

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КОНАРЕВА Світлана Вікторівна



УДК 517.5

**НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА
В ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ**

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор **Бабенко Владислав Федорович**, пенсіонер, працював у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Вакарчук Сергій Борисович**, ВНЗ “Університет імені Альфреда Нобеля”, м. Дніпро, професор кафедри інформаційних технологій;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Сердюк Анатолій Сергійович**, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться « 29 » вересня 2020 року о « 15 » годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано « 18 » серпня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Романюк А.С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Основоположними щодо оцінок апроксимації неперервної періодичної функції через модуль неперервності цієї функції в деякій точці вважають дослідження Д. Джексона. Зміст нерівностей типу Джексона-Стечкіна полягає в тому, що вони дають оцінку швидкості збіжності до нуля найкращого наближення функції в залежності від її диференціально-різницевих властивостей. У 60-х роках ХХ століття було отримано низку оцінок типу Джексона з найкращими константами. У 1962 р. М.П. Корнейчук одержав точну нерівність типу Джексона для найкращих наближень періодичної функції $f \in C$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$. Точні нерівності типу Джексона-Стечкіна у просторі L_2 для наближення тригонометричними поліномами були отримані у 1967 р. М.І. Черних. Розвитку цієї тематики для функцій з різними областями визначення було присвячено праці М.П. Корнейчука, В.К. Дзядика, М.І. Черних, І.І. Ібрагімова, В.О. Юдіна, Л.В. Тайкова, В.В. Арестова, О.Г. Бабенка, В.І. Іванова, В.Ф. Бабенка, С.Б. Вакарчука, О.І. Степанця та А.С. Сердюка, М.Ш. Шабозова, а для елементів гільбертового простору – М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки, С.М. Торби та інших математиків. Також одним із напрямків розвитку нерівностей типу Джексона-Стечкіна було дослідження таких нерівностей для B^2 -майже періодичних функцій.

Подальший розвиток досліджень нерівностей, що оцінюють найкраще наближення функції, був пов'язаний із заміною модулів неперервності m -го порядку більш загальними модулями неперервності. Питання про нерівності з узагальненими модулями неперервності вивчали Х. Шапіро та Дж. Боман, О.Г. Бабенко, С.М. Васильєв, А.І. Козко та О.В. Рождественський. Зокрема вивчались нерівності типу Джексона-Стечкіна для апроксимації функцій заданих на осі цілими функціями експоненціального типу, а також для апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами майже періодичних функцій.

Водночас у багатьох важливих випадках точні константи в нерівностях типу Джексона лишаються невідомими навіть у випадку функцій однієї змінної. Зокрема, важливим і цікавим є питання про виконання подібних нерівностей для функцій із більш загальними областями значень. Так, нерівності типу Джексона-Стечкіна для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі можуть бути застосовані для оцінок наближення випадкових процесів.

З огляду на зазначене вище тема дисертації є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу було виконано згідно із загальним планом досліджень кафедри математичного аналізу і теорії функцій (раніше – кафедри математичного аналізу) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетною темою №1-221-10 «Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних» (НДР 0110U001282), ММФ-76-16 «Теорія оптимальних алгоритмів та екстремальні задачі аналізу» (НДР 0116U002256), №1-326-17 «Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова» (НДР 0117U001208).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є узагальнення відомих для числових функцій результатів щодо оцінки найкращих наближень функцій та їхніх класів на випадок функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі через модулі неперервності, модулі гладкості й узагальнені модулі неперервності цих функцій.

Задачі дослідження полягають у знаходженні точних констант у нерівностях типу Джексона-Стечкіна.

Об'єктом дослідження є нерівності виду

$$E(f, \mathcal{M})_X \leq \chi \omega\left(f, \frac{\eta}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$E(f, \mathcal{M})_X \leq \chi \omega_m\left(f, \frac{\eta}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а також нерівності з більш загальними модулями неперервності.

Предметом дослідження є точні константи в нерівностях типу Джексона-Стечкіна для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, а також для елементів довільного гільбертового простору.

Методи дослідження. Роботу виконано за допомогою методів теорії функцій дійсної і комплексної змінної, функціонального аналізу, а також методів розв'язання екстремальних задач теорії наближення.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати роботи є новими і полягають у наступному:

- для довільної функції зі значеннями в сепарабельному гільбертовому просторі отримано нові точні оцінки найкращого наближення узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції;

- одержано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичні в одиничному крузі;
- знайдено точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі;
- отримано точні нерівності типу Джексона-Стєчкаїна для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі;
- одержано нові точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору N підпросторами, пов'язаними із заданим розкладом одиниці, через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати дисертаційної роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому дослідженні питань, пов'язаних із нерівностями типу Джексона для функцій зі значеннями у гільбертовому просторі, оцінок апроксимації функцій із більш загальними областями значень, розв'язання низки екстремальних задач.

Отримані результати представляють самостійний науковий інтерес і можуть бути використані для подальших досліджень із теорії наближення, які проводяться в Інституті математики НАН України, Київському, Дніпровському, Львівському, Одеському національних університетах та інших наукових установах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напряму дослідження, а також постановка задач належать науковому керівникові професору Владиславу Федоровичу Бабенку. Основні результати здобувач одержав самостійно. У спільних працях співавторові належить постановка проблем, обговорення ідей і підходів, аналіз отриманих результатів. Докладне доведення теорем належить здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких конференціях і семінарах:

- Міждержавна науково-методична конференція «Проблеми математичного моделювання» (23 – 25 травня 2007 р., 28 – 30 травня 2008 р., м. Дніпродзержинськ);
- Міжнародна наукова конференція «Боголюбовські читання-2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (16 – 21 червня 2008 р., м. Мелітополь);

- Міжнародна наукова конференція «Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів III» пам'яті В.К. Дзядика (22 – 26 серпня 2009 р., о. Світязь, Волинь);
- Український математичний конгрес – 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова) (секція «Теорія наближень та гармонійний аналіз», 27 – 29 серпня 2009 р., м. Київ);
- Міжнародна конференція «Теория приближений и её приложения», присвячена 90-річчю з дня народження М.П. Корнейчука (14 – 17 червня 2010 р., м. Дніпропетровськ);
- Міжнародна конференція «по Современному Анализу» (20 – 23 червня 2011 р., м. Донецьк);
- Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 70-річчю з дня народження професора О.І. Степанця (28 травня – 3 червня 2012 р., м. Кам'янець-Подільський);
- Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (23 – 30 червня 2013 р., м. Севастополь);
- Міжнародна наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя В.П. Моторного (8 – 11 жовтня 2015 р., м. Дніпропетровськ);
- Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов'янськ);
- Всеукраїнська наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка (3 – 5 жовтня 2019 р., м. Дніпро);
- підсумкові конференції кафедри математичного аналізу і теорії функцій ДНУ ім. Олеся Гончара, 2006 – 2013 рр., 2015 – 2019 рр.;
- семінари кафедри математичного аналізу та теорії функцій ДНУ ім. Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, член-кор. НАН України, професор В.П. Моторний);
- міжкафедральний науковий семінар механіко-математичного факультету ДНУ ім. Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор В.П. Моторний);

- науковий семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А.С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 7 статтях [1–7], що входять до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук, одна стаття [1] з яких – у журналі, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus та належить до видань із третього квартиля (Q3). Дванадцять тез опубліковано у матеріалах всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [8–19].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 170 сторінок машинописного тексту складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 146 найменувань. Кожен розділ роботи розділено на підрозділи, пронумеровані у його межах. Нумерацію теорем та наслідків здійснено у межах певного розділу.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету та задачі дослідження, об'єкт і предмет дослідження, зазначено методи досліджень, висвітлено наукову новизну отриманих результатів, подано інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації, описано структуру і зміст роботи.

У *першому розділі* дисертаційної роботи проведено огляд відомих результатів за тематикою роботи, подано відомості про B^2 -майже періодичні функції. Крім того, наведено означення основних понять, таких як найкраще наближення функції зі значеннями у гільбертовому просторі, найкраще наближення класу функцій, модуль неперервності та модуль гладкості функції зі значеннями у гільбертовому просторі, розвинення функції зі значеннями в гільбертовому просторі в ряд Фур'є. Подано основні відомості про аналітичні функції зі значеннями в гільбертовому просторі та деякі поняття і факти зі спектральної теорії самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, зокрема поняття розкладу одиниці та спектрального інтеграла.

Другий розділ роботи присвячено одержанню нерівностей типу Джексона та Джексона-Стечкіна для функцій однієї та багатьох змінних зі значеннями в гільбертовому просторі. Також отримано точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі.

Основними результатами підрозділу 2.1 є точні інтегральні оцінки найкращого наближення $E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} = \inf_{g \in T_{2n-1}^H} \|f - g\|_{2,H}$ функції однієї змінної зі значеннями в гільбертовому просторі H множиною T_{2n-1}^H узагальнених тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$ вигляду $T_n(x) = \sum_{|k| < n} A_k e^{ikx}$, де $A_k \in H$.

Теорема 2.1.1. Для довільної 2π -періодичної функції f , інтегрованої за Бохнером на $[0; 2\pi]$, що не є сталою величиною (із точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n мають місце нерівності

$$E^2(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f; t)_{2,H} \sin(nt) dt.$$

У випадку дійсного гільбертового простору рівність досягається на узагальнених тригонометричних поліномах виду

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos nx + \beta_1 \sin nx \quad (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \in H),$$

у випадку комплексного гільбертового простору – на поліномах

$$f(x) = h_n e^{inx} \quad (h_n \in H).$$

Теорема 2.1.3. Для довільної інтегрованої за Бохнером функції $f(x) \in L_2^B([0; 2\pi], H)$ та довільних натуральних m і $n = 1, 2, \dots$ справедливі нерівності

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{1}{2} \sqrt{n(C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f; t)_{2,H} \left(\sin \frac{nt}{2} + \frac{1}{2} \sin nt \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Для довільних фіксованих m і $n > m$ константа $\frac{1}{2} \sqrt{n(C_{2m}^m)^{-1}}$ не покращується.

Встановлено значення найкращого наближення функцій $a \cdot z^n$ ($a \in H$, $z \in \mathbb{C}$) множиною узагальнених алгебраїчних поліномів порядку не вище $n-1$. Нехай $\mathcal{H}^2(H)$ – клас усіх функцій

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k,$$

аналітичних при $|z| < 1$ і таких, що інтеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(re^{it})\|_H^2 dt \quad (0 \leq r < 1)$$

обмежений незалежним від r числом.

Теорема 2.1.2. Для довільного елементу $a \in H$, $a \neq 0$

$$E(a \cdot z^n, P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} = \|a\|_H,$$

де P_n – множина алгебраїчних поліномів порядку не вище $n-1$.

Важливим наслідком із теореми 2.1.1 є інтегральна оцінка апроксимації для аналітичної функції $u(z)$ з класу $\mathcal{H}^2(H)$ через модуль неперервності

функції $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot a_k$ (функції u та v пов'язані співвідношенням

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-s)v(s)ds, \quad 0 \leq r < 1,$$

де $P_r(t)$ – ядро Пуассона $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$).

Наслідок 2.1.1. Для функцій $u(z)$ з класу $\mathcal{H}^2(H)$ має місце нерівність

$$E^2(u, P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} \leq \frac{n^{\frac{1}{n}}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(v, t) \sin(nt) dt.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z) = a \cdot z^n$, $a \neq 0$, $a \in H$ і $v(t) = e^{int} \cdot a$.

У наступній теоремі наведено точну оцінку найкращого наближення функції f із класу

$$L_{2,H}^{\Lambda, M} = \{ f \in L_2([0; 2\pi), H) : \|f^{(\Lambda, M)}\|_{2,H}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) < \infty \},$$

де $f^{(\Lambda, M)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt)$; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N}$, $M = \{\mu_k\}_{k \in N}$ –

послідовності чисел такі, що $\left\{ \frac{|\lambda_k|}{k} \right\}$, $\left\{ \frac{|\mu_k|}{k} \right\}$, $\{|\lambda_k|\}$ і $\{|\mu_k|\}$ не спадають, коли

$k \rightarrow +\infty$, $|\lambda_k| = |\mu_k|$.

Теорема 2.1.4. Для довільної функції $f(x)$ і будь-якого натурального n має місце нерівність, що не покращується:

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{n}{4|\lambda_n|} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega(f^{(\Lambda, M)}, t) dt.$$

Як наслідок із цієї теореми для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі та аналітичних функцій отримано наступні узагальнення нерівності Тайкова для диференційовних функцій із простору L_2 .

Теорема 2.1.4'. Для довільної диференційовної функції $f(x) \in L_{2,H}^r$,

$$L_{2,H}^r = \left\{ f(t) : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2r} (\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2) \leq 1 \right\} \text{ та будь-якого натурального } n \text{ має}$$

місце нерівність

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} \leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt.$$

Наслідок 2.1.2. Для функцій $u(z)$ з класу $\mathcal{H}^2(H)$, що пов'язана з функцією $v(t)$, має місце нерівність

$$E^2(u, P_n)_{\mathcal{H}^2(H)} \leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(v^{(r)}; t) dt.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій $u(z) = a \cdot z^n$, $a \neq 0$, $a \in H$ і $v(t) = e^{int} \cdot a$.

Для заданої послідовності компактних операторів Q_k , що діють у гільбертовому просторі H ($k \in \mathbb{Z}$, $Q_0 = I$) і функції $f(x) \in L_2(H)$ з рядом Фур'є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ отримано наступний результат.}$$

Теорема 2.1.5. Для довільної функції f та відповідної їй функції

$$f_Q^{(-1)}(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} Q_k(c_k) e^{ikt} \text{ має місце точна нерівність}$$

$$E_n(f_Q^{(-1)}) \leq \frac{1}{4} s_{n,1} \int_0^{\pi/n} \omega(f, t) dt,$$

рівність у якій досягається на функціях $f(t) = \varphi_{n1} e^{int}$.

(Для довільного $k \neq 0$ $\|Q_k\| = s_{k1}$ (s -числа оператора Q_k), φ_{n1} – власний елемент, що відповідає власному числу λ_{n1} оператора $Q_k^* Q_k$.)

У підрозділі 2.2 встановлено оцінки найкращого наближення функцій зі значеннями в гільбертовому просторі безпосередньо через модуль неперервності та модуль гладкості цієї функції. Наведені в цьому підрозділі нерівності, як і інтегральні нерівності з підрозділу 2.1, є аналоги результатів М.І. Черних.

Теорема 2.2.1. Для довільної 2π -періодичної функції f зі значеннями у дійсному або комплексному гільбертовому просторі, що відмінна від сталої величини (із точністю до множини міри нуль), та для всіх натуральних n вірні нерівності

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f, \frac{\pi}{n})_{2,H},$$

і при кожному n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ у правій частині зменшена бути не можна.

Теорема 2.2.2. Для довільної функції $f(x) \in L_2([0; 2\pi], H)$, що відмінна від тотожної сталої, та для будь-яких натуральних чисел m і n виконується нерівність

$$E(f, T_{2n-1}^H)_{2,H} < (C_{2m}^m)^{-1/2} \omega_m\left(\frac{2\pi}{n}; f\right)_{2,H}.$$

За $n > m$ константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині даної нерівності замінити меншою неможливо.

Підрозділ 2.3 присвячено наближенню класів функцій зі значеннями у гільбертовому просторі, зокрема класу $H_{2,H}^{1/2}$ 2π -періодичних функцій f , для яких $\omega(f; t)_{2,H} \leq \sqrt{t}$, та значенням слабких поперечників за Колмогоровим класів $H_{2,H}^{1/2}$ та $W_{2,H}^{\Lambda, M, n} = \left\{ f(t) \in L_2([0; 2\pi], H) : \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda, M)}, t) dt \leq 1 \right\}$. Основними

результатами є знаходження точних значень величин

$$d_{2n-1}^w(H_{2,H}^{1/2}, L_2([0; 2\pi], H)) = \inf_{w\text{-dim } G \leq 2n-1} E_n(H_{2,H}^{1/2}, G)_{2,H},$$

$$d_{2n-1}^w(W_{2,H}^{\Lambda, M, n}, L_2([0; 2\pi], H)) = \inf_{w\text{-dim } G \leq 2n-1} E_n(W_{2,H}^{\Lambda, M, n}, G)_{2,H} -$$

слабких $(2n-1)$ -поперечників за Колмогоровим класів $H_{2,H}^{1/2}$ та $W_{2,H}^{\Lambda, M, n}$ у просторі $L_2([0; 2\pi], H)$, що наведено у наступних теоремах.

Теорема 2.3.1. Для довільного $n = 1, 2, \dots$

$$d_{2n-1}^w(H_{2,H}^{1/2}, L_2([0; 2\pi], H)) = E(H_{2,H}^{1/2}, T_{2n-1}^H)_{2,H} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Теорема 2.3.2. Для будь-якого $n = 1, 2, \dots$

$$d_{2n-1}^w(W_{2,H}^{\Lambda, M, n}, L_2([0; 2\pi], H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|}.$$

Теорема 2.3.2'. Якщо $W_{2,H}^{n,r} = \left\{ f(t) : \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt \leq 1 \right\}$, то для довільного

$n = 1, 2, \dots$

$$d_{2n-1}^w(W_{2,H}^{n,r}, L_2([0; 2\pi], H)) = \frac{1}{4n^{r-1}}.$$

Нехай $T^m = [0; 2\pi]^m$ – m -вимірний тор. У підрозділі 2.4 точні нерівності типу Джексона, отримані М.І. Черних та В.О. Юдіним у просторі $L_2(T^m)$, узагальнено на випадок функцій зі значеннями у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі H . Встановлено, що константа у цьому разі залишається такою самою.

Простір $L_2^H(T^m)$ – простір функцій зі значеннями в H ; X^m – m -вимірний дійсний простір із заданою нормою. Функція $f \in L_2^H(T^m)$ має розклад у ряд Фур'є:

$$f \sim \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}_\mu e^{i\mu x}, \quad \hat{f}_\mu = \int_{T^m} f(x) e^{-i\mu x} d\nu \in H, \quad (x \in T^m, f_\mu = \overline{f_{-\mu}}).$$

Нехай

$$E_R(f, T^m)_{2,H} = \inf_{c_\mu \in H, c_\mu = c_{-\mu}} \left\| f(x) - \sum_{|\mu| < R} c_\mu e^{i\mu x} \right\|_{2,H} -$$

найкраще наближення функції f в $L_2^H(T^m)$ сферичними тригонометричними поліномами порядку меншого R ;

$$\omega(\delta, f, T^m, X^m)_{2,H} = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_t f\|_{2,H} -$$

її модуль неперервності в $L_2^H(T^m)$, що відповідає нормі простору X^m .

Нехай $\varphi(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in B^m, \\ 0, & x \notin B^m, \end{cases}$ де $u_1(x)$ – перша власна функція, що

відповідає першому власному значенню λ_1 оператора Лапласа $\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Для функції

$$\psi(x) = - \int_{\Gamma^m} \varphi(x-u) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) du$$

її перетворення Фур'є має вигляд

$$\hat{\psi}(s) = - \hat{\varphi}(s) \int_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu} du = (\lambda_1 - |s|^2)^{-1} \left(\int_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu} du \right)^2.$$

Покладемо

$$\Phi_R(x) = \psi(R\lambda_1^{-1/2}x).$$

Розглянемо періодизацію $\Phi_R(x)$, тобто функцію $\Psi_R(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \Phi_R(x + 2\pi k)$.

Теорема 2.4.1. Для довільної вектор-функції $f \in L_2^H(T^m)$ мають місце точні нерівності

$$E_R(f, T^m)_{2,H} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\hat{\Psi}_R(0)} \int_{T^m} \|\Delta_t f\|_{2,H}^2 \Psi_R(t) d\nu \right)^{1/2},$$

$$E_R(f, T^m)_{2,H} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m \right)_{2,H}.$$

Теорема 2.4.2. Константа

$$\tau_2(n) = \min \left\{ \tau > 0: D_2 \left(\frac{\tau}{n}, n, T \right)_2 = \sup_{f \in L_2^H(T)} \frac{E_n(f, T)_2}{\omega \left(\frac{\tau}{n}, f, T \right)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \pi$$

Третій розділ дисертації присвячено встановленню нерівностей типу Джексона для майже періодичних функцій. У підрозділі 3.1 розглянуто аналоги нерівностей М.І. Черних для майже періодичних функцій Безиковича класу B^2 , показники Фур'є яких мають єдину граничну точку в нескінченності. Для B^2 -майже періодичної функції $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$,

$A_k = M \{ f(x) e^{-i\lambda_k x} \}$ величиною найкращого наближення є

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[M \{ |f(x) - g(x)|^2 \} \right]^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де G_{λ_n} — множина B^2 -майже періодичних функцій, показники Фур'є яких перебувають в інтервалі $(-\lambda_n, \lambda_n)$.

Функція

$$\omega_m(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left[M \{ |\Delta_h^{(m)} f(x)|^2 \} \right]^{1/2}, \quad t \geq 0,$$

де $\Delta_h^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f(x + jh)$, $m = 1, 2, \dots$ є аналог модуля гладкості m -го порядку.

Теорема 3.1.1. Для довільної B^2 -майже періодичної функції $f(x)$, що відмінна від константи і яка має ряд Фур'є $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, справедлива нерівність, що не може бути покращена:

$$E_{\lambda_n}^2(f) \leq \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f, t) \sin(\lambda_n t) dt.$$

Теорема 3.1.2. Для довільної B^2 -майже періодичної функції $f(x)$, що має ряд Фур'є $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, і будь-якого натурального m справедлива нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f, t) \left(\sin \frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2} \sin(\lambda_n t) \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}}$ не покращується.

Теорема 3.1.3. Для довільної B^2 -майже періодичної функції $f(x)$ з рядом Фур'є $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, відмінної від константи, і будь-якого натурального m має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2} \omega_m^2\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині нерівності зменшити неможливо.

Оцінки з теорем 3.1.1 та 3.1.2 раніше отримали Я.Г. Притула та М.М. Яцимірський, результат теореми 3.1.3 при $m = 1$ – Я.Г. Притула. У дисертаційній роботі наведено інше доведення цих результатів за допомогою методу, який використовував М.І. Черних.

У підрозділі 3.2 отримано оцінку апроксимації B^2 -майже періодичних функцій за допомогою узагальнених модулів неперервності.

Підрозділ 3.3 містить аналогі результатів першого підрозділу, але у випадку апроксимації майже періодичної функції зі значеннями в гільбертовому просторі H .

Теорема 3.3.2. Для довільної майже періодичної функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H , що відмінна від константи, із рядом Фур'є $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$, має місце нерівність, що не може бути покращена:

$$E_{\lambda_n}^2(f) \leq \frac{\lambda_n}{4} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(f, t) \sin(\lambda_n t) dt.$$

Теорема 3.3.3. Для довільної майже періодичної функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H , що має ряд Фур'є $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$, і будь-якого натурального m справедлива нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\lambda_n} \omega_m^2(f, t) \left(\sin \frac{\lambda_n t}{2} + \frac{1}{2} \sin(\lambda_n t) \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Для будь-якого фіксованого m константа $\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n (C_{2m}^m)^{-1}}$ не покращується.

Теорема 3.3.4. Для довільної майже періодичної функції $f(x)$ зі значеннями у гільбертовому просторі H , що має ряд Фур'є $\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$, відмінної від константи, і будь-якого натурального m має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2} \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\lambda_n}\right).$$

Константу $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ у правій частині даної нерівності зменшити неможливо.

Підрозділ 3.4 містить доведення нерівностей типу Джексона-Стєчкана для майже періодичних функцій $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, $A_k = M\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\}$ з узагальненими модулями неперервності

$$\omega_{\varphi}(f, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|A_k\|^2 \varphi(\lambda_k t) \right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\varphi(\lambda_k t) = \varphi_M(\lambda_k t) = \left| \sum_{j=0}^m \mu_j e^{i\lambda_k j t} \right|^2$ – невід’ємна 2π -періодична функція, що обертається в нуль у точці $t = 0$.

Позначимо через $I(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt$ середнє значення функції на періоді.

Основною в цьому підрозділі є теорема, наведена нижче.

Теорема 3.4.1. *Для кожної функції $\varphi \in \Phi$ існує точка $\gamma > 0$, залежна лише від функції φ , така, що для довільної майже періодичної функції f виконується нерівність*

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}} \omega_{\varphi}\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

При цьому

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B^2} \frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_{\varphi}\left(f, \frac{\gamma}{\lambda_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}.$$

Ця теорема узагальнює теорему С. Н. Васильєва.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено оцінкам наближення елементів гільбертового простору H . У 2005 р. в роботі М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки і С.М. Торби було доведено теореми типу Джексона у випадку наближення вектора гладкого для самоспряженого оператора в гільбертовому просторі цілими векторами експоненціального типу цього оператора. У підрозділі 4.1 розглянуто найкращі наближення елементу простору H підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці та вказані умови точності отриманих нерівностей. У випадку підпростору

$$W_{\sigma} = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g : g \in H \right\}, \quad \sigma > 0,$$

коли $E_\sigma(f) = \inf_{g \in W_\sigma} \|f - g\|$ – це величина найкращого наближення елемента $f \in H$ функціями із класу W_σ , а функція $\omega(f; t) = \sup_{|\delta| \leq t} \|U_\delta f - If\|$, що

визначається за допомогою групи унітарних операторів $U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f$, $(0 \leq t < \infty)$, є природнім аналогом модуля неперервності функції f із простору L_2 , маємо наступні оцінки.

Теорема 4.1.1. *Нехай $f \in H$. Тоді для довільного $\sigma > 0$ справедлива нерівність*

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \|U_t f - f\|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}.$$

Якщо існує такий $f \in H$, що для будь-якого додатного ε елементи $f_{\sigma, \varepsilon} = \int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} dE_s f$ ненульові, то нерівність теореми не покращується.

Наслідок 4.1.1. *Нехай A – самоспряжений оператор, породжений заданим розкладом одиниці E_s ($-\infty < s < \infty$). При цьому $Af = \int_{-\infty}^{\infty} s dE_s f$. Тоді для будь-якого натурального r , довільного $\sigma > 0$ і довільного $f \in D(A^r)$ має місце нерівність*

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma^r} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \|U_t(A^r f) - A^r f\|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}.$$

Теорема 4.1.2. *Для довільного елемента $f \in H$ і довільного $\sigma > 0$ вірна нерівність*

$$E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f; \frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Якщо на кожному відрізку $[v\sigma; v\sigma + \varepsilon]$, $v \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ існують ненульові елементи $f_{v\sigma} \in (E_{v\sigma + \varepsilon} - E_{v\sigma})H$, то наведена нерівність є точною.

Теорема 4.1.3. *Нехай $f \in H$. Тоді для довільного натурального m і будь-якого $\sigma > 0$ має місце нерівність*

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(C_{2m}^m)^{-1}} \left\{ \int_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f, t) \left(\sin \frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{2} \sin \sigma t \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Наведені результати є аналоги нерівностей, отриманих М.І. Черних та В.Ю. Поповим для найкращих L_2 -наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу σ .

У підрозділі 4.2 розглянуто узагальнені модулі неперервності елемента x гільбертового простору H і точні нерівності типу Джексона елементів із простору H з цими модулями неперервності.

Позначимо через Φ множину неперервних, невід'ємних 2π -періодичних функцій ψ , які мають ніде не щільну множину нулів і таких, що $\psi(0) = 0$. Нехай $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – неперервна функція, така, що $\psi(t) = |\varphi(e^{it})|^2 \in \Phi$. Зокрема, $\varphi(1) = 0$, і на довільній дузі кола $|z| = 1$ функція $\varphi(z)$ відмінна від тотожного нуля. Визначимо узагальнену різницю елемента $x \in H$ із кроком t , покладаючи

$$\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{its}) dE(s)x.$$

Узагальненим модулем неперервності елемента x гільбертового простору H є функція

$$\omega_\varphi(x; \delta) = \max_{0 \leq t \leq \delta} \|\Delta_t^\varphi x\| = \left\| \Delta_t^\varphi x \right\|_{C([0, \delta])} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(st) d(E(s)x, x) \right\|_{C([0, \delta])}^{1/2}.$$

Окрім $\omega_\varphi(x; \delta) = \omega_\varphi(x; C([0, \delta]))$, розглянуто характеристики $\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0, \delta]))$, де $1 \leq p < \infty$, $V(t)$ – вага, тобто невід'ємна інтегровна на $[0, 1]$ функція, відмінна від нуля на множині повної міри. Покладемо

$$\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0, \delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_t^\varphi x\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p}.$$

Зрозуміло, що

$$\omega_\varphi(x; L_{2,V}([0, \delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta V\left(\frac{t}{\delta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(st) d(E(s)x, x) dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(V; \delta s) d(E(s)x, x) \right)^{1/2},$$

де

$$\Gamma(V; t) = \int_0^1 \psi(tv) V(v) dv.$$

Основні результати цього підрозділу містять наступні теореми.

Теорема 4.2.2. Для довільної неперервної в $(-\sigma, \sigma)$, обмеженої, комплекснозначної функції $\lambda(t)$, такої, що $\lambda(t) \equiv 1$ в $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \sigma$, лінійного методу наближення $\Lambda x = \int_{|t| < \sigma} \lambda(t) dE(t)x$, будь-якого елемента $x \in H$, такого, що $x \neq U_t x$ для деякого t , довільного елемента $f \in H$ і будь-якої ваги $V(t)$ має місце точна нерівність

$$|(x - \Lambda x, f)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E(t)f, f)}{\Gamma(V; \delta t)} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0, \delta])).$$

Зокрема,

$$\left\| x - \int_{|t| < \sigma} dE(t)x, f \right\| \leq \left(\int_{|t| \geq \sigma} \frac{d(E(t)f, f)}{\Gamma(V; \delta t)} \right)^{1/2} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0, \delta])).$$

Теорема 4.2.3. Для будь-якого елемента $x \in H$, такого, що $x \neq U_t x$ за деякого t , справедлива нерівність

$$\|x - \Lambda x\|^2 \leq \max \left\{ H(V, \lambda, \delta, \sigma), \frac{1}{G(V, \delta, \sigma)} \right\} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0, \delta]))^2,$$

$$\text{де } H(V, \lambda, \delta, \sigma) = \sup_{|t| < \sigma} \frac{|1 - \lambda(t)|^2}{\Gamma(V; \delta t)}, \quad G(V, \delta, \sigma) = \inf_{|t| \geq \sigma} \Gamma(V; \delta t).$$

Зокрема, для найкращого наближення елемента $x \in H$ підпростором

$$W_{\sigma} = \left\{ \int_{|t| < \sigma} dE(s)g : g \in H \right\}, \quad \sigma > 0 \text{ маємо}$$

$$E_{\sigma}(x)^2 = \left\| x - \int_{|t| < \sigma} dE(t)x \right\|^2 \leq \frac{1}{G(V, \delta, \sigma)} \omega_{\varphi}(x; L_{2,V}([0, \delta]))^2.$$

Якщо розклад одиниці такий, що $E([t, t + \varepsilon]) \neq 0$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$, то нерівності теореми є точними.

Наслідок 4.2.2. В умовах теореми 4.2.3 при $2 \leq p \leq \infty$ має місце нерівність

$$E_{\sigma}(x) \leq \frac{1}{G(V, \delta, \sigma)^{\frac{1}{2}}} \omega_{\varphi}(x; L_{p,V}([0, \delta])).$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено нерівності типу Джексона-Стечкіна для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі та елементів гільбертового простору. Головні наукові результати роботи наступні:

1. Одержано нові точні нерівності типу Джексона-Стечкіна для функцій f зі значеннями в гільбертовому просторі, що оцінюють найкраще наближення функції узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції.

2. Отримано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичні в одиничному крузі.

3. Знайдено точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі. Зокрема, розглянуто класи:

- $H_{2,H}^{1/2}$ клас 2π -періодичних функцій f , інтегровних за Бохнером на $[0; 2\pi]$, для яких $\omega(f; t)_{2,H} \leq \sqrt{t}$,

$$\bullet W_{2,H}^{\Lambda,M,n} = \left\{ f(t) \in L_2([0; 2\pi), H) : \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(\Lambda,M)}, t) dt \leq 1 \right\},$$

$$\text{де } f^{(\Lambda,M)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k \cos kt + \mu_k B_k \sin kt), \quad |\lambda_n| = |\mu_n|.$$

4. Одержано точні нерівності типу Джексона-Стечка для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями в гільбертовому просторі.

5. Запропоновано поняття модулів неперервності типу $\omega_{\varphi}(x; L_{p,V}([0, \delta]))$, що дозволяє з єдиної точки зору розглядати класичні й інтегральні нерівності типу М.І. Черних, а також інтегральні нерівності типу Л.В. Тайкова. Отримано точні оцінки значення довільного обмеженого функціонала на різниці $x - Ax$ наближуваного елемента x , і значення на ньому лінійного методу A його наближення, через введені узагальнені модулі неперервності.

6. Одержано нові точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору H підпросторами

$$W_{\sigma} = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g : g \in H \right\} \text{ та } W_{-\sigma, \sigma} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_s g : g \in H \right\} \quad (\sigma > 0),$$

пов'язаними із заданим розкладом одиниці через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору.

Користуючись нагодою, висловлюю щирі подяки моєму науковому керівникові Владиславу Федоровичу Бабенку за постановку задач, корисні поради та всіляку підтримку в роботі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бабенко В.Ф., Конарева С.В. Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства. Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 9. – С. 1155–1165.
2. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона-Стечкина для V^2 -почти периодических функций. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 19, № 6/1 – С. 8–14.
3. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона-Стечкина для V^2 -почти периодических функций. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 20, № 6/1 – С. 60–66.
4. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2008. – Т. 16, № 6/1 – С. 10–20.
5. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства. Зб. праць Інстит. матем. НАН України – 2013. – Т. 10, № 1 – С. 18–27.
6. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – Т. 18, № 6/1 – С. 49–58.
7. Савела С.В. О поперечниках некоторых классов функций со значениями в гильбертовом пространстве. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Т. 17, № 6/1 – С. 105–111.
8. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона-Стечкина для V^2 -почти периодических функций. Теорія наближення функцій та її застосування: міжнарод. конф. присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О.І. Степанця, 28 травня – 3 червня 2012 р.: тези допов. – Кам'янець-Подільський, Україна, 2012. – С. 19.
9. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона с обобщенными модулями непрерывности для оценки наилучшего приближения элементов гильбертова пространства. Сборник тезисов Международной конференции по Современному Анализу, 20–23 июня 2011 г.: тезисы докл. – Донецк, Украина, 2011. – С. 23.
10. Бабенко В.Ф., Конарева С.В. Нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності. Всеукраїнська наукова конференція «Теорія

- наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В.Ф. Бабенка. Тези доповідей. – 3–5 жовтня 2019. – Дніпро. – С. 27.
11. Бабенко В.Ф., Савела С.В. О некоторых неравенствах типа Джексона в гильбертовых пространствах. FM-2009 Conference „Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III”, August 22–26, 2009. – Village Svityaz, Volyn, 2009. – С. 17–18.
 12. Бабенко В.Ф., Савела С.В. О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 . Боголюбовські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнарод. наук. конф., 16–21 червня 2008 р.: тези допов. – Мелітополь, 2008. – С. 13.
 13. Бабенко В.Ф., Савела С.В. О неравенствах типа Джексона в пространствах L_2 . Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 23–25 травня 2007 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 13–14.
 14. Бабенко В.Ф., Савела С.В. О неравенствах типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве. Проблеми математичного моделювання: міждерж. наук.-метод. конф., 28–30 травня 2008 р.: тези допов. – Дніпродзержинськ, 2008. – С. 12–13.
 15. Бабенко В.Ф., Савела С.В. О точности неравенств типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах. Теория приближений и её приложения: международ. конф. памяти Н.П. Корнейчука, 14–17 июня 2010 г.: тезисы докл. – Днепропетровск, 2010. – С. 17–18.
 16. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы. Український математичний конгрес: міжнарод. конф., 27-29 травня 2009 р.: тези допов. – Київ. – [Електронний ресурс]. – <http://www.imath.kiev.ua/congress2009>.
 17. Конарева С.В. Нерівності типу Джексона-Стечкина у гільбертовому просторі. «Теорія наближення функцій та її застосування», міжнародна конференція присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2017 р.: тези допов. – Слов'янськ, Україна – 2017. – С. 64.
 18. Конарева С.В. Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства. «Теорія наближень і її застосування», міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В.П. Моторного, 8-11 жовтня 2015 р.: тези допов. – Дніпропетровськ. – 2015. – С. 39.
 19. Савела С.В. Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах. Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013.

Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013р.: тези допов. – Севастополь, Україна – С. 266.

АНОТАЦІЇ

Конарева С.В. Нерівності типу Джексона в гільбертових просторах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційну роботу присвячено питанням про точні константи у нерівностях типу Джексона-Стечкіна, що оцінюють наближення функцій зі значеннями у гільбертовому просторі та елементів гільбертового простору через їхні модулі неперервності, модулі гладкості, а також узагальнені модулі неперервності.

Отримано нові точні нерівності типу Джексона-Стечкіна для функцій f зі значеннями в гільбертовому просторі, що оцінюють найкраще наближення функції узагальненими тригонометричними поліномами через модуль неперервності, модуль гладкості та узагальнені модулі неперервності даної функції.

Одержано нові точні нерівності типу Джексона для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі, які є аналітичні в одиничному крузі.

Знайдено точні значення слабких поперечників за Колмогоровим деяких класів функцій зі значеннями в гільбертовому просторі.

Отримано точні нерівності типу Джексона-Стечкіна для найкращих наближень майже періодичних функцій зі значеннями у гільбертовому просторі.

Одержано нові точні оцінки найкращого наближення елементів сепарабельного гільбертового простору H підпросторами, породженими заданим розкладом одиниці через узагальнені модулі неперервності елементів цього простору.

Ключові слова: нерівності типу Джексона, точні оцінки апроксимації, найкраще наближення функції, модуль неперервності, модуль гладкості, узагальнений модуль неперервності, функція зі значеннями в сепарабельному гільбертовому просторі, слабкий поперечник, елемент гільбертового простору.

Конарева С.В. Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена вопросам о точных константах в неравенствах типа Джексона-Стечкина, оценивающих приближение функций со значениями в гильбертовом пространстве и элементов гильбертового пространства через их модули непрерывности, модули гладкости, а также обобщенные модули непрерывности.

Для произвольной функции f со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве получены новые точные оценки наилучшего приближения функции обобщенными тригонометрическими полиномами через модуль непрерывности, модуль гладкости самой функции и модуль непрерывности производной r -го порядка данной функции. Эти результаты являются обобщением известных классических результатов Н.И. Черных и Л.В. Тайкова.

Получены новые точные неравенства типа Джексона для функций со значениями в гильбертовом пространстве, которые являются аналитическими в единичном круге.

Найдены точные значения слабых поперечников по Колмогорову некоторых классов функций со значениями в гильбертовом пространстве, определенных с помощью модулей непрерывности. Понятие слабого поперечника было введено В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым для сравнения аппроксимативных характеристик бесконечномерных подпространств.

Точные неравенства типа Джексона, полученные В.А. Юдиным для числовых функций пространства $L_2(T^m)$, обобщены на случай функций со значениями в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Установлено, что константа в этих неравенствах остается неизменной.

Получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина для наилучших приближений почти периодических функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Предложено понятие модулей непрерывности типа $\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0, \delta]))$, что позволяет с единой точки зрения рассматривать классические и интегральные неравенства типа Н.И. Черных, а также интегральные неравенства Л.В. Тайкова. Получены точные оценки значения произвольного ограниченного функционала на разности $x - Ax$ приближаемого элемента x и

значения на нем линейного метода L его приближения, через введенные обобщенные модули непрерывности.

Получены новые точные оценки наилучшего приближения элементов сепарабельного гильбертового пространства H подпространствами, порожденными заданным разложением единицы через обобщенные модули непрерывности элементов этого пространства. Указаны условия точности этих неравенств.

Ключевые слова: неравенства типа Джексона, точные оценки аппроксимации, наилучшее приближение функции, модуль непрерывности, модуль гладкости, обобщенный модуль непрерывности, функция со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, слабый поперечник, элемент гильбертового пространства.

Konareva S.V. Inequalities of Jackson type in Hilbert spaces. – Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Oles Honchar Dnipro National University – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the questions about exact constants in Jackson - Stechkin type inequalities, which estimate the approximation of functions with values in Hilbert space and Hilbert space elements through their continuity modules, modules of smoothness, and generalized continuity modules.

New exact Jackson-Stechkin type inequalities of the best approximation derivative of a function f with values in a separable Hilbert space by generalized trigonometric polynomials in terms of the modulus of continuity, the modulus of smoothness and generalized the modulus of continuity of the function itself were obtained.

New exact Jackson type inequalities were obtained for functions with values in Hilbert space that are analytic in a single circle.

Exact values of weak widths Kolmogorov of some classes of functions with values in separable Hilbert space were obtained.

Exact Jackson-Stechkin type inequalities were obtained of the best approximation of almost periodic functions with values in Hilbert space.

New exact estimates are obtained for the best approximation of elements of a separable Hilbert space H by subspaces generated by a given decomposition of unity through generalized the modulus of continuity of elements of this space. The accuracy conditions for these inequalities are indicated.

Keywords: inequalities of Jackson type, exact approximation estimates, best approximation of function, modulus of continuity, modulus of smoothness, generalized modulus of continuity, function with values in a separable Hilbert space, weak widths, element of a Hilbert space.