] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\overline{y(t)}dt$ і норму $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Поповнюючи отриманий предгільбертовий простір, отримаємо гильбертовий простір $\tilde{\Pi}$, який містеться у просторі B^2 функцій майже періодичних по Безиковичу. Для $x \in \tilde{\Pi}$ і $\lambda \in \mathrm{R}$ покладемо

$$a(x,\lambda) = M[x(t)e^{-i\lambda t}].$$

Як відомо, для довільного $x \in \tilde{\Pi}$ множина $Sp(x) = \{\lambda : a(x,\lambda) \neq 0\}$ не більш ніж зліковна.

У просторі $\tilde{\Pi}$ визначимо розклад одиниці наступним чином. Для довільної борелівської множини $\beta \subset \mathrm{R}$ і функції $x \in \tilde{\Pi}$

$$E(\beta)x(t) := \sum_{\lambda\in\beta\cap \mathrm{S}p(x)} a(x,\lambda)e^{i\lambda t}.$$

Тоді будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE(s)x(t) = \sum_{\lambda\in \mathrm{S}p(x)} a(x,\lambda)e^{i\lambda t}.$$

Для $\sigma > 0$ покладемо

$$E_\sigma(x) = \inf_{\substack{y\in\tilde{\Pi} \\ \mathrm{S}p(y)\subset(-\sigma,\sigma)}} \|x-y\|.$$

Будемо для простоти розглядати тільки функції $x\in\tilde{\Pi}$, для яких $\mathrm{S}p(x)$ має єдину граничну точку у нескінченності. В силу равності Парсеваля

$$E_\sigma^2(x) = \sum_{\substack{\lambda\in \mathrm{S}p(x) \\ |\lambda|\ge\sigma}} |a(x,\lambda)|^2 .$$

Тепер легко побачити, що для величин $E_\sigma(x)$ і узагальнених модулів неперервності $\omega_\varphi(x,\delta)$, побудованих за допомогою визначенного вище розкладу одиниці, справедливі твердження теореми 4.2.3, наслідок 4.2.2, а також (при додаткових припущеннях про функцію φ) твердження теорем 4.2.4, 4.2.5 і 4.2.6.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі отримані нові точні нерівності для наближення елементів гільбертового простору підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці та вказані умови точності отриманих нерівностей.

Доведено точні оцінки апроксимації елементів гільбертового простору довільним лінійним методом наближення, діючим у підпростір цілих векторів експоненціального типу.

Загальні висновки

Одержано нові точні нерівності типу Джексона-Стєчкіна для функцій f зі значеннями в гільбертовому просторі, що оцінюють найкраще наближення функції узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції.

Одержано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичними в одиничному колі.

Знайдені точні значення слабких поперечників по Колмогорову деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі. Зокрема, розглянуті класи:

- $H^{1/2}_{2,\mathrm{H}}$ клас 2π – періодичних функцій f, інтегровних за Бохнером на $[0; 2\pi]$, для яких $\omega\,(f;\,t)_{2,H} \le \sqrt{t}$,

- $$\mathrm{W}^{\Lambda,\mathrm{M},n}_{2,\mathrm{H}} = \left\{ \mathrm{f(t)} \in \mathrm{L}_2([0;2\pi),\mathrm{H}) : \int_0^{\pi/n} \omega(\mathrm{f}^{(\Lambda,\mathrm{M})},\mathrm{t})\mathrm{dt} \le 1 \right\},$$

  де $f^{(\Lambda,\mathrm{M})}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt)$, $|\lambda_n| = |\mu_n|$.

Отримані точні нерівності типу Джексона-Стєчкіна для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

Запропоновано поняття модулів неперервності типу $\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta]))$, що дозволяє з єдиної точки зору розглядати класичні та інтегральні нерівності типу М.І. Черниха, а також інтегральні нерівності типу Тайкова Л.В. Одержано точні оцінки значення довільного обмеженого функціонала на різниці x - Λx наближуваного елемента x і значення на ньому лінійного метода Λ його наближення через введені узагальнені модулі неперервності.

Отримані нові точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору H підпросторами $W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \;:\; g \in H \right\}$ та $W_{-\sigma,\sigma} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_s g \;:\; g \in H \right\}$ ($\sigma > 0$), пов'язаними з заданим розкладом одиниці через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору. Зазначені умови точності цих нерівностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Boman J.* Equivalence of generalized modulus of continuity / J. Boman // Arkiv for Matematik. – 1980. – V. 18, № 1. – P. 73–100.
2. *Boman J.* Comparison theorems for a generalized modulus of continuity / J. Boman, H.S. Shapiro // Arkiv for Matematik. – 1971. – V. 9, № 1. – P. 91–116.
3. *Jackson D.* Uber die Genauigkeit des Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss., Gottingen, 1911.
4. *Jackson D.* Some note of trigonometric interpolation / D. Jackson // Amer. Math. Monthly. – 1927. – V. 34. – P. 401 – 405.
5. *Shapiro H.S.* Tauberian theorem related to approximation theory / H.S. Shapiro // Acta Math. – 1968. – V. 120. – P. 279–292.
6. *Айнуллоев Н.* Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 / Н. Айнуллоев // Докл. АН ТаджССР. – 1984. – Т. 27, № 8. – С. 415–418.
7. *Айнуллоев Н.* О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 / Н. Айнуллоев // Докл. АН ТаджССР. – 1985. – Т. 28, № 6. – С. 309–313.
8. *Арестов В.В.* Наилучшее приближение одного класса функций многих переменных другим и родственные экстремальные задачи / В.В. Арестов // Мат. заметки. – 1998. – Т.64, № 3. – С. 323 – 340.
9. *Арестов В.В.* Неравенство Джексона на сфере в L_2 / В.В. Арестов, В.Ю. Попов // Известия ВУЗов. Математика. – 1995. – Т. 399, № 8. – С. 13–20.

10. *Арестов В.В.* Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Тезисы докл. Междунар. конф. „Теория приближения и задачи вычислительной математики”. – Днепропетровск: ДГУ, 1993. – С.8.

11. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 406 с.

12. *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука. Глав. Ред. физ.-мат. лит., 1966. – 544 с.

13. *Бабенко А.Г.* О неравенстве Джексона в пространстве L_2 / А.Г. Бабенко // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1987. – С. 4 – 14.

14. *Бабенко А.Г.* О неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами / А.Г. Бабенко // Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 1. – С. 30–46.

15. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 / А.Г. Бабенко // Мат. заметки. – 1976. – Т.39, № 3. – С. 353 – 354.

16. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 / А.Г. Бабенко // Мат. заметки. – 1986. – Т.39, № 5. – С. 651 – 664.

17. *Бабенко А.Г.* Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве L_2 функции на многомерной сфере / А.Г. Бабенко // Мат. заметки. – 1996. – Т. 60, № 3. – С. 333 – 355.

18. *Бабенко А.Г.* Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве $L_2(R^m)$ / А. Г. Бабенко // Тр. ИММ УрО РАН. – 1998. – № 5. – С. 182–198.

19. *Бабенко В.Ф.* Аппроксимация непрерывных вектор-функций / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, №11 – С. 1435–1448.

20. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Конарева // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 9. - С. 1155–1165.
21. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 19, № 6/1 – С. 8–14.
22. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 20, № 6/1 – С. 60–66.
23. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнарод. конф. присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, 28 травня– 3 червня 2012 р.: тези допов. – Кам’янець-Подільський, Україна, 2012. – С. 19.
24. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2008. – Т. 16, № 6/1 – С. 10–20.
25. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона с обобщенными модулями непрерывности для оценки наилучшего приближения элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Сборник тезисов Международной конференции по Современному Анализу, 20–23 июня 2011 г.: тезисы докл. – Донецк, Украина, 2011. – С. 23.
26. *Бабенко В.Ф.* Нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності / В.Ф. Бабенко, С.В. Конарева // Всеукраїнська наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка. Тези доповідей. – 3-5 жовтня 2019. – Дніпро. – С.
27. *Бабенко В.Ф.* О некоторых неравенствах типа Джексона в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // FM-2009

Conference „Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III”, August 22–26, 2009. – Village Svityaz, Volyn, 2009. – C. 17–18.

28. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Боголюбовські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнарод. наук. конф., 16–21 червня 2008 р.: тези допов. – Мелітополь, 2008. – С. 13.
29. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 23–25 травня 2007 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 13–14.
30. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона для наилучших L_2-приближений при помощи вейвлет / В.Ф. Бабенко, Г.С. Жиганова, Л.С. Новикова // Вестник ДНУ. Математика. – 2006. – Т. 14, № 6/1. – С. 3–8.
31. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона для функций, заданных на сфере / В.Ф. Бабенко, В.Г. Доронин, А.А. Лигун, А.А. Шумейко // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 3. – С. 291–303.
32. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 12–13.
33. *Бабенко В.Ф.* О точности неравенств типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теория приближений и её приложения: международ. конф. памяти Н.П. Корнейчука, 14–17 июня 2010 г.: тезисы докл. – Днепропетровск, 2010. – С. 17–18.

34. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Зб. праць Інстит. матем. НАН України – 2013. – Т. 10, № 1 – С. 18-27.

35. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – Т. 18, № 6/1 – С. 49–58.

36. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Український математичний конгрес: міжнарод. конф., 27-29 травня 2009 р.: тези допов. – Київ. – [Електроний ресурс] . – http://www.imath.kiev.ua/ congress2009.

37. *Бабенко В.Ф.* Теорема о поперечнике шара в пространствах отображений // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Т. 17, № 6/1. – С. 15–22.

38. *Балаганский В*.С. Точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве L^2 на периоде / В.С. Балаганский // Тр. ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 79–101.

39. *Бейтман Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

40. *Бердышев В.И.* О теореме Джексона в L_p / В.И. Бердышев // Тр. мат. ин-та. – 1967. – Т.88. – С. 3–16.

41. *Бердышева Е.Е.* Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных / Е.Е. Бердышева // Мат. заметки. – 1999.– Т. 66, № 3. – С. 336–350.

42. *Березанский Ю.М.* Функциональный анализ. Курс лекций. / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.

43. *Бирман М.Ш.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. – Ленинград: Из-во Ленинград. ун-та, 1980. – 264 с.

44. *Божуха Л.Н.* Наилучшее приближение функций в пространстве L_2 / Л.Н. Божуха // Журн. „Експрес-новини: наука, техніка, виробництво”. – 1997. – № 3-4.

45. *Божуха Л.Н.* Неравенства типа Джексона при приближении функций полиномами Фейера, Рогозинского и Коровкина / Л.Н. Божуха // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 12 – С. 1596–1602.

46. *Божуха Л.Н.* О неравенстве типа Джексона при приближении функции линейными методами суммирования в пространстве L_2 / Л.Н. Божуха // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 4. – С. 537–545.

47. *Божуха Л.Н.* Оценка снизу приближения функций из L_2 линейными методами суммирования / Л.Н. Божуха // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2001. – Т. 9, № 5. – С. 23–28.

48. *Божуха Л.Н.* Поперечник одного класса функций в пространстве L_2 / Л.Н. Божуха // Сб. науч. тр. ДГТУ. – 2000. – Т. 2. – С. 366–369.

49. *Бредихина Е.А*. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Е.А. Бредихина // ДАН СССР. – 1968. – 179, № 6. – С. 1023–1026.

50. *Бредихина Е.А*. Почти периодические функции. / Е.А. Бредихина // Математическая энциклопедия. Т. 4. – М, 1984. – С. 543–545.

51. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций / С.Б. Вакарчук, А.Н. Щитов// Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 11. – С. 1458–1466.

52. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 1. – С. 11–19.

53. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 / С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная // Мат. заметки. – 2012. – 92, В 4. – С. 497-514.

54. *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 3. – С. 334–345.

55. *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях 2π-периодических функций и точных значениях n-поперечников функциональных классов в пространстве L_2 / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1603–1615.

56. *Вакарчук С.Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки. – 2005. – Т. 78, № 5. – С. 792–796.

57. *Васильев С.Н.* Неравенство Джексона-Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ / С.Н. Васильев // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. – 2001. – Т. 7, №1. – С. 75–84.

58. *Васильев С.Н.* Неравенство Джексона в $L_2(T^N)$ с обобщенным модулем непрерывности / С.Н. Васильев // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. – 2009. – Т. 15, №1. – С. 102–110.

59. *Васильев С.Н.* Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами / С.Н. Васильев // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385, № 1. – С. 11–14.

60. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.

61. *Волчков В.В.* О точных константах в неравенствах типа Джексона в пространстве L_2 / В.В. Волчков // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 1. – С. 108 – 110.

62. *Гельфанд И.М.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства / И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин – М.: Физматгиз, 1961. – 472 с.

63. *Горбачев Д.В.* Избранные задачи теории функций и теории приближения / Д.В. Горбачев – Тула. – 2004. – 153с.

64. *Горбачев В.Д.* Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа / В.Д. Горбачев, С.А. Странковский // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 5. – С. 712–717.

65. *Горбачук В.И.* Операторный подход к задачам аппроксимации / В.И Горбачук, М.Л. Горбачук // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, № 6. – С. 90–108.

66. *Горбачук М.Л.* Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца / М.Л. Горбачук, Я.І. Грушка, С.М. Торба // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, № 5. – С. 633–643.

67. *Григорян Ю.И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах / Ю.И. Григорян // Мат. заметки. – 1973. – Т.13, № 5. – С. 637–646.

68. *Давидчик А.Н.* О точных константах в неравенствах типа Джексона / А.Н. Давидчик, А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1981. – Т. 29, № 5. – С. 761–769.

69. *Давидчик А.Н.* О порядке роста констант Джексона / А.Н. Давидчик, А.А. Лигун // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приближения. – Днепропетровск: ДГУ, 1984. – С. 13–21.

70. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1966. – 1064 с.

71. *Дерец Е.В.* Об оценках снизу поперечников классов функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / Е.В. Дерец // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 3. – С. 319–328.

72. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович – М.: Наука. – 1967. – 472с.

73. Дзядик В.К. Про точні верхні грані найкращих наближень на деяких класах функцій, визначених на дійсній осі / В.К. Дзядик // Доп.АН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 7. – с. 589–592.

74. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем / А.Я. Дороговцев. – К.: Вища школа, 1992. – 319 с.

75. *Дороговцев А.Я.* Элементы анализа векторних функций, Математика сегодня 86 / А.Я. Дороговцев. – К.: Вища школа, 1986. – С. 105–128.

76. *Доронін В.Г.* Узагальнення деяких нерівностей типу Джексона в просторі L_2 / В.Г. Доронін, Л.М. Божуха // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2001. – № 6. – С. 58–63.

77. *Доронин В.Г.* О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / В.Г. Доронин, А.А. Лигун // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 1. – С. 16–19.

78. *Доронин В.Г.* Точная константа в неравенстве Джексона в пространстве L_2 / В.Г. Доронин, А.А. Лигун // Укр. мат. журнал. – 1994. – Т.46, № 9. – С. 1261 – 1265.

79. *Есмаганбетов М.Г.* Поперечники классов из L_2 $[0; 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. / М.Г. Есмаганбетов // Мат. заметки. – 1999. – Т. 65, № 6. – С. 816–820.

80. *Жук В.В.* О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями функций и модулями непрерывности / В.В. Жук // Сибирский мат. журн. – 1971. – Т. 12. – С. 1283–1291.
81. *Жук В.В.* Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности высших порядков / В.В. Жук // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 281–288.
82. *Жук В.В*. Аппроксимация периодических функций / В.В. Жук. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1982. – 296 с.
83. *Ибрагимов И.И.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени. / И.И. Ибрагимов, Ф.Г. Насибов // ДАН СССР. – 1970. – 194, № 5. – С. 1013–1016.
84. *Иванов В.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p / Иванов В.И., Смирнов О.И. – Тула, 1995. – 192 с.
85. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
86. *Исмагилов Р.С.* О поперечниках класса гладких функций в пространстве L_2 / Р.С. Исмагилов, Х. Насырова // Мат. заметки. – 1977.– Т. 22, № 5. – С. 671–678.
87. *Козко А.И*. О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности / А.И. Козко, А.В. Рождественский // Мат. заметки. – 2003. – Т. 73, № 5. – С. – 783–788.
88. *Козко А.И*. О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности / А.И. Козко, А.В. Рождественский // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 3–46.
89. *Колмогоров А.Н.* Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – Т. 37 – С. 107 – 111.
90. *Конарева С.В*. Нерівності типу Джексона-Стєчкіна у гільбертовому просторі / С.В. Конарева // "Теорія наближення функцій та її

застосування", міжнародна конференція присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2017 р. : тези допов. – Слов’янськ, Україна – 2017. – С. 64.

91. *Конарева С.В.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / С.В. Конарева // "Теорія наближень і її застосування", міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В.П. Моторного, 8-11 жовтня 2015 р.: тези допов. – Дніпропетровськ. – 2015. – С. 39.

92. *Корнейчук Н.П.* Замечание к теореме Джексона для дифференцируемых функций / Н.П. Корнейчук // Мат. заметки. – 1972. – Т.12, № 5. – С. 517 – 522.

93. *Корнейчук Н.П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций / Н.П. Корнейчук // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140. – С. 748–751.

94. *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций / Н.П. Корнейчук // Мат. заметки. – 1982. – Т. 32, № 5. – С. 669– 674.

95. *Корнейчук Н.П.* Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций / Н.П. Корнейчук // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145. – С. 514–515.

96. *Корнейчук Н.П.* Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций / Н.П. Корнейчук // ДАН СССР, 1963. – Т.150. – С. 1218–1220.

97. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1987. – 423 с.

98. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

99. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближения / П.П. Коровкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 213 с.

100. *Купцов Н.П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н.П. Купцов // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23, В. 4. – С. 118–178.

101. *Курант Р.* Методы математической физики. Т.1. / Р. Курант, Д. Гильберт. – Л.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.

102. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. / Б.М. Левитан. – М.: Гос. из-во техн.-теоретической лит-ры, 1953. – 396 с.

103. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. / Б.М. Левитан, В.В. Жиков – М., Изд-во Московского университета, 1978. – 205 с.

104. *Лигун А.А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениям и модулем непрерывности в пространстве L_2 / А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24, № 6. – С. 785–792.

105. *Лигун А.А.* Некоторые экстремальные задачи приближения / А.А. Лигун // Poceeding of the conferens on Approximation and Function Spases, 79. – Warszava, 1981. – С. 408–418.

106. *Лигун А.А.* О константах в теореме Джексона / А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1985. – Т.37, № 3. – С. 326 – 336.

107. *Лигун А.А.* О точных константах в неравенствах типа Джексона / А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1985. – Т. 38, № 2. – С. 248 – 255.

108. *Лигун А.А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 / А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1988. – Т. 43, № 6. – С. 757–769.

109. *Лигун А.А.* Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами / А.А. Лигун, В.Е. Капустян, Ю.И. Волков. – К.: Вища школа, 1990. – 211 с.

110. *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, Л.А. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

111. *Московский А.В.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_{p,\lambda}(R_+)$ / А.В. Московский // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Матем., мех., информатика. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 44–70.

112. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

113. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 688 с.

114. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

115. *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой / С.А. Пичугов // Укр. мат. журнал. – 2000. – Т.52, №1. – С. 122–133.

116. *Попов В.Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа / В.Ю. Попов // Известия ВУЗов. Математика. – 1972. – Т. 121, № 6. – С. 65–73.

117. *Притула Я.Г.* О неравенстве Джексона для B^2-почти периодических функций / Я.Г. Притула // Известия ВУЗов. Математика. – 1972. – 123, № 8. – С. 90–93.

118. *Притула Я.Г.* Оцінки наближень B^2 майже періодичних функцій / Я.Г. Притула, М.М. Яцимірський // Вопросы математического анализа и его приложение. Вести Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1983. – В.21. – С. 3–7.

119. *Савела С.В.* Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах / С.В. Савела // Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013р.: тези допов. – Севастополь, Україна – С. 266.

120. *Савела С.В.* О поперечниках некоторых классов функций со значениями в гильбертовом пространстве / С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Т. 17, № 6/1 – С. 105–111.

121. *Секефальви Надь Б.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. – М.: Мир. 1970. – 431 с.

122. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 334 с.

123. *Степанец А.И.* Равномерное приближение тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К.: Наукова думка, 1981. – 339 с.

124. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – К.: Наукова думка, 1987. – 263 с.

125. *Степанец А.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, № 1. – С. 106 – 124.

126. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С.Б. Стечкин // Мат. заметки. – 1951. – Т. 15. – С. 219–242.

127. *Стечкин С.Б.* Замечание к теореме Джексона / С.Б. Стечкин // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 17–19.

128. *Тайков Л. В.* Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 / Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1977. – 22, № 4 – С.535 – 542.

129. *Тайков Л. В.* Неравенства, которые содержат наилучшее приближение и модуль непрерывности из L_2 / Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1976. – Т. 20, № 3 – С. 433 – 438.

130. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций / Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2 – С. 285 – 295.

131. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 / Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, № 2. – С.217–223.

132. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тимман. – М.: Физматгиз, 1960. – 626 с.

133. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближения / В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1976. – 624 с.

134. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В.М. Тихомиров // Успехи мат. наук. – 1960. – 15, № 3 – С.81–120.

135. *Торба С.М.* Операторний підхід до прямих і обернених теорем теорії наближень: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / С.М. Торба. – К., 2007. – 20 с.

136. *Торба С.М.* Прямі та обернені теореми наближення методів розв’язування абстрактної задачі Коші / С.М. Торба // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 6. – С. 838–852.

137. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филипс. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.

138. *Черных Н.И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой / Н.И. Черных // Труды МИАН СССР. – 1992. – Т. 198. – С. 232–241.

139. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 / Н.И. Черных // Мат. заметки. – 1967. – Т.2, № 5. – С. 513–522.

140. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2 / Н.И. Черных // Труды МИАН. – 1967. – Т. 88. – С. 71–74.

141. *Шабозов М.Ш.* Точный константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 / М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов // Сиб. матем. журн. – 2011. – 52, №6. – С. 1414–1427.

142. *Шалаев В.В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков / В.В. Шалаев // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 1. – С. 125–129.

143. *Юдин А.А.* О теореме Джексона в L_2 / А.А. Юдин, В.А. Юдин // Мат. заметки. – 1990. – Т.48, № 4. – С. 152–157.

144. *Юдин В.А.* Многомерная теорема Джексона / В.А. Юдин // Мат. заметки. – 1976. – Т.20, № 3. – С. 439–444.

145. *Юдин В.А.* Многомерная теорема Джексона в L_2 / В.А. Юдин // Мат. заметки. – 1981. – Т.29, № 2. – С. 309 – 315.

146. *Юссеф Х.* Поперечники классов функций в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ / Х. Юссеф // Применение функцион. анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Тверь: Твер. ун-т. – 1990. – С. 167–175.

ДОДАТОК

Наукові праці, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 9. - С. 1155-1165.
2. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 19, № 6/1 – С. 8–14.
3. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 20, № 6/1 – С. 60–66.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2008. – Т. 16, № 6/1 – С. 10–20.
5. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Зб. праць Інстит. матем. НАН України – 2013. – Т. 10, № 1 – С. 18.–27.
6. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – Т. 18, № 6/1 – С. 49–58.
7. *Савела С.В.* О поперечниках некоторых классов функций со значениями в гильбертовом пространстве / С.В. Савела // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Т. 17, № 6/1 – С. 105–111.

Тези доповідей на конференціях, що засвідчують апробацію результатів дисертації:

1. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнарод. конф. присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, 28 травня–3 червня 2012 р.: тези допов. – Кам’янець-Подільський, Україна, 2012. – С. 19.
2. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Джексона с обобщенными модулями непрерывности для оценки наилучшего приближения элементов гильбертова пространства / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Сборник тезисов Международной конференции по Современному Анализу, 20–23 июня 2011 г.: тезисы докл. – Донецк, Украина, 2011. – С. 23.
3. *Бабенко В.Ф.* Нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності / В.Ф. Бабенко, С.В. Конарева // Всеукраїнська наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка. Тези доповідей. – 3–5 жовтня 2019. – Дніпро. – С. 27.
4. *Бабенко В.Ф.* О некоторых неравенствах типа Джексона в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // FM-2009 Conference „Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III”, August 22–26, 2009. – Village Svityaz, Volyn, 2009. – С. 17–18.
5. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Боголюбовські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнарод. наук. конф., 16–21 червня 2008 р.: тези допов. – Мелітополь, 2008. – С. 13.
6. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Проблеми математичного моделювання:

міждерж. наук.-метод. конф., 23–25 травня 2007 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 13–14.

7. *Бабенко В.Ф.* О неравенствах типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 12–13.
8. *Бабенко В.Ф.* О точности неравенств типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Теория приближений и её приложения: международ. конф. памяти Н.П. Корнейчука, 14–17 июня 2010 г.: тезисы докл. – Днепропетровск, 2010. – С. 17–18.
9. *Бабенко В.Ф.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы / В.Ф. Бабенко, С.В. Савела // Український математичний конгрес: міжнарод. конф., 27–29 травня 2009 р.: тези допов. – Київ. – [Електроний ресурс] . – http://www.imath.kiev.ua/congress2009.
10. *Конарева С.В.* Нерівності типу Джексона-Стєчкіна у гільбертовому просторі / С.В. Конарева // "Теорія наближення функцій та її застосування", міжнародна конференція присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), 28 травня – 3 червня 2017 р. : тези допов. – Слов’янськ, Україна – 2017. – С. 64.
11. *Конарева С.В.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства / С.В. Конарева // "Теорія наближень і її застосування", міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В.П. Моторного, 8–11 жовтня 2015 р.: тези допов. – Дніпропетровськ. – 2015. – С. 39.
12. *Савела С.В.* Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах / С.В. Савела // Міжнародна математична конференція

«Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23–30 червня 2013р.: тези допов. – Севастополь, Україна – С. 266.