

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ  
М. П. ДРАГОМАНОВА

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**МАСЛОВА Юлія Петрівна**

УДК 511.72

ДИСЕРТАЦІЯ  
**ТОПОЛОГО–МЕТРИЧНА ТА ФРАКТАЛЬНА ТЕОРІЯ  
ДВООСНОВНОГО  $G_2$ –ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ЇЇ  
ЗАСТОСУВАННЯ**

01.01.06 — алгебра і теорія чисел

111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. \_\_\_\_\_ Ю. П. Маслова

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,  
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2020

## АНОТАЦІЯ

**Маслова Ю.П. Тополого–метрична та фрактальна теорія двосимвольного  $G_2$ –зображення чисел і її застосування** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та лабораторії фрактального аналізу (НПУ імені М.П. Драгоманова — ІМ НАНУ).

Дисертаційне дослідження проведено у галузі метричної теорії чисел. Воно присвячене розвитку топологічної, метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій дійсних чисел, що ґрунтуються на двосимвольних системах кодування ( $Q_2$ –зображення і  $G_2$ –зображення) чисел, які є двоосновними. Обидві основи першої системи є додатними, а другої — одна основа додатна, а друга від’ємна. Для першої системи пропонуються нові застосування, а для другої — створюється нова цілісна теорія.

Двосимвольні системи кодування (зображення) дійсних чисел засобами алфавіту  $A = \{0; 1\}$  ототожнюють число з нескінченною послідовністю нулів та одиниць. Вони заслуговують на окрему увагу. Неперевершеною є їх роль у науці і обчислювальній техніці. Сьогодні в математиці та її застосуваннях використовуються різні двосимвольні системи зображення дійсних чисел з самоподібною та несамоподібною геометрією. Серед них існують системи з нульовою, екстранульовою та ненульовою надлишковістю.

Системи кодування чисел забезпечують ефективний інструментарій для розвитку теорії чисел, математичного аналізу, теорії фракталів, конструктивної теорії функцій зі складною локальною поведінкою, сингулярних

ймовірнісних мір, розподілів імовірностей на фракталах, динамічних систем з фрактальними атрactorами, теорії рядів Фур'є та Уолша тощо. Детальний опис геометричних властивостей (геометрії) зображення, а саме: властивостей циліндричних та хвостових множин, метричних відношень, розв'язків метричних задач, дозволяє компактизувати задання об'єктів, вивчати їх структуру і властивості, описувати динаміку і фінальні стани.

Найбільш поширеними двосимвольними зображеннями дійсних чисел є: класичне двійкове, нега-двійкове,  $Q_2$ -зображення,  $Q_2^*$ -зображення, медіантне та марковське зображення, зображення чисел ланцюговими дробами Данжуа,  $A_2$ -дробами тощо.

Класична теорія рядів Фур'є пов'язана з розкладами функцій за синусоїдальними гармоніками. Альтернативною теорією розкладів функцій в ряди за ортонормованою системою функцій є теорія рядів Уолша. Функції Уолша являють собою "прямокутні" хвилі. В теорії передачі сигналів такі хвилі мають суттєві переваги. Існує не лише глибокий паралелізм між теорією рядів Уолша і класичною теорією тригонометричних рядів, але й принципові відмінності. За останні півстоліття з'явилося чимало робіт, пов'язаних з застосуваннями функцій і рядів Уолша в обчислювальній математиці, в теорії кодування, в цифровій обробці сигналів тощо.

Неперервні ніде не монотонні функції в останній час стали об'єктами підвищеного наукового інтересу як з боку теорії фракталів, так і з боку теорії функції з локально складними властивостями, оскільки з'явилися нові засоби їх теоретичного аналізу. Для поглиблення їх індивідуальної та загальної теорії широко використовуються різні системи кодування чисел.

Дисертація складається з анотацій українською та англійськими мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

Основними об'єктами дисертаційного дослідження є:

1) двосимвольне та двоосновне  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , яке

визначається параметром  $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$  і розкладом числа в ряд:

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2},$$

де  $\alpha_k \in A = \{0; 1\}$ ,  $g_1 \equiv g_0 - 1$ ,  $\delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}$ ;

2) геометрія  $G_2$ -зображення чисел (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, метричні співвідношення, розв'язки метричних задач);

3) застосування  $G_2$ -зображення чисел у метричній та ймовірнісних теоріях чисел; теорії фракталів та теорії функцій;

4) узагальнення функцій Радемахера та Уолша, які ґрунтуються на відомому двосимвольному та двоосновному  $Q_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$ , що визначається параметром  $q_0 \in (0; 1)$  і ґрунтується на розкладі числа в ряд:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2},$$

де  $\alpha_k \in A = \{0; 1\}$ ,  $q_1 \equiv 1 - q_0$ ,  $\beta_{\alpha_k} = \alpha_k q_{1-\alpha_k}$ ;

5) функція  $f$ , яка є узагальненням відомих неперервних ніде недиференційовних функцій: Трибін-функції, функції Буша і функції Вундерліха; її означення ґрунтується на поліосновному кодуванні ( $Q_s^*$ -зображенні) чисел відрізка  $[0; 1]$ .

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувача.

Перший розділ має вступний характер. У ньому систематизовано відомості, що стосуються "геометрії"  $Q_s^*$ -зображення дійсних чисел, яке далі використовується для конструювання та дослідження локально складних функцій та нових зображень чисел, проведено огляд літератури і наведено факти, необхідні для подальшого дослідження об'єктів.

Другий розділ "Нова двоосновна система кодування чисел відрізка  $[0; g_0]$  з різнознаковими основами" у дисертації є основним. У ньому об-

грунтується двоосновне та двосимвольне  $G_2$ -зображення (2.1.3) чисел  $[0; g_0] \subset [0; 1]$  з основами  $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$  і  $g_1 \equiv g_0 - 1 < 0$ ; доведено, що переважна більшість чисел мають єдине зображення ( $G_2$ -унарними числами), а числа зліченної множини мають їх два:  $\Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2}$  ( $G_2$ -бінарними числами); вивчається її геометрія, розв'язуються позиційні та метричні задачі, системно вибудовуються основи метричної та ймовірнісної теорій чисел у даному зображенні. Встановлено правила порівняння чисел за їх зображеннями, здійснено порівняльний аналіз  $G_2$ -зображення з  $Q_2$ -зображеннями (зокрема обґрунтовано властивості проектора цифр одного зображення в інше), вивчено властивості операторів:  $\omega$  — лівостороннього та  $\tau_0$  і  $\tau_1$  — правосторонніх зсувів цифр:  $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ ,  $\tau_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ . Доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр зображення чисел є неперервним, а інверсор цифр зображення  $I(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{G_2}$  є всюди розривною, ніде не монотонною функцією. Ці два факти принципово відрізняють дане зображення від інших відомих двосимвольних зображень.

У цьому розділі вивчаються властивості хвостових множин і неперервні перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости зображення чисел. Доведено, що множина всіх неперервних перетворень відрізка  $[0; g_0]$ , які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, відносно операції «композиція» (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції. Доведено, що при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної підмножини відрізка  $[0; g_0]$  достатньо розглядати покриття цієї множини  $G_2$ -циліндрами. Описано фрактальні властивості множин типу Безиковича–Егглстона, визначених обмеженнями для частот цифр  $G_2$ -зображення чисел.

У третьому розділі пропонуються узагальнення функцій Радемахера:

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta_0^2 \equiv \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ -1 & \text{при } x \in \Delta_1^2 \equiv \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$r_k^*(x) \equiv r_0^*(\{2^k x\})$ , де  $\{2^k x\}$  – дробова частина числа  $2^k x$ ; і Уолша, що є всеможливими добутками функцій Радемахера. Вони ґрунтуються на  $Q_2$ -зображенні чисел відрізка  $[0; 1]$  замість класичного двійкового. У ньому вивчено інтегральні властивості отриманих узагальнень і побудовано систему ортогональних функцій з використанням нумерації Пеллі.

Об'єктом дослідження четвертого розділу є функція  $f$ , означена в термінах поліосновного  $Q_s^*$ -зображення чисел, визначеного нескінченною додатною стохастичною матрицею  $Q_s^* = \|q_{in}\|$ ,  $q_{0n} + q_{1n} + \dots + q_{s-1,n} = 1$ ,  $\prod_{n=1}^{\infty} \max_i \{q_{in}\} = 0$ . Функція  $f$  означається рівністю

$$y = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{G_s^*} = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{G_2^*} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\gamma_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j} \right),$$

де  $(g_{0k})$ –послідовність чисел, менших 1,  $g_{1k} \equiv 1 - g_{0k}$ ,  $\delta_{0k} = 0$ ,  $\delta_{1k} = g_{0k}$ ,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \quad n \in N.$$

У цьому розділі обґрунтовується коректність означення функції  $f$ , її неперервність, ніде не монотонність та необмеженість варіації.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомостей про апробацію дисертаційного дослідження.

*Ключові слова:* двосимвольний алфавіт; система кодування (зображення) дійсних чисел; класичне двійкове зображення;  $Q_2$ -зображення;  $G_2$ -зображення; циліндри; оператор лівостороннього зсуву; оператор правостороннього зсуву; інверсор цифр зображення; функції Радемахера і її узагальнення; функції Уолша і їх узагальнення; Трибін-функція і її узагальнення; неперервні функції необмеженої варіації; неперервні перетворення, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел.

## ABSTRACT

**Maslova Yu.P. Topological, metric, and fractal theory of the two-base  $G_2$ -representation of numbers and its application.** — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 — Algebra and Number Theory (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The work is prepared at the Higher Mathematics Department of the National Pedagogical Dragomanov University and the laboratory of fractal analysis (National Pedagogical Dragomanov University — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine).

The thesis belongs to the field of metric number theory. In the work, we develop topological, metric, probabilistic, and fractal theory of real numbers based on two-symbol and two-base systems of encoding of numbers ( $Q_2$ -representation and  $G_2$ -representation). Both bases of the former system are positive but, for the latter system, one base is positive and other base is negative. For the former system, we give new applications and, for the latter system, we create a new complete theory.

Systems of encoding of numbers provide efficient tools for the development of number theory, analysis, fractal theory, constructive theory of functions with complicated local behavior, singular probability measures, probability distributions on fractals, dynamical systems with fractal attractors, theory of Fourier series and Walsh series, etc. Detailed description of geometric properties (geometry) of the representation (namely: properties of cylindrical and tail sets, metric relations, solutions of metric problems) allows to compact definition of objects, to study their structure and properties, to describe dynamics and final states.

The most common two-base representations of real numbers are: classical binary, nega-binary,  $Q_2$ -representation,  $Q_2^*$ -representation, mediant and Markov

representation, representation of numbers by Denjoy's continued fractions and  $A_2$ -continued fractions, etc.

The classical Fourier series theory is related to the expansions of functions by sinusoidal harmonics. The theory of Walsh series is an alternative theory of expansions of functions by series with respect to the orthonormal system of functions. Walsh functions are "rectangular" waves. In the theory of signal transmission, such waves have significant advantages. There is not only a deep parallelism between the Walsh series theory and the classical theory of trigonometric series, but also fundamental differences. The system of Walsh functions, being one of the simplest examples of a complete orthonormal system, is interesting from the point of view of the theory of general orthogonal series. Over the last half century, many works related to the applications of Walsh functions and series in computational mathematics, in coding theory, in digital signal processing, and so on have appeared.

Recently interest to continuous nowhere monotonic functions is increased in fractal theory as well as theory of functions with locally complicated properties because new tools for their theoretical analysis have appeared. Various systems of encoding of numbers are widely used to develop their individual and general theory.

The thesis consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of abbreviations and symbols, introduction, four chapters, divided into sections, conclusions for each section and general conclusions, references (140 items) and appendix (publications by author, 18 items).

The main objects of research are the following:

- two-symbol and two-base  $G_2$ -representation of the closed interval  $[0; g_0]$  defined by the parameter  $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$  and the expansion of the number to a series:

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}, \quad (0.0.1)$$

where  $\alpha_k \in A = \{0; 1\}$ ,  $g_1 \equiv g_0 - 1$ ,  $\delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}$ ;



- geometry of  $G_2$ -representation of numbers (geometric meaning of digits, properties of cylindrical and tail sets, metric relations, solutions of metric problems);
- application of  $G_2$ -representation of numbers in metric and probabilistic number theories, fractal theory and function theory;
- generalization of Rademacher and Walsh functions based on the known two-symbol and two-base  $Q_2$ -representation of the numbers of closed interval  $[0; 1]$  defined by the parameter  $q_0 \in (0; 1)$  and the expansion of the number into a series:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2},$$

where  $\alpha_k \in A = \{0; 1\}$ ,  $q_1 \equiv 1 - q_0$ ,  $\beta_{\alpha_k} = \alpha_k q_{1-\alpha_k}$ ;

- function  $f$ , which is a generalization of known continuous nowhere differentiable functions: Tribin-function, Bush function and Wunderlich function; its definition is based on polybasic encoding of numbers of closed interval  $[0; 1]$  ( $Q_s^*$ -representation).

In the introduction the relevance of the investigation, definition of the object, subject, purpose and objectives, the scientific novelty of the results and personal contribution of the applicant are discussed.

The first chapter is introductory. It systematizes information concerning the "geometry" of  $Q_s^*$ -representation of real numbers. This representation is used to construct and study of locally complicated functions and new representations of numbers. In this chapter the bibliography overview and facts necessary for further research of objects are given.

The second chapter "New two-base system of encoding of numbers of closed interval  $[0; g_0]$  with different sign bases" is the main one. It substantiates the two-base and two-symbol  $G_2$ -representation (2.1.3) of the numbers of  $[0; g_0] \subset [0; 1]$  with bases  $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$  and  $g_1 \equiv g_0 - 1 < 0$ . It is proved that the vast majority of numbers have the only one representation (they are called  $G_2$ -unary), and the numbers of the countable set have two representati-

on:  $\Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2}$  (they are called  $G_2$ -binary). Its geometry is studied, positional and metric problems are solved, the foundation of metric and probabilistic number theory of this representation are systematically constructed. The rules of comparing numbers by their representation are established. The comparative analysis of  $G_2$ -representation and  $Q_2$ -representation is given (in particular, the properties of the projector of digits of one representation into another are substantiated), the properties of operators are studied:  $\omega$  — left shift as well as  $\tau_0$  and  $\tau_1$  — right shifts of digits:  $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ ,  $\tau_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ . It is proved that the operator of left shift of digits of  $G_2$ -representation of numbers is continuous, and the inversor of digits of the representation  $I(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{G_2}$  is everywhere discontinuous, nowhere monotonic function. These two facts provide an essential difference between this representation and other known two-symbol representations, particularly the classic binary representation.

In this chapter, the properties of tail sets and continuous transformations of a closed interval (bijective mappings of a closed interval onto itself) preserving the tails of the representation of numbers are studied. It is proved that the set  $C$  of all continuous transformations of the closed interval  $[0; g_0]$  preserving the tails  $G_2$ -representation of numbers forms an infinite noncommutative group with respect to the operation "composition" (superposition). Nontrivial subgroup of the group is formed by increasing functions. It is proved that for finding the Hausdorff–Besicovitch fractal dimension of an arbitrary subset of the closed interval  $[0; g_0]$  it is enough to consider the coverage of this set by  $G_2$ -cylinders. The fractal properties of sets of the Besicovitch–Eggleston type defined by restrictions for the frequencies of digits of  $G_2$ -representation of numbers are described.

In the third chapter, generalizations of the Rademacher functions:

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \Delta_0^2; \\ -1 & \text{if } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow x \in \Delta_1^2, \end{cases}$$

$r_k^*(x) \equiv r_0^* (\{2^k x\})$ , where  $\{2^k x\}$  is a fractional part of a number  $2^k x$ ; and the Walsh functions, which are all possible products of the Rademacher functions are given. They are based on the use of  $Q_2$ -representation of real numbers of the closed interval  $[0; 1]$  instead of the classic binary expansion. The integral properties of the obtained generalizations are studied. A system of orthogonal functions is constructed using Paley numeration.

The object of study of the fourth chapter is the function  $f$  defined in terms of the polybasic  $Q_s^*$ -representation of numbers determined by an infinite positive stochastic matrix  $Q_s^* = \|q_{in}\|$ ,  $q_{0n} + q_{1n} + \dots + q_{s-1,n} = 1$ ,  $\prod_{n=1}^{\infty} \max_i \{q_{in}\} = 0$ , a came:  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*} = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right)$ , where  $\alpha_n \in A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ ,  $\beta_{in} = \sum_{j=0}^{i-1} q_{jn}$ . The function  $f$  is defined by equality

$$y = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{G_s^*} = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{G_2^*} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\gamma_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j} \right),$$

where  $(g_{0k})$  is a sequence of positive numbers less than 1,  $g_{1k} \equiv 1 - g_{0k}$ ,  $\delta_{0k} = 0$ ,  $\delta_{1k} = g_{0k}$ ,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_1 = 0, \\ 1 & \text{if } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \quad n \in N.$$

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information about the approbation of the thesis results.

**Key words:** two-symbol alphabet; system of encoding (representation) of real numbers; classic binary representation;  $Q_2$ -representation;  $G_2$ -representation; cylinders; left shift operator; right shift operator; inversor of digits; Rademacher functions and their generalization; Walsh functions and their generalizations; Tribin-function and its generalization; continuous functions of unbounded variation; continuous transformations preserving the tails of  $G_2$ -representation of numbers.

### Список опублікованих праць здобувача на тему дисертації:

1. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 146 – 157.
2. Маслова Ю.П. Працьовитий М.В. Узагальнення та аналоги функцій Радемахера, пов'язані з симетричними  $Q_s$ -зображенням дійсних чисел. *Зб. праць. Ін-ту матем. НАН України*. 2017. Т.14, № 4. С. 82 – 96.
3. Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2018. Т. 15, № 1. С. 132-146.
4. Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. *Нелінійні коливання*. 2019, Т. 22, №3, С. 380–390.
5. Василенко Н.А., Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Потужність множини неперервних функцій, які зберігають цифру 1  $Q_3$ -зображення числа. *Буковинський математичний журнал*. 2019, Т. 7, №1. С. 69–81.
6. Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2019. Т. 16, № 2. С. 50–62.
7. Ptaysiovytyi M., Lysenko I., Maslova Yu. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of  $G_2$  – representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 29 (2020). № 1, pp. 99–108.

### Тези доповідей на конференціях

1. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Ряди Уолша в метричній теорії чисел. *Тези доповідей IV всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики*, 23 – 25 квітня 2015, Київ:

НТУУ «КПІ», 2015 р. С.46

2. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне з узагальнень системи функцій Радемахера та Уолша. *Тези доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25 – 26 червня 2015 р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 34 – 37.
3. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Одне узагальнення системи функцій Уолша. *Тези доповідей V всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 25–26 квітня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 37.
4. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Аналог Трибін-функції, означений в термінах представлення чисел у двійковій та канторівській двійково-трійковій системах числення. *Тези доповідей всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 7–8 жовтня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 65.
5. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функцій Радемахера та його узагальнення. *Тези доповідей VI всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики*. 21–22 квітня 2017, Київ: НаУКМА, 2017 р. С. 45.
6. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Двійково–п’ятіркова канторівська система зображення дробової частини дійсного числа. *Тези доповідей Міжнародної науково–практичної конференції «Сучасні проблеми фізико–математичної освіти і науки»*. 25–26 травня 2017. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 155–157.
7. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функції Радемахера. *Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь»*. 13–14 грудня 2017, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 69–70.

8. Maslova Yu., Pratsiovytyi M. A generalization of the Walsh series by mean of  $Q_2$ -representation of real numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, September 24–28, 2018, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. 2018. P.32.
9. Маслова Ю.П. Функція випадкової величини з фрактальними властивостями. *Тези доповідей VII всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики*. 19–20 квітня 2018, Київ: НТУУ «КПІ», 2018 р. С. 49.
10. Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. *Тези доповідей XII всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 23 травня 2019, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2019 р. С. 45
11. Goncharenko Ya., Lysenko I., Maslova Yu. Geometry of numerical series and two-symbol systems of encoding of real numbers. *XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky*. July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine: Conf. materials. 2019. P.36.
12. Маслова Ю.П., Лисенко І.М. Група неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел. *Тези доповідей IX всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики*. 10–11 квітня 2020. Київ: НаУКМА, 2020. С. 21.
13. Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Нова двоосновна система кодування дійсних чисел, її основні застосування. *Тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції «Відкриті еволюціонуючі системи»*. 19-21 травня 2020. Київ. 2020. С. 251–256.

## ЗМІСТ

<b>Перелік скорочень і умовних позначень</b>	<b>18</b>
<b>Вступ</b>	<b>19</b>
<b>Розділ 1. Огляд літератури та концептуальні засади дослідження</b>	<b>38</b>
1.1. Кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту . . .	38
1.2. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел . . . . .	41
1.3. $Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа як узагальнення класичного двійкового зображення . . . . .	42
1.4. Нега-двійкове зображення як тривіальне перекодування двійкового зображення . . . . .	43
1.5. Ланцюгове $A_2$ -зображення чисел . . . . .	45
<b>Розділ 2. Нова двоосновна система кодування чисел відрізка <math>[0; g_0]</math> з різнознаковими основами</b>	<b>49</b>
2.1. Двоосновна система кодування дійсних чисел з різнознаковими основами . . . . .	49
2.2. $G_2$ -унарні та $G_2$ -бінарні числа . . . . .	52
2.3. Задача, яка приводять до $G_2$ -зображення . . . . .	53
2.4. Цікаві часткові випадки . . . . .	54
2.5. Раціональні $G_2$ -зображення . . . . .	55
2.6. Порівняння чисел за їхніми $G_2$ -зображеннями . . . . .	56
2.7. Геометрія $G_2$ -зображення . . . . .	57
2.8. Оператор лівостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел	58
2.9. Оператор $n$ - кратного лівостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел . . . . .	60
2.10. Оператор правостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел	62

2.11. Оператор $n$ – кратного правостороннього зсуву цифр $G_2$ – зображення чисел . . . . .	64
2.12. Хвостові множини . . . . .	65
2.13. Метризація хвостової множини . . . . .	66
2.14. Функції, що зберігають хвости $G_2$ –зображення чисел . . . . .	67
2.15. Неперервні функції, що зберігають хвости $G_2$ –зображення чисел . . . . .	68
2.16. Неперервні перетворення відрізка $[0; g_0]$ , які зберігають хво- сти $G_2$ –зображення чисел . . . . .	68
2.17. Метрична теорія $G_2$ –зображення чисел . . . . .	72
2.18. Інверсор $\Delta$ –зображення . . . . .	76
2.19. Двоїсті системи . . . . .	78
2.20. Ймовірнісна теорія $G_2$ –зображенням чисел . . . . .	80
2.21. $G_2$ –зображення чисел і фрактальна розмірність Гаусдорфа– Безиковича . . . . .	82
Висновки до розділу 2 . . . . .	85
<b>Розділ 3. Узагальнення функцій Радемахера та рядів Уолша</b>	<b>86</b>
3.1. Функція Радемахера і ряди Уолша . . . . .	86
3.2. Узагальнення функцій Радемахера . . . . .	87
3.3. Узагальнення функцій Уолша . . . . .	91
3.4. Трійковий аналог функції Радемахера . . . . .	94
3.5. Узагальнення на основі $Q_3$ –зображення чисел . . . . .	99
Висновки до розділу 3 . . . . .	103
<b>Розділ 4. Узагальнення Трибін–функції</b>	<b>104</b>
4.1. $Q_s^*$ – зображення та його властивості . . . . .	104
4.2. Лівосторонній оператор зсуву цифр зображення . . . . .	106
4.3. Означення функції . . . . .	109
4.4. Неперервність функції . . . . .	112
4.5. Ніде не монотонність функції . . . . .	113



4.6. Варіаційні властивості функції . . . . .	113
Висновки до розділу 4 . . . . .	115
<b>Загальні висновки</b>	<b>117</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>119</b>
<b>Додаток</b>	<b>133</b>

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел;
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел;
$C_{[0,1]}$	простір неперервних на відрізку $[0, 1]$ функцій;
$A_s = \{0, 1, \dots, s - 1\}$	алфавіт $s$ -кової системи числення ( $s \geq 2$ );
$L_s = A_s \times A_s \times \dots$	простір послідовностей елементів алфавіту;
$(c_1 c_2 \dots c_p)$	період довжини $p$ у зображенні числа;
$\alpha_k(x)$	$k$ -та цифра певного зображення числа $x$ ;
$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^f$	циліндр рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ $f$ -зображення числа;
$\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m}^k$	циліндричний інтервал (внутрішність циліндра) рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ $f$ -зображення числа;
$ \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^s $	довжина циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^s$ , що відповідає $s$ -ковому зображенню;
$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_s^*}$	циліндр рангу $n$ з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ , що відповідає $Q_s^*$ -зображенню дійсних чисел;
$\nabla_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_s^*}$	інтервал рангу $n$ з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ , що відповідає $Q_s^*$ -зображенню дійсних чисел;
$\lambda(E)$	міра Лебега множини $E$ ;
$\alpha_0(E)$	розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E$ ;
$\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m})$	приріст функції $f$ на циліндрі рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ ;
$f^{-1}(y_0)$	множина рівня $y_0$ функції $f$ ;
$\equiv$	ліва і права сторна рівні за означенням.

## ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена розвитку топологічної, метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій дійсних чисел, що ґрунтуються на двосимвольних системах кодування (зображення) чисел, які є двоосновними. Обидві основи першої системи є додатними, а другої – одна додатна, а друга від’ємна. Для першої системи пропонуються нові застосування, а для другої – створюється нова цілісна теорія.

**Актуальність дослідження.** Сьогодні в математиці і її застосуваннях використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел: зі скінченним і нескінченним, сталим і змінним алфавітами; з нульовою, екстранульовою й ненульовою надлишковістю. На окрему увагу заслуговують двосимвольні системи, які використовують алфавіт  $A = \{0; 1\}$  і мають за код (формальний запис) числа послідовність нулів і одиниць. Їхня роль у науці й техніці вагома. Серед них історично першою була класична двійкова система (Фо Гі, 4 ст. до н.е.), яка використовує основу 2, має просту арифметику (Г. Лейбніц, 1697 р.) і геометрію, є універсальним способом кодування інформації в цифровій техніці (Джон фон Нейман, 1946 р.). Моделлю дійсного числа у цій системі є додатний двійковий ряд. Згодом виникла нега-двійкова система (Вікторіо Грюнвальд, 1885 р.), основою якої є число  $(-2)$ , а моделлю числа – лакунарний знакопочережний ряд. Ще пізніше до розгляду були введені системи зі дробовою (і навіть ірраціональною) основою (Дж. Бергман, 1957 р.). Знедавна почали використовувати двоосновні (Працьовитий М.В., 1986 р.) і поліосновні (Працьовитий М.В., Торбін Г.М., 1992 р.) системи, а також безосновні системи: фібоначієве (Стахов А.П., Василенко Н.М., Працьовитий М.В.), медіантне зображення (Працьовитий М.В., Дмитренко С.О.), марковське (Працьовитий О.М.) зображення, ланцюгове  $A_2$ -зображення (Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В.,

Працьовитий М.В., 2009 р.) та ін. Кожна з двосимвольних систем має свою специфіку, геометрію (метричну і позиційну), нішу продуктивних застосувань і перспективи для розвитку та застосувань. Неперервна математика взаємодіє з континуальними множинами і неперервними відображеннями й мірами. Потенціал двосимвольних систем зображення чисел для неї невичерпний.

Системи кодування чисел забезпечують інструментарій для розвитку теорії чисел, теорії фракталів, конструктивної теорії локально складних функцій, сингулярних мір, розподілів ймовірностей на фракталах, динамічних систем зі фрактальними атракторами тощо. Детальний опис геометричних властивостей (геометрії) зображення, а саме: властивостей циліндричних і хвостових множин, метричних відношень, розв'язків метричних задач, дає змогу компактизувати задання об'єктів, вивчати їхні структуру і властивості, описувати динаміку й фінальні стани. Розвиток теорії відомих систем кодування чисел посилює інтерес до нових перспективних для застосувань систем, принципово відмінних від наявних.

У цій роботі, продовжуючи дослідження і розгляд нових застосувань відомих систем кодування чисел, ми запроваджуємо нову систему, яка є певним аналогом наявних ( $Q_2$ -зображення, нега-двійкове зображення), але має свої специфічні особливості тополого-метричного характеру. Водночас це потужний інструмент розвитку фрактальної геометрії та фрактального аналізу (множин, функцій, мір тощо).

Дві системи кодування чисел називаються *топологічно еквівалентними*, якщо *проектор цифр* зображення числа в першій системі на ті самі цифри іншої системи — це неперервна строго монотонна функція.

Класична теорія рядів Фур'є пов'язана з розкладами функцій за синусоїдальними гармоніками. Альтернативною теорією розкладів функцій у ряди за ортонормованою системою функцій є теорія рядів Уолша. Систему функцій Уолша, графік яких є «прямокутні» хвилі, ввів 1923 року американський математик Дж. Уолш. Як з'ясувалось, в теорії передачі

сигналів такі хвилі мають суттєві переваги. Існує не лише глибокий паралелізм між теорією рядів Уолша і класичною теорією тригонометричних рядів, а й принципові відмінності. Система функцій Уолша, будучи одним із найпростіших прикладів повної ортонормованої системи, цікава з погляду теорії загальних ортогональних рядів. За минулі півсторіччя з'явилося чимало робіт, пов'язаних із застосуваннями функцій і рядів Уолша в обчислювальній математиці, в теорії кодування, в цифровій обробці сигналів тощо. Одним із природних шляхів узагальнення функцій Радемахера й Уолша, перетворень і рядів Уолша, які тісно пов'язані зі класичним двійковим зображенням чисел, є використання загальніших двосимвольних зображень чисел, зокрема  $Q_2$ -зображення чисел. Ця ідея реалізується у нашій роботі.

Неперервні ніде не монотонні функції віднедавна стали об'єктами підвищеного наукового інтересу як із боку теорії фракталів, так і з боку теорії функцій з локально складними властивостями, оскільки з'явилися нові засоби їхнього теоретичного аналізу. Для поглиблення їхньої індивідуальної й загальної теорії широко використовуються різні системи кодування чисел. Понад те, такі функції все частіше фігурують у дослідженнях із інших галузей науки. Для конструювання і дослідження широкого класу неперервних ніде не монотонних функцій необмеженої варіації у цій роботі ми використовуємо поліосновне  $Q_s^*$ -зображення чисел.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова й у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

- Дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (номер державної реєстрації 0115U00557);
- Моделювання та фрактальний аналіз динамічних систем з локально

- складними відображеннями (номер державної реєстрації 0116U00850);
- Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059);
  - Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (номер державної реєстрації 0119U002582).

**Об'єкт дослідження.** Двоосновні системи кодування дійсних чисел засобами двосимвольного алфавіту, їхня геометрія і застосування.

**Предметом дослідження.** є властивості (топологічні, метричні, фрактальні, ймовірнісні тощо) зображень дійсних чисел, які ґрунтуються на двоосновних розкладах чисел у ряди (додатні або знакозмінні). Основами для розкладу чисел є два додатні чи два різнознакові числа. Складовою предмету дослідження є різнопланові застосування цих двосимвольних систем кодування дійсних чисел у метричній і ймовірнісній теоріях чисел і конструктивній теорії функцій.

**Мета.** Обґрунтувати нову двоосновну систему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту, яка не є топологічно еквалентною до класичної двійкової системи, проте є метричним аналогом  $Q_2$ -зображенням чисел. Детально вивчити її геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, топологометричні властивості множин чисел, визначених обмеженнями на вживання цифр), знайти природні застосування в різних галузях математики.

**Завдання** дисертаційного дослідження полягає в подальшому.

1. Для нової двоосновної і двосимвольної системи кодування дійсних чисел побудувати цілісну топологометричну і фрактальну теорії; розв'язати базисні задачі відповідної ймовірнісної теорії; продемонструвати ефективність нової системи для розвитку конструктивної теорії неперервних локально складних функцій і теорії динамічних

систем.

2. Розглянути перетворення, що зберігають хвости зображення чисел у новій системі, вивчити їхні групові властивості й інваріанти.
3. Запропонувати узагальнення функцій і рядів Уолша на основі використання відомої двоосновної системи зображення чисел ( $Q_2$ -зображення) і вивчити їхні властивості.
4. На основі трисимвольного  $Q_3$ -зображення дійсних чисел побудувати аналог неперервної ніде не диференційовної функції Буша — Вундерліха і Трибін-функції з детальним обґрунтування диференціальних властивостей.

**Методи дослідження.** У роботі використовувались методи метричної й ймовірнісної теорії чисел, математичного аналізу, фрактальної геометрії і фрактального аналізу, конструктивної теорії локально складних функцій.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі.

1. Розроблено аналітичну систему кодування ( $G_2$ -зображення) чисел відрізка  $[0; g_0]$  засобами двосимвольного алфавіту  $A \equiv \{0; 1\}$  із двома різнознаковими основами:  $g_0 \in (0; 1)$  і  $g_1 = g_0 - 1$ , яка ґрунтується на розкладі числа у ряд; вивчено її геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, геометричних перетворень, що зберігають хвости зображення).
2. Описано властивості операторів лівостороннього і правостороннього зсувів і з їхніми використанням побудовано нескінченну некомутативну групу перетворень відрізка, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел. При цьому доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення — це неперервна функція, що принципово відрізняє таке зображення від раніше вивчених.
3. Здійснено порівняльний аналіз властивостей  $G_2$ -зображення зі двоосновним  $Q_2$ -зображенням (обидві основи додатні) через проектор цифр одного зображення на інше.

4. Доведено, що інверсор цифр  $G_2$ -зображення цифр не має властивостей неперервності й монотонності. Це принципово відрізняє це зображення від інших, раніше вивчених.
5. Закладено основи ймовірнісної теорії  $G_2$ -зображення дійсних чисел з використанням спорідненості  $G_2$ - і  $Q_2$ -зображень.
6. Запропоновано узагальнення функцій Радемахера й Уолша, які ґрунтуються на  $Q_2$ -зображенні дійсних чисел, що є самоподібним, топологічно еквівалентним узагальненням класичного двійкового зображення чисел  $x \in [0; 1]$ . Досліджено інтегральні властивості цих функцій, зокрема доведено, що узагальнені функції Радемахера утворюють ортогональну систему функцій. Для кожної узагальненої функції Уолша знайдено її аналітичний вираз.
7. Запропоновано трійковий аналог функцій Радемахера і його узагальнення на основі  $Q_3$ -зображення дійсних чисел відрізка  $[0; 1]$ , що є трисимвольним самоподібним кодуванням чисел із нульовою надлишковістю. Доведено кілька співвідношень, що стосуються нового поняття.
8. Запропоновано узагальнення неперервних недиференційовних функцій Буша, Вундерліха, Трибін-функції, яке ґрунтується на  $Q_s^*$ -зображенні чисел відрізка  $[0; 1]$  зі збереженням властивостей неперервності, ніде не монотонності, автомодельності. Вивчено варіаційні властивості функції, описано властивості її рівнів, зокрема їхню масивність.

Одержані результати нові, строго і цілком обґрунтовані.

**Практичне значення отриманих результатів.** Робота має теоретичний характер, але отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у різних галузях математики: теорії чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, конструктивній теорії функцій з фрактальними властивостями, теорії динамічних систем.

**Особистий внесок здобувача.** Наукові результати, які виносяться на



захист, отримала авторка самостійно. Науковому керівнику належать постановки задач, деякі ідеї щодо методів обґрунтування гіпотетичних тверджень і перевірка їхнього доведення. Співавторам спільних публікацій належать твердження, які до дисертації не ввійшли.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів і наукових семінарах, а саме:

1. IV всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23 – 25 квітня 2015;
2. Міжнародна науково–методична конференція «Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 25–26 червня 2015;
3. V всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 25–26 квітня 2016;
4. Всеукраїнська науково–методична конференція «Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7–8 жовтня 2016;
5. VI всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21–22 квітня 2017;
6. Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13–14 грудня 2017;
7. Міжнародна наукова-практична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки», Київ, 25–26 травня 2017;
8. VII всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19–20 квітня 2018;
9. VIII всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 23 травня 2019;
10. Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial

- Tesellatons, Kyiv, September 24–28, 2018;
11. The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, Vinnytsia, July 02–06, 2019.
  12. IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10–11 квітня 2020;
  13. V Міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюційні системи», Київ, 19–21 травня, 2020;
  14. Семінар з фрактально аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 7 статтях [1]–[7] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них одна стаття [4] – у журналі, який індексується міжнародною наукометричною базою «MathSciNet», стаття [7] – у журналі, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus. Результати дослідження наведені також у матеріалах конференцій [8]–[20].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел (140 найменувань) і додатка (список публікації авторки, 20 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 136 сторінок.

**Основний зміст роботи.** У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об’єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувачки, висвітлено апробацію результатів дисертаційної роботи й висвітлення їх у публікаціях.

**Перший розділ «Огляд літератури й концептуальні засади дослідження»** має вступний характер. У ньому систематизовано відомості, що стосуються «геометрії»  $Q_s^*$ -зображення дійсних чисел, яке далі використовується для конструювання й дослідження локально складних функцій, проведено огляд літератури і наведено факти, необхідні для подальшого

дослідження об'єктів.

**Другий розділ «Нова двоосновна система кодування чисел відрізка  $[0; g_0]$  із різнознаковими основами»** у дисертації основний. У ньому обґрунтовують двоосновне і двосимвольне  $G_2$ -зображення чисел  $[0; g_0] \subset [0; 1]$  із основами  $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$  і  $g_1 \equiv g_0 - 1 < 0$ ; доведено, що переважна кількість чисел має єдине зображення ( $G_2$ -унарними числами), а числа зліченної множини мають їх два:  $\Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2}$  ( $G_2$ -бінарними числами); вивчається її геометрія, розв'язуються позиційні й метричні задачі, системно вибудовуються основи метричної та ймовірнісної теорій чисел у цьому зображенні. Встановлено правила порівняння чисел за їхніми зображеннями, здійснено порівняльний аналіз  $G_2$ -зображення з  $Q_2$ -зображенням (зокрема обґрунтовано властивості проектора цифр одного зображення на інше), вивчено властивості операторів:  $\omega$  — лівостороннього й  $\tau_0$  і  $\tau_1$  — правосторонніх зсувів цифр:  $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ ,  $\tau_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ . Доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр зображення чисел неперервний, а інверсор цифр зображення  $I(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{G_2}$  — це всюди розривна, ніде не монотонна функція. Ці два факти принципово відрізняють це зображення від інших відомих двосимвольних зображень.

У цьому розділі вивчаються властивості хвостових множин і неперервні перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости зображення чисел. Доведено, що множина всіх неперервних перетворень відрізка  $[0; g_0]$ , які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, стосовно операції «композиція» (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції. Доведено, що при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної підмножини відрізка  $[0; g_0]$  достатньо розглядати покриття цієї множини  $G_2$ -циліндрами. Описано фрактальні властивості множин типу Безиковича–Егглстона, визначених обмеженнями для частот цифр  $G_2$ -зображення чисел.

**Теорема 2.1.2.** Для будь-якої послідовності  $(\alpha_n) \in L = A \times A \times \dots$ , яка містить нескінченну кількість одиниць, ряд

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad \delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}, \quad (1)$$

є абсолютно збіжним знакопозитивним і його сума не перевищує першого ненульового доданка  $v_1 = g_0^m$ , де  $\alpha_m = 1$ , але  $\alpha_j = 0$  при  $j < m$ .

**Теорема 2.1.3.** Для будь-якого  $x \in [0; g_0]$  існує  $(\alpha_n) \in L$ , така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2} \quad (2)$$

**Зауваження.** Ряд (2) містить доданки додатні, від'ємні і які дорівнюють нулю, причому чинне твердження: для будь-якого набору  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  нулів і одиниць значення виразу  $u_{n+1}$ ,

$$\text{де } u_1 \equiv \delta_{\alpha_1}, \quad u_{n+1} \equiv \delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j} = \delta_{\alpha_{n+1}} g_0^{N_0} g_1^{N_1}$$

- є нулем тоді і тільки тоді, коли  $\alpha_{n+1} = 0$ ;
- додатним числом, якщо  $\alpha_{n+1} = 1$  і кількість одиниць серед чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — це парне число;
- від'ємним числом, якщо  $\alpha_{n+1} = 1$  і кількість одиниць серед чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — це непарне число, причому  $|u_{n+1}| < |u_n|$ .

**Означення 2.2.** Числа відрізка  $[0, g_0]$ , що мають два  $G_2$ -зображення, називаються  $G_2$ -бінарними.

**Лема 2.2.1.** Множина  $B$  всіх  $G_2$ -бінарних чисел вичерпується числами з  $G_2$ -зображеннями виду:  $\Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2}$ .

**Лема 2.5.1.** Якщо раціональне  $G_2$ -зображення числа  $x = \Delta_{c_1 \dots c_m (c_{m+1} \dots c_{m+p})}^{G_2}$  періодичне, то число  $x$  раціональне.

У пункті «Порівняння чисел за їхніми  $G_2$ -зображеннями» вичерпно вивчаються відношення чисел " $=$ ", " $>$ ", " $<$ " за їхніми  $G_2$ -зображеннями.

**Теорема 2.6.1.** Якщо  $x_1 \neq x_2$  і  $m(x_1, x_2) = m$  – номер місця першої з неспівпадаючих цифр, то числа

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1 d_1 d_2 \dots}^{G_2} = x_1 \quad \text{і} \quad x_2 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0 d'_1 d'_2 \dots}^{G_2}$$

перебувають у відношенні  $x_1 \geq x_2$ , якщо  $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 2k$ ,  $x_1 \leq x_2$ , якщо  $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 2k - 1$ .

**Означення 2.4.** Нехай  $(c_n) \in L_2$ ,  $G_2$ -циліндром рангу  $m$  із основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}$  усіх чисел  $x \in [0; g_0]$ , які мають таке  $G_2$ -зображення:  $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^{G_2}$ ,  $\alpha_{m+j} \in A$ , тобто  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2} = \{x : \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$ .

**Лема 2.7.1.** Циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}$  – це відрізок, причому 1)  $[a; b]$ , якщо  $N_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_m$  – парне, 2)  $[b; a]$ , якщо  $N_1$  – непарне, де  $a = \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^m (\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$ ,  $b = a + g_0 \prod_{j=1}^m g_{c_j}$ .

**Теорема 2.8.1.** Оператор  $\omega$  лівостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , який означається рівністю  $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ , аналітично задається формулою

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \quad (3)$$

– це неперервна коректно означена на  $[0; g_0]$  функція, лінійна на кожному з циліндрів 1-го рангу, зростає на  $\Delta_0^{G_2}$  і спадає на  $\Delta_1^{G_2}$ .

**Теорема 2.9.1.** Функція  $\omega^n$  – це коректно означена рівність

$$\omega(\omega^{n-1}(x)) = \omega^n(x = \Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{G_2}) \equiv \Delta_{\alpha_{n+1}(x) \alpha_{n+2}(x) \dots}^{G_2},$$

яка має аналітичний вираз  $\omega^n(x) = \frac{1}{P_n} x - \frac{B_n}{P_n}$ , де  $P_n = \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j(x)}$ ,

$B_n = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^n (\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)})$ ; вона неперервна на відрізку  $[0; g_0]$ , лінійна на кожному циліндрі рангу  $n$ .

**Означення 2.5.** Функція  $\tau_i$ , означена на  $[0; g_0]$  рівністю

$$\tau_i(x) = \tau_i \left( \Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{G_2} \right) = \Delta_{i \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{G_2},$$

де  $i \in \{0; 1\}$ , називається оператором правостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення чисел із параметром  $i$ .

**Лема 2.10.1.** Функція  $\tau_i$  неперервна в кожній точці відрізка  $[0; g_0]$  і аналітично виражається  $\tau_i(x) = \delta_i + g_i x$ .

**Лема 2.11.1.** Оператор  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$  має аналітичний вираз

$$\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = \delta_{i_1} + \sum_{k=1}^n \left( \delta_{i_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{i_j} \right) + \left( \prod_{j=1}^n g_{i_j} \right) x$$

$i$  є лінійною функцією, зростаючою, якщо  $P_n = \prod_{j=1}^n g_{i_j} > 0$  (рівносильно  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$  – парне число), і спадною, якщо  $P_n < 0$  (рівносильно  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$  – непарне число).

**Означення 2.6.** Кажуть, що  $G_2$ -зображення чисел  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$  і  $y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{G_2}$  мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні  $k$  і  $m$ , такі, що  $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$  для будь-якого  $j \in \mathbb{N}$ . Якщо  $k$  і  $m$  – найменші числа, для яких виконується вказана умова, то число  $z \equiv x \wedge y = \Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{G_2} = \Delta_{\beta_{m+1} \beta_{m+2} \dots}^{G_2}$ , називається спільним хвостом чисел  $x$  та  $y$ .

**Теорема 2.12.1.** Множина всіх чисел, які мають однаковий хвіст  $G_2$ -зображення (хвостова множина), є зліченною всюди щільною у  $[0; g_0]$  множиною. Множина  $W$  усіх хвостових множин – континуальна.

**Зауваження 2.12.2.** Принциповою відмінністю  $G_2$ -зображення чисел від інших двосимвольних систем є те, що всі  $G_2$ -бінарні числа утворюють одну хвостову множину, тоді як для класичної двійкової системи, нега-двійкової,  $Q_2$  -,  $Q_2^*$  - зображення чисел вони належать різним хвостовим множинам.

**Означення 2.7.** Кажуть, що функція  $y = f(x)$  зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , якщо числа  $x$  і  $y = f(x)$  мають однаковий хвіст  $G_2$ -зображення для кожного  $x$  із області визначення.

Прикладами функцій, що зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, є оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр.

**Означення 2.8.** Під перетворенням відрізка  $[0; g_0]$ , що зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел (далі хвостовим перетворенням), ми розуміє-

мо бієктивне відображення  $\varphi$  відрізка на себе, при якому  $x$  і  $\varphi(x)$  мають однакову суть для кожного  $x \in [0; g_0]$ .

**Теорема 2.16.1. (Основний результат).** Множина  $\mathcal{C}$  всіх неперервних бієкцій відрізка  $[0; g_0]$ , які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, щодо операції  $\circ$  — ”композиція” (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції.

**Означення 2.9.** Функція  $I$ , яка означена рівністю  $I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_n]}^{G_2}$ , називається **інверсором**  $G_2$ -зображення чисел.

Означення функції є коректне для точок, що мають єдине  $G_2$ -зображення. Оскільки  $\frac{g_0(1+g_1^2)}{1-g_1} = I(\Delta_{01(0)}^{G_2}) \neq I(\Delta_{11(0)}^{G_2}) = \frac{g_0^3}{1-g_1}$ , то воно не коректне без домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень  $G_2$ -бінарних точок. Тому домовимось не використовувати зображення  $\Delta_{c_1\dots c_m 11(0)}^{G_2}$ .

**Теорема 2.18.1. (Основний результат).** Інверсор  $I$  є ніде не монотонною неперервною за множиною  $G_2$ -унарних точок відрізка  $[0; g_0]$ .

**Означення 2.10.** Функція  $p$ , яка числу  $x = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}^{Q_2}$  ставить у відповідність число  $y = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}^{G_2}$ , називається **проектором**  $Q_2$ -зображення на  $G_2$ -зображення.

**Означення 2.11.**  $G_2$ -зображення і  $Q_2$ -зображення чисел із основами  $(g_0, g_1)$  і  $(q_0, q_1)$  відповідно називаються **двоїстими**, якщо  $g_0 = q_0$ .

**Теорема 2.19.1.** Якщо  $Q_2$ -зображення і  $G_2$ -зображення двоїсті, то функція  $p$ , означена рівністю  $p(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{G_2}$ , є ніде не монотонною неперервною в кожній  $Q_2$ -унарній точці. В  $Q_2$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1\dots c_{m-1} 01(0)}^{Q_2}$  функція  $p$  має скінченний стрибок

$$\frac{2g_0(1-g_0)}{2-g_0} \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}|.$$

У третьому розділі «Узагальнення функцій Радемахера й ря-

дів Уолша» пропонуються узагальнення функцій Радемахера:

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta_0^2 \equiv \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ -1 & \text{при } x \in \Delta_1^2 \equiv \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$r_k^*(x) \equiv r_0^* (\{2^k x\})$ , де  $\{2^k x\}$  – дробова частина числа  $2^k x$ ; і Уолша, що є всеможливими добутками функцій Радемахера. Вони ґрунтуються на  $Q_2$ -зображенні чисел відрізка  $[0; 1]$  замість класичного двійкового. У розділі вивчено інтегральні властивості отриманих узагальнень і побудовано систему ортогональних функцій із використанням нумерації Пеллі.

**Означення 3.1.** На піввідрізку  $[0; 1)$  означмо послідовність функцій

$$\begin{aligned} & (r_n)_{n=0}^\infty : \\ & r_0(x) \equiv (-1)^{\alpha_1(x)} \cdot 2q_{1-\alpha_1(x)} = \\ & = \begin{cases} 2q_1, & \text{якщо } x \in [0; q_0) = \Delta_0^{Q_2} \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 0; \\ -2q_0, & \text{якщо } x \in [q_0; 1) = \Delta_1^{Q_2} \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 1; \end{cases} \\ & r_n(x) \equiv r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\dots}^{Q_2} \right), \quad n \in N. \end{aligned}$$

Функції  $r_n$  – це узагальнення функцій Радемахера, які співпадають з ними при  $q_0 = \frac{1}{2}$ .

**Зауваження 3.2.1** Функція  $r_n$  набуває лише двох значень  $2q_1$  і  $-2q_0$ , причому на кожному циліндрі рангу  $n$  вона стала, а отже, стала на кожному з циліндрів рангу  $m > n$ .

**Теорема 3.2.1.** Для узагальнення  $r_n$  функції Радемахера  $r_n^*$  має місце рівність:  $\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}} r_n(x) dx = 0$  при довільному наборі  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  з 0 та 1.

**Наслідок 3.2.1.** Виконується рівність  $\int_0^1 r_n(x) dx = 0$ .



**Теорема 3.2.2** Система функцій Радемахера ортогональна, а саме:

$$\int_0^1 r_n(x)r_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq m, \\ 4q_0q_1, & \text{якщо } n = m. \end{cases}$$

Систему узагальнених функцій Уолша  $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^\infty$  ми будемо, використовуючи традиційну нумерацію Пеллі, поклавши  $\omega_0(x) \equiv 1$ . Для означення функції  $\omega_n(x)$  число  $n$  представляється у двійковій системі числення:  $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_12^1 + \varepsilon_0 = (1\varepsilon_{k-1}\dots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ ,  $\varepsilon_i \in A_2$ . Звідси бачимо, що  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , де  $k = k(n)$ . Тепер означуємо функцію  $\omega_n$  рівністю:

$$\omega_n(x) \equiv \prod_{i=0}^k r_i^{\varepsilon_i}(x) = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} r_i^{\varepsilon_i}(x).$$

**Зауваження 3.3.1.** Узагальнення функцій Уолша, як і самі функції Уолша, в точках розриву неперервні справа. Але класичні функції Уолша набувають лише двох значень 1 і -1, що не збереглося для щойно введеного їхнього узагальнення.

**Теорема 3.3.1.** Якщо  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , тобто

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_12 + \varepsilon_02^0,$$

то узагальнена функція Уолша  $\omega_n(x) = r_k(x)r_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}(x) \dots r_0^{\varepsilon_0}(x)$  на кожному циліндрі  $(k+1)$ -го рангу стала, причому на циліндрі  $\Delta_{c_1c_2\dots c_kc_{k+1}}^{q_0^{-1}}$  вона набуває значення  $\omega_n(x) = (-1)^{c_2s}q_0^c q_1^{s-c}$ , де  $s = 1 + \varepsilon_{k-1} + \dots + \varepsilon_1 + \varepsilon_0$  - кількість цифр "1" у зображенні числа  $n$ ,  $c = \varepsilon_0c_1 + \dots + \varepsilon_{k-1}c_k + c_{k+1}$  - кількість  $j$ , таких, що  $\varepsilon_j = 1 = c_{j+1}$  серед  $0, 1, \dots, k$ .

**Теорема 3.3.2.** Для узагальненої функції Уолша  $\omega_n$  при  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , тобто  $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_12 + \varepsilon_02^0$  і кожного циліндра  $\Delta_{c_1\dots c_kc_{k+1}}^{Q_2}$

має місце рівність  $\int_{x \in \Delta_{c_1\dots c_kc_{k+1}}^{Q_2}} \omega_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \omega_n(x)dx$ .

**Зауваження 3.3.2.** Якщо  $n < m$ ,  $(1\varepsilon'_{k-1}\varepsilon'_{k-2}\dots\varepsilon'_1\varepsilon'_0)_2$  - двійкове зображення числа  $n$ , а  $(1\varepsilon_{m-1}\varepsilon_{m-2}\dots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$  - двійкове зображення числа

$m, i$  при цьому  $\varepsilon_j \varepsilon'_i = 0$  для всіх  $j \leq k-1$ , то добуток  $\omega_n \omega_m$  функцій Уолша є функцією Уолша з номером  $l = (1\varepsilon_{m-1} \dots \varepsilon_{k+1} 1\delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0)_2$ , де  $\delta_j = \varepsilon'_j + \varepsilon_j, j = \overline{1, k-1}$ . Для таких  $n$  і  $m$  виконується рівність:

$$\int_0^1 \omega_n(x) \omega_m(x) dx = 0.$$

**Лема 3.4.3.** Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та трійкова цифра числа  $t \in [0; 1)$ ,

$$v_k(t) \equiv 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{то } \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{3^k}}{3}.$$

**Означення 3.2.** Функції  $v_k(x), k = 0, 1, 2, \dots$ , визначені рівністю (4), називаються  $R_3$ -функціями, це трійкові аналоги функцій Радемахера.

**Теорема 3.4.1.** Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та трійкова цифра числа  $t \in [0; 1)$ , а

$$v_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt.$$

**Теорема 3.4.2.**  $R_3$ -функції мають властивості:

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} v_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k > m, \\ \frac{1 - c_k}{3^m}, & \text{якщо } k \leq m, \end{cases}$$

$$\int_0^1 v_k(x) dx = 0, \quad \int_0^1 v_k(x) v_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq m, \\ \frac{2}{3}, & \text{якщо } k = m. \end{cases}$$

Нехай  $Q_3 = (q_0, q_1, q_2)$  – заданий упорядкований набір додатних чисел, сума яких дорівнює 1,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = q_0$ ,  $\beta_2 = q_0 + q_1$ ,  $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$ .

Якщо  $q_0 = q_2$ , то  $Q_3$  – зображення називається симетричним. Очевидно, що класичне трійкове зображення – це симетричне  $Q_3$  – зображення.

**Лема 3.5.1.** *Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та цифра симетричного  $Q_3$  – зображення числа  $t \in [0; 1)$ , тобто*

$$t = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k(t)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(t)} \right) = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k(t)} q_0^{N_0(t,k)} q_1^{N_1(t,k)} q_2^{N_2(t,k)} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_3},$$

$$u_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \quad (5)$$

то для будь-якого дійсного числа  $x$  чинна рівність

$$\int_0^1 \exp(ixAu_k(t)) dt = q_1 + 2q_0 \cos Ax.$$

**Зауваження 3.5.1.** *Функції  $u_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , визначені рівністю (5), називаються  $R_3^*$ -функціями, вони є узагальненням  $R_3$ -функцій на основі симетричного  $Q_3$ -зображення чисел.*

**Теорема 3.5.1.** *Для  $R_3^*$ -функцій дійсні рівності:*

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}} u_k(x) dx = 0, \quad \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} u_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k > m, \\ (1 - c_k) \prod_{j=1}^m q_{c_j} & \text{при } k \leq m, \end{cases}$$

$$\int_0^1 u_k(x) dx = 0, \quad \int_0^1 u_k(x) u_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq m, \\ 2q_0, & \text{якщо } k = m. \end{cases}$$

Об'єктом дослідження четвертого розділу «Узагальнення Трибін-функції» є функція  $f$ , означена в термінах поліосновного  $Q_s^*$ -зображення чисел, визначеного нескінченною додатною стохастичною матрицею  $Q_s^* = \|q_{ik}\|$ ,  $q_{0k} + q_{1k} + \dots + q_{s-1,k} = 1$ ,  $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{q_{ik}\} = 0$ , а саме:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s^*} = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}), \text{ де } \alpha_k \in A_s = \{0, 1, \dots, s-1\},$$

$$\beta_{ik} = \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}, \text{ яка означається рівністю}$$

$$y = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k \dots}^{G_s^*} = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k \dots}^{G_2^*} = \delta_{\gamma_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\gamma_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j}),$$

де  $(g_{0k})$  — послідовність чисел, менших від 1,  $g_{1k} \equiv 1 - g_{0k}$ ,  $\delta_{0k} = 0$ ,  $\delta_{1k} = g_{0k}$ ,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \quad n \in N. \quad (6)$$

**Теорема (Основний результат).** Функція  $f$  неперервна в кожній точці відрізка  $[0; 1]$ , ніде не монотонна, має необмежену варіацію при будь-яких матрицях  $Q_s^* = \|q_{ik}\|$  і  $G_2^* = \|g_{jk}\|$ .

**Лема 4.3.1.** 1) Образом  $Q_s^*$ -циліндра  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*}$  при відображенні  $f$  є  $G_2^*$ -циліндр  $\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*}$ , де  $\gamma_i$  знаходять за формулами (6);

$$2) \quad \max_{x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}} f(x) = \begin{cases} f(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1}(c_m)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{m-1}(1)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 1, \\ f(\Delta_{c_1 \dots c_m(i)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{m-1}0(1)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 0, \end{cases}$$

де  $i \neq c_m$  (в останньому випадку максимумів  $s - 2$ );

$$3) \quad \min_{x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}} f(x) = \begin{cases} f(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1}(c_m)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{m-1}(0)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 0, \\ f(\Delta_{c_1 \dots c_m(i)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{m-1}1(0)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 1, \end{cases}$$

де  $i \neq c_m$  (в останньому випадку мінімумів  $s - 2$ ).

**Наслідок 4.3.1.** Коливання  $\psi_f$  функції  $f$  на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*}$  дорівнює довжині циліндра  $\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*} = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*})$ , тобто:  $\psi_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*}) = |\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*}| = \prod_{j=1}^m g_{\gamma_j j}$ .

**Лема 4.3.2.** *Кількість  $k$  прообразів циліндра  $\Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{G_2^*}$  обчислюється за формулою*

$$k = k(\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*}) = \begin{cases} (s-1)^{\sigma_m}, & \text{якщо } \gamma_1 = 0, \\ (s-1)^{1+\sigma_m}, & \text{якщо } \gamma_1 \neq 0, \end{cases}$$

де  $\sigma_m$  – це кількість таких  $j$ , що  $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ .

**Наслідок 4.3.2.** *Найбільшу кількість прообразів серед циліндрів  $m$ -го рангу має  $G_2^*$ -циліндр  $\Delta_{1010\dots c}^{G_2^*}$ , де  $c = 0$ , якщо  $m$  – парне, і  $c = 1$ , якщо  $m$  – непарне.*

**Подяка.** Висловлюю подяку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору М. В. Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до роботи, підтримку та допомогу.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Даний розділ має вступний характер. У ньому ми систематизуємо відомості, що стосуються «геометрії»  $Q_s^*$ -зображення дійсних чисел. Вказане зображення ми використовуємо для конструювання та дослідження функцій та створення нових зображень. Тут наведено факти, необхідні для подальшого дослідження об'єктів зі складною локальною топологічною метричною структурою.

#### 1.1. Кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту

Нехай  $1 < s$  — фіксоване натуральне число,  $A_s = \{0; 1; \dots; s - 1\}$  — алфавіт,  $L_s = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$  — простір послідовностей елементів алфавіту. *Кодуванням дійсних чисел* проміжку  $E = \langle a; b \rangle$  засобами алфавіту  $A_s$  називається сюр'єктивне відображення  $g : L \rightarrow E$ . При цьому послідовність  $(\alpha_n)$  називається  $g$ -кодом числа  $x$ , а запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$  —  $g$ -зображенням числа  $x$ . Сама послідовність  $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in L$ , яка відповідає числу  $x \in E$ , називається його  $g$ -кодом, а символічний запис  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^g$  —  $g$ -зображенням,  $\alpha_n$  —  $n$ -ою цифрою (або символом) цього зображення.

Кожне зображення чисел має свою геометрію (геометричний зміст цифр, метричні відношення тощо). Ключовим поняттям в геометрії зображення (метричній та позиційній) є поняття циліндра [50, 83].

$g$ -циліндром рангу  $t$  з основою  $c_1 \dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^g = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots}^g, (\alpha_n) \in L_s\}$ .  $g$ -циліндри є множинами простору  $R^1$  і тому мають свої, специфічні для відображення  $g$ , властивості. Серед них вирази: 1) міри Лебега циліндра  $\lambda(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g)$ , 2) відношення  $\frac{\lambda(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^g)}{\lambda(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g)}$ , яке називається *основним метричним відношенням*  $g$ -зображення. Як буде

з'ясовано нижче, воно відіграє важливу роль у метричних та ймовірнісних задачах, при визначенні фрактальної розмірності множин і встановленні нормальних властивостей чисел. Якщо кожен  $g$ -циліндр є проміжком, то кодування називається *неперервним*.

Кажуть, що  $g$ -зображення має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більше, ніж їх два, причому множина чисел, що мають два зображення, є не більш, ніж зліченною. Якщо існують числа, що мають більше двох зображень, зокрема нескінченну їх кількість, то кажуть, що система кодування має *ненульову надлишковість*.

Кодування дійсних чисел називається *аналітичним*, якщо воно ґрунтується на їх розкладах у математичні вирази (ряди, нескінченні добутки, ланцюгові дроби тощо), параметрами (коефіцієнтами, показниками степеня, індексами тощо) яких є цифри алфавіту.

Найпростішим (напевно в усіх аспектах) є класичне двійкове кодування чисел одиничного відрізка  $[0; 1]$ , яке ґрунтується на твердженні:

**Теорема 1.1.1.** *Для будь-якого  $x \in [0; 1]$  існує така послідовність  $(\alpha_n) \in L_2$ , що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \alpha_n \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2. \quad (1.1.1)$$

Ряд (1.1.1) називається *двійковим представленням* числа  $x$ , а його скорочений (символічний) запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$  – *двійковим зображенням*. Це зображення є прикладом одного з найпростіших двосимвольних неперервних аналітичних кодувань чисел відрізка  $[0; 1]$  з нульовою надлишковістю.

У двійковій системі числення цифри зображення числа відіграють дві ролі: роль числа (коефіцієнта у двійковому розкладі) і символа у скороченому записі розкладу (зображенні). Існують системи кодування чисел, в яких цифри втрачають роль числа (про них йдеться нижче). В математиці та її застосуваннях використовуються десятки різних систем кодування чисел. Їм присвячено сотні робіт, зокрема монографії [63, 4, 83, 111, 86, 80, 134].

Функція  $f$ , означена рівністю  $f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{g_1}) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{g_2}$ ,  $\forall (\alpha_n) \in L$ , нази-

вається проектором  $g_1$ -зображення в  $g_2$ -зображення.

Крім метричних відмінностей, кожне кодування чисел має свої специфічні топологічні властивості.

Два кодування дійсних чисел ( $g_1$ - і  $g_2$ -) одного і того ж проміжка називаються *топологічно еквівалентними*, якщо відображення  $f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{g_1}) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{g_2}$  є неперервною монотонною функцією.

Кожна неперервна строго зростаюча або строго спадна функція з області визначення і множиною значень  $[0; 1]$  породжує нове кодування чисел цього відрізка, топологічно еквівалентне класичному двійковому. Наприклад, функція  $y = x^3$  задає кодування чисел відрізка  $[0; 1]$  на осі  $Oy$ .

Неперервне  $g$  кодування дійсних чисел називається самоподібним, якщо відношення  $\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^g|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^g|}$  дорівнює константі, залежній лише від цифри  $i$ .

Розглядаючи фіксоване  $g$ -кодування дійсних чисел, можна розбудувати його теорію в різних аспектах. Її складовими є:

- 1) геометрія  $g$ -зображення (позиційна і метрична);
- 2) метрична теорія чисел у  $g$ -зображенні;
- 3) ймовірнісна теорія чисел;
- 4) застосування в теорії фракталів, теорії функцій, теорії розподілів випадкових величин, теорії динамічних систем,
- 5) конструктивна теорія функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних тощо).

Властивість елемента множини  $E$  називається *нормальною*, якщо її мають майже всі (у певному математичному сенсі) елементи множини  $E$ .

Нагадаємо, що для порівняння масивності множин використовують такі поняття як потужність, міра, категорії Бера [66]. Далі, використовуючи термін майже всі для елементів континуальної числової множини, ми матимемо на увазі, що відносно міри Лебега.



## 1.2. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел

Якщо алфавіт містить два елементи, то кодування числа засобами такого алфавіту називається *двосимвольним*. Традиційно двосимвольні системи кодування використовують алфавіт  $A = \{0; 1\}$ . Специфікою таких систем є те, що цифра зображення числа, будучи відмінною від 0, є 1, а відмінною від 1, є 0. Ця обставина надає технічні переваги цим системам при розробці засобів кодування, зберігання і передачі інформації. Прикладами двосимвольних кодувань, крім класичного двійкового, є нега-двійкове [58], марківське [43], медіантне [6, 24, 129],  $A_2$ -зображення [23, 126] і зображення чисел дробами Данжуа [37], зображення чисел неповними сумами числових рядів [44, 78, 79] та ін.

Іноді доцільними є перекодування чисел засобами двосимвольного алфавіту, які отримуються з інших кодувань. Це актуально для теорії функцій з локально складними тополого-метричними і фрактальними властивостями, а також для теорії розподілів випадкових величин, породжених розподілами їх цифр, які є незалежними або мають марківську залежність.

Зауважимо, що від аналітичних двосимвольних кодувань чисел легко здійснюється перехід до їх  $2^m$ -символьних кодувань, а також нескінченно-символьних (див. [57, 18]).

Наприклад, маючи двійкове зображення числа  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^2$ , в результаті перетворення

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots = \left( \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \frac{\alpha_m}{2^m} \right) + \frac{1}{2^m} \left( \frac{\alpha_{m+1}}{2} + \dots + \frac{\alpha_{2m}}{2^m} \right) + \dots \equiv \Delta_{a_1a_2\dots a_k\dots}^{2^m},$$

де  $a_1 = 2^{m-1}\alpha_1 + 2^{m-2}\alpha_2 + \dots + \alpha_m$ ,  $a_k = 2^{m-1}\alpha_{km-1} + 2^{m-2}\alpha_{km-2} + \dots + \alpha_{km}$ , отримуємо  $2^m$ -символьне зображення числа  $x$ ,  $a_k = \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ .

Або

$$x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^2 \equiv \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{b_1}1\underbrace{0\dots 0}_{b_2}1\dots}^{2^{\infty}} = \Delta_{b_1b_2\dots b_k\dots}^{2^{\infty}}, \quad b_k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

### 1.3. $Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа як узагальнення класичного двійкового зображення

Нехай  $q_0$  — фіксоване число з інтервала  $(0; 1)$ ,  $q_1 \equiv 1 - q_0$ .

**Теорема 1.3.1.** [54] Для будь-якого  $x \in [0; 1]$  існує одна або дві послідовності  $(\alpha_n) \in L$  такі, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots}^{Q_2}, \quad (1.3.2)$$

де  $\beta_0 = 0$ ;  $\beta_1 = q_0$  (тобто  $\beta_i = i q_{1-i}$ ).

Ряд (1.3.2) називається  $Q_2$ -представленням числа  $x$ , а символічний запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots}^{Q_2}$  називається  $Q_2$ -представлення числа  $x$ . При цьому  $\alpha_k = \alpha_k(x)$  називається  $k$ -тою цифрою даного зображення числа  $x$ .

$Q_2$ -представлення є узагальненням класичного двійкового розкладу і співпадає з ним при  $q_0 = \frac{1}{2}$ , воно є самоподібним узагальненням двійкового зображення. Геометрія цього зображення є простою, її висвітлюють циліндричні множини.

$Q_2$ -циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}$ , тобто множина чисел  $x \in [0; 1]$ , які мають перші  $m$  цифр відповідно рівні  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , є відрізком з кінцями  $a = \beta_{c_1} + \sum_{k=1}^m (\beta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j})$ ,  $b = a + \prod_{j=1}^m q_{c_j}$ . А отже, його довжина обчислюється за формулою  $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}| = \prod_{j=1}^m q_{c_j}$ . Основне метричне відношення має вигляд

$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m i}^{Q_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}|} = q_i$ . Як бачимо, його значення залежить виключно від останньої цифри.

**Теорема 1.3.2.** Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$  одиничного відрізка виконуються рівності для частот

$$\nu_1^{Q_2} \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k} = q_1, \quad \nu_0^{Q_2} \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)}{k} = q_0.$$

## 1.4. Нега-двійкове зображення як тривіальне перекодування двійкового зображення

Коротко зупинимось на нега-двійковому зображенні чисел, спираючись на роботу [58].

**Теорема 1.4.1.** *Для будь-якого числа  $x \in [0; 1]$  існує послідовність  $(\tau_n) \in L_2$  така, що*

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-2)^n} \equiv \overline{\Delta}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}^2. \quad (1.4.3)$$

**Означення 1.1.** *Розклад числа  $x$  у ряд (1.4.3) називається його нега-двійковим представленням, а його формальний запис  $\overline{\Delta}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}^2$  — нега-двійковим зображенням. При цьому  $\tau_n$  називається  $n$ -ою цифрою даного зображення.*

Існує тісний зв'язок двійкового та нега-двійкового зображень одного і того ж числа, який виражає наступне твердження [58]: цифри  $\tau_n$  нега-двійкового зображення  $\overline{\Delta}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}^2$  числа  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^2$  обчислюються за формулою

$$\tau_n = \begin{cases} 1 - \alpha_n, & \text{якщо } n\text{- непарне,} \\ \alpha_n, & \text{якщо } n\text{- парне.} \end{cases}$$

Якщо ж відоме нега-двійкове зображення числа  $x = \overline{\Delta}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}^2$ , то цифри його двійкового зображення можна отримати за формулами:

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 - \tau_n, & \text{якщо } n\text{- непарне,} \\ \tau_n, & \text{якщо } n\text{- парне.} \end{cases}$$

Отже,  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^2 = \overline{\Delta}_{[1-\alpha_1]a_2[1-\alpha_3]a_4[1-\alpha_5]a_6\dots}^2$ .

Це дає підставу стверджувати, що нега-двійкове зображення по своїй суті є лише перекодуванням двійкового зображення числа  $x$ .

Числа, які мають два нега-двійкових зображення, називаються *нега-двійково-раціональними*. Вони мають зображення  $\overline{\Delta}_{c_1\dots c_m 0(01)}^2 = \overline{\Delta}_{c_1\dots c_m 1(10)}^2$ .

Нега-двійково-раціональні числа утворюють всюди щільну в  $[0; 1]$  підмножину раціональних чисел, але не кожне раціональне число є нега-двійково-раціональним. Наприклад, число  $\overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2(0)$  є раціональним, але не є нега-двійково-раціональним. Множина раціональних чисел, що не є нега-двійково-раціональними, є щільною у відрізку  $[0; 1]$ .

Числа з  $[0; 1]$ , що не є нега-двійково-раціональними, називаються нега-двійково-ірраціональними. Кожне ірраціональне число є нега-двійково-ірраціональним. Кожна цифра зображення нега-двійково-ірраціонального числа є коректно означеною функцією числа, що зображається. Для нега-двійково-раціональних чисел це буде після домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень (нехай з періодом  $(01)$ ).

Домовившись використовувати лише одне з двох існуючих зображень нега-двійкових чисел, означимо функцію  $I(x)$  рівністю

$$I(x) = I(\overline{\Delta}_{\tau_1(x)\tau_2(x)\dots\tau_n(x)\dots}^2) = \overline{\Delta}_{[1-\tau_1(x)][1-\tau_2(x)]\dots[1-\tau_n(x)]\dots}^2,$$

яку називатимемо інверсором цифр нега-двійкового зображення чисел.

**Лема 1.4.1.** *Інверсор цифр нега-двійкового зображення чисел є лінійною функцією, а саме:  $I(x) = \frac{1}{3} - x$ .*

1. Циліндр  $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2$  рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$ , що відповідає нега-двійковому зображенню чисел, є відрізком, причому  $\overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2 = [A - B; A + C]$ ,  $A = \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(-2)^i}$ ,

$$B = \begin{cases} \frac{1}{2^m \cdot 3}, & \text{якщо } m \text{ не парне,} \\ \frac{1}{2^{m-1} \cdot 3}, & \text{якщо } m \text{ парне,} \end{cases} \quad C = \begin{cases} \frac{1}{2^{m-1} \cdot 3}, & \text{якщо } m \text{ не парне,} \\ \frac{1}{2^m \cdot 3}, & \text{якщо } m \text{ парне.} \end{cases}$$

2.  $\max \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} 1}^2 = \min \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} 0}^2$ ;  $\max \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k} 0}^2 = \min \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k} 1}^2$ .

3.  $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^2| = \frac{1}{2^m} = |\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|$ .

4.  $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|} = \frac{1}{2} = \frac{|\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|}{|\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|}$ .

5.  $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_m \dots}^2 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \dots a_m \dots}^2$ ;  $x = \overline{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_m \dots}^2 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_m \dots}^2$ .

Основне метричне відношення, яке виражає властивість (4), є свідченням близькості (і навіть повної змістової аналогії) відповідних метричних теорій (двійкового та нега-двійкового зображення чисел). У просторі (в множині) нега-двійкових зображень чисел відрізка  $[0; 1]$  (рівносильно у просторі послідовностей елементів алфавіту) розглядається оператор  $\eta$ , означений рівністю  $\eta(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{-2}) = \Delta_{\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{-2}$ , який називається *оператором ліво-стороннього зсуву цифр* нега-двійкового зображення числа. Після домовленості вживати одне з двох існуючих зображень нега-двійково-раціональних чисел він коректно визначає функцію  $\eta$  на  $[0; 1]$ .

**Лема 1.4.2.** *Функція  $\eta$  має вираз  $\eta(x) = -x + 2 - \alpha_1(x)$  і є лінійною на кожному з циліндрів першого рангу, а саме:*

$$\eta(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{якщо } x \in \Delta_0^{-2}, \\ -x + 1, & \text{якщо } x \in \Delta_1^{-2}. \end{cases}$$

В точці  $x = \frac{1}{2}$  функція має стрибок  $\delta$  величини 1.

## 1.5. Ланцюгове $A_2$ -зображення чисел

Роль і значення ланцюгових дробів у математиці та її застосуваннях добре відомі [2, 86]. Відносно недавно [23] була створена теорія двосимвольного кодування дійсних чисел за допомогою нескінченних ланцюгових дробів, елементи яких набувають лише двох значень. Запропонована система кодування чисел має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох зображень. Це теорія ланцюгових  $A_2$ -дробів. Її метрична і ймовірнісна теорія уже мають нетривіальний розвиток [60, 23, 126, 127]. Ланцюгове  $A_2$ -зображення має ту ж (топологію), що і нега-двійкове зображення, тобто вони є топологічно еквівалентними. Це дозволяє ефективно використовувати їх для задання функцій і мір зі складною локальною структурою шляхом проектування цифр одного зображення в інше. Розглянемо один з прикладів.

Нехай  $A_2 \equiv \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ . Як відомо [23], для будь-якого  $x \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  існує послідовність  $(a_n)$  така, що  $a_n \in A_2$  і

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2} \quad (1.5.4)$$

Ланцюговий дріб (1.5.4) називається *ланцюговим  $A_2$ -дрібом*. Наприклад,

$$\frac{1}{2} = [0; (1, \frac{1}{2})] = \Delta_{(1, \frac{1}{2})}^{A_2}, \quad 1 = [0; (\frac{1}{2}, 1)] = \Delta_{(\frac{1}{2}, 1)}^{A_2}, \quad \frac{2}{3} = \Delta_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}, 1)}^{A_2}. \quad (1.5.5)$$

Відомо також, що числа зліченної множини можна представити у вигляді двох формально різних ланцюгових  $A_2$ -дробів:

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1, (1, \frac{1}{2})],$$

де круглі дужки символізують період. Такі числа називаються  *$A_2$ -раціональними*. Решта чисел відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  мають єдиний розклад в ланцюговий  $A_2$ -дріб, а отже, і єдине ланцюгове  $A_2$ -зображення. Вони називаються  *$A_2$ -ірраціональними* числами.

Оскільки мають місце рівності (1.5.5), то кожне  $A_2$ -раціональне число має розклад в скінченний ланцюговий  $A_2$ -дріб, а отже, є числом раціональним, але не кожне раціональне число є  $A_2$ -раціональним (прикладом такого є число  $\frac{5}{6}$ ).

Загальний алгоритм розкладу числа  $x \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  в нескінченний ланцюговий  $A_2$ -дріб  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$  полягає в наступному:

$$a_1 = \varphi(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } \frac{2}{3} \leq x \leq 1; \end{cases} \quad a_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, 2\};$$

$$x_1 = \frac{1}{x} - \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\varepsilon_1, \quad a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \in \{1, 2\};$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} - \varphi(x_1) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_2;$$

.....

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \varphi(x_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n;$$

.....

Тоді  $a_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n \in \{1, 2\}$ ,  $n \in N$ .

Нагадаємо, що *підхідним дробом порядку  $n$*  ланцюгового дробу  $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$  називається число  $\frac{p_n}{q_n}$ , що є значенням скінченного ланцюгового дробу  $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ , тобто  $n$ -го відрізка даного ланцюгового дробу.

*Циліндром рангу  $n$*  з основою  $c_1 c_2 \dots c_n$  для ланцюгового  $A_2$ -зображення чисел відрізка  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  є множина  $\Delta_{c_1 \dots c_n}^{A_2}$  всіх чисел  $x$ , які мають ланцюгове  $A_2$ -зображення з першими  $n$  елементами відповідно рівними  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , є відрізком з кінцями

$$b = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n + 1] & \text{при непарному } n; \\ [0; c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n + 0, 5] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

$$c = \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, \dots, c_n + 0, 5] & \text{при непарному } n; \\ [0; c_1, c_2, \dots, c_n + 1] & \text{при парному } n. \end{cases}$$

Для довільного натурального  $n$  мають місце властивості циліндрів:

1.  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{1}{2}}^{A_2} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 1}^{A_2}$ ;
2. Довжина циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}$  обчислюється за формулою

$$d(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}) = \frac{1}{(q_{n-1} + q_n)(q_{n-1} + 2q_n)}. \quad (1.5.6)$$

3. Основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{1 + i \frac{q_{n-1}}{q_n}}{2i^2 + 1 + 2i \frac{q_{n-1}}{q_n}}, i \in A_2.$$

Зокрема,

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{1}{2}}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{2q_n + q_{n-1}}{3q_n + q_{n-1}};$$

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 1}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2\frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{q_n + q_{n-1}}{3q_n + q_{n-1}}.$$

Тоді

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{1}{2}}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 1}^{A_2}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = 1 + \frac{q_n}{q_n + q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}.$$

4. Має місце подвійна нерівність

$$\frac{3}{8} < \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} < \frac{5}{8}.$$

Представлення числа  $x$  рівністю (1.5.4) можна закодувати засобами і класичного двосимвольного алфавіту  $A = \{0; 1\}$ , а саме:

$$x = [0; a_1; a_2; \dots; a_n, \dots] = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A,$$

де  $\alpha_n = 0$ , якщо  $a_n = \frac{1}{2}$ , і  $\alpha_n = 1$ , якщо  $a_n = 1$ .

**Теорема 1.5.1.** [58] Функція  $f$ , означена рівністю  $f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_2}) = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$ , з областю визначення  $D_f = [\frac{1}{2}; 1]$  і множиною значень  $E_f = [0; 1]$  є: 1) коректно означеною; 2) неперервною; 3) строго зростаючою.

**Теорема 1.5.2.** Якщо в точці  $x_0$  існує похідна  $f'(x_0)$  функції  $f$ , то вона обчислюється за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{\alpha_1(x_0) \dots \alpha_n(x_0)}^{-2}|}{|\Delta_{a_1(x_0) \dots a_n(x_0)}^{A_2}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q_{n-1} + q_n)(q_{n-1} + 2q_n)}{2^n},$$

де  $q_n$  — знаменник підхідного дроби числа  $x_0$ .

**Наслідок 1.5.1.** Функція  $f$  і її обернена функція  $f^{-1}$  є сингулярними строго зростаючими функціями [68, 126].

Нега-двійкова система та система кодування чисел за допомогою нескінченних ланцюгових  $A_2$ -дробів, маючи нульову надлишковість є двосимвольними і топологічно еквівалентними. Вони є зручним засобом задання фрактальних об'єктів у просторах зображень чисел, неперервних функцій та сингулярних мір (мір ортогональних міри Лебега).



## РОЗДІЛ 2

## НОВА ДВООСНОВНА СИСТЕМА КОДУВАННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; G_0]$ З РІЗНОЗНАКОВИМИ ОСНОВАМИ

У даному розділі обгрунтовується нова двосимвольна система кодування дійсних чисел відрізка  $[0; g_0]$ , яка ґрунтується на розладах чисел в ряди з використанням двох основ, одна з яких  $g_0$  є додатною, а інша  $g_1 \equiv g_0 - 1$  — від'ємною; вивчається її геометрія (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, метричні співвідношення тощо), розв'язуються позиційні та метричні задачі, системно вибудовуються основи метричної та ймовірнісної теорій чисел у даному зображенні.

### 2.1. Двоосновна система кодування дійсних чисел з різнознаковими основами

Нехай  $\bar{g} = (g_0; g_1)$  — фіксований набір чисел, причому  $\frac{1}{2} < g_0 < 1$ ,  $g_1 \equiv g_0 - 1$ ;  $\delta_0 \equiv 0$ ,  $\delta_1 \equiv g_0$ . Зауважимо, що  $\delta_j = jg_{1-j}$ ,  $j = 0, 1$ , і з означення  $g_1$  маємо:  $|g_1| = -g_1 < \frac{1}{2}$ .

**Зауваження 2.1.1.** *Очевидно істинним є твердження: для будь-якого набору  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$  нулів і одиниць значення виразу  $u_1 \equiv \delta_{\alpha_1}$ ,*

$$u_{n+1} \equiv \delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j} = \delta_{\alpha_{n+1}} g_0^{N_0} g_1^{N_1}, \quad \text{де } N_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, N_0 = n - N_1,$$

- є нулем тоді і тільки тоді, коли  $\alpha_{n+1} = 0$ ;
- додатним числом, якщо  $\alpha_{n+1} = 1$  і кількість одиниць серед чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (рівносильно число  $N_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ) — це парне число;
- від'ємним числом, якщо  $\alpha_{n+1} = 1$  і кількість одиниць серед чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — це непарне число, причому  $|u_{n+1}| < |u_n|$ .

**Теорема 2.1.1.** Для кожної послідовності  $(\alpha_n) \in L_2$  значення виразу

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (2.1.1)$$

є невід'ємним числом, зокрема додатним, якщо послідовність містить принаймні одну одиницю. Воно не перевищує першого відмінного від нуля доданка  $v_1 = g_0^m$ , де  $\alpha_m = 1$ , але  $\alpha_j = 0$  при  $j < m$ .

*Доведення.* Враховуючи попереднє зауваження, бачимо, що перший відмінний від нуля доданок  $u_{m_1}$  ряду (2.1.1) має вигляд  $g_0^{m_1} \equiv v_1$ , де  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m_1} = 1$  (тобто  $\alpha_{m_1} = 1$ ,  $\alpha_i = 0$  при  $i < m_1$ ). Наступний ненульовий доданок  $u_{m_2}$  пов'язаний з другим відмінним від нуля членом послідовності  $(\alpha_n)$ . Він виражається  $u_{m_2} = g_0 g_1^1 g_0^{m_2-2} \equiv v_2 < 0$ . Очевидно, що  $v_1 > -v_2$ . Третій відмінний від нуля доданок  $u_{m_3}$  виражається  $u_{m_3} = g_0 g_1^2 g_0^{m_3-3} \equiv v_3 > 0$ , причому  $|v_2| > v_3$ .

Якщо відмінних від нуля членів ряду скінченна кількість, то твердження очевидне, а для нескінченної кількості воно випливає з теореми Лейбніца, оскільки  $v_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $\square$

**Теорема 2.1.2.** Для будь-якої послідовності  $(\alpha_n) \in L$ , яка містить нескінченну кількість одиниць, ряд

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad \delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}, \quad (2.1.2)$$

є абсолютно збіжним знакопозадовим і його сума не перевищує першого ненульового доданка  $v_1 = g_0^m$ , де  $\alpha_m = 1$ , але  $\alpha_j = 0$  при  $j < m$ .

*Доведення.* Якщо послідовність  $(\alpha_n)$  містить нескінченну кількість одиниць, то ряд (2.1.2) містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Після видалення нульових членів ряду (2.1.2), а їх кількість залежить від кількості нулів у послідовності  $(\alpha_n)$ , отримується знакозмінний (знакопозадовий) ряд:  $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$  причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від'ємні.

За теоремою Лейбніца ряд є збіжним, оскільки  $v_{k+1} < v_k$ ,  $v_k \rightarrow 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ , і його сума не перевищує  $v_1 = g_0^m$ .  $\square$

**Теорема 2.1.3.** Для будь-якого  $x \in [0; g_0]$  існує  $(\alpha_n) \in L_2$ , така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}. \quad (2.1.3)$$

*Доведення.* Для  $x = 0$  маємо  $x = \Delta_{(0)}$ . Круглі дужки символізують період. Для  $x = g_0$  маємо  $g_0 = \Delta_{1(0)}$ .

Нехай  $x \in (0; g_0)$ , але  $(0; g_0) = (\delta_0; \delta_1 g_0) \cup [\delta_1 g_0; \delta_1)$ ,  $\delta_1 g_0 = g_0^2$ .

Якщо  $x = g_0^2$ , то  $x = \Delta_{01(0)} = \Delta_{11(0)}$ . Якщо  $x \neq g_0^2$ , то очевидно, що існує  $\alpha_1 \in \{0; 1\}$ , таке, що  $x \in (\delta_1 g_0; \delta_1) = (g_0^2; g_0)$ , тобто  $x = \delta_{\alpha_1} + x_1$ , причому  $x_1$  є від'ємним або додатним, а саме:

- 1)  $g_0 g_1 < x_1 < 0$ , якщо  $\alpha_1 = 1$ ;
- 2)  $0 < x_1 \equiv x < g_0^2$ , якщо  $\alpha_1 = 0$ .

Розглянемо перший випадок, тобто  $g_0 g_1 \neq x_1 \in [g_0 g_1; 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [g_1 g_0^n; g_1 g_0^{n+1})$ . Тоді існує  $k_1 \in N$ , таке, що

$$g_1 g_0^{k_1} < x_1 < g_1 g_0^{k_1+1},$$

звідки  $0 < x_1 - g_1 g_0^{k_1} \equiv x_2 < g_1^2 g_0^{k_1}$ ,  $x_1 = g_1 g_0^{k_1} + x_2$  і

$$x = \delta_1 + \delta_1 g_1 g_0^{k_1} + x_2 = \delta_1 g_0^{1-1} + \delta_1 g_1 g_0^{1+k_1-1} + x_2.$$

Розглянемо тепер випадок, коли  $\alpha_1 = 0$ , тобто  $x_1 \in (0; g_0^2)$ .

Оскільки  $g_0^2 \neq x_1 \in (0; g_0^2] = \bigcup_{n=2}^{\infty} (g_0^{n+1}; g_0^n]$ , то очевидно, що існує натуральне  $m_1 \geq 2$ , таке, що  $g_0^{m_1+1} < x_1 \leq g_0^{m_1}$ . Якщо  $x_1 = g_0^{m_1} = \delta_1 g_0^{m_1-1} = \delta_0 + \delta_0 g_0 + \dots + \delta_0 g_0^{m_1-2} + \delta_1 g_0^{m_1-1}$ , то  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{m_1-1} = 0 = \alpha_1$  і  $\alpha_{m_1} = 1$ , а отже,  $x = x_1 = \Delta_{\underbrace{0..0}_{m_1-1} 1(0)} = \Delta_{\underbrace{0..0}_{m_1-1} 11(0)}$ .

Якщо ж  $g_0^{m_1+1} < x_1 < g_0^{m_1}$ , то  $g_0^{m_1} g_1 < x_1 - g_0^{m_1} \equiv x_2 < 0$

$$x = x_1 = g_0^{m_1} + x_2 = \delta_1 g_0^{m_1-1} = \delta_0 + \delta_0 g_0 + \dots + \delta_0 g_0^{m_1-2} + \delta_1 g_0^{m_1-1} + x_2.$$

Оскільки

$$g_0^{m_1} g_1 \neq x_2 \in [g_0^{m_1} g_1; 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [g_1 g_0^{m_1+n-1}; g_1 g_0^{m_1+n}),$$

то існує натуральне  $m_2$  таке, що  $g_1 g_0^{m_1+m_2-1} \leq x_2 \leq g_1 g_0^{m_1+m_2}$  і  $x_2 = g_1 g_0^{m_1+m_2-1} + x_3$ , де  $0 \leq x_2 - g_1 g_0^{m_1+m_2-1} \equiv x_3 < g_1^2 g_0^{m_1+m_2-1}$ .

Тоді

$$x = x_1 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + g_1 g_0^{m_1+m_2-1} + x_3 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + \delta_1 g_0^{m_1+m_2}.$$

Якщо  $x_3 = 0$ , то  $x_2 = g_1 g_0^{m_1+m_2}$  і

$$x = x_1 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + g_1 g_0^{m_1+m_2-1} = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{m_1-1} \underbrace{10\dots 0}_{m_2-1} 1(0)} = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{m_1-1} \underbrace{10\dots 0}_{m_2-1} 11(0)}$$

За скінченну кількість кроків отримаємо  $x_k = 0$  або ж процес продовжуватиметься до нескінченності, його збіжність очевидна.  $\square$

**Означення 2.1.** *Зображення  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}$  числа  $x \in [0; g_0]$ , встановлене рівністю (2.1.3), називається  $G_2$ -зображенням. При цьому  $\alpha_n$  називається  $n$ -ною цифрою даного зображення.*

Як видно з доведення попередньої теореми, існують числа, що мають два  $G_2$ -зображення. Це є підставою для висновку:  $\alpha_n = \alpha_n(x)$  не є коректно означеною функцією. Розглянемо це питання детальніше.

## 2.2. $G_2$ -унарні та $G_2$ -бінарні числа

Більшість чисел відрізка  $[0; g_0]$  мають єдине  $G_2$ -зображення, вони називаються  $G_2$ -унарними.

**Означення 2.2.** *Числа відрізка  $[0, g_0]$ , що мають два  $G_2$ -зображення, називаються  $G_2$ -бінарними.*

**Лема 2.2.1.** *Множина  $B$  всіх  $G_2$ -бінарних чисел вичерпується числами з  $G_2$ -зображеннями виду:*

$$\Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2}. \quad (2.2.4)$$

*Доведення.* Спочатку доведемо рівність (2.2.4). Для цього розглянемо різницю

$$\begin{aligned} d &\equiv \Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^{G_2} - \Delta_{c_1 \dots c_m 11(0)}^{G_2} = \\ &= g_0^2 \prod_{j=1}^m g_{c_j} - \left( g_0 \prod_{j=1}^m g_{c_j} + g_0 g_1 \prod_{j=1}^m g_{c_j} \right) = \\ &= g_0 (g_0 - 1 - g_1) \prod_{j=1}^m g_{c_j} = 0. \end{aligned}$$

Отже, рівність (2.2.4) виконується. Тепер покажемо, що інших чисел, що мають більше одного  $G_2$ -зображення не існує. Для цього розглянемо два числа з зображеннями  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m d_1 d_2 \dots}^{G_2}$ ,  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m d'_1 d'_2 \dots}^{G_2}$  і модуль їхньої різниці

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\equiv \left| \Delta_{c_1 \dots c_m d_1 d_2 \dots}^{G_2} - \Delta_{c_1 \dots c_m d'_1 d'_2 \dots}^{G_2} \right| = \\ &= \left| \Delta_{d_1 \dots d_m \dots}^{G_2} - \Delta_{d'_1 \dots d'_m \dots}^{G_2} \right| \cdot \left| \prod_{j=1}^m g_{c_j} \right|. \end{aligned}$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо  $d_1 = 1$ ,  $d'_1 = 0$ . Оскільки

$$\left| \Delta_{d_1 \dots d_n \dots}^{G_2} - \Delta_{d'_1 \dots d'_n \dots}^{G_2} \right| \geq \min \Delta_{d_1 \dots d_n \dots}^{G_2} - \max \Delta_{d'_1 \dots d'_n \dots}^{G_2} = \Delta_{11(0)}^{G_2} - \Delta_{01(0)}^{G_2} = 0,$$

то  $x_1 = x_2$  тоді і тільки тоді, коли  $\Delta_{11(0)}^{G_2} = \Delta_{01(0)}^{G_2}$ . Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 2.2.1.** Множина  $B$  всіх  $G_2$ -бінарних чисел є зліченною.

### 2.3. Задача, яка приводять до $G_2$ -зображення

Нехай  $(g_0, g_1, g_2)$  — набір таких дійсних чисел, що  $|g_i| < 1$ ,  $g_0 > 0$ ,  $g_1 < 0$ ,  $g_0 + g_1 + g_2 = 1$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = g_0$ ,  $\delta_2 = g_0 + g_1$ ;  $A_3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $L_3 = A_3 \times A_3 \times \dots \times A_3 \times \dots$

Розглядається функція  $f$ , означена на відрізку  $[0; 1]$  рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right). \quad (2.3.5)$$

**Зауваження 2.3.1.** Функція  $f$  є коректно означена рівністю (2.3.5) незважаючи на те, що числа зліченної множини мають два зображення у трійковій системі числення.

**Теорема 2.3.1.** [34] Функція  $f$  є неперервною ніде не диференційовною функцією.

**Задача.** Знайти образ множини канторівського типу  $C[3; \{0; 1\}]$  чисел, які у трійковій системі числення використовують лише дві цифри 0 і 1, під дією відображення  $f$ .

*Відповідь.* Такою множиною є відрізок  $[0; g_0]$ , причому майже всі (у розумінні міри Лебега) точки цього відрізка мають єдиний прообраз і лише зліченна множина точок має їх два.

## 2.4. Цікаві часткові випадки

Приклад 1. Якщо  $g_0 = \frac{3}{4}$ ,  $g_1 = g_0 - 1 = -\frac{1}{4}$ ,  $\delta_1 = g_0 = \frac{3}{4}$ , тобто  $\delta_i = \frac{3i}{4}$ , то  $G_2$ -зображення  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}^{G_2}$  числа  $x$  має вигляд

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k g_{1-\alpha_k} g_0^{N_0(x,k)} g_1^{N_1(x,k)}) = \\ &= \frac{3\alpha_1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3\alpha_k}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{N_0} \left(-\frac{1}{4}\right)^{N_1} = \\ &= \frac{3\alpha_1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^{N_1(x,k-1)} 3^{N_0(x,k-1+1)}}{4^{k-1}}, \end{aligned}$$

де  $N_1(x, k-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}$ ,  $N_0(x, k-1) = (k-1) - N_1(x, k-1)$ .

Наприклад,  $\Delta_{(100)}^{G_2} = \frac{3}{4} - \frac{3^2}{4^4} + \frac{3^3}{4^7} - \frac{3^4}{4^{10}} + \dots = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4^3}} = \frac{3 \cdot 4^2}{4^3 - 3} = \frac{48}{61}$ .

Приклад 2.  $g_0 = \frac{2}{3}$ ,  $g_1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = \frac{2}{3}$ . Тоді  $\delta_i = \frac{2i}{3}$ ,

$$\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j} = g_0^{N_0(x,k-1)} \cdot g_1^{N_1(x,k-1)} = \frac{2^{N_0}}{3^{N_0}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{N_1} = \frac{(-1)^{N_1} 2^{N_0}}{3^{k-1}}.$$

Отже,

$$x = \frac{2\alpha_1(x)}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{N_1} 2^{N_0+1}}{3^{k-1}},$$

де  $N_1(x, k-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}$ ,  $N_0(x, x-1) = (k-1) - N_1(x, k-1)$ .

## 2.5. Раціональні $G_2$ -зображення

**Означення 2.3.** Якщо  $g_0$  є раціональним числом, то йому відповідне  $G_2$ -зображення називається раціональним.

Якщо  $G_2$ -зображення є раціональним, то  $G_2$ -бінарне число є раціональним. Це випливає безпосередньо з леми 3.4.2, бо сума скінченного числа раціональних чисел є числом раціональним. Але не кожне раціональне число  $x \in [0; g_0]$  є  $G_2$ -бінарним.

Справді, число

$$x = \Delta_{(10)}^{G_2} = g_0 + g_0^2 g_1 + g_0^3 g_1^2 + \dots = \frac{g_0}{1 - g_0 g_1}$$

$G_2$ -бінарним не є, але є раціональним.

**Лема 2.5.1.** Якщо раціональне  $G_2$ -зображення числа  $x = \Delta_{c_1 \dots c_m (c_{m+1} \dots c_{m+p})}^{G_2}$  періодичне, то число  $x$  раціональне.

*Доведення.* Справді, представлення числа  $x$  можна подати у вигляді

$$x = A_m + P_m \cdot \frac{S_m}{1 - Q_m},$$

де

$$A_m = \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^m \left( \delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j} \right),$$

$$P_m = \prod_{j=1}^m g_{c_j},$$

$$S_m = \delta_{c_{m+1}} + \sum_{k=2}^P \left( \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_{m+j}} \right),$$

$$Q_m = \prod_{j=1}^P g_{c_{m+j}}.$$

Оскільки числа  $g_{c_j}$ ,  $\delta_{c_j}$  – раціональні, то раціональними є і числа  $A_m, P_m, S_m, Q_m$ , а отже, і число  $x$ . □

## 2.6. Порівняння чисел за їхніми $G_2$ -зображеннями

Зрозуміло, що числа  $G_2$ -бінарне і  $G_2$ -унарне рівними бути не можуть. Умови рівності двох  $G_2$ -бінарних чисел знайдені в попередньому пункті,  $G_2$ -унарних є очевидним, а саме: якщо числа  $x_1$  і  $x_2$  не є  $G_2$ -бінарними, то очевидним є наступне твердження.

**Лема 2.6.1.** Числа  $x_1 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{G_2}$  і  $x_2 = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}^{G_2}$  є рівними тоді і тільки тоді, коли  $\alpha_k = \beta_k$  при всіх  $k \in N$ .

**Теорема 2.6.1.** Якщо  $x_1 \neq x_2$  і  $m(x_1, x_2) = m$  — номер місця першої з незбіжних цифр, то числа

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_m 1d_1d_2\dots}^{G_2} = x_1 \quad \text{і} \quad x_2 = \Delta_{1c_2\dots c_m 0d_1d_2\dots}^{G_2}$$

перебувають у відношенні

$$x_1 > x_2, \quad \text{якщо} \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \dots + c_m = 2k,$$

$$x_1 < x_2, \quad \text{якщо} \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \dots + c_m = 2k - 1.$$

*Доведення.* Розглянемо різницю

$$x_1 - x_2 = P_m(x_1, x_2) (\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2)),$$

де  $P_m(x_1, x_2) = \prod_{j=1}^m g_{c_j}$ ,  $\omega^m(x_1) = \Delta_{1d_1d_2\dots}^{G_2}$ ,  $\omega^m(x_2) = \Delta_{0d_1d_2\dots}^{G_2}$ .

Враховуючи, що

$$\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2) \geq \min \Delta_{1d_1d_2\dots}^{G_2} - \max \Delta_{0d_1d_2\dots}^{G_2} = (g_0 - g_0g_1) - g_0^2 = 0,$$

$$\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2) \leq \max \Delta_{1d_1d_2\dots}^{G_2} - \min \Delta_{0d_1d_2\dots}^{G_2} = g_0 - 0 = g_0,$$

маємо  $x_1 > x_2$ , якщо  $\sigma_m$ -парне,  $x_1 < x_2$ , якщо  $\sigma_m$ -непарне, оскільки при парному  $\sigma_m$  число  $P_m$  додатне, при непарному  $\sigma_m$  — від'ємне.  $\square$

**Зауваження 2.6.1.** У порівнянні чисел за їхніми  $G_2$ -зображеннями беруть участь не лише перші неспівпадаючі цифри двох чисел, а й сума всіх попередніх цифр. Це відрізняє дану систему зображення чисел від класичної двійкової та інших систем, що ґрунтуються на розкладах чисел у додатні ряди.



## 2.7. Геометрія $G_2$ -зображення

Нагадаємо, що під *геометрією зображення* ми розуміємо геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, метричні співвідношення, розв'язки позиційних та метричних задач, пов'язаних з зображенням. Традиційне для зображень поняття циліндра має наступне означення.

**Означення 2.4.** Нехай  $(c_n) \in L_2$ ,  $G_2$ -циліндром рангу  $m$  із основою  $c_1c_2\dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{G_2}$  усіх чисел  $x \in [0; g_0]$ , які мають таке  $G_2$ -зображення:  $x = \Delta_{c_1c_2\dots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^{G_2}$ ,  $\alpha_{m+j} \in A$ , тобто  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{G_2} = \{x : \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$ .

Циліндри 1-го рангу:  $\Delta_0 = [0; g_0^2]$ ;  $\Delta_1 = [g_0^2; g_0]$ ;

Циліндри 2-го рангу:  $\Delta_{00} = [0; g_0^3]$ ,  $\Delta_{01} = [g_0^3; g_0^2]$ ;

$\Delta_{11} = [g_0^2; g_0(1 + g_0g_1)]$ ,  $\Delta_{10} = [g_0(1 + g_0g_1); g_0]$ ;

Циліндри 3-го рангу:  $\Delta_{000} = [0; g_0^4]$ ,  $\Delta_{001} = [g_0^4; g_0^3]$ ;

$\Delta_{011} = [g_0^3; g_0^2(1 + g_1^2)]$ ,  $\Delta_{010} = [g_0^2(1 + g_1^2); g_0^2]$ ;

$\Delta_{110} = [g_0^2; g_0^2(1 + g_1^2)]$ ,  $\Delta_{111} = [g_0^2(1 + g_1^2); g_0(g_0 + g_1^2)]$ ;

$\Delta_{101} = [g_0(1 + g_1g_0); g_0(1 + g_0^2g_1)]$ ,  $\Delta_{100} = [g_0(1 + g_0^2g_1); g_0]$ .

Нехай  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  – довільний набір нулів і одиниць,  $N_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ ,

$N_0 \equiv m - N_1$ ,  $a = \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^m (\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$ ,  $b = a + g_0 \prod_{j=1}^m g_{c_j}$ .

Легко довести наступне твердження.

**Лема 2.7.1.** Циліндр  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{G_2}$  – це відрізок, причому

–  $[a; b]$ , якщо  $N_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_m$  – парне,

–  $[b; a]$ , якщо  $N_1$  – непарне,

де  $a = \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^m (\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$ ,  $b = a + g_0 \prod_{j=1}^m g_{c_j}$

**Зауваження 2.7.1.** Довжина циліндра  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{G_2}$  обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{G_2}| = g_0 \prod_{j=1}^m |g_{c_j}| = (-g_1)^{N_1} g_0^{m-N_1+1},$$

де  $N_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ .

**Зауваження 2.7.2.** Основне метричне відношення для  $G_2$ -зображення дійсних чисел із відрізка  $[0; g_0]$  має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}|} = |g_i|.$$

Циліндри мають властивості:

1.  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{G_2} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{G_2}$ , причому  
 $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{G_2} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{G_2}$ , якщо  $N_1$  — парне;  
 $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{G_2} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{G_2}$ , якщо  $N_1$  — непарне.
2.  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_m}^{G_2} = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_m}^{G_2} \Leftrightarrow a_i = b_i, i = \overline{1, m}$ .
- 3.

$$\begin{aligned} & \Delta_{a_1 a_2 \dots a_m a_{m+1} \dots a_{m+k}}^{G_2} \cap \Delta_{b_1 b_2 \dots b_m}^{G_2} = \\ & = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } \exists a_i \neq b_i, i \leq m. \\ \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{m+k}}^{G_2}, & \text{якщо } a_i = b_i, i = \overline{1, m}. \end{cases} \end{aligned}$$

4.  $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{G_2} = x \in [0; g_0] \forall (c_m) \in L_2$ .

## 2.8. Оператор лівостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел

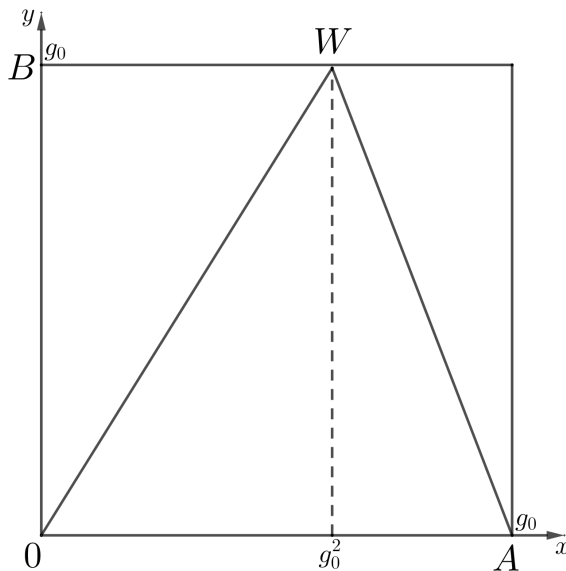
**Теорема 2.8.1.** Оператор  $\omega$  лівостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , який у просторі  $G_2$ -зображень означається рівністю

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}^{G_2}, \quad (2.8.6)$$

аналітично задається

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \quad (2.8.7)$$

— це неперервна коректно означена на  $[0; g_0]$  функція, лінійна на кожному з циліндрів 1-го рангу, зростає на  $\Delta_0^{G_2}$  і спадає на  $\Delta_1^{G_2}$ .



$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{x}{g_0}, & \text{якщо } 0 < x \leq g_0^2, \\ \frac{x}{g_1} - \frac{g_0}{g_1}, & \text{якщо } x \geq g_0^2. \end{cases}$$

*Доведення.* Оскільки

$$\begin{aligned} x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2} &= \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1} \left( \delta_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} \delta_{\alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} g_{\alpha_j} \right) = \\ &= \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1} \omega(x), \end{aligned}$$

то виконується рівність (2.8.7). Враховуючи, що

$$g_{\alpha_1} = \begin{cases} g_0 > 0 & \text{при } \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow x \in \Delta_0^{G_2}; \\ g_1 < 0 & \text{при } \alpha_1 = 1 \Leftrightarrow x \in \Delta_1^{G_2}; \end{cases}$$

лінійність і монотонність функції  $\omega$  на циліндрах першого рангу стає очевидною. Коректність означення і неперервність  $\omega$  є наслідком рівностей  $\omega(g_0^2) = \omega(\Delta_{01(0)}^{G_2}) = \omega(\Delta_{11(0)}^{G_2}) = \Delta_{1(0)}^{G_2} = g_0$ .  $\square$

Інваріантними точками оператора лівостороннього зсуву  $\omega$  є числа:

$$0 = \Delta_{(0)}^{G_2} \quad \text{і} \quad \Delta_{(1)}^{G_2} = g_0 + g_0 g_1 + g_0 g_1^2 + \dots = \frac{g_0}{2 + g_0}.$$

**Зауваження 2.8.1.** *Остання теорема засвідчує суттєву відмінність  $G_2$ -зображення від інших відомих двосимвольних зображень, зокрема  $Q_2^*$ -зображення та ланцюгового  $A_2$ -зображення, в яких оператор лівостороннього зсуву має одну точку розриву і на двох кусках є монотонною функцією.*

**Теорема 2.8.2.** *Інваріантною мірою оператора  $\omega$  лівостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення чисел є міра  $\mu_\tau$ , що відповідає розподілу неперервної випадкової величини  $\tau = \Delta_{\tau_1\tau_2,\dots,\tau_n,\dots}^{G_2}$ , цифр  $(\tau_n)$   $\Delta^{G_2}$ -зображення якої є незалежними й однаково розподіленими, які набувають значень  $P\{\tau_n = 0\} = p_0$ ,  $P\{\tau_n = 1\} = p_1$ ,  $0 < p_0 < 1$ .*

*Доведення.* Будь-яка борелівська підмножина відрізка  $[0; g_0]$  як завгодно точно може бути наближена об'єднанням циліндрів. Оскільки міра  $\mu_\tau$  неперервна, то вона однозначно визначається значеннями на циліндричних множинах, а саме:

$$\mu_\tau(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{G_2}) = p_0^{N_0} p_1^{N_1}, N_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_n, N_0 \equiv n - N_1.$$

Тому достатньо довести, що  $\mu_\tau(\omega^{-1}) = \mu_\tau$ . Для цього виразимо

$$\omega^{-1}(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{G_2}) = \Delta_{0c_1c_2\dots c_n}^{G_2} \cup \Delta_{1c_1c_2\dots c_n}^{G_2}.$$

$$\begin{aligned} \mu_\tau(\omega^{-1}(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{G_2})) &= \mu_\tau(\Delta_{0c_1c_2\dots c_n}^{G_2} \cup \Delta_{1c_1c_2\dots c_n}^{G_2}) = \\ &= p_0 p_0^{N_0} p_1^{N_1} + p_0^{N_0} p_1 p_1^{N_1} = \\ &= p_0^{N_0} p_1^{N_1} (p_0 + p_1) = p_0^{N_0} p_1^{N_1} = \mu_\tau(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{G_2}). \end{aligned}$$

Отже,  $\mu_\tau$  є інваріантною мірою оператора  $\omega$ . □

## 2.9. Оператор $n$ – кратного лівостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел

Нехай  $n$ -натуральне число, більше 1, покладемо

$$\omega^n(x) = \omega(\omega^{n-1}(x)) = \Delta_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\dots}^{G_2}$$

Оскільки

$$x = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^n \delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} + \left( \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j(x)} \right) \omega^n(x),$$

ГО

$$\omega^n(x) = \frac{x}{P_n(x)} - \frac{1}{P_n(x)} \left( \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^n \left( \delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right) \right).$$

**Теорема 2.9.1.** Функція  $\omega^n$  є коректно означеною рівністю

$$\omega(\omega^{n-1}(x)) = \omega^n(x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{G_2}) \equiv \Delta_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\dots}^{G_2},$$

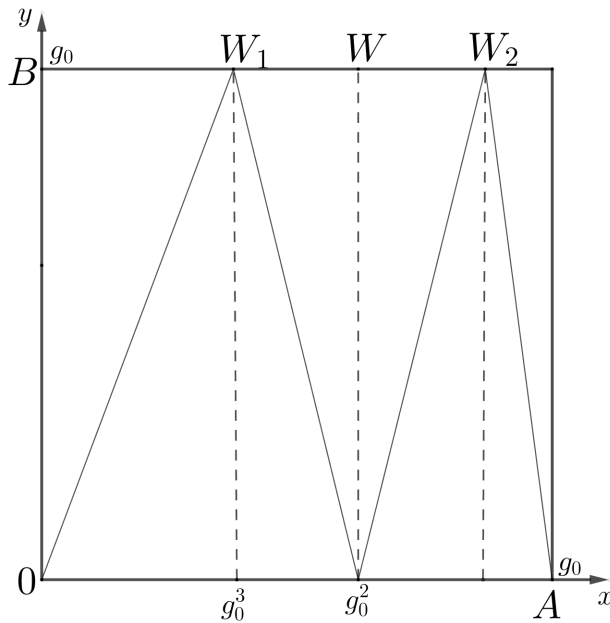
яка має аналітичний вираз

$$\omega^n(x) = \frac{1}{P_n}x - \frac{B_n}{P_n}, \quad (2.9.8)$$

де

$$P_n = \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j(x)}, \quad B_n = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^n \left( \delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right);$$

неперервною на відрізку  $[0; g_0]$ , лінійному на кожному циліндрі рангу  $n$ .



*Доведення.* Справді, коректність означення функції в  $G_2$ -унарних точках є очевидною, а для  $G_2$ -бінарних — випливає з рівності

$$\omega^n(\Delta_{c_1\dots c_m 01(0)}^{G_2}) = \omega(\Delta_{c_1\dots c_m 11(0)}^{G_2}),$$

яка виконується для всіх натуральних  $m$  ( $m < n$ ,  $m = n$ ,  $m > n$ ).

Оскільки

$$x = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^n \left( \delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right) + \left( \prod_{j=1}^n g_{\alpha_j(x)} \right) \omega^n(x),$$

то має місце рівність (2.9.8). З рівності (2.9.8) бачимо, що на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_n}^{G_2}$  значення виразів  $P_n$  і  $B_n$  є константою, тому  $\omega^n$  є лінійною функцією на цьому циліндрі, причому зростаючою, якщо  $P_n > 0$  і спадною, якщо  $P_n < 0$ .

Неперервність функції у внутрішніх точках циліндрів  $n$ -рангу є наслідком отриманого аналітичного виразу функції. Залишилось обґрунтувати її неперервність в  $G_2$ -бінарних точках  $n$ -го рангу (а саме: на кінцях циліндрів  $n$ -го рангу). Зауважимо, що неперервність функції  $\omega^n$  в  $G_2$ -бінарній точці  $x_0$  рівносильна коректності означення функції в цій точці (вираз значення функції від двох різних зображень числа дає один і той же результат). А це встановлено вище. Для прикладу розглянемо циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}0}^{G_2} \cup \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}1}^{G_2}$ . Спільним кінцем циліндрів  $\Delta_{c_1 \dots c_{n-1}0}^{G_2}$  і  $\Delta_{c_1 \dots c_{n-1}1}^{G_2}$  є точка  $x = \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}11(0)}^{G_2}$  при цьому  $f(x_*) = \Delta_{1(0)}^{G_2} = g_0$ .  $\square$

## 2.10. Оператор правостороннього зсуву цифр $G_2$ -зображення чисел

**Означення 2.5.** Функція  $\tau_i$ , означена на  $[0; g_0]$ , рівністю

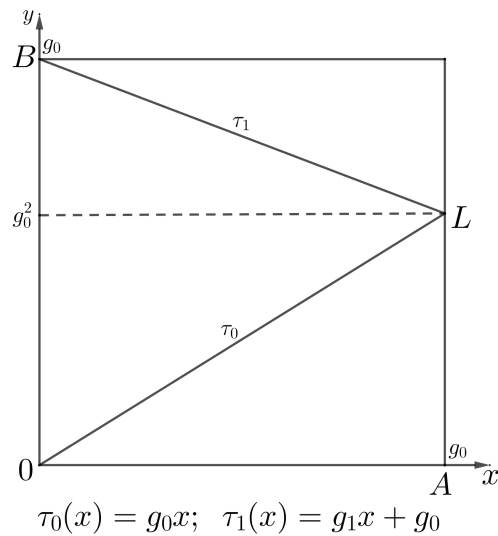
$$\tau_i(x) = \tau_i \left( \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{G_2} \right) = \Delta_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{G_2},$$

де  $i \in \{0; 1\}$ , називається оператором правостороннього зсуву цифр  $G_2$ -зображення чисел з параметром  $i$ .

Оскільки  $\tau_i \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 01(0)}^{G_2} \right) = \tau_i \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 11(0)}^{G_2} \right)$ , то наведене означення функції  $\tau_i$  є коректним. Очевидно, що множиною значень функції  $\tau_i$  є циліндр  $\Delta_i^{G_2}$ , зокрема

$$\tau_0(0) = \tau \left( \Delta_{(0)}^{G_2} \right) = 0, \quad \tau_1(0) = \tau_1 \left( \Delta_{(0)}^{G_2} \right) = \Delta_{1(0)}^{G_2} = g_0.$$

**Лема 2.10.1.** Функція  $\tau_i$  неперервна в кожній точці відрізка  $[0; g_0]$  і аналітично виражається  $\tau_i(x) = \delta_i + g_i x$ .



*Доведення.* Оскільки

$$\tau_i \left( \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2} \right) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2} = \delta_i + g_i \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2},$$

то  $\tau_i(x) = \delta_i + g_i x$ , тобто  $\tau_0(x) = g_0 x$ ,  $\tau_1(x) = g_0 + g_1 x$ . Тому неперервність функції  $\tau_i$  на циліндрах першого рангу є очевидною. А в  $G_2$ -бінарних точках, що є межованими для циліндрів, впливає з рівності

$$\tau_i \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 01(0)}^{G_2} \right) = \tau_i \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 11(0)}^{G_2} \right).$$

□

**Зауваження 2.10.1.** Функція  $\tau_0$  є зростаючою, а функція  $\tau_1$  – спадною, причому  $\tau_0(g_0) = \tau_1(g_0) = g_0^2$ .

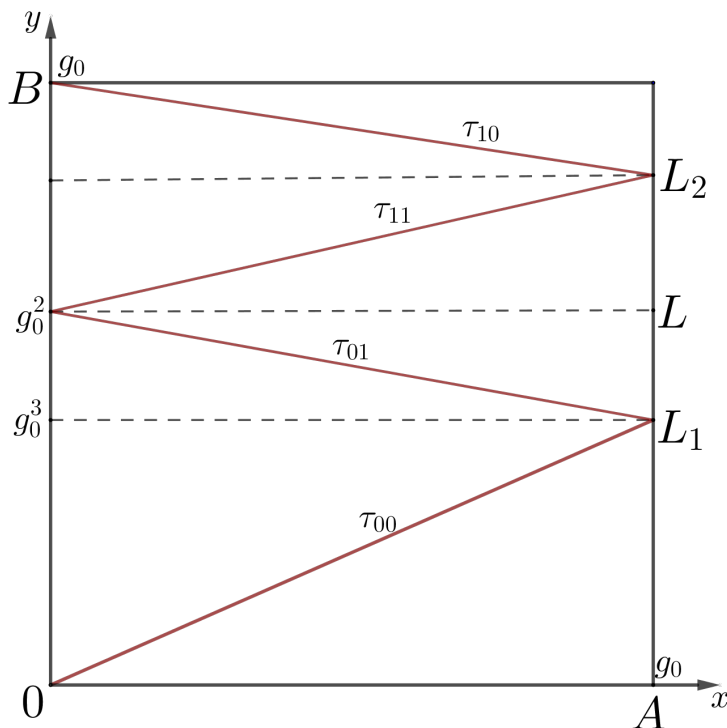
Очевидними є рівності:

$$\omega(\delta_i(x)) = x \quad \text{і} \quad \tau_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

Рівняння  $\tau_i(x) = \omega(x)$  має два розв'язки  $x = \Delta_{(ji)}^{G_2}$ , де  $j \in \{0; 1\}$ . А рівняння  $\tau_i(x) = \omega^m(x)$ .

## 2.11. Оператор $n$ – кратного правостороннього зсуву цифр $G_2$ –зображення чисел

Нехай задано впорядкований набір  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  нулів та одиниць. Функцію  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , означену рівністю:  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{G_2} \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots$ , ми називаємо оператором правостороннього зсуву з параметрами  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ . Коректність означення оператора  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)$  і рівність  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}(x = \tau_{i_1}(\tau_{i_2 \dots i_n}(x)))$ . Для прикладу розглянемо  $n = 2$  і відповідні функції  $\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{10}, \tau_{11}$ .



**Лема 2.11.1.** Оператор  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$  має аналітичний вираз

$$\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = \delta_{i_1} + \sum_{k=1}^n \left( \delta_{i_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{i_j} \right) + \left( \prod_{j=1}^n g_{i_j} \right) x$$

$i$  є лінійною функцією, зростаючою, якщо  $P_n = \prod_{j=1}^n g_{i_j} > 0$  (рівносильно  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$  – парне число) і спадною, якщо  $P_n < 0$  (рівносильно  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$  – непарне число).

*Доведення.* Для прикладу розглянемо  $n = 2$  і відповідні функції  $\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{10}, \tau_{11}$ . Функції  $\tau_{00} = g_0^2 x$  і  $\tau_{11} = g_0^2 x + g_0^2$  є лінійними зростаючими, а функції  $\tau_{01} = g_0 g_1 x + g_0^2$  і  $\tau_{10} = g_0 g_1 x + g_0$  – лінійними спадними.  $\square$



## 2.12. Хвостові множини

**Означення 2.6.** Казатимемо, що  $G_2$ -зображення чисел  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{G_2}$  і  $y = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}^{G_2}$  мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні  $k$  і  $t$  такі, що

$$\alpha_{k+j} = \beta_{t+j} \quad (2.12.9)$$

для будь-якого  $j \in \mathbb{N}$ . Символічно це позначається  $x \sim y$ .

**Означення 2.7.** Якщо  $k$  і  $t$  — найменші числа, для яких виконується умова (2.12.9), то число

$$z \equiv x \wedge y = \Delta_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{G_2} = \Delta_{\beta_{t+1}\beta_{t+2}\dots}^{G_2}$$

називається спільним хвостом чисел  $x$  та  $y$ .

Очевидно, що бінарне відношення  $\sim$  — «мати однаковий хвіст» є відношенням еквівалентності, тобто володіє властивостями рефлексивності, симетричності, транзитивності. А отже, розбиває множину  $Z$  всіх  $G_2$ -зображень чисел відрізка  $[0; g_0]$  на класи еквівалентності, які в сукупності утворюють фактор-множину  $W = Z / \sim$ . Кожен елемент множини  $W$  називається хвостовою множиною, вона однозначно визначається довільним своїм елементом.

**Теорема 2.12.1.** Кожна хвостова множина є зліченною, всюди щільною у відріжку  $[0; g_0]$  множиною. Множина  $W$  всіх хвостових множин — континуальна.

*Доведення.* Нехай  $K_x$  — хвостова множина, що містить число  $x$ ,  $K_1$  — множина всіх чисел  $y$ , для яких  $y \wedge x = x$ ;  $K_n$  — множина всіх чисел  $y$ , для яких  $y \cap \omega^n(x) = \omega^n(x)$ .

Очевидно, що кожна з множин  $K_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) є зліченною і  $K_x = \bigcup_n K_n$ . Тому  $K_x$  є зліченною як зліченне об'єднання злічених множин.

Довільний циліндр  $\Delta_{c_1\dots c_n}^{G_2}$  містить точки хвостової множини  $K_x$ , оскільки йому належать числа

$$\Delta_{c_1\dots c_n\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots}^{G_2}, \quad \Delta_{c_1\dots c_n\alpha_2(x)\alpha_3(x)\dots}^{G_2}, \quad \Delta_{c_1\dots c_n\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)\dots}^{G_2}$$

А це є свідченням того, що множина  $K_x$  є всюди щільною у відрізку  $[0; g_0]$ .

Множина  $W$  є континуальною, оскільки припустивши її зліченність отримаємо зліченність відрізка  $[0; g_0]$ , як зліченне об'єднання злічених множин. А це суперечить континуальності множини точок відрізка.  $\square$

**Зауваження 2.12.1.** Ці два факти є спільними для систем кодування зі скінченним алфавітом і нульовою надлишковістю.

**Зауваження 2.12.2.** Принциповою відмінністю  $G_2$ -зображення чисел від інших двосимвольних систем є те, що всі  $G_2$ -бінарні числа утворюють одну хвостову множину, тоді як для класичної двійкової системи, нега-двійкової,  $Q_2$ -,  $Q_2^*$ -зображення чисел вони належать різним хвостовим множинам.

### 2.13. Метризація хвостової множини

Кожну хвостову множину можна легко метризувати. Якщо  $K$  — довільна хвостова множина, то однією з метрик у ній є функція, означена рівністю:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} k & \text{при } k = m, \\ \infty & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

де  $k, m$  — найменші цілі числа, для яких виконується для операторів лівостороннього зсуву цифр рівність  $\omega^k(x) = \omega^m(y)$ .

Справді, виконання співвідношень  $\rho(x, y) \geq 0$  і  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  є очевидним. Якщо  $K \neq B$ , то

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i(x) = \alpha_j(y) = \alpha_j(y)$$

для всіх  $i \in N$ , що рівносильно  $x = y$ . Якщо  $K = B$ , то

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow k = m = 0,$$

а це рівносильно  $x = y$ . Дещо складнішою є перевірка виконання нерівності трикутника.

## 2.14. Функції, що зберігають хвости $G_2$ -зображення чисел

Казатимемо, що функція  $y = f(x)$  зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , якщо для будь-якого  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}$  і його образу  $y = f(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{G_2}$  існують невід'ємні цілі числа  $k$  і  $m$  такі, що  $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$  для будь-якого  $j \in \mathbb{N}$ .

Очевидно, що функція  $f(x) = g_0(x)$  зберігає хвости зображення чисел, як і функція  $y = x$ .

Прикладами функцій, що зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, є наступні:

1.  $I_m(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_m] \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots}^{G_2}$
2.  $f_m(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{G_2}$ , де

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_1 \dots \alpha_i, & \text{якщо } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i < m, \\ \alpha_i, & \text{якщо } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \geq m. \end{cases}$$

3.  $\varphi_m(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{G_2}$ , де

$$\beta_i = \begin{cases} |\alpha_i - \alpha_{i+1}|, & \text{якщо } \alpha_1 + \dots + \alpha_i < m, \\ \alpha_i, & \text{якщо } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i > m. \end{cases}$$

Тут  $m$  — фіксоване невід'ємне число.

Коректність означення цих функцій є наслідком домовленості використовувати лише одне з двох зображень  $G_2$ -бінарних чисел. Але функції з наведених прикладів не є неперервними, більш цікавими з різних точок зору є неперервні функції.

Ясно, що суперпозиція двох функцій, які зберігають хвости зображення чисел є функцією цього ж класу.

## 2.15. Неперервні функції, що зберігають хвости

### $G_2$ -зображення чисел

Простими прикладами неперервних функцій, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел є оператори лівостороннього і правостороннього зсуву  $\omega^n$ ,  $\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$  при будь-якому натуральному  $n$  і наборі нулів та одиниць. Всеможливі склеювання цих функцій дають такі ж функції. Наприклад,

$$f(x) = \begin{cases} \omega(x) & \text{при } 0 \leq x \leq x_1, \\ \tau_1(x) & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \omega(x) & \text{при } x_2 \leq x \leq g_0, \end{cases}$$

де  $x_1$  і  $x_2$  розв'язки рівняння  $\omega(x) = \tau_1(x)$ , а саме:  $x_1 = \Delta_{(01)}^{G_2}$ ,  $x_2 = \Delta_{(1)}^{G_2}$ .

Але не кожна неперервна функція, визначена на відрізку  $[0; g_0]$ , є його перетворенням, тобто бієктивним відображенням відрізка на себе. І зрозуміло, що такими не є вище вказані функції.

## 2.16. Неперервні перетворення відрізка $[0; g_0]$ , які зберігають хвости $G_2$ -зображення чисел

Нагадаємо, що *перетворенням множини  $E$*  називається бієктивне (одночасно ін'єктивним і сюр'єктивним) або взаємно однозначне відображення даної множини на себе.

Під *перетворенням, що зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел* (далі *хвостовим перетворенням*) ми розуміємо перетворення, при якому для будь-якого  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}$  і його образу  $\varphi(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{G_2}$  існують такі натуральні  $m$  і  $k$ , що  $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$  для будь-якого  $j \in N$ .

Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр є функціями, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, але не є перетвореннями відрізка  $[0; g_0]$ . Тривіальним прикладом перетворення, що зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел є тотожне перетворення.

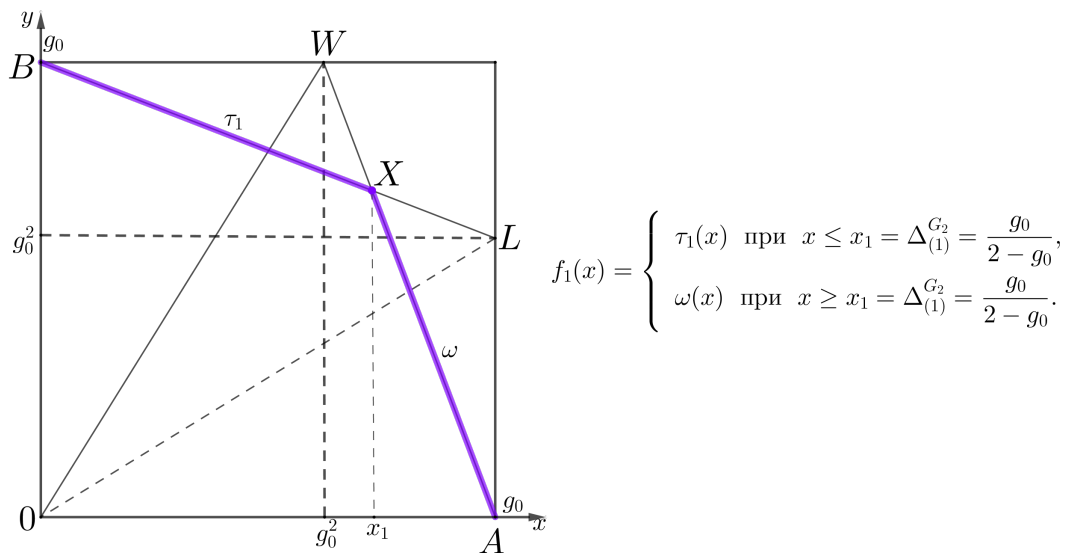
Очевидним є наступне твердження: якщо перетворення  $f$  відрізка  $[0; g_0]$  зберігає хвости  $G_2$ -зображення чисел, то воно зберігає частоти цифр.

Зрозуміло, що неперервні перетворення відрізка  $[0; g_0]$  вичерпуються строго монотонними (зростаючими та спадними) функціями, область визначення і множина значень яких збігається з даним відрізком.

### Приклад 1. Спадна функція

$$f_1(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & \text{при } x \leq x_1 = \Delta_{(1)}^{G_2} = \frac{g_0}{2 - g_0}, \\ \omega(x) & \text{при } x \geq x_1 = \Delta_{(1)}^{G_2} = \frac{g_0}{2 - g_0}, \end{cases}$$

є неперервним хвостовим перетворення відрізка  $[0; g_0]$ .



*Доведення.* Число  $x_1$  є розв'язком рівняння  $\tau_1(x) = \omega(x)$ , яке рівносильне системі  $1 = \alpha_2(x) = \alpha_4(x) = \dots$ ,  $\alpha_1(x) = \alpha_3(x) = \alpha_5(x) = \dots$ , а тому має два розв'язки:  $x = \Delta_{(\alpha_1)}^{G_2}$ ,  $\alpha_1 \in \{0, 1\}$ . Один з них  $x_0 = \Delta_{(01)}^{G_2}$  є точкою проміжку спадання  $\tau_1$  і проміжку зростання функції  $\omega$ , а  $x_1$  належить проміжку спадання  $\tau_1$  і проміжку спадання  $\omega$ . Тому функція  $f_1$  є неперервною і строго спадною, причому  $f_1(0) = g_0$ ,  $f_1(g_0) = 0$ . Отже,  $f_1$  неперервне перетворення відрізка  $[0; g_0]$ .  $\square$



Для доведення некомутативності групи  $(C, \circ)$  досить навести два приклади перетворення з множини  $C$ , які не комутують. Для цього розглянемо функції  $f_1$  та  $f_2$  з прикладів 1 та 2 і точку  $x_0 = \Delta_{01(0)}^{G_2} < \Delta_{(1)}^{G_2} = x_1$ . Для них маємо

$$\begin{aligned} f_2(f_1(\Delta_{01(0)}^{G_2})) &= f_2(\tau_1(\Delta_{01(0)}^{G_2})) = f_2(\Delta_{101(0)}^{G_2}) = \\ &= \tau_1(\Delta_{101(0)}^{G_2}) = \Delta_{1101(0)}^{G_2}, \end{aligned}$$

оскільки  $\Delta_{101(0)}^{G_2} < \Delta_{(101)}^{G_2}$ ;

$$\begin{aligned} f_1(f_2(\Delta_{01(0)}^{G_2})) &= f_1(\tau_1(\Delta_{01(0)}^{G_2})) = f_1(\Delta_{101(0)}^{G_2}) = \\ &= \omega(\Delta_{101(0)}^{G_2}) = \Delta_{01(0)}^{G_2}, \end{aligned}$$

оскільки  $\Delta_{101(0)}^{G_2} > \Delta_{(1)}^{G_2}$ . Отже,  $f_2(f_1(x_0)) \neq f_1(f_2(x_0))$ .

Нескінченність групи впливає з прикладу 3.

**Приклад 3.** Спадна функція

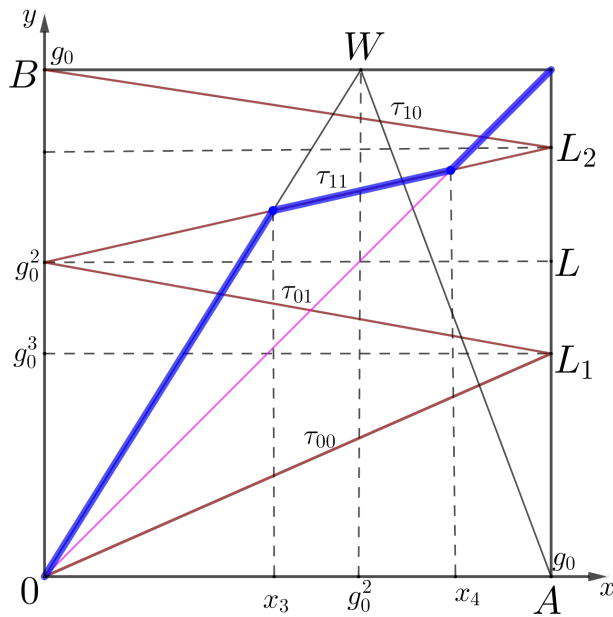
$$f_3(x) = \begin{cases} \tau_1 \underbrace{0 \dots 0}_k(x) & \text{при } 0 \leq x \leq x_k \equiv \Delta_{i1}^{G_2} \underbrace{0 \dots 0}_k, \\ \omega(x) & \text{при } x_k \leq x \leq g_0, i \in A, \end{cases}$$

є неперервним хвостовим перетворенням відрізка  $[0; g_0]$ .

Для доведення існування нетривіальної підгрупи зростаючих функцій досить навести приклад нетривіальної зростаючої бієкції, а такою є

$$f_5(x) = \begin{cases} \omega(x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq \Delta_{(011)}^{G_2}, \\ \tau_{11}(x), & \text{якщо } \Delta_{(011)}^{G_2} \leq x \leq \Delta_{(1)}^{G_2}, \\ x, & \text{якщо } \Delta_{(1)}^{G_2} \leq x \leq g_0, \end{cases}$$

оскільки функції  $\omega$ ,  $\tau_{11}$  і  $f(x) = x$  на вказаних проміжках є зростаючими,  $\Delta_{(011)}^{G_2}$  — корінь рівняння  $\omega(x) = \tau_{11}(x)$ , а  $\Delta_{(1)}^{G_2}$  — корінь рівняння  $\tau_{11}(x) = x$ . □



$$f_5(x) = \begin{cases} \omega(x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq \Delta_{(011)}^{G_2}, \\ \tau_{11}(x), & \text{якщо } \Delta_{(011)}^{G_2} \leq x \leq \Delta_{(1)}^{G_2}, \\ x, & \text{якщо } \Delta_{(1)}^{G_2} \leq x \leq g_0. \end{cases}$$

## 2.17. Метрична теорія $G_2$ -зображення чисел

Нехай  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{G_2}$ ,  $N_1(x, k) \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ ,  $N_0(x, k) = k - N_1(x, k)$ .

**Означення 2.8.** Число

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k} = \nu_i^{G_2}(x), \quad i \in A,$$

у випадку його існування, називається частотою цифри  $i$  у  $G_2$ -зображенні числа  $x$ .

Статистична основа поняття частоти очевидна (принаймні умови її існування), але як відомо, воно має глибокий метричний зміст для різних зображень дійсних чисел. В цьому ми пересвідчимось нижче.

**Теорема 2.17.1.** (Аналог теореми Бореля для двійкового зображення). Множина  $B = \{x : \nu_0^{G_2}(x) = g_0\}$  чисел  $x$  відрізка  $[0; g_0]$ , частота цифри 0 у  $G_2$ -зображення яких має міру Лебега рівну 1.

*Доведення.* Доведення проведемо засобами математичного аналізу, скориставшись схемою, яка використовувалася у роботі [75] Доведемо, що множина чисел  $x$ , для яких  $\nu_0^{G_2}(x) \neq g_0$  (тобто частота не існує або не дорівнює  $g_0$ ) має міру Лебега 0.

Умова  $\nu_0^{G_2}(x) = g_0$  рівносильна умові  $\nu_1^{G_2}(x) = -g_1$ , яку перепишемо у



вигляді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1(x) + \dots + \alpha_k(x)}{k} = -g_1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + g_1 \right) = 0. \quad (2.17.10)$$

Розглянемо інтеграли:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{g_0} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + g_1 \right)^2 dx = \frac{1}{k^2} \int_0^{g_0} \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + kg_1 \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^{g_0} \left( \sum_{i=1}^k (\alpha_i(x) + g_1) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

У виразі  $I_k$  зустрічаються інтеграли двох виразів:

$$\begin{aligned} &\int_0^{g_0} (\alpha_i(x) + g_1)^2 dx = \int_0^{g_0} (\alpha_i^2(x) + 2\alpha_i(x)g_1 + g_1^2) dx = \\ 1) \quad &= \int_0^{g_0} (\alpha_i(x)(1 + 2g_1) + g_1^2) dx = (1 + 2g_1) \int_0^{g_0} \alpha_i(x) dx + \int_0^{g_0} g_1^2 dx = \\ &= (1 + 2g_1) \lambda\{x : \alpha_i(x) = 1\} g_0 + g_0 g_1^2 = \\ &= (1 + 2g_1) g_0 (-g_1) g_0 + g_1^2 g_0 = g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1), \end{aligned}$$

оскільки  $\alpha_i^2(x) = \alpha_i(x)$  (кількість таких інтегралів дорівнює  $k$ );

$$\begin{aligned} &\int_0^{g_0} (\alpha_i(x) + g_1)(\alpha_j(x) + g_1) dx = \\ 2) \quad &= \int_0^{g_0} \alpha_i(x) \alpha_j(x) dx + g_1 \int_0^{g_0} (\alpha_i(x) + \alpha_j(x)) dx + \int_0^{g_0} g_1^2 dx = \\ &= g_0 g_1^2 + 2g_1 g_0 (-g_1) + g_1^2 g_0 = 0 \quad \text{при } i \neq j. \end{aligned}$$

Отже,  $I_k = \frac{g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1)}{k}$ . Тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 0$ , тобто послідовність сум  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x)$  збігається до  $(-g_1)$  в середньому квадратичному. Але із збіжності в середньому квадратичному, взагалі кажучи, не випливає збіжність майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Візьмемо тепер будь-яке досить мале додатне число  $\varepsilon$  і розглянемо множину  $E_k(\varepsilon)$  чисел відрізка  $[0; g_0]$ , для яких

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + g_1 \right| > \varepsilon. \quad (2.17.11)$$

Щоб оцінити міру цієї множини, зауважимо, що

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{g_0} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + g_1 \right)^2 dx \geq \int_{E_k(\varepsilon)} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) + g_1 \right)^2 dx \geq \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{E_k(\varepsilon)} dx = \varepsilon \lambda[E_k(\varepsilon)], \end{aligned}$$

звідси

$$\lambda[E_k(\varepsilon)] \leq \frac{I_k}{\varepsilon^2} = \frac{g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1)}{k \varepsilon^2}.$$

Таким чином, при фіксованому  $\varepsilon$  виконується рівність

$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda[E_k(\varepsilon)] = 0$ . Але цього ще не достатньо для висновку, що для майже всіх  $x \in [0; g_0]$  виконується (2.17.10).

Розглянемо послідовність множини чисел  $x(\varepsilon)$ :

$$E_1(\varepsilon), E_4(\varepsilon), E_9(\varepsilon), \dots, E_{n^2}(\varepsilon), \dots \quad (2.17.12)$$

і позначимо через  $F_k(\varepsilon)$  множину чисел, що належить хоча б одній з множин  $E_{k^2}(\varepsilon), E_{(k+1)^2}(\varepsilon), \dots$ . Тоді, враховуючи співвідношення (2.17.11), маємо:

$$\begin{aligned} \lambda[F_k(\varepsilon)] &= \lambda[E_{k^2}(\varepsilon) \cup E_{(k+1)^2}(\varepsilon) \cup \dots] \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda[E_{(k+j)^2}(\varepsilon)] \leq \frac{g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1)}{k \varepsilon^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(k+j)^2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Оскільки послідовність множин  $\{F_k(\varepsilon)\}$  є монотонною, тобто  $F_{k+1}(\varepsilon) \subset F_k(\varepsilon)$ , а міра Лебега множини  $F_k(\varepsilon)$  прямує до нуля при необмеженому рості  $k$ , то перетин всіх цих множин має міру 0. Це рівносильно тому, що всі числа, крім чисел множини міри нуль, можуть належати лише скінченій сукупності цих множин, а це означає, що коли точка  $x$  належить

лише скінченній кількості множин  $F_k(\varepsilon)$ , то при достатньо великому  $k$  вона не належить множині  $F_k(\varepsilon)$ , а отже, не належить жодній з множин (2.17.12). Тому для числа  $k$ , більшого деякого  $k_0$ , маємо

$$\left| \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k^2} \alpha_i(x) + g_1 \right| \leq \varepsilon.$$

Таким чином, цю властивість мають майже всі числа для довільно вибраного  $\varepsilon$ . Отже, для майже всіх виконується

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k^2} \alpha_i(x) \rightarrow -g_1 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Ми довели твердження за умови, що числа  $k$  ростуть по послідовності квадратів натуральних чисел. Якщо ж  $k$  довільне натуральне число, то для нього знайдеться натуральне число  $m$ , таке, що

$$m^2 \leq k < (m+1)^2, \quad \text{тобто} \quad 0 \leq k - m^2 < 2m + 1.$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) &= \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) + \sum_{i=m^2+1}^k \alpha_i(x) \right) = \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) \frac{m^2}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=m^2+1}^k \alpha_i(x). \end{aligned}$$

За доведенням, при  $k \rightarrow \infty$  майже скрізь

$$\frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) \rightarrow -g_1$$

і всюди  $\frac{m^2}{(m+1)^2} < \frac{m^2}{k} \leq 1$ ,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=m^2+1}^k \alpha_i(x) \leq \frac{k - m^2}{k} < \frac{2m + 1}{m^2},$$

внаслідок чого при  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{m^2}{k} \rightarrow 1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{k} \sum_{i=m^2+1}^k \alpha_i(x) \rightarrow 0.$$

Тому майже скрізь виконується рівність (2.17.10).  $\square$

**Означення 2.9.** Число  $x \in [0; g_0]$  називається нормальним відносно  $G_2$ -зображення числа, якщо у цьому зображенні існують частоти його цифр, причому частота 0 рівна  $g_0$ , а 1 —  $(-g_1)$ .

## 2.18. Інверсор $\Delta$ -зображення

Функція  $I$ , означена рівністю

$$I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{G_2}) = \Delta_{1-\alpha_1, 1-\alpha_2, \dots, 1-\alpha_n, \dots}^{G_2},$$

називається *інверсором*  $G_2$ -зображення.

Дане означення є коректним в точках, що мають єдине зображення. Але оскільки

$$\frac{g_0(1+g_1^2)}{1-g_1} = I(\Delta_{01(0)}^{G_2}) \neq I(\Delta_{11(0)}^{G_2}) = \frac{g_0^3}{1-g_1},$$

то воно не є коректним без домовленості використовувати лише одне з двох існуючих  $G_2$ -зображень  $G_2$ -бінарних точок. Тому домовимось не використовувати зображення  $\Delta_{c_1\dots c_m 11(0)}^{G_2}$ .

Розглядається функція  $I$ , визначена на множині  $U$   $G_2$ -унарних чисел, нехтуючи множиною  $B$  всіх  $G_2$ -бінарних чисел.

**Теорема 2.18.1 (Основний результат).** *Інверсор  $I$  є ніде не монотонною неперервною по множині  $G_2$ -унарних точок відрізка  $[0; g_0]$ .*

*Доведення.* 1. Спочатку обґрунтуємо неперервність. Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{G_2}$  — довільна  $G_2$ -унарна точка  $x_0 \neq x \in B$ . Тоді існує  $m \in \mathbb{N}$  таке, що  $\alpha_m(x_0) \neq \alpha_m(x)$ , але  $\alpha_j(x_0) = \alpha_j(x)$  при  $j < m$ . Причому  $x \rightarrow x_0$  рівносильно  $m \rightarrow \infty$ . Розглянемо

$$|I(x) - I(x_0)| = P_{m-1} \cdot |\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_0))|,$$

$$\text{де } P_{m-1} = \prod_{j=1}^{m-1} |g_{1-\alpha_j(x_0)}|.$$

Оскільки  $P_{m-1} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ), а  $|\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_0))| \leq g_0$ , то  $|I(x) - I(x_0)| \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), що рівносильно неперервності функції  $I$  в точці  $x_0$ .

2. Тепер доведемо ніде не монотонність. Розглянемо два числа  $x_1, x_2$ , для яких  $k(x_1, x_2) = m$ , тобто

$$x_1 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m d_1 d_2 \dots}^{G_2} \quad \text{і} \quad x_2 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m d'_1 d'_2 \dots}^{G_2}, \quad d_1 \neq d'_1,$$

і їм відповідні значення  $y_1 = I(x_1)$ ,  $y_2 = I(x_2)$ . Для них

$$y_1 - y_2 = [\omega^m(I(x_1)) - \omega^m(I(x_2))] \hat{P}_m, \quad \text{де} \quad \hat{P}_m = \prod_{j=1}^m g_{1-c_j}.$$

Нехай  $x_1 \leq x_2$ . Тоді можливі випадки:

- 1) число  $\sigma_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m$  є парним;
- 2)  $\sigma_m$  – непарне.

У першому випадку з  $x_1 < x_2$  випливає  $d_1 = 0$ , а  $d'_1 = 1$  і маємо

$$y_1 - y_2 = \left( \Delta_{1,1-d_1,1-d_2 \dots}^{G_2} - \Delta_{0,1-d'_1,1-d'_2 \dots}^{G_2} \right) \hat{P}_m.$$

У цьому випадку знак різниці  $y_1 - y_2$  збігається з знаком  $\hat{P}_m$ . Тому якщо  $m$  – число парне, то число  $\bar{\sigma}_m \equiv m - \sigma_m = (1 - c_1) + (1 - c_2) + \dots + (1 - c_m)$  теж парне. Тоді  $\hat{P}_m > 0$  і  $I(x_1) > I(x_2)$ .

Якщо  $m$  – число непарне, то  $\bar{\sigma}_m$  – непарне і  $\hat{P}_m < 0$ , а отже,  $I(x_1) < I(x_2)$ .

У другому випадку з  $x_1 < x_2$  випливає, що  $d_1 = 1$ , а  $d'_1 = 0$  і маємо

$$y_1 - y_2 = \left( \Delta_{0,1-d_1,1-d_2, \dots}^{G_2} - \Delta_{1,1-d'_1,1-d'_2, \dots}^{G_2} \right) \hat{P}_m.$$

У цьому випадку знак різниці  $y_1 - y_2$  є протилежним до знаку  $\hat{P}_m$ , оскільки вираз в дужках є від'ємним. Якщо  $m$  – парне, то  $\bar{\sigma}_m = m - \sigma_m$  – непарне (кількість одиниць серед  $1 - c_1, 1 - c_2, \dots, 1 - c_m$ ), а отже,  $\hat{P}_m < 0$  і  $I(x_1) > I(x_2)$ .

Якщо  $m$  – непарне, то  $\bar{\sigma}_m$  – парне,  $\hat{P}_m > 0$  і  $I(x_1) < I(x_2)$ .

Таким чином при  $x_1 < x_2$  можливі як  $y_1 < y_2$ , так і  $y_1 > y_2$  в залежності від парності–непарності чисел  $m$  і  $\sigma_m$ .

Для доведення ніде не монотонності функції  $I$  досить вказати у довільно вибраному циліндрі  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}$  трьох чисел  $x_1, x_0, x_2$  таких, що  $x_1 < x_0 < x_2$  для яких  $[I(x_0) - I(x_1)][I(x_2) - I(x_0)] < 0$ . Непорушуючи загальності будемо вважати, що  $\sigma_m = c_1 + \dots + c_m \in \text{числом парним}$  (якщо це не так досить розглянути півциліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{G_2}$ ). Розглянемо точки  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}(01)$ ,  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}(001)$ ,  $\sigma_m$ -парне,  $m$ -непарне  $y_1 < y_0$ ,  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}(110)$ ,  $\sigma_m$ -парне,  $m$ -парне  $y_0 > y_2$ .

Для пари  $(x_1, x_0)$  маємо  $x_1 < x_0$ ,  $\sigma_m$ -парне,  $m$ -непарне, а отже, за попереднім  $y_1 = I(x_1) < I(x_2) = y_0$ .

Для пари  $(x_0, x_2)$  маємо  $x_0 < x_2$ ,  $\sigma_m$ -парне,  $m$ -парне, а отже,  $y_0 > y_2 = I(x_2)$ . Тому  $(y_0 - y_1)(y_2 - y_0) < 0$ , що й вимагалось довести.  $\square$

**Зауваження 2.18.1.** *Це твердження виражає ще одну специфічну властивість  $G_2$ -зображення, оскільки для двійкового зображення,  $Q_2$ -зображення, ланцюгового  $A_2$ -зображення інверсор є функцією неперечною і монотонною на всій області визначення, а даний інверсор є розривною функцією в  $G_2$ -бінарних точках, про що свідчить наведений приклад.*

## 2.19. Двоїсті системи

**Означення 2.10.**  $G_2$ -зображення і  $Q_2$ -зображення чисел із основами  $(g_0, g_1)$  і  $(q_0, q_1)$  відповідно називаються двоїстими, якщо  $g_0 = q_0$ .

Вважаємо  $Q_2$ - і  $G_2$ -зображення заданими і двоїстими.

**Означення 2.11.** Функція  $p$ , яка числу  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2}$  ставить у відповідність число  $y = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2}$ , називається проектором  $Q_2$  в  $G_2$ -зображення.

Очевидно, що проектор  $Q_2$ -зображення в  $G_2$ -зображення  $Q_2$ -циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}$  переводить в  $G_2$ -циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}$ , причому  $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}| = g_0 |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}|$ .

**Теорема 2.19.1.** *Функція  $p$ , означена рівністю*

$$p(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_2},$$

є ніде не монотонною неперервною в кожній  $Q_2$ -унарній точці. В  $Q_2$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{Q_2}$  функція  $p$  має скінченний стрибок  $\frac{2g_0(1-g_0)^{m-1}}{2-g_0} \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}|$ .

*Доведення.* Нехай  $x_0$  —  $Q_2$ -унарна точка,  $x \neq x_0$ . Тоді існує натуральне число  $m$  таке, що  $\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0)$ , але  $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$  при  $i \leq m$ . Розглянемо

$$d = |p(x) - p(x_0)| = |\Delta_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\dots}^{G_2} - \Delta_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\dots}^{G_2}| \cdot \prod_{j=1}^m |g_{\alpha_j}|.$$

Оскільки  $|\Delta_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\dots}^{G_2} - \Delta_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\dots}^{G_2}| \leq g_0$ ; а  $x \rightarrow x_0$  рівносильно  $m \rightarrow \infty$ , то при  $m \rightarrow \infty$  маємо  $d \rightarrow 0$ , що рівносильно неперервності функції  $p$  в точці  $x_0$  по множині  $G_2$ -унарних чисел.

Стрибок  $d$  функції  $p$  в  $G_2$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{Q_2}$ :

$$\begin{aligned} d(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{Q_2}) &= |\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{G_2} - \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{G_2}| = \\ &= |\Delta_{1(0)}^{G_2} - \Delta_{0(1)}^{G_2}| \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}| = \frac{2g_0(1-g_0)^{m-1}}{2-g_0} \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}|. \end{aligned}$$

Для доведення ніде не монотонності проектора досить в будь-якому циліндрі (нехай  $\Delta_{c_1 \dots c_n}^{G_2}$ ) вказати таких три точки  $x_1, x_2, x_3$ , що  $x_1 < x_2 < x_3$ , але для відповідних значень проектора  $p$  виконується нерівність

$$[p(x_2) - p(x_1)] \cdot [p(x_3) - p(x_2)] < 0.$$

З цією метою розглянемо точки

$$x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m i 1(0)}^{Q_2}, \quad x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m i 11(0)}^{Q_2}, \quad x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m i 111(0)}^{Q_2}.$$

Якщо  $i = 0$  і  $c_1 + c_2 + \dots + c_m$  — число парне, то для їм відповідних значень:

$$y_1 = p(x_1) = \Delta_{c_1 \dots c_m i 1(0)}^{G_2}, \quad y_2 = p(x_2) = \Delta_{c_1 \dots c_m i 11(0)}^{G_2}, \quad y_3 = p(x_3) = \Delta_{c_1 \dots c_m i 111(0)}^{G_2},$$

враховуючи ознаку порівняння (теорема 2.6.1), маємо  $y_1 > y_2 < y_3$ . Отже,  $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$ .

Якщо  $c_1 + c_2 + \dots + c_m$  — число непарне, то взявши  $i = 1$ , матимемо  $x_1 > x_2 > x_3$  і ідентичний висновок.  $\square$

## 2.20. Ймовірнісна теорія $G_2$ -зображенням чисел

**Теорема 2.20.1.** *Якщо випадкова величина  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots}^{G_2}$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[0; g_0]$ , то цифри  $(\xi_n)$  її  $G_2$ -зображення є незалежними і мають розподіли  $P\{\xi_n = 0\} = g_0$ ,  $P\{\xi_n = 1\} = -g_1$ .*

*Доведення.* Оскільки  $\xi$  має рівномірний розподіл на  $[0; g_0]$ , то вона не має атомів, тобто ймовірність  $P\{\xi = x_0\} = 0$  для будь-якого  $x_0$ , і

$$P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}\} = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}| = g_0 \prod_{i=1}^m |g_{c_i}|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 = 0\} &= P\{\xi \in \Delta_0^{G_2}\} = \frac{|\Delta_0^{G_2}|}{g_0} = g_0, \\ P\{\xi_1 = 1\} &= P\{\xi \in \Delta_1^{G_2}\} = \frac{|\Delta_1^{G_2}|}{g_0} = -g_1, \\ P\{\xi_{m+1} = i / \xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2}\} &= \frac{P(\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m i}^{G_2})}{P(\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{G_2})} = \\ &= g_0 |g_i| \prod_{j=1}^m |g_{c_j}| : g_0 \prod_{j=1}^m |g_{c_j}| = |g_i|. \end{aligned} \tag{2.20.13}$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від набору цифр  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ , то  $\xi_{m+1}$  не залежить від  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Отже,  $(\xi_n)$  — послідовність незалежних випадкових величин. Більше того,

$$P\{\xi_n = 0\} = g_0, \quad P\{\xi_n = 1\} = -g_1,$$

що й вимагалось довести. □

**Наслідок 2.20.1.** *Якщо  $(\xi_n)$  — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з розподілами  $P\{\xi_n = i\} = |g_i|$ ,  $i = 0, 1$ , то розподіл випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{G_2}$  є рівномірним.*

**Теорема 2.20.2.** *Якщо  $(\tau_n)$  — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями  $p_0$  і  $p_1$ , тобто  $P\{\tau_n = i\} = p_i$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 0, 1$ , то розподіл випадкової величини  $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^{G_2}$  є рівномірним при  $p_0 = g_0$  і сингулярно неперервним при  $p_0 \neq g_0$ .*



*Доведення.* Згідно з теоремою Лебега кожна неперервна монотонна функція майже скрізь у розумінні міри Лебега має скінченну похідну. Якщо в точці  $x_0$  похідна існує, то вона обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} F'_\tau(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\{\tau \in \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}^{G_2}\}}{|\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}^{G_2}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0^{N_0} p_1^{N_1}}{g_0 \prod_{j=1}^n |g_{c_j}|} = \\ &= \frac{1}{g_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{p_0^{N_0} p_1^{N_1}}{g_0^{N_0} |g_1|^{N_1}} \right)^n = \frac{1}{g_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{p_0}{g_0} \right)^{\frac{N_0}{n}} \left( \frac{p_1}{|g_1|} \right)^{\frac{N_1}{n}} \right]^n = \\ &= \frac{1}{g_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{p_0}{g_0} \right)^{\nu_0} \left( \frac{p_1}{|g_1|} \right)^{\nu_1} \right]^n, \end{aligned}$$

де  $N_1 = \alpha_1(x_0) + \dots + \alpha_n(x_0)$ ,  $N_0 = n - N_1$ ,  $\nu_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_1(x,n)}{n}$ ,  $\nu_0(x) = 1 - \nu_1(x)$ ,  $N_1(x, n) = \alpha_1(x) + \dots + \alpha_n(x)$ .

Можна довести (це робиться аналогічно до міркувань і висновків, наведених у роботі [54] для  $Q_2$ -зображення) таке твердження: *для майже всіх  $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{G_2} \in [0; g_0]$  у розумінні міри Лебега виконуються рівності:  $\nu_0(x) = g_0$ ,  $\nu_1(x) = g_1$ .* Тому для  $x_0$ , що належить множині повної міри Лебега, для кожної точки якої існує скінченна похідна і  $\nu_0(x_0) = g_0$ ,  $\nu_1(x_0) = g_1$  маємо  $F'(x_0) = 0$ , оскільки при  $p_0 \neq g_0$  виконується  $\frac{p_0^{g_0} p_1^{|g_1|}}{g_0^{g_0} |g_1|^{|g_1|}} < 1$ . Отже, при  $p_0 \neq g_0$  функція розподілу  $F_\tau$  є сингулярною (її похідна майже скрізь дорівнює нулю).

Якщо  $p_0 = g_0$ , то

$$P\{\tau \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}\} = p_0^{N_0} p_1^{N_1} = g_0^{N_0} |g_1|^{N_1} = \frac{1}{g_0} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_2}|,$$

тобто розподіл  $\tau$  на  $[0; g_0]$  є рівномірним.  $\square$

**Теорема 2.20.3.** *Нехай  $(\xi_n)$  – послідовність незалежних випадкових величин з розподілами  $P\{\xi_n = i\} = p_{in} \geq 0$ ,  $i \in A = \{0; 1\}$ ; то випадкова величина  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{G_2}$  має чистий лебегівський тип розподілу (тобто чисто дискретний, чисто неперервний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярно неперервний), причому чисто дискретний*

— тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}p_{1n}\} > 0.$$

Якщо  $M = 0$  і

$$L \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{p_{0n}}{g_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{p_{1n}}{g_1}\right)^2 \right] < \infty,$$

то  $\xi$  має абсолютно неперервний розподіл, а при  $M = 0$  і  $L = \infty$  — сингулярно неперервний.

У випадку дискретності розподілу, його точковий спектр утворюють точки  $x$ , для яких  $p_{\alpha_k(x)k} \neq 0$  для будь-якого  $k \in N$  і при цьому  $x$  і  $x_0$  належать одній хвостовій множині.

*Доведення.* Дане твердження випливає з відомого аналогічного твердження для  $Q_2$ -зображення, оскільки відображення

$$\varphi : \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{G_2} \rightarrow \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$$

вимірне і зберігає відношення довжин циліндрів (образу і прообразу).  $\square$

## 2.21. $G_2$ -зображення чисел і фрактальна розмірність Гаусдорфа–Безиковича

Нагадаємо [83] означення  $\alpha$ -міри Гаусдорфа і фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича обмеженої множини  $E \subset R^1$ . Нехай  $0 < \alpha$  — фіксоване число,  $\varepsilon > 0$ . Число  $m_\varepsilon^\alpha(E)$  означається рівністю

$$m_\varepsilon^\alpha(E) = \inf_{|u_i| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i |u_i|^\alpha : E \subset \cup_i u_i \right\},$$

де  $u_i$ —відрізок числової прямої, а нижня грань береться за всіма можливими покриттями множини  $E$  відрізками  $u_i$ , довжини яких не перевищують  $\varepsilon$ . При цьому число  $\sum_i |u_i|^\alpha$  називається  $\alpha$ -об'ємом покриття  $\{u_i\}$ .

Значення границі  $H^\alpha(E) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} m_\varepsilon^\alpha(E)$ , а вона існує завдяки монотонності функції  $m_\varepsilon^\alpha(E)$  змінної  $\varepsilon$ , яке рівне 0,  $\infty$  або є додатним числом, називається  $\alpha$ -мірою Гаусдорфа множини  $E$ .

Існує єдине число  $\alpha_0$  таке, що  $H^\alpha(E) = \infty$  при  $\alpha < \alpha_0$  і  $H^\alpha(E) = 0$  при  $\alpha > \alpha_0$ . Саме це число називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича* і позначається  $\alpha_0(E)$ . Розмірність Гаусдорфа–Безиковича є показником масивності множини і «компактності» її точок, що є наслідком властивостей:

1.  $\alpha_0(E) = 0$ , якщо  $E$ -зліченна;
2.  $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$  — властивість монотонності;
3.  $\alpha_0(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sup_i \alpha_0(E_i)$  — властивість зліченної стабільності;
4.  $\alpha_0(E_1 \cup E_2) = \max\{\alpha_0(E_1), \alpha_0(E_2)\}$ .

Обчислення розмірності Гаусдорфа–Безиковича є задачею, взагалі кажучи, непростю. Але її розв'язанню сприяють деякі факти, пов'язані з системами кодування дійсних чисел. До них відносяться *теорема Біллінгслі* [9], який довів, що при обчисленні розмірності Гаусдорфа–Безиковича можна обмежитись покриттям множини  $E$   $s$ -ковими циліндрами; теорема Працьовитого М.В., яка є узагальненням теореми Біллінгслі і стверджує, що сім'ї  $Q$ -циліндрів достатньо для отримання означення розмірності Гаусдорфа–Безиковича, еквівалентного наведеному вище. Існує ряд узагальнень та аналогів наведених теорем. На цьому шляху за аналогією з  $Q_2$ -зображенням можна отримати твердження для  $G_2$ -зображення чисел, яке ми нижче сформулюємо і доведемо.

Нехай задано  $G_2$ -зображення чисел проміжка  $[0; g_0]$ ,  $W_G$ -множина всіх  $G_2$ -циліндрів,  $[0; g_0] \supset E$  — фіксована множина,  $1 \geq \alpha$  — додатне число,  $\varepsilon > 0$ . Покладемо  $l_\varepsilon^\alpha(E) \equiv \inf_{|\omega_i| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i |\omega_i|^\alpha : E \subset \bigcup_i \omega_i, \omega_i \in W_G \right\}$ , де  $|\omega_i|$  — довжина циліндра  $\omega_i$ , а нижня грань береться за всіма можливими покриттями множини  $E$   $G_2$ -циліндрами, довжини яких не перевищують  $\varepsilon$ .

Очевидно, що числа  $l_\varepsilon^\alpha(E)$  і  $m_\varepsilon^\alpha(E)$ , взагалі кажучи, різні ( $l_\varepsilon^\alpha(E) \geq m_\varepsilon^\alpha(E)$ , оскільки у клас всеможливих покриттів множини  $E$  відрізками входить клас покриттів  $G_2$ -циліндрами). Доведемо, що не дивлячись на

це, функції  $H^\alpha(E)$  і  $L^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_\varepsilon^\alpha(E)$  змінної  $\alpha$  набувають значень 0 та  $\infty$  одночасно. А це є підставою вважати, що при визначенні розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної множини  $E \subset [0; g_0]$  можна обмежитись покриттями множини  $G_2$ -циліндрами, що випливає з твердження:

**Теорема 2.21.1.** *Для довільних  $E \subset [0; g_0]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  виконується подвійна нерівність*

$$m_\varepsilon^\alpha(E) \leq l_\varepsilon^\alpha(E) \leq 2(2^m + 1) \cdot m_\varepsilon^\alpha(E), \quad (2.21.14)$$

$m$  — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність  $g_0^m \leq 1 - g_0$ .

*Доведення.* Ліва нерівність є очевидною. Доведемо праву. З цією метою розглянемо довільне  $\varepsilon$ -покриття множини  $E$  відрізками, один з яких є відрізок  $u$  ( $|u| \leq \varepsilon$ ). Нехай  $k$  — це найменший ранг  $G_2$ -циліндра, який повністю міститься в  $u$ . Позначимо цей циліндр через  $\tau$ . Тоді існує два циліндри  $v$  і  $\omega$  рангу  $k-1$  таких, що  $u \subset v \cup \omega$  (інакше це суперечило б вибору числа  $k$ ). Непорушуючи загальності, вважатимемо, що  $\max v = \min \omega$ . Зрозуміло, що  $\tau \subset v$  або  $\tau \subset \omega$ . Циліндри  $v$  і  $\omega$  можуть утворювати циліндр рангу  $k$ . Тоді  $v \cup \omega = u$ . А можуть і не утворювати. У першому випадку один  $G_2$ -циліндр рангу  $k$  покриває  $u$  і має довжину, яка не перевищує  $\varepsilon$ .

Розглянемо другий випадок. Введемо позначення  $u_1 = [\min u; \max v]$ ,  $u_2 = [\min \omega; \max u]$ . Розглянемо  $u_2$  і  $\omega$ . Нехай  $k_1$ —мінімальний ранг циліндра  $z$ , який належить  $u_2$ , тобто не існує циліндра рангу  $k_1 - 1$ , що повністю належить  $u_2$ . Тоді циліндр  $\theta$  рангу  $k-1$ , що містить циліндр  $z$  є об'єднанням двох циліндрів рангу  $k_1 + 1$   $\theta = z \cup \theta'$ , причому  $|z| \leq |u_2| \leq \varepsilon$ . Якщо  $|\theta'| \leq \varepsilon$ , то двох циліндрів  $z$   $\theta'$  досить, щоб покрити  $u_2$ .

Нехай  $|\theta'| > \varepsilon$ . Тоді  $|z| = -g_1|\theta|$ ,  $|\theta'| = g_0|\theta|$ . Розглянемо циліндри рангу  $k_1 + m$ , де  $m$  — найменший розв'язок нерівності  $g_0^m \leq 1 - g_0$ , які належать циліндру  $\theta'$  (їх кількість —  $2^m$ ). Вони разом з циліндром  $z$  утворюють  $\varepsilon$ -покриття відрізка  $u_2$ . (Справді, з  $g_0^m \leq 1 - g_0 \equiv g_1$  маємо  $g_0^m|\theta| \leq -g_1|\theta| = |z| \leq \varepsilon$ ). Таким чином, для  $\varepsilon$ -покриття відрізка  $u_2$  досить  $2^m + 1$   $G_2$ -циліндрів.

Аналогічні міркування для відрізка  $u_1$  приводять до такого ж висновку. Отже, для  $\varepsilon$ -покриття відрізка  $u$  досить  $2(2^m + 1)$   $G_2$ -циліндрів, а тому з довільності вибору  $\varepsilon$ -покриття випливає права нерівність (2.21.14).  $\square$

## Висновки до розділу 2

У цьому розділі побудована цілісна теорія  $G_2$ -зображення чисел відрізка  $[0; g_0]$ , де  $\frac{1}{2} < g_0 < 1$ , яка включає ідентифікацію та порівняння чисел за їх зображеннями, геометрію зображення, спеціальні функції і відношення (зокрема відношення «мати однаковий хвіст»), метричну та ймовірнісну складові, застосування у теорії функції, теорії сингулярних розподілів ймовірностей та теорії фракталів. У ньому проведено порівняльний аналіз з іншими двосимвольними системами зображення чисел, де висвітлено специфіку даного зображення, яка полягає у властивостях циліндричних множин, операторів лівостороннього та правостороннього зсуву цифр зображення, інверсора і множини чисел, що мають два зображення.

Основними результатами цього розділу є теореми 2.8.1, 2.16.1, 2.17.1, 2.18.1 та 2.21.1.

На наш погляд окремої уваги заслуговує теорема 2.16.1 про нескінченну некомутативну групу неперервних бієкцій відрізка  $[0; g_0]$ , які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, яка має нетривіальну підгрупу зростаючих функцій.

Теорема 2.17.1 є аналогом відомої теореми Бореля для  $s$ -го зображення чисел, вона важлива для рузбудови ймовірнісної теорії  $G_2$ -зображення чисел.

Теорема 2.21.1 є аналогом теореми Білінгслі для двійкового зображення чисел і теореми Працьовитого М.В. для  $Q_2$ -зображення чисел. Практична значущість цієї теореми у теорії фракталів очевидна.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [3;6;7;8] та доповідались на конференціях [18;19;20].

РОЗДІЛ 3  
УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІЙ РАДЕМАХЕРА ТА РЯДІВ  
УОЛША

У даному розділі пропонуються узагальнення функцій Уолша та Радемахера, які ґрунтуються на  $Q_2$ -зображенні чисел відрізка  $[0; 1]$ , вивчаються їх інтегральні властивості.

### 3.1. Функція Радемахера і ряди Уолша

Ми використовуватимемо двійкове представлення та зображення дійсних чисел:

$$[0; 1) \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2, \quad \alpha_n \in \{0; 1\} \equiv A_2, \quad (3.1.1)$$

і йому відповідні двійкові циліндричні піввідрізки:

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^2 \equiv \left[ \sum_{i=1}^m c_i 2^{-i}; \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^m c_i 2^{-i} \right) = \{x : \alpha_i(x) = c_i, \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (3.1.2)$$

Остання множина називається двійковим циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$ . При цьому для чисел, що мають два зображення, використовується лише те, що має період  $(0)$ .

Нагадаємо, що *функціями Радемахера*  $r_k(x)$  називаються функції з періодом 1, визначені на піввідрізку  $[0; 1)$  наступним чином

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \Delta_0^2; \\ -1 & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow x \in \Delta_1^2, \end{cases}$$

$$r_k^*(x) \equiv r_0^* (\{2^k x\}) = r_0^* (2^k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\{2^k x\}$  – дробова частина числа  $2^k x$ .

Зауважимо, що інколи функціям Радемахера дають наступне означення:  $r_k^*(x) = \text{sign} \sin 2^{k+1}\pi x$ , де

$$\text{signt} = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ -1 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

яким у даній роботі ми користуватись не будемо.

Функції Уолша є всеможливими добутками функцій Радемахера.

Нижче ми пропонуємо одне з узагальнень функцій Радемахера та Уолша, яке ґрунтується на узагальненні класичного двійкового зображення дійсних чисел, і будемо їх розглядати визначеними на  $[0; 1)$ .

### 3.2. Узагальнення функцій Радемахера

Нехай  $\bar{x} = (x_n), \bar{y} = (y_n)$  — елементи простору  $L_2$  послідовностей 0 та 1. Множина  $L_2$  відносно бінарної операції  $\oplus$ , означеної рівностями

$$\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y} = (x_n \oplus y_n) = (z_n), \text{ де } x_n \oplus y_n = z_n = |x_n - y_n|,$$

утворює комутативну групу.

Множину  $L_2$  можна різними способами метризувати. У даній ситуації надприроднішою є метрика:  $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus y_n}{2^n}$ .

Для метризації простору  $L_2$  може бути використане  $Q_2$ -зображення:

$$\rho_0(\bar{x}, \bar{y}) = z_1 q_{1-z_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( z_k q_{1-z_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{z_j} \right) \equiv \Delta_{z_1 z_2 \dots z_n \dots}^{Q_2}, \text{ де } \bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

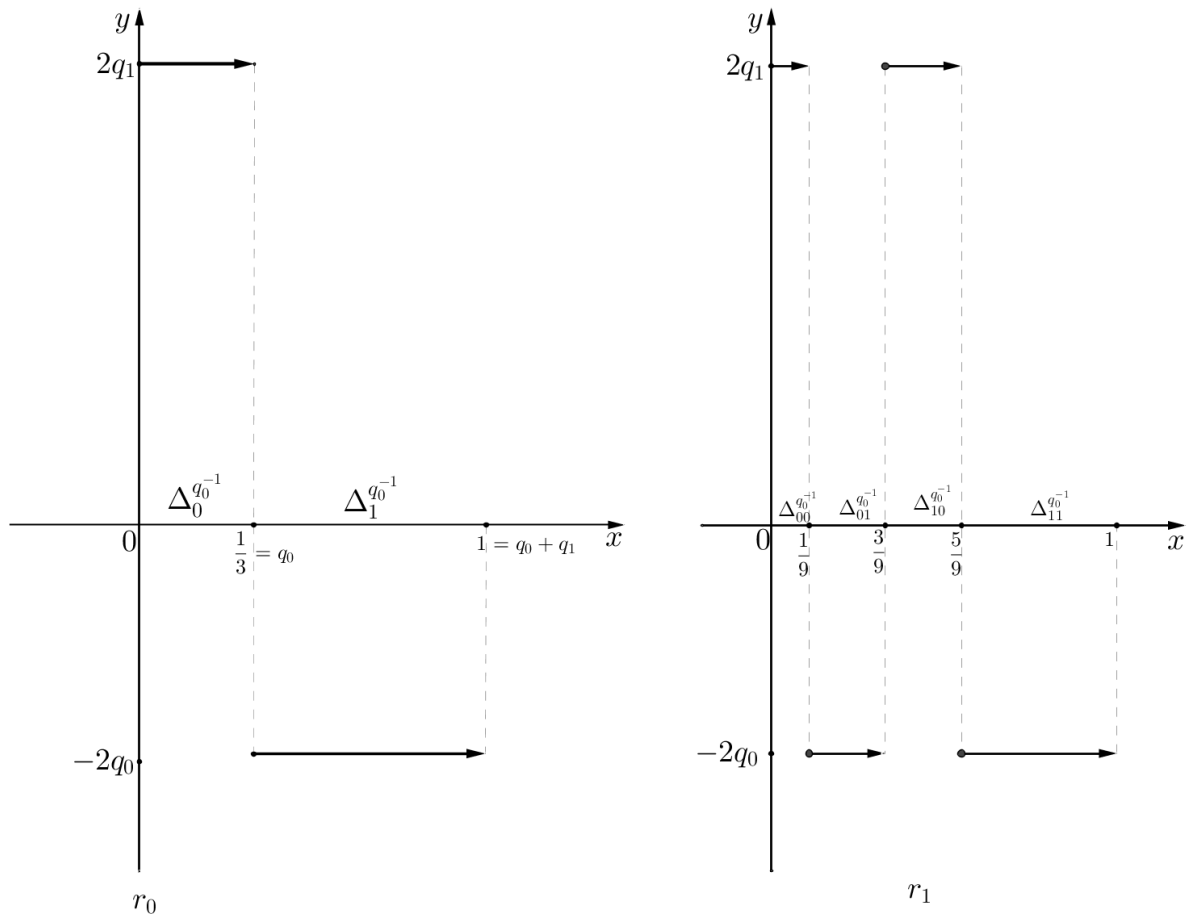
**Означення 3.1.** На піввідрїзку  $[0; 1)$  означимо послїдовнїсть функцїй

$$\begin{aligned} & (r_n)_{n=0}^{\infty} : \\ & r_0(x) \equiv (-1)^{\alpha_1(x)} \cdot 2q_{1-\alpha_1(x)} = \\ & = \begin{cases} 2q_1, & \text{якщо } x \in [0; q_0) = \Delta_0^{Q_2} \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 0; \\ -2q_0, & \text{якщо } x \in [q_0; 1) = \Delta_1^{Q_2} \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$r_n(x) \equiv r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\dots}^{Q_2} \right), \quad n \in N.$$

Функції  $r_n$  є узагальненням функцій Радемахера і співпадають з ними при  $q_0 = \frac{1}{2}$ .

**Зауваження 3.2.1.** Функція  $r_n$  набуває лише двох значень  $2q_1$  і  $-2q_0$ , причому на кожному циліндрі рангу  $n$  вона є сталою, а отже, є сталою на кожному з циліндрів рангу  $m > n$ . Наприклад при  $q_0 = \frac{1}{3}$  графіки функцій  $r_0$  і  $r_1$  відповідно мають вигляд:



**Теорема 3.2.1.** Для узагальнення  $r_n$  функції Радемахера  $r_n^*$  має місце рівність:

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}} r_n(x) dx = 0 \quad (3.2.3)$$

при довільному наборі  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  з  $0$  та  $1$ .



*Доведення.* Справді,

$$\begin{aligned}
\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}} r_n(x) dx &= \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}} r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x) \alpha_{n+2}(x) \dots}^{Q_2} \right) dx = \\
&= \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{m0}}^{Q_2}} r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x) \alpha_{n+2}(x) \dots}^{Q_2} \right) dx + \\
&+ \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{m1}}^{Q_2}} r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x) \alpha_{n+2}(x) \dots}^{Q_2} \right) dx = \\
&= 2q_1 |\Delta_{c_1 \dots c_{m0}}^{Q_2}| - 2q_0 |\Delta_{c_1 \dots c_{m1}}^{Q_2}| = \\
&= 2(q_1 q_0 - q_0 q_1) \prod_{j=1}^m q_{c_j} = 0,
\end{aligned}$$

що й вимагалось довести. □

**Наслідок 3.2.1.** *Має місце рівність*

$$\int_0^1 r_n(x) dx = 0.$$

Справді, рівність (3.5.12) є наслідком адитивної властивості інтеграла:

$$\int_0^1 r_n(x) dx = \sum_{c_1 \in A_2} \dots \sum_{c_n \in A_2} \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}} r_n(x) dx.$$

**Теорема 3.2.2.** *Система функцій Радемахера є ортогональною, а саме:*

$$\int_0^1 r_n(x) r_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq m, \\ 4q_0 q_1, & \text{якщо } n = m. \end{cases}$$

*Доведення.* Не порушуючи загальності, вважатимемо, що  $n < m$ . Тоді

$$\begin{aligned}
r_n(x) r_m(x) &= r_0 \left( \Delta_{\alpha_{n+1}(x) \dots}^{Q_2} \right) r_0 \left( \Delta_{\alpha_{m+1}(x) \dots}^{Q_2} \right) = \\
&= \begin{cases} 4q_0^2, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0 c_{n+1} \dots c_{m-1} 0}, \\ -4q_0 q_1, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0 c_{n+1} \dots c_{m-1} 1}, \\ -4q_1 q_0, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1 c_{n+1} \dots c_{m-1} 0}, \\ 4q_1^2, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1 c_{n+1} \dots c_{m-1} 1} \end{cases}
\end{aligned}$$

при довільному наборі  $(c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n+1}, \dots, c_{m-1})$  нулів та одиниць. Тому, враховуючи попереднє зауваження, для

$$I = \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i c_{n+1} \dots c_{m-1} c_m}^{Q_2}} r_n(x) r_m(x) dx$$

маємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i c_{n+1} \dots c_{m-1} 0}^{Q_2}} r_n(x) r_m(x) dx + \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i c_{n+1} \dots c_{m-1} 1}^{Q_2}} r_n(x) r_m(x) dx = \\ &= \pm \left( 4q_{1-i} q_1 |\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i c_{n+1} \dots c_{m-1} 0}^{Q_2}| - 4q_{1-i} q_0 |\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i c_{n+1} \dots c_{m-1} 1}^{Q_2}| \right) = \\ &= \pm 4q_{1-i} q_i (q_1 q_0 - q_0 q_1) \prod_{n \neq j=1}^{m-1} q_{c_j} = 0. \end{aligned}$$

А отже, враховуючи адитивну властивість інтеграла, маємо

$$\int_0^1 r_n(x) r_m(x) dx = 0.$$

При  $n = m$  маємо

$$\begin{aligned} r_n(x) r_m(x) &= r_n^2(x) = r_0^2 \left( \Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots}^{Q_2} \right) = \\ &= \begin{cases} 4q_1^2, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_n 0}^{Q_2}, \\ 4q_0^2, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1 \dots c_n 1}^{Q_2}, \end{cases} \end{aligned}$$

для довільного набору  $(c_1, 2 \dots, c_n) \in A_2^n$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 r_n^2(x) dx &= 4q_1^2 \sum_{c_1 \in A_2} \dots \sum_{c_n \in A_2} |\Delta_{c_1 \dots c_n 0}^{Q_2}| + \\ &+ 4q_0^2 \sum_{c_1 \in A_2} \dots \sum_{c_n \in A_2} |\Delta_{c_1 \dots c_n 1}^{Q_2}| = \\ &= (4q_1^2 q_0 + 4q_0^2 q_1) \sum_{c_1 \in A_2} \dots \sum_{c_n \in A_2} |\Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2}| = \\ &= 4q_1 q_0 \cdot 1 = 4q_0 q_1. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

### 3.3. Узагальнення функцій Уолша

Систему (послідовність) узагальнених функцій Уолша  $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ми побудуємо з використання традиційної нумерації Пеллі. Покладемо  $\omega_0(x) \equiv 1$ . Для означення функції  $\omega_n(x)$  число  $n$  представляється у двійковій системі числення:  $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_12^1 + \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_i \in A_2$ . Звідки бачити, що  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , де  $k = k(n)$ . Тепер означуємо функцію  $\omega_n$  рівністю:  $\omega_n(x) \equiv \prod_{i=0}^k r_i^{\varepsilon_i}(x) = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} r_i^{\varepsilon_i}(x)$ .

Наприклад, для  $n = 1 = 1 \cdot 2^0$  маємо  $\omega_1(x) = r_0(x)$ ;

для  $n = 2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10)_2$  маємо

$$\omega_2(x) = r_0^{\varepsilon_0}(x)r_1^{\varepsilon_1}(x) = r_1(x);$$

для  $n = 4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100)_2$  маємо  $\varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_1$  і

$$\omega_4(x) = r_0^{\varepsilon_0}(x)r_1^{\varepsilon_1}(x)r_2^{\varepsilon_2}(x) = r_2(x).$$

Більше того,

$$\omega_{2^k} = r_0^0(x)r_1^0(x) \dots r_{k-1}^0(x)r_k^1(x) = r_k(x) = r_0 \left( \Delta_{\alpha_{k+1}(x)\alpha_{k+2}(x)\dots}^{q_0^{-1}} \right).$$

Оскільки  $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 1$ , то

$\omega_{2^k-1}(x) = r_0(x)r_1(x) \dots r_{k-1}(x)$ . Для  $n = 5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (101)_2$  отримуємо

$$\begin{aligned} \omega_5(x) &= r_0^1(x)r_1^0(x)r_2^1(x) = r_0(x)r_2(x) = \\ &= r_0 \left( \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots}^{q_0^{-1}} \right) r_0 \left( \Delta_{\alpha_3(x)\alpha_4(x)\dots}^{q_0^{-1}} \right) = \\ &= (-1)^{\alpha_1(x)+\alpha_3(x)} 2^2 q_{1-\alpha_1(x)} q_{1-\alpha_3(x)}. \end{aligned}$$

Зауваживши, що при  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  виконується  $n - 2^k = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i$  і тому маємо  $\omega_n(x) = r_k(x)\omega_{n-2^k}(x)$ . Зокрема,  $r_k(x) = \omega_{2^k}(x)$ .

**Зауваження 3.3.1.** Узагальнення функцій Уолша, як і самі функції Уолша, в точках розриву неперервні справа, Але класичні функції Уолша набувають лише двох значень 1 і -1, що не збереглося для щойно введеного їх узагальнення.

**Теорема 3.3.1.** Якщо  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , тобто

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_12 + \varepsilon_02^0,$$

то узагальнена функція Уолша  $\omega_n(x) = r_k(x)r_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}(x) \dots r_0^{\varepsilon_0}(x)$  на кожному циліндрі  $(k+1)$ -го рангу є сталою, причому на циліндрі  $\Delta_{c_1c_2\dots c_kc_{k+1}}^{q_0^{-1}}$  вона набуває значення

$$\omega_n(x) = (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c}, \quad (3.3.4)$$

де  $s = 1 + \varepsilon_{k-1} + \dots + \varepsilon_1 + \varepsilon_0$  – кількість цифр "1" у зображенні числа  $n$ ,  
 $c = \varepsilon_0c_1 + \varepsilon_1c_2 + \dots + \varepsilon_{k-1}c_k + c_{k+1}$  – кількість  $j$  таких, що  $\varepsilon_j = 1 = c_{j+1}$   
серед  $0, 1, \dots, k$ .

*Доведення.* Оскільки

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \varepsilon_i = 0, \\ r_i(x), & \text{якщо } \varepsilon_i = 1, \end{cases}$$

то

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \varepsilon_i = 0, \\ 2q_1, & \text{якщо } c_{i+1} = 0 \wedge \varepsilon_i = 1, \\ -2q_0, & \text{якщо } c_{i+1} = 1 \wedge \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

Тоді при  $\varepsilon_i = 1$  маємо

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 2q_1, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1\dots c_i0}^{q_0^{-1}}, \\ -2q_1, & \text{якщо } x \in \Delta_{c_1\dots c_i1}^{q_0^{-1}}, \end{cases}$$

а, отже, для  $x \in \Delta_{c_1\dots c_i c_{i+1}}^{q_0^{-1}}$  отримуємо

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = (-1)^{\varepsilon_i c_{i+1}} \cdot 2^{\varepsilon_i} q_0^{\varepsilon_i c_{i+1}} q_1^{\varepsilon_i - \varepsilon_i c_{i+1}}.$$

Тому для  $x \in \Delta_{c_1\dots c_i\dots c_j}^{q_0^{-1}}$  при  $i < j$  маємо

$$r_i^{\varepsilon_i}(x)r_j^{\varepsilon_j}(x) = (-1)^{\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1}} 2^{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot q_0^{\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1}} q_1^{(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - (\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1})}.$$

Звідки і слідує рівність (3.3.4). □

**Теорема 3.3.2.** Для узагальненої функції Уолша  $\omega_n$  при  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , тобто

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0,$$

і кожного циліндра  $\Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{q_0^{-1}}$  має місце рівність

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{q_0^{-1}}} \omega_n(x) dx = 0 = \int_0^1 \omega_n(x) dx. \quad (3.3.5)$$

*Доведення.* Оскільки

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{q_0^{-1}}} \omega_n(x) dx = \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k 0}^{q_0^{-1}}} \omega_n(x) dx + \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k 1}^{q_0^{-1}}} \omega_n(x) dx,$$

то, враховуючи попередню теорему, маємо

$$\begin{aligned} \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{q_0^{-1}}} \omega_n(x) dx &= (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c} \cdot |\Delta_{c_1 \dots c_k 0}^{q_0^{-1}}| + \\ &+ (-1)^{c+1} 2^s q_0^{c+1} q_1^{s-c-1} \cdot |\Delta_{c_1 \dots c_k 1}^{q_0^{-1}}| = \\ &= \left( (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c-1} \prod_{j=1}^k q_{c_j} \right) (q_1 q_0 - q_0 q_1) = 0. \end{aligned}$$

Друга з рівності (3.5.16) є наслідком першої та адитивної властивості інтеграла.  $\square$

**Зауваження 3.3.2.** Якщо  $n < m$ ,  $(1\varepsilon'_{k-1}\varepsilon'_{k-2}\dots\varepsilon'_1\varepsilon'_0)_2$  – двійкове зображення числа  $n$ , а  $(1\varepsilon_{m-1}\varepsilon_{m-2}\dots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$  – двійкове зображення числа  $m$  і при цьому  $\varepsilon_j \varepsilon'_j = 0$  для всіх  $j \leq k-1$ , то очевидно, що добуток  $\omega_n \omega_m$  функцій Уолша є функцією Уолша з номером  $l = (1\varepsilon_{m-1}\dots\varepsilon_{k+1}1\delta_{k-1}\delta_{k-1}\dots\delta_1\delta_0)_2$ , де  $\delta_j = \varepsilon'_j + \varepsilon_j$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ . Для таких  $n$  і  $m$

$$\int_0^1 \omega_n(x) \omega_m(x) dx = 0.$$

### 3.4. Трійковий аналог функції Радемахера

**Лема 3.4.1.** Для довільного дійсного  $x$  має місце рівність

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}}{3}. \quad (3.4.6)$$

*Доведення.* Враховуючи, що  $\sin 3\alpha = (1 + 2 \cos 2\alpha) \sin \alpha$ , маємо

$$\begin{aligned} \sin x &= \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3}\right) \sin \frac{x}{3} = \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3}\right) \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3^2}\right) \sin \frac{x}{3^2} = \dots = \\ &= \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3}\right) \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3^2}\right) \dots \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}\right) \sin \frac{x}{3^k}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \frac{x}{3^k} \prod_{k=1}^n \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}\right) = \frac{x}{3^k} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}} \prod_{k=1}^n \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}\right) = \\ &= x \cdot \frac{\sin \frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}} \prod_{k=1}^n \frac{1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}}{3}. \end{aligned}$$

Враховуючи відому границю

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}},$$

отримуємо

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}}{3},$$

що рівносильно рівності (3.4.6). □

**Лема 3.4.2.** Для будь-якого дійсного числа  $x$  має місце рівність

$$\int_0^1 e^{ix(\frac{1}{2}-t)} dt = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

*Доведення.* Перетворюючи, обчислюємо

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^{ix(\frac{1}{2}-t)} dt &= e^{\frac{ix}{2}} \int_0^1 e^{-ixt} dt = \\
 &= e^{\frac{ix}{2}} \frac{1}{-ix} e^{-ixt} \Big|_0^1 = e^{\frac{ix}{2}} \frac{1}{-ix} (e^{-ix} - e^0) = \\
 &= \frac{e^{\frac{ix}{2}}}{ix} (1 - e^{-ix}) = \frac{1}{ix} \left( e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{ix} \left( \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{-x}{2} - i \sin \frac{-x}{2} \right) = \\
 &= \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

Лему доведено. □

**Лема 3.4.3.** Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та трійкова цифра числа  $t \in [0; 1)$ , тобто

$$t = \frac{\alpha_1(t)}{3} + \frac{\alpha_2(t)}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_k(t)}{3^k} + \dots, \quad \text{де } \alpha_k \in \{0; 1; 2\}, \text{ а}$$

$$v_k(t) \equiv 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \quad (3.4.7)$$

то

$$\int_0^1 \exp \left( ix \frac{v_k(t)}{3^k} \right) dt = \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{3^k}}{3}.$$

*Доведення.* Відомо [63], що

$$[0; 1] = \bigcup_{c_1=0}^2 \bigcup_{c_2=0}^2 \dots \bigcup_{c_{k-1}=0}^2 [\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 0}^3 \cup \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 1}^3 \cup \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 2}^3],$$

причому

$$\nabla_{a_1 \dots a_{k-1} a_k}^3 \cap \nabla_{b_1 \dots b_{k-1} b_k}^3 = \begin{cases} \nabla_{a_1 \dots a_{k-1} a_k}^3, & \text{якщо } a_j = b_j, j = \overline{1, k}; \\ \emptyset, & \text{якщо існує } a_j \neq b_j, \end{cases}$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c_k}^3| = \frac{1}{3} |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c_k}^3| = \frac{1}{3^k}.$$

Тому згідно з адитивною властивістю інтеграла

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \left( \int_{t \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 0}^3} e^{\frac{ix \cdot 1}{3^k}} dx + \int_{t \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 1}^3} e^{\frac{ix \cdot 0}{3^k}} dx + \int_{t \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 2}^3} e^{\frac{ix \cdot (-1)}{3^k}} dx \right) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \left( e^{\frac{ix}{3^k}} |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 0}^3| + |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 1}^3| + e^{\frac{-ix}{3^k}} |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 2}^3| \right) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^3| \left( e^{\frac{ix}{3^k}} + 1 + e^{\frac{-ix}{3^k}} \right) = \\
&= \left( e^{\frac{ix}{3^k}} + 1 + e^{\frac{-ix}{3^k}} \right) \frac{1}{3} \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^3| = \\
&= \frac{1}{3} \left( \cos \frac{x}{3^k} + i \sin \frac{x}{3^k} + 1 + \cos \frac{-x}{3^k} + i \sin \frac{-x}{3^k} \right) \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{x}{3^k} \right).
\end{aligned}$$

Що й вимагалось довести. □

**Означення 3.2.** Функції  $v_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , визначені рівністю (3.4.7), називаються  $R_3$ -функціями, вони є трійковими аналогами функцій Радемахера.

**Теорема 3.4.1.** Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та трійкова цифра числа  $t \in [0; 1)$ , а

$$v_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt. \quad (3.4.8)$$

*Доведення.* Враховуючи, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(t)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_k(t)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{3^k} = \frac{1}{2} - t,$$



згідно з лемою 3.4.2 маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt &= \int_0^1 \exp\left(ix \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \\ &= \int_0^1 e^{ix(\frac{1}{2}-t)} dt = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

А за лемою 3.4.1 та 3.5.1

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2 \cos \frac{2x}{3^k}}{3^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt.$$

Звідси і слідує рівність (3.4.8). □

**Теорема 3.4.2.**  *$R_3$ -функції мають властивості:*

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} v_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k > m, \\ \frac{1 - c_k}{3^m}, & \text{якщо } k \leq m. \end{cases} \quad (3.4.9)$$

$$\int_0^1 v_k(x) dx = 0 \quad (3.4.10)$$

$$\int_0^1 v_k(x) v_m dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq m, \\ \frac{2}{3}, & \text{якщо } k = m. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

*Доведення.* Доведемо рівність 3.4.9. Справді, якщо  $k = m$ , то

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} v_k(x) dx = \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_k}^3} (1 - c_k) dx = (1 - c_k) |\Delta_{c_1 \dots c_k}^3| = \frac{1 - c_k}{3^k}.$$

Якщо  $k < m$ , то  $x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3 \subset \Delta_{c_1 \dots c_k}^3$  і  $v_k(x) = 1 - c_k$ .

Отже,

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} v_k(x) dx = \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} (1 - c_k) dx = (1 - c_k) |\Delta_{c_1 \dots c_m}^3| = \frac{1 - c_k}{3^m}.$$

Нехай тепер  $k > m$ . Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}}^3} v_k(x) dx &= \sum_{i=0}^2 \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}^i}^3} (1-i) dx = \\ &= |\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}^0}^3| + 0 - |\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}^2}^3| = 0, \end{aligned}$$

то

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^3} v_k(x) dx = \sum_{\alpha_{m+1}=0}^2 \dots \sum_{\alpha_k=0}^2 \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_k}^3} v_k(x) dx = 0.$$

Рівність (3.4.10) для  $k = 1$  є очевидною. Для  $k > 1$ , враховуючи рівність (3.4.9), матимемо

$$\int_0^1 v_k(x) dx = \sum_{i=0}^2 \int_{x \in \Delta_i^3} v_k(x) dx = 0.$$

При доведенні рівності (3.4.11) розглянемо випадок  $k = m$ , маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_k^2(x) dx &= \sum_{\alpha_1=0}^2 \dots \sum_{\alpha_k=0}^2 \int_{\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}} v_k^2(x) dx = \sum_{\alpha_1 \neq 1}^2 \dots \sum_{\alpha_k \neq 1}^2 \int_{\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}} dx = \\ &= 2 \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Нехай тепер  $k < m$ . Враховуючи (3.4.9), дістаємо

$$\int_{\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}}^3} v_k(x) v_m(x) dx = \int_{\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}^0}} v_m(x) dx + 0 - \int_{\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}^2}} v_m dx = 0.$$

Тоді

$$\int_0^1 v_k(x) v_m(x) dx = \sum_{a_1=0}^2 \dots \sum_{a_{k-1}=0}^2 \int_{\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}}} v_k(x) v_m(x) dx = 0.$$

□

### 3.5. Узагальнення на основі $Q_3$ -зображення чисел

Нехай  $Q_3 = (q_0, q_1, q_2)$  – заданий впорядкований набір додатних чисел, сума яких рівна 1,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = q_0$ ,  $\beta_2 = q_0 + q_1$ ,  $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$ .

Якщо  $q_0 = q_2$ , то  $Q_3$  – зображення називається симетричним. Очевидно, що класичне трійкове зображення є симетричним  $Q_3$  – зображенням.

**Лема 3.5.1.** *Якщо  $\alpha_k(t)$  –  $k$ -та цифра симетричного  $Q_3$  – зображення числа  $t \in [0; 1)$ , тобто*

$$t = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k(t)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(t)} \right) = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k(t)} q_0^{N_0(t,k)} q_1^{N_1(t,k)} q_2^{N_2(t,k)} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_3},$$

$$u_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \quad (3.5.12)$$

то для будь-якого дійсного числа  $x$  має місце рівність

$$\int_0^1 \exp(ixAu_k(t)) dt = q_1 + 2q_0 \cos Ax.$$

*Доведення.* Відомо, що

$$[0; 1] = \bigcup_{c_1=0}^2 \bigcup_{c_2=0}^2 \dots \bigcup_{c_{k-1}=0}^2 [\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 0}^{Q_3} \cup \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 1}^{Q_3} \cup \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 2}^{Q_3}],$$

причому

$$\nabla_{a_1 \dots a_{k-1} a_k}^3 \cap \nabla_{b_1 \dots b_{k-1} b_k}^3 = \begin{cases} \nabla_{a_1 \dots a_{k-1} a_k}^{Q_3}, & \text{якщо } a_j = b_j, j = \overline{1, k}; \\ \emptyset, & \text{якщо існує } a_j \neq b_j, \end{cases}$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} j}^{Q_3}| = q_j |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c_k}^{Q_3}|, \quad j \in A_3,$$

а отже,  $\sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| = 1$ . Тому згідно з адитивною властивістю інтеграла

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \exp(ixAu_k(t)) dt = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \left( \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3} 0} e^{ixA \cdot 1} dx + \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}} e^{ixA \cdot 0} dx + \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}} e^{ixA \cdot (-1)} dx \right) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \left( e^{ixA} |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| + |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| + e^{-ixA} |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| \right) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \left( e^{ixA} q_0 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| + q_1 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| + e^{-ixA} q_2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| \right) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| (q_0 e^{ixA} + q_1 + q_2 e^{-ixA}) = \\
&= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}| [q_0 (e^{ixA} + e^{-ixA}) + q_1] = \\
&= [2q_0 \cos Ax + q_1] \cdot 1 = q_1 + 2q_0 \cos Ax.
\end{aligned}$$

□

**Зауваження 3.5.1.** Функції  $u_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , визначені рівністю (3.5.12), називаються  $R_3^*$ -функціями, вони є узагальненням  $R_3$ -функцій на основі симетричного  $Q_3$ -зображення чисел.

**Теорема 3.5.1.** Для  $R_3^*$ -функцій мають місце рівності:

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}} u_k(x) dx = 0, \quad (3.5.13)$$

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} u_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k > m, \\ (1 - c_k) \prod_{j=1}^m q_{c_j} & \text{при } k \leq m, \end{cases} \quad (3.5.14)$$

$$\int_0^1 u_k(x) dx = 0, \quad (3.5.15)$$

$$\int_0^1 u_k(x)u_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq m, \\ 2q_0, & \text{якщо } k = m. \end{cases} \quad (3.5.16)$$

*Доведення.* Для першої рівності маємо:

$$\begin{aligned} \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_3}} u_k(x)dx &= \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}0}^{Q_3}} u_k(x)dx + \\ &+ \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}1}^{Q_3}} u_k(x)dx + \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}2}^{Q_3}} u_k(x)dx = \\ &= |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}0}^{Q_3}| + 0 - |\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}2}^{Q_3}| = 0. \end{aligned}$$

Доведемо рівність (3.5.15). Якщо  $k = m$ , то

$$\int_{\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} v_k(x)dx = \int_{\Delta_{c_1 \dots c_k}^{Q_3}} (1 - c_k)dx = (1 - c_k)|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{Q_3}| = (1 - c_k) \prod_{j=1}^k q_{c_j}.$$

Якщо  $k < m$ , то  $x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3} \subset \Delta_{c_1 \dots c_k}^{Q_3}$  і  $v_k(x) = 1 - c_k$ .

Отже,

$$\int_{\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} v_k(x)dx = \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} (1 - c_k)dx = (1 - c_k)|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}| = (1 - c_k) \prod_{j=1}^m q_{c_j}.$$

Нехай тепер  $k > m$ . Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}}^{Q_3}} v_k(x)dx &= \sum_{i=0}^2 \int_{\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1} i}^{Q_3}} (1 - i)dx = \\ &= |\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}0}^{Q_3}| + 0 - |\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{k-1}2}^{Q_3}| = 0, \end{aligned}$$

то

$$\int_{\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}} v_k(x)dx = \sum_{\alpha_{m+1}=0}^2 \dots \sum_{\alpha_k=0}^2 \int_{\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_k}^{Q_3}} v_k(x)dx = 0.$$

Для третьої рівності —

$$\int_0^1 u_k(x) dx = \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \int_{\Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}} u_k(x) dx.$$

Тоді згідно з рівністю (3.5.13) маємо

$$\int_0^1 u_k(x) dx = 0.$$

Якщо  $k = m$ , то

$$u_k(x)u_m(x) = u_k^2(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(x) \in \{0, 2\}, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(x) = 1, \end{cases}$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_k(x)u_m(x) dx &= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_k=0}^2 \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}} u_k^2(x) dx = \\ &= \sum_{c_1 \neq 1} \dots \sum_{c_k \neq 1} \left( \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 0}} dx + \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} 2}} dx \right) = \\ &= 1 - q_1 = 2q_0. \end{aligned}$$

Якщо ж  $k \neq m$ , причому  $k > m$ , то

$$u_k(x)u_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k = 0 = \alpha_m \text{ або } \alpha_k = 2 = \alpha_m, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k = 1 \text{ або } \alpha_m = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k = 0 \text{ і } \alpha_m = 2 \text{ або } \alpha_k = 2 \text{ і } \alpha_m = 0. \end{cases}$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_k(x)u_m(x) dx &= \\ &= \sum_{c_1=0}^2 \dots \sum_{c_{n-1}=0}^2 \sum_{c_m \neq 1} \sum_{c_{m+1}=0}^2 \dots \sum_{c_{k-1}=0}^2 \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}} u_k(x)u_m(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}}^1 u_k(x) u_m(x) dx = \\ & = \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}^0}}^1 u_k(x) u_m(x) dx + \int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}^2}}^1 u_k(x) u_m(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Рівність (3.5.16) доведено. □

### Висновки до розділу 3

У даному розділі ми розглянули узагальнення функцій Радемахера та Уолша, які ґрунтуються на  $Q_2$ -зображенні дійсних чисел, що є узагальненням класичного двійкового зображення чисел  $x \in [0; 1]$ . Описали інтегральні властивості цих функцій, зокрема довели, що узагальнені функції Радемахера утворюють ортогональну систему функцій. Для кожної узагальненої функції Уолша знайшли її аналітичний вираз.

Запропоновано трійковий аналог функцій Радемахера, що ґрунтується на класичному трійковому зображенні чисел, а також його узагальнення на основі  $Q_3$ -зображення дійсних чисел відрізка  $[0; 1]$ , яке є трисимвольним самоподібним кодуванням чисел з нульовою надлишковістю. Доведено кілька співвідношень, що стосуються цих об'єктів.

Результати цього розділу опубліковані у роботі [1,2] і доповідались на конференціях [8,9,10,17]

## РОЗДІЛ 4

### УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИБІН-ФУНКЦІЇ

У даному розділі використовуючи несамоподібне  $s$ -символьне зображення дійсних чисел одиничного відрізка ми конструємо неперервну ніде не монотонну функцію і вивчаємо тополого-метричні властивості суттєвих для неї числових підмножин області визначення. Обґрунтовується коректність означення функції  $f$ , її неперервність, ніде не монотонність, варіаційні властивості. Обговорюється питання масивності рівнів функції і симетрії та автомодельності її графіка. Систематизуються задачі фрактального аналізу неперервних ніде не монотонних функцій.

#### 4.1. $Q_s^*$ – зображення та його властивості

Нехай  $1 < s$  – фіксоване натуральне число,  $A_s \equiv \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$  – алфавіт,  $L \equiv A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$  – простір послідовностей елементів алфавіту,

$$Q_s^* = \| q_{ik} \| = \begin{pmatrix} q_{01} & q_{02} & \dots & q_{0k} & \dots \\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{s-1,1} & q_{s-1,2} & \dots & q_{s-1,k} & \dots \end{pmatrix}$$

— задана нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, яка має такі властивості:

1.  $q_{ik} > 0$ ,  $q_{0k} + q_{1k} + \dots + q_{s-1,k} = 1$ ,  $\forall k \in N$  (стохастичність);
2.  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}, \dots, q_{s-1,k}\} = 0$  (неперервність).

Покладемо  $\beta_{0k} \equiv 0$ ,  $\beta_{ik} \equiv q_{0k} + q_{1k} + \dots + q_{i-1,k} = \beta_{i-1,k} + q_{i-1,k}$ ,  $i = \overline{0, s}$ .

Відома теорема [66, 83] стверджує, що для будь-якого  $x \in [0; 1]$  існує



така послідовність  $(\alpha_k) \in L$ , що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s^*}. \quad (4.1.1)$$

Останній символічний (скорочений) запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s^*}$  називається  $Q_s^*$ -зображенням числа  $x$  і йому відповідного ряду (4.1.1) [66]. При цьому  $\alpha_k = \alpha_k(x)$  називається  $k$ -тою цифрою даного зображення числа  $x$ .

Зауважимо, що однією з задач, яка приводить до  $Q_s^*$ -зображення, є задача про вираз функції розподілу випадкової величини  $\xi$ , цифри  $\xi_n$   $s$ -кового зображення  $\Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^s$  якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень  $0, 1, 2, \dots, s-1$  з ймовірностями  $q_{0n}, q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{s-1, n}$  відповідно. Як окремий об'єкт розгляду  $Q_s^*$ -зображення введено в роботі [82].

Якщо всі стовпці матриці  $\| q_{ik} \|$  однакові, тобто  $q_{ik} = q_i$  для будь-якого  $k \in N$ , то  $Q_s^*$ -зображення називається  $Q_s$ -зображенням. Якщо крім цього  $q_i = \frac{1}{s}$  для всіх  $i \in A_s$ , то  $Q_s$ -зображення числа називається  $s$ -ковим (для  $s = 10$  — десятковим, для  $s = 2$  — двійковим). Геометрія цих зображень (геометричний зміст цифр, властивості циліндрів, метричні відношення тощо) є добре вивченою [66]. Відомо, що числа зліченної підмножини відрізка  $[0; 1]$  мають два різні  $Q_s^*$ -зображення, їх називають  $Q_s^*$ -раціональними (це числа з зображеннями:  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c_{m+1}(0)}^{Q_s^*} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [c_{m+1}-1](s-2)}^{Q_s^*}$ ), решта чисел мають єдине  $Q_s^*$ -зображення і називаються  $Q_s^*$ -іраціональними.

Множина всіх чисел  $x \in [0; 1]$ , які мають  $Q_s^*$ -зображення з першими цифрами  $c_1, c_2, \dots, c_m$  відповідно, називається *циліндром рангу  $m$*  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  і позначається через  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}$ . Очевидною є рівність

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{Q_s^*} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{Q_s^*} \cup \dots \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [s-1]}^{Q_s^*}.$$

Циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}$  є відрізком з кінцями  $A$  і  $B$ , де

$$A = \beta_{c_1 1} + \sum_{k=1}^m \left( \beta_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j} \right), \quad B = A + \prod_{j=1}^m q_{c_j j}.$$

А тому  $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}| = \prod_{j=1}^m q_{c_j j}$  і  $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_s^*}| = q_{i, m+1} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}|$ . Остання рівність називається *основним метричним відношенням*. Вона відіграє важливу роль у метричній та ергодичній теорії дійсних чисел у даному зображенні.

Два циліндри одного рангу співпадають або не перекриваються. Більше того,  $\max \Delta_{c_1 \dots c_m i}^{Q_s^*} = \min \Delta_{c_1 \dots c_m [i+1]}^{Q_s^*}$

Для будь-якої послідовності  $(c_n) \in L$  виконується рівність

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{Q_s^*} \equiv x \in [0; 1].$$

Зауважимо, що коли  $s = 2$ , то  $q_{1k} = 1 - q_{0k}$ , і це відображає специфіку випадку  $s = 2$  і принципову відмінність його від інших. Лише в цьому випадку цифри є не тільки символами (значками) зображення числа, а й числом, оскільки  $\beta_{\alpha_k k} = \alpha_k q_{[1-\alpha_k]k}$ . Такі зображення заслуговують на окрему увагу і ми позначаємо їх через  $G_2^*$ .

## 4.2. Лівосторонній оператор зсуву цифр зображення

*Лівосторонній оператор зсуву (ЛОЗ) цифр  $Q_s^*$  – зображення чисел* (4.1.1) *означається рівністю*

$$\omega(x) = \omega(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s^*}.$$

Зрозуміло, що лівосторонній оператор зсуву є коректно означеною функцією на проміжку  $\langle 0; 1 \rangle$  лише після домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень  $Q_s^*$ -раціональних чисел, а саме: те зображення, що має період  $(0)$ .

Нагадаємо, що зображення (кодування) називається самоподібним, якщо ЛОЗ є лінійною функцією на кожному з циліндрів 1-го рангу

**Лема 4.2.1.** *Якщо  $Q_s^*$ -зображення є  $Q$ -зображенням, то функція  $\omega$  аналітично представляється  $\omega(x) = \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\beta_{\alpha_1(x)}}{q_{\alpha_1(x)}}$  і є лінійною функцією*

на кожному з циліндрів 1-го рангу, а саме:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{q_0}x, & \text{якщо } \alpha_1(x) \in \Delta_0^{Q_s}, \\ \frac{1}{q_1}x - \frac{q_0}{q_1}, & \text{якщо } \alpha_1(x) \in \Delta_1^{Q_s}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{q_{s-1}}x - \frac{\beta_{s-1}}{q_{s-1}}, & \text{якщо } \alpha_1(x) \in \Delta_{s-1}^{Q_s}. \end{cases}$$

Дане твердження є наслідком наступних рівностей

$$\begin{aligned} x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_s} &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \left( \beta_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \right) = \\ &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \omega(x). \end{aligned}$$

Лему доведено.

Якщо покласти  $\omega^n(x) \equiv \omega(\omega^{n-1}(x))$ , то

$$\omega^n(x) = \omega^n(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_s}) = \frac{x}{P} - \frac{b}{P},$$

де  $P = \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}$ ,  $b = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^n \left( \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right)$ .

Нагадаємо, що оператор лівостороннього зсуву цифр для різних систем зображення чисел відіграє важливу роль в ергодичній теорії метричній, ймовінісній теоріях чисел. Так задача про міру Лебега множини

$$E_n(x) = \{t : \omega.(t) < x\}$$

і її асимптотичну поведінку була фактично першою задачею метричної теорії елементарних ланцюгових дробів. Вона була сформульована Гаусом і розв'язана Кульмінім Р.О. (сьогодні носить назву задача Гауса–Кузьміна) [86].

Для ланцюгових дробів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}$$

**Теорема 4.2.1.** Якщо  $Q_s^*$  – зображення є  $Q_s$  – зображенням, то інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву цифр зображення є міра, що відповідає розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими  $Q_s$  – цифрами.

**Доведення.** Розглянемо випадкову величину  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{Q_s}$ , де  $(\xi_n)$  – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень  $0, 1, \dots, s-1$  з ймовірностями  $p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$  відповідно.

Оскільки будь-яку борелівську підмножину відрізка  $[0;1]$  можна як завгодно точно наближати  $Q_s$ -циліндрами (а саме: їх об'єднанням), то для доведення теореми досить показати, що

$$P(\omega^{-1}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s})) = P(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}).$$

Але

$$\begin{aligned} P(\omega^{-1}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s})) &= P\left(\bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} P(\Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}) = \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} \left(p_i \prod_{j=1}^m p_{\alpha_j}\right) = (p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1}) \prod_{j=1}^m p_{\alpha_j} = \\ &= \prod_{j=1}^m p_{\alpha_j} = P(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}), \end{aligned}$$

а це й треба було довести.

**Зауваження 4.2.1.** Для  $Q_s^*$ -зображення числа  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_s^*}$  введемо позначення

$$P_m(x) \equiv \prod_{j=1}^m q_{\alpha_j(x)j}, \quad (4.2.2)$$

$$A_m(x) = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^m \left( \beta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)j} \right) = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^m (\beta_{\alpha_k(x)k} P_{k-1}(x)). \quad (4.2.3)$$

Тоді для будь-якого  $m \in \mathbb{N}$  виконується рівність

$$x = A_m(x) + P_m(x) \cdot \omega^m(x), \text{ де } \omega^m(x) = \omega(\omega^{m-1}(x)).$$

Аналогічно для  $G_2^*$  – ображення числа  $y$  маємо  $y = A_m(y) + P_m(y) \cdot \omega^m(y)$ .

Правосторонній оператор зсуву цифр  $Q_s^*$  – зображення чисел з параметром  $i$  називається функція, означена рівністю

$$\delta_i(x) = \delta_i(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s^*}.$$

При  $Q_s^* = Q_s$  функція  $\delta_i(x)$  має аналітичний вираз

$$\delta_i(x) = \beta_i + q_i x.$$

Справді,

$$\delta_i(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \beta_i + q_i \left( \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \right) = \beta_i + q_i x.$$

Очевидними є рівності:  $\omega(\delta_i(x)) = x$  і  $\delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x$ .

Зауважимо, що рівняння  $\delta_i(x) = \omega(x)$  має  $s$  розв'язків:  $x_j^{(i)} = \Delta_{(ji)}^{Q_s^*}$ , де  $i \in A_s$ ,  $j \in A_s$ , тому функції

$$f_1(x) = \begin{cases} \omega(x), & \text{якщо } x \leq x_0^{(s-1)}, \\ \delta_{s-1}(x), & \text{якщо } x \geq x_0^{(s-1)}, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & \text{якщо } x \leq x_{s-1}^0, \\ \omega(x), & \text{якщо } x \geq x_{s-1}^0, \end{cases}$$

є зростаючими перетвореннями піввідрізка  $[0; 1)$ , які зберігають хвости  $Q_s^*$ – зображення чисел.

### 4.3. Означення функції

Нехай маємо два  $Q_s^*$ -зображення чисел, перше  $s$ -символьне ( $s \geq 3$ ), а друге – двосимвольне, а саме:  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s^*}$  — зображення і  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\dots}^{G_2^*}$  — зображення чисел відрізка  $[0; 1]$ , які визначені нескінченними стохастичними матрицями  $\| q_{ik} \|$  і  $\| g_{ik} \|$  відповідно, причому остання має два рядки, а перша —  $s > 2$ .

Розглядається функція  $f$ , яка числу  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s^*}$  ставить у відповідність число

$$y = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n}^{G_2^*} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\gamma_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j} \right),$$

де  $\delta_{0k} = 0$ ,  $\delta_{1k} = g_{0k}$ ,  $\delta_{ik} = g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{i-1,k} = \delta_{i-1,k} + g_{i-1,k}$ ,  $i = \overline{0, s}$ ,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \quad n \in N. \quad (4.3.4)$$

Коректність означення функції є наслідком того, що значення її виразу для двох різних зображень  $Q_s^*$  – раціональної точки рівні. А це власне є необхідною умовою її неперервності, яку доведемо нижче.

Очевидно, що мають місце рівності:  $f(0) = f(\Delta_{(0)}^{Q_s^*}) = 0$ ,  $f(\Delta_{(i)}^{Q_s^*}) = \Delta_{(1)}^{G_2^*} = 1$  при  $i \neq 0$ ,  $f(\Delta_{(10)}^{Q_s^*}) = \Delta_{(10)}^{G_2^*}$ ,  $f(\Delta_{(01)}^{Q_s^*}) = \Delta_{(01)}^{G_2^*}$ .

Як виразити цифру  $\gamma_m(y)$   $G_2^*$ -зображення значення функції  $f(x)$ , знаючи набір цифр аргумента  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x)$ ?

Введемо лічильник  $\sigma_m(x) = \sigma_m(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s^*})$ , який означає зміни цифр зображення. Означає кількість змін цифр у  $Q_s^*$ -зображенні числа  $x$  до  $m$ -ного місця включно, тобто  $\sigma_m = \#\{i : \alpha_i \neq \alpha_{i+1}, i = \overline{1, m-1}\}$ . Згідно з означенням функції  $f$  виконується рівність

$$\sigma_m(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s^*}) = \sigma_m(f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s^*})) = \sigma_m(\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}).$$

Тоді

$$\gamma_m(y) = \begin{cases} 1, & \sigma_m - \text{непарне і } \gamma_1 = 0 \text{ або } \sigma_m - \text{парне і } \gamma_1 \neq 0, \\ 0, & \sigma_m - \text{парне і } \gamma_1 = 0 \text{ або } \sigma_m - \text{непарне і } \gamma_1 \neq 0. \end{cases}$$

Вповні очевидним є наступне твердження.

**Лема 4.3.1).** *Образом  $Q_s^*$ -циліндра  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_s^*}$  при відображенні  $f \in G_2^*$ -циліндр  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}$ , де  $\gamma_i$  знаходяться за формулами (4.3.4);*

2)

$$\max_{x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}} = \begin{cases} f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}(c_m)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1}(1)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 1, \\ f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(i)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1}0(1)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 0, \end{cases}$$

де  $i \neq c_m$  (в останньому випадку максимумів  $s - 2$ );

3)

$$\min_{x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}} = \begin{cases} f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}(c_m)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1}(0)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 0, \\ f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(i)}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1}1(0)}^{G_2^*}, & \text{якщо } \gamma_m(y) = 1, \end{cases}$$

де  $i \neq c_m$  (в останньому випадку мінімумів  $s - 2$ ).

**Наслідок 4.3.1.** Коливання  $\psi_f$  функції  $f$  (різниця максимуму і мінімуму) на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*}$  дорівнює довжині циліндра  $\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*} = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*})$ , а отже,

$$\psi_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s^*}) = |\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*}| = \prod_{j=1}^m g_{\gamma_j j}.$$

**Лема 4.3.2.** Кількість  $k$  прообразів циліндра  $\Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{G_2^*}$  обчислюється за формулою

$$k = k(\Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{G_2^*}) = \begin{cases} (s - 1)^{\sigma_m}, & \text{якщо } \gamma_1 = 0, \\ (s - 1)^{1 + \sigma_m}, & \text{якщо } \gamma_1 \neq 0, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

де  $\sigma_m$  - це кількість таких  $j$ , що  $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, m - 1}$ .

*Доведення.* Скористаємося методом математичної індукції. Очевидно, що прообразом циліндра  $\Delta_0^{G_2^*}$  є циліндр  $\Delta_0^{Q_2^*}$ , а циліндра  $\Delta_1^{G_2^*}$  - циліндри  $\Delta_i^{Q_s^*}$ , де  $i = \overline{1, s - 1}$ . Циліндри другого рангу мають такі прообрази

$$\begin{aligned} \Delta_{00}^{G_2^*} &= \Delta_{00}^{Q_2^*}, \\ \Delta_{01}^{G_2^*} &= \Delta_{0i}^{Q_2^*}, i = \overline{1, s - 1}, \\ \Delta_{10}^{G_2^*} &= \Delta_{ij}^{Q_2^*}, i = \overline{1, s - 1}, j \neq i, \\ \Delta_{11}^{G_2^*} &= \Delta_{ii}^{Q_2^*}, i = \overline{1, s - 1}. \end{aligned}$$

У всіх розглянутих випадках твердження очевидно виконується. Припустимо, що воно виконується для  $m = n$  і розглянемо випадок  $m = n + 1$ , а саме: циліндр  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}$ . Оскільки циліндр  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{Q_s^*}$  має  $k$  прообразів, де число  $k$  обчислюється за формулою (4.3.5), то при  $\gamma_{m+1} = \gamma_m$  прообразом циліндра  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}$  є кожен циліндр вигляду  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m c_m}^{Q_s^*}$ , де  $f(\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}$ , тобто  $k_{m+1} = k_m$ . Іншими словами: при  $\gamma_{m+1} = \gamma_m$  кожен прообраз циліндра  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}$  породжує єдиний прообраз циліндра  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}$ , а саме:  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_s^*}$ , де  $f(\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}$ , тому  $k(\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}) = k(\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*})$ .

Якщо  $\gamma_{m+1} \neq \gamma_m$  і  $f(\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}$ , то

$$f(\Delta_{c_1c_2\dots c_m i}^{Q_s^*}) = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}, \quad \text{де } i \neq c_m,$$

тобто

$$k(\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\gamma_{m+1}}^{G_2^*}) = k(\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m}^{G_2^*}) \cdot (s - 1),$$

тобто має місце рівність (4.3.5). Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 4.3.2.** Найбільшу кількість прообразів серед циліндрів  $m$ -го рангу має  $G_2^*$ -циліндр  $\Delta_{1010\dots c}^{G_2^*}$ , де  $c = 0$ , якщо  $m$  - парне, і  $c = 1$ , якщо  $m$  - непарне.

#### 4.4. Неперервність функції

**Теорема 4.4.1.** Функція  $f$ , означена рівностями (4.1.1) – (4.3.4), є неперервною в кожній точці відрізка  $[0;1]$  функцією.

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s^*}$  –  $Q_s^*$ -іраціональна точка відрізка  $[0;1]$ . Тоді для довільно вибраного  $x \neq x_0$  існує число  $m \in \mathbb{N}$  таке, що  $\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0)$ , але  $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$  при  $i \leq m$ , причому  $x \rightarrow x_0$  тоді і тільки тоді, коли  $m \rightarrow \infty$ . Оцінимо різницю

$$|f(x) - f(x_0)| = \left( \prod_{j=1}^m g_{\gamma_j j} \right) |\omega^m(x) - \omega^m(x_0)| \leq \prod_{j=1}^m g_{\gamma_j j} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Отже, функція є неперервною в точці  $x_0$  згідно з означенням.



Якщо  $x_0 \in Q_s^*$ -раціональною точкою, тобто має два різні  $Q_s^*$ -зображення, тобто

$$x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^{Q_s^*}(0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k - 1]}^{Q_s^*}(s-1),$$

то досить повторити попередні міркування для двох різних випадків, коли  $x \rightarrow x_0 + 0$  використовуючи перше зображення і  $x \rightarrow x_0 - 0$  використовуючи друге зображення. В обох випадках  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ , що рівносильно неперервності функції в точці  $x_0$  згідно з означенням.  $\square$

#### 4.5. Ніде не монотонність функції

**Теорема 4.5.1.** *Функція, визначена рівностями (4.1.1) – (4.3.4), є ніде не монотонною.*

*Доведення.* Досить показати, що для довільного циліндра будь-якого рангу (нехай  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_s^*}$ ) знайдеться три такі точки  $x_1, x_2, x_3 \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{G_s^*}$ , що

- 1)  $x_1 < x_2 < x_3$ ;
- 2)  $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$ , де  $y_i = f(x_i), i = 1, 2, 3$ .

Вкажемо такі точки, а саме: розглянемо

$$x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{Q_s^*}(0), \quad x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{Q_s^*}(1), \quad x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{Q_s^*}(s-1).$$

Очевидно, що  $f(x_1) = f(x_3)$ , оскільки  $A_{m+1}(y_1) = A_{m+1}(y_3)$ ,  $P_{m+1}(y_1) = P_{m+1}(y_2)$  і  $\omega^m(y_1) = \omega^m(y_3)$ , але  $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ , оскільки при  $\gamma_{m+1}(y_1) = b$ , маємо  $y_1 = y_3 = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{G_2^*}(b)$ , а  $y_2 = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{G_2^*}(b(1-b))$ . Отже,  $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$ , що свідчить про немонотонність функції на циліндрі.

Оскільки для довільного інтервалу відрізка  $[0;1]$  легко вказати циліндр, який повністю йому належить, то функція немає жодного як завгодно малого проміжку монотонності, тобто є ніде не монотонною.  $\square$

#### 4.6. Варіаційні властивості функції

**Теорема 4.6.1.** *При довільних матрицях  $Q_s^* = \| q_{ik} \|$  і  $G_2^* = \| g_{jk} \|$  функція  $y = f(x)$ , означена рівностями (4.1.1)–(4.3.4), є неперервною*

функцією необмеженої варіації.

*Доведення.* Неперервність функції  $f$  встановлена вище. Оскільки коливання (тобто різниця максимумів і мінімумів) функції  $f(x)$  на циліндрі дорівнює довжині його образу, то очевидно, що варіація  $V(f)$  функції  $f$  є більшою, ніж сумарна довжина  $W_k$  образів усіх  $Q_s^*$ -циліндрів рангу  $k$  для будь-якого  $k \in N$ , тобто

$$V(f) > W_k = \sum_{\alpha_1=0}^{s-1} \sum_{\alpha_2=0}^{s-1} \dots \sum_{\alpha_k=0}^{s-1} |f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_s^*})|.$$

Оскільки існує лише один  $G_2^*$ -циліндр  $k$ -го рангу, а саме:  $\Delta_{0\dots 0}^{G_2^*}$ , що є образом єдиного  $Q_s^*$ -циліндра рангу  $k$ , а саме:  $\Delta_{0\dots 0}^{Q_s^*}$ , то

$$W_k > 2 - |f(\Delta_{0\dots 0}^{Q_s^*})| = 2 - \prod_{i=1}^k g_{0i} \equiv V_1.$$

Але послідовність

$$u_k = \prod_{i=1}^k g_{0i}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

є строго спадною і нескінченно малою, оскільки

- 1)  $0 < g_{0i} < 1$  для довільного  $i \in N$ ;
- 2) виконується рівність

$$\prod_{i=1}^{\infty} \max\{g_{0i}, g_{1i}\} = 0.$$

Тому існує  $k_1 \in N$  таке, що

$$2 - \prod_{i=1}^{k_1} g_{0i} \geq 1,5,$$

це буде тоді, коли  $\prod_{i=1}^{k_1} g_{0i} < 0,5$ .

Проведені міркування можна детальніше проілюструвати на циліндрах 1-го, 2-го та 3-го рангу. Маємо:

$$W_1 = g_{01} + (s-1)g_{11} = 1 + (s-2)g_{11} = 2 - g_{01} + (s-3)g_{11};$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= g_{01}(g_{02} + (s-1)g_{12}) + g_{11}(g_{12}(s-1) + g_{02}(s-1)^2) = \\
&= g_{01}(1 + (s-2)g_{12}) + g_{11}(s-1)(1 + (s-2)g_{02}) = \\
&= g_{01} + (s-2)g_{01}g_{12} + g_{11}(s-1) + g_{11}(s-1)(s-2)g_{02} = \\
&= 1 + (s-2)g_{01}g_{12} + g_{11}(s-2) + g_{11}(s-1)(s-2)g_{02};
\end{aligned}$$

$$W_3 = 2 - g_{01}g_{02}g_{03} + 2g_{01}g_{12}g_{03} + 2g_{11}g_{02}g_{03} + 6g_{11}g_{02}g_{13} + 2g_{11}g_{12}g_{03}.$$

Остання рівність наведена для  $s = 3$  (найбільш цікавому випадку).

Розглядаючи довільно вибраний  $Q_s^*$ -циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{k_1}}^{Q_s^*}$  і його образ  $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_{k_1}}^{G_s^*}$ , скористаємось тими ж міркуваннями. Очевидно, що існує число  $k_2 \in N$  таке, що

$$\sum_{\alpha_{k_1+1}=0}^{s-1} \sum_{\alpha_{k_1+2}=0}^{s-1} \dots \sum_{\alpha_{k_1+k_2}=0}^{s-1} |f(\Delta_{c_1 \dots c_{k_1} \alpha_{k_1+1} \dots \alpha_{k_1+k_2}}^{Q_s^*})| \geq \frac{3}{2} |f(\Delta_{d_1 d_2 \dots d_{k_1}}^{G_s^*})|$$

з тієї ж причини (при цьому зауважимо, що може мати єдиний прообраз лише один  $G_2^*$  - циліндр). Тоді

$$V(f) > W_{k_1+k_2} \geq \left(\frac{3}{2}\right) W_{k_1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Аналогічні міркування можна провести стосовно циліндрів  $(k_1 + k_2)$ -го рангу і отримати

$$V(f) > W_{k_1+k_2+k_3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

і т.д. Отже, при довільному  $n \in N$  маємо

$$V(f) > \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

що рівносильно  $V(f) = \infty$ . Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 4.6.1.** Аналогічними міркуваннями можна довести, що функція  $f$  має необмежену варіацію на будь-якому інтервалі області визначення, а це є необхідною умовою ніді не диференційовності.

## Висновки до розділу 4

Даний розділ був присвячений застосуванню тополого-метричної теорії поліосновного несамоподібного  $Q_s^*$ -зображення дійсних чисел одинично-

го відрізка для конструювання неперервних локально складних функцій з фрактальними властивостями, дослідженню їх структурних, варіаційних, автономних властивостей. Основними результатами цього розділу, які виносяться на захист, є теореми: 4.2.1, 4.4.1, 4.5.1, 4.6.1, лема 4.3.2 та наслідок з неї.

Ми залишили без відповіді питання про інтегрально-диференціальні властивості функції, а також питання про розподіл її значень при умові, що аргумент є випадковою величиною з рівномірним розподілом. Напевно такі задачі цікаві для фахівців в галузі математичного аналізу, теорії функцій та теорії ймовірностей.

Результати цього розділу опубліковані у роботі [4] і представлялись на конференціях [11,17].

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел — це добрий засіб для розвитку теорії чисел (метричної й ймовірнісної), опису і дослідження множин, функцій, мір із локально складними властивостями тополого-метричного характеру, для вдосконалення інструментарію теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу). Так понад три десятиріччя двосимвольне  $Q_2$ -зображення чисел, яке ґрунтується на їхній розкладах у ряди за двома додатними основами, різнопланово використовувалось для розвитку теорії дійсних чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, теорії функцій, теорії фракталів. Ми його використали для узагальнення функцій і рядів Радемахера й Уолша зі збереженням їхніх основних властивостей і маємо надію на їхнє подальше практичне застосування.

Нове двосимвольне  $G_2$ -зображення чисел, яке ми ввели, використовує дві основи різного знаку. Воно є аналогом  $Q_2$ -зображення чисел, має схожу метричну та ймовірнісну складові теорії, що є наслідком збігу основних метричних відношень, але інші топологічні властивості (позиційну складову геометрії зображення). Це зображення має принципові відмінності не лише з  $Q_2$ -зображенням, а й із іншими раніше вивченими двосимвольними зображеннями. Однією з таких відмінностей є те, що оператор ліво-стороннього зсуву цифр неперервний, а це важливо для ергодичної теорії, яка ґрунтується на такому зображенні, а також для конструктивної теорії ніде не монотонних і недиференційовних функцій. Іншою особливістю  $G_2$ -зображення є те, що інверсор цифр — це ніде не монотонна всюди розривна функція, а числа, що мають два зображення ( $G_2$ -бінарні числа), належать одній хвостовій множині. Зрештою, група неперервних перетворень відрізка, що зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел, має нетривіальну підгрупу зростаючих функцій.

Для запропонованого у роботі узагальнення неперервних недиференційованих функцій Буша, Вундерліха, Трибін-функції, яке ґрунтується на  $Q_s^*$ -зображенні чисел відрізка  $[0; 1]$ , доведено неперервність, ніде не монотонність, необмеженість варіації й описано властивості рівнів при будь-якому наборі параметрів (а їх — континуальна кількість). При цьому залишилися поза увагою диференціальні, інтегральні і фрактальні властивості функції. А вони є об'єктом самостійного наукового інтересу, який ми плануємо у майбутньому розвивати.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Альбеверіо С., Кулиба Ю. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Про сингулярність та спектральну структуру розподілів випадкових ланцюгових дробів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. Вип. 13 (1). С. 31-44.
- [2] Арнольд В. И. Цепные дроби. Москва: МЦНМО, 2001. (Б-ка «Математическое просвещение». Вып. 14). 40 с.
- [3] Барановський О. М. Використання рядів Остроградського 1-го виду для аналітичного задання множин, функцій, випадкових величин. *Наукові записки: зб. наукових статей НПУ ім. М. П. Драгоманова*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. № 40. С. 37–40.
- [4] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. Київ: Наукова думка, 2013. 268 с.
- [5] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1, Фіз.-мат. науки*. 2011. Вип. 12. С. 130–138.
- [6] Безбородов В. К. Медіантне зображення дійсних чисел. *Студентські фізико-математичні етюди*, 2008. № 7. С. 73-81.
- [7] Безикович А. С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. *Математический сборник*. 1924. Т. 31, №. 4. С. 529-556.
- [8] Беспалов М. С., Скляренко В. А. Функции Уолша и их приложения.

*Владим. гос. ун-т. имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.* Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. 35 с.

- [9] Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. Москва: Мир, 1969. 238 с.
- [10] Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. Киев: Наукова думка, 1986. 176 с.
- [11] Болотов В. Н. Переходное фрактальное излучение. *Журнал технической физики.* 2000. Т. 70, вып. 12. С. 98-101.
- [12] Боревич Э. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е, дополн. изд. Москва: Наука, 1985. 504 с.
- [13] Бородін О. І. Теорія чисел. Київ: Вища школа, 1970. 275 с.
- [14] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 180 с.
- [15] Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая.* 1959. № 23. С. 809–814.
- [16] Голубов В. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. Москва: Наука, 1987. 344 с.
- [17] Гончаренко Я.В. Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. 4. С. 216–232.
- [18] Гончаренко Я. В., Лисенко І.М. Геометрія нескінченно-символьного  $q_0^\infty$ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 100-118.
- [19] Гончаренко Я. В., Микитюк І. М. Про фрактальну оцінку кількості циліндричних двійкових зображень числа з допомогою одного спе-



- ціального ряду. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1, Фіз.-мат. науки. 2006. Вип. 7. С. 230–244.
- [20] Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальні властивості множин точок недиференційованості абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу. *Теорія ймовір. та матем. статист.* 2001. № 65. С. 25-32.
- [21] Грубер П.М., Леккеркеркер К. Г. Геометрия чисел. Москва: Наука, 2008. 727 с.
- [22] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. Москва: Мир, 1985. 416 с.
- [23] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове  $A_2$ -зображення дійсних чисел та його геометрія *Укр. мат. журнал.* 2009. Т.61, №4. С. 452–463.
- [24] Дмитренко С.О. Метричні задачі медіантного представлення чисел *Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки.* 2002. В. 3 С. 403-411.
- [25] Замрій І. В., Працьовитий М.В. Сингулярність інверсора цифр  $Q_3$ -зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості. *Нелінійні коливання.* 2015. Том 18, № 1. С. 55–64.
- [26] Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В. Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного півінтервала. *Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки.* 2015. № 165. С. 11-18.
- [27] Калашніков А. В. Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2008. № 9. С. 192-199.
- [28] Калашніков А. В., Працьовитий М. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з  $Q$ -зображенням дійсних чисел. *Укр.*

*мат. журн.* 2013. Т. 65, № 3. С. 405-417.

- [29] Карвацький Д. М. Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2013. Т. 15, № 1. С. 56-73
- [30] Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. Киев: Вища школа, 1982. 96 с.
- [31] Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. Издательство «Мир». Москва, 1965. 422 с.
- [32] Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. Москва: Мир, 1973. 302 с.
- [33] Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. Москва: Изд-во иностр лит-ры, 1963. 156 с.
- [34] Климчук С.О., Працьовитий М. В. Про один клас ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями, який містить підклас сингулярних функцій. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* Київ: Ін-ту математики НАН України, 2017. № Т. 14, №4. С. 19-33.
- [35] Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. № 5. С. 292-299.
- [36] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Техносфера, 2006. 488 с.
- [37] Кулиба Ю. В., Торбін Г. М. Нормальні та квазінормальні ланцюгові дроби Данжуа. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2014, № 16 (1). С. 296-302.
- [38] Кюрчев Д. В. Про аномальну фрактальність одного класу множин ланцюгових дробів із зростаючими елементами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2006, № 7. С. 204-210.

- [39] Кюрчев Д. В. Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича деяких множин ланцюгових дробів. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки.* 2004. № 4. С. 285-291.
- [40] Кюрчев Д. В. Розподіли випадкових ланцюгових  $A_2$ -дробів та їх фрактальні властивості. *Матеріали конференції «Фрактали і сучасна математика»*, 24 грудня 2009 р. Київ: Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2009. С. 69-70.
- [41] Лещинський О. Л., Працьовитий М. В. Один клас сингулярних розподілів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами. *Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. праць.* Київ: Нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка, 1995. С. 20-30.
- [42] Лисовик Л. П., Шкаравская О. Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями. *Кибернетика и системный анализ.* 1998. № 1. С. 82-93.
- [43] Луцак В. В. Циліндричне марковське зображення чисел і його застосування. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова. 2009. № 10. С. 141-149.
- [44] Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О. Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду. *Укр. мат. журн.* 2018. № 70, № 10. С. 1403-1416.
- [45] Марсалья Д. Случайные величины с независимыми двоичными цифрами. *Кибернет. сб.* 1983. № 20. С. 216-224.
- [46] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с.
- [47] Осауленко Р.Ю. Група перетворень відрізка  $[0; 1]$ , які зберігають частоти цифр  $Q_s$ -зображення чисел. *Збірник праць Інституту математики НАН України.* 2016, т.13, №3. С.191–204.
- [48] Панасенко О. Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперерв-

ної ніде не диференційовної функції. *Укр. Мат. Журн.* 2009. Т. 61, № 9. С. 1225-1239.

- [49] Панасенко О. Б. Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. № 7. С. 160-167.
- [50] Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.* 1960. Т.57. С. 3–84.
- [51] Постников А. Г. Вероятностная теория чисел. Москва: Знание, 1974. 62 с.
- [52] Працевитий М.В. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин,  $Q_2$ -знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова. *Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій.* — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. С. 249-254.
- [53] Працевитий Н. В. Непрерывные канторовские проекторы. *Методы исследования алгебраических и топологических структур.* 1989. С. 95-105.
- [54] Працевитий Н.В. Случайные величины с независимыми  $Q_2$ -символами. *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей.* Киев: ИМ АН УССР. 1987. С. 92–102.
- [55] Працевитий Н.В. Поліосновне  $\tilde{Q}$ -представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П. Драгоманова. 1998. № 2. С. 14-35.
- [56] Працьовита І. М. Про розклади чисел у знакозмінні  $s$ -адичні ряди і ряди Остроградського 1- та 2-го видів. *Укр. мат. журн.* 2009. Т.61, № 7 С. 958–968.
- [57] Працьовитий М. В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрак-

тальних і ймовірнісних теорій. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки.* К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2013. № 14. С. 189–216.

- [58] Працьовитий М. В. Нега–канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега s-кові – перекодування s-кових). *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* К.: Інститут математики НАН України. 2017. Т.14, №4. С. 167–177.
- [59] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2013, № 14. С. 176-188.
- [60] Працьовитий М.В., Чуйков А.С. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега–трійкових і ланцюгових  $A_2$ -дробів. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2018. № Т.15, № 1. С. 147–161.
- [61] Працьовитий М. В., Климчук С.О. Лінійні фрактали типу Безиковича-Егглстона. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки.* Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2012. № 13. С. 80–93.
- [62] Працьовитий М.В., Свинчук О.В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах  $Q_s^*$ -зображення аргумента. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки.* К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2013. № 15. С. 144–155.
- [63] Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 68 с.
- [64] Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. № 12. С. 24-36.
- [65] Працьовитий М. В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів. *Доп.*

*НАН України*. 1996. Т. 5. С. 32-37.

- [66] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. 296 с.
- [67] Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. № 3. С. 351-362.
- [68] Працьовитий М. В., Кюрчев Д.В. Сингулярність розподілу випадкових величин, зображеної ланцюговим  $A_2$ -дробом з незалежними величинами. *Теорія ймовір. та матем. статист.* 2009. № № 81. С. 139-154.
- [69] Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Властивості та розподіли значень фрактальний функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Вип. 2(99) 2018. С. 187–202.
- [70] Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення Нелінійні коливання. 2020. т. 23, № 2. С. 231 — 252.
- [71] Працьовитий М. В., Скрипник С. В.  $Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 134-145.
- [72] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. № 4. С. 207-215.
- [73] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Динамічні системи: Укр. Мат. Конг.* Київ: Ін-т матем. НАН України, 2003.

С. 77-93.

- [74] Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Гончаренко Я. В. Сучасні задачі та проблеми сингулярних розподілів ймовірностей. *Наукові записки: зб. наукових статей НПУ імені М.П. Драгоманова*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. № 42. С. 18-20.
- [75] Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і  $Q$ -представлення чисел. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. № 4. С. 260-269.
- [76] Працьовитий М. В., Ратушняк С. П. Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2014. Вип. 16 (2). С. 150–160.
- [77] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. Ереван, 1973. 132 с.
- [78] Савченко І.О. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. 2012. № 13(2). С. 188-196.
- [79] Савченко І.О. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. 2013. № 15. С. 119-133.
- [80] Стахов А. П. Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы. *Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы..* М.: Академия Тринитаризма, 2006. С. 17-30.
- [81] Титчмарш Е. Теория функций. 2-е изд. изд. М.: Наука, 1980. 464 с.
- [82] Торбин Г. М., Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми  $Q^*$ -знаками. *Случайные эволюции: теоретические и прикла-*

- дние задачи* Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. С. 95-104.
- [83] Турбин А. Ф. Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции распределения. Киев: Наукова думка, 1992. 208 с.
- [84] Федер Е. Фракталы. Москва: Мир, 1991. 260 с.
- [85] Федерер Г. Геометрическая теория меры. Москва: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит., 1987. 760 с.
- [86] Хинчин А.Я. Цепные дроби. Москва: Наука, 1978. 166 с.
- [87] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2004. Vol. 24. Pp. 1-16.
- [88] Albeverio S., Gontcharenko Y., Pratsiovytyi M., Torbin G. Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions. *Mathematische Nachrichten*. 2006. Vol. 279, no. 15. Pp. 1619-1633.
- [89] Albeverio S., Gontcharenko Y., Pratsiovytyi M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Oper. Stochastic Equations*. 2007. Vol. 15, no. 1. Pp. 89-97.
- [90] Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G. On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2008. Vol. 16, no. 2. Pp. 181-211.
- [91] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. Spectral properties of image measures under the infinite conflict interactions. *Positivity*. 2006. Vol. 10, no. 1. Pp. 39-49.
- [92] Anselm M., Weintraub S. H. A generalization of continued fractions. *Journal of Number Theory*. 2011. Vol. 131. Pp. 2442-2460.
- [93] Banach S. Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionennmengen. *Stud. Math.* 1931. No. 3. Pp. 174-179.
- [94] Bergman G. A number system with an irrational base. *Mathematics Magazine*. **31**, no. 2. 1957. P. 98-110.



- [95] Besicovitch A. S. On linear sets of points of fractals dimensions. *Math. Ann.* 1929. Vol. 101, no. 1. Pp. 161–193.
- [96] Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V., Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures. *Algebra Discrete Math.*, 2016, Vol. 21, No 2, P.184–201.
- [97] Brown G., Qingle Y. Metrical theory for farey continued fractions. *Osaka J. Math.* 1996. Vol. 33, no. 2. Pp. 951–970.
- [98] Bunder M. W., Tognetti K. P., Bates B. Continued Fractions and The Gauss Map. *Academia Paedagogica Nyiregyhaziensis. Acta Mathematica.* 2005. no. 21 (2). Pp. 113-125.
- [99] Cantor G. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Math.* 1884. Vol. 4. Pp. 381-392.
- [100] Chatterji S. D. Certain induced measures on the unit interval. *Journal London Math. Soc.* 1963. Vol. 38. Pp. 325-331.
- [101] Chrestenson H. E. A class of generalized walsh functions. *Pacific Journal of Mathematics.* 1955. Vol. 5, No. 1, pp. 17 – 31.
- [102] Dajani K., Kraaikamp C. The mother of all continued fractions. *Colloq. Math.* 84/85 (2000). Part 1. P. 109-123.
- [103] Denjoy A. Complément à la notice publiée en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy, Hermann, Paris, 1942.
- [104] Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, No. 2. P. 150–159.
- [105] Dmytryshyn R. I. Positive definite branched continued fractions of special form. *Carpathian Math. Publ.* 2013. Vol. 5, № 2. P. 225–230.
- [106] Dudenko, M., Oliynyk B., On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4. *Algebra Discrete Math.*, 2018, Vol. 26, No. 2, P. 256-269 .
- [107] Karpenkov O. Geometry of continued fractions. Springer, 2013. 405 pp.
- [108] Pratsiovytyi M.V., Kovalenko V.M. Probability measures on fractal curves (probability distributions on the Vicsek fractel). *Random Op-*

- er.Stoch.Edu, 2015. 23 (3) P. 161-168.
- [109] Falconer K. J. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Chichester : Wiley, 2003. 337 pp.
- [110] Fine N. J. On the Walsh Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 65, No. 3 (May, 1949), pp. 372-414.
- [111] Galambos J. Representation of real numbers by infinite series. Lecture Notes in Math *Combinatorica*. Vol. 502. Berlin: Springer-Verlag. 1976. 146 p.
- [112] Garg K. M. On singular functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 1969. Vol.14. Pp. 1441-1454.
- [113] Garg K. M. Construction of absolutely continuous and singular functions that are nowhere of monotonic type. *Contemp. Math. 42, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* 1985. Pp. 61-67.
- [114] Hladysh B. I., Prishlyak A. O. Topology of Functions with Isolated Critical Points on the Boundary of a 2-Dimensional Manifold. *SIGMA*. 13 (2017), 050, 17 p.
- [115] Hladysh B. I., Prishlyak A. O. Simple Morse functions on an oriented surface with the boundary. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2019, V. 15, No. 3, pp. 354-368
- [116] Jarnicki G., Pflug P. Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis. *Springer Monographs in Mathematics* 2015. 299 pp.
- [117] Iosifescu M., Kraaikamp C. Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion. *Tokyo J. Math.* 2008. Vol. 31, № 2. Pp. 495-510.
- [118] Isaieva Tetiana M., Pratsiovytyi Mykola V. Transformations of  $(0, 1]$  preserving tails  $\Delta^\mu$ -representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 22 (2016). № 1, pp. 102-115.
- [119] Khintchine A. Ya. Metrische Kettenbruchproblemen. *Compositio Math.* 1935. Vol. 1. Pp. 361-382.

- [120] Komatsu T. Hurwitz and Tasojev continued fractions with long period. *Mathematica Pannonica*. 2006. Vol. 17/1. Pp. 91-110.
- [121] Kraaikamp C., Wu J. On a new continued fraction expansion with non-decreasing partial quotients. *Monatsh. Math.* 2004. Vol. 143. Pp. 285-298.
- [122] Lehner J. Semiregular continued fractions whose partial denominators are 1 or 2. *The Mathematical Legacy of Wilhelm Magnus: Groups, Geometry and Special Functions (Brooklyn, NY, 1992)*. Contemp. Math. 169, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1994. Pp. 407–410.
- [123] Levy P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. *Bull. Soc. Math.* 1929. Vol. 57. Pp. 178-194.
- [124] Marsalia G. Random variables with independent binary digits. *Ann. Math. Statist.* 1971. Vol. 42, no. 2. Pp. 1922-1929.
- [125] Mazurkiewicz S. Sur les fonctions non derivables. *Stud. Math.* 1931. No. 3. Pp. 92-94.
- [126] Pratsiovytyi M., Chuikov A. Continuous distributions whose functions preserve tails of an  $A_2$ -continued fraction representation of numbers. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2019. Vol. 27(3) P. 199-206.
- [127] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by  $A_2$ -continued fraction with independent elements *Random Operators and Stochastic Equations*. 2012. Vol. 17(1) P. 91-101.
- [128] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. On  $A_s$ -continued fraction expansion. *Book of abstracts of the International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov*. Kyiv, 2012. P. 119.
- [129] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by  $A_2$ -continued fraction with independent elements. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2009. Vol. 17, no. 1. Pp. 91–101.
- [130] Pratsiovytyi M., Isaieva T. Transformations of  $(0; 1]$  preserving tails of

- $\Delta^\mu$ -representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 22, no. 1. Pp. 102-115.
- [131] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation. *Int. Journal of Math. Analysis*. 2013. Vol. 7, no. 64. Pp. 3155-3167.
- [132] Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonal funktionen. *Math. Ann.* 1922. Vol.87. Pp.112-138.
- [133] Salem R. On some singular monotonic functions which are stricly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1943. Vol. 53, no. 3. Pp. 427-439.
- [134] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford University Press, New York, 1995. 320 pp.
- [135] Schwartz L. Sur le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilités. *C. R. Acad. Sci.* 1941. No. 212. Pp. 418-421.
- [136] Shukla U. K. On points of non-symmetrical differentiability of continuous function III. *Ganita 8*. 1957. Pp. 81-104.
- [137] Takacs L. An increasing continuous singular function. *The American Math. Monthly*. 1978. No. 85. Pp. 35-37.
- [138] Triebel H. Fractals and Spectra related to Fourier analysis and function spaces. *Monographs in mathematics*. Boston: Birkhäuser. 1997. Vol. 91. 271 pp.
- [139] Thim Y. Continuous nowhere differentiable functions. *Master thesis of science programme. Department of Mathematics*. Sweden: Lulea University of Technology. 2003. 94 pp.
- [140] Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal funktions. *Amer. J. Math.* 1923. Vol.45. – P. 5-24.

## ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

### Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації:

- 1<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 146 – 157.
- 2<sup>a</sup>. Маслова Ю.П. Працьовитий М.В. Узагальнення та аналоги функцій Радемахера, пов'язані з симетричними  $Q_s$ -зображенням дійсних чисел. *Зб. праць. Ін-ту матем. НАН України*. 2017. Т.14, № 4. С. 82–96.
- 3<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2018. Т. 15, № 1. С. 132-146.
- 4<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. *Нелінійні коливання*. 2019, Т. 22, №3, С. 380–390.
- 5<sup>a</sup>. Василенко Н.А., Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Потужність множини неперервних функцій, які зберігають цифру 1  $Q_3$ -зображення числа. *Буковинський математичний журнал*. 2019, Т. 7, №1. С. 69–81.
- 6<sup>a</sup>. Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2019. Т. 16, № 2. С. 50–62.
- 7<sup>a</sup>. Ptaysiovytyi M., Lysenko I., Maslova Yu. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of  $G_2$  – representation

of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 29 (2020). № 1, pp. 99–108.

- 8<sup>a</sup> Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Ймовірнісна теорія  $G_2$ -зображення. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2019. Т. 16, № 3. С. 115–129.

**Тези доповідей на конференціях, які засвідчують апробацію результатів дисертації:**

- 8<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Ряди Уолша в метричній теорії чисел. *Тези доповідей IV Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики*, 23 – 25 квітня 2015, Київ: НТУУ «КПІ», 2015 р. С.46
- 9<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне з узагальнень системи функцій Радемахера та Уолша. *Тези доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25 – 26 червня 2015 р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 34 – 37.
- 10<sup>a</sup>. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Одне узагальнення системи функцій Уолша. *Тези доповідей V всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 25–26 квітня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 37.
- 11<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Аналог Трибін-функції, означений в термінах представлення чисел у двійковій та канторівській двійково-трийковій системах числення. *Тези доповідей всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 7–8 жовтня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 65.
- 12<sup>a</sup>. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функцій Радемахера та його узагальнення. *Тези доповідей VI Всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики*. 21–22 кві-

- тня 2017, Київ: НаУКМА, 2017 р. С. 45.
- 13<sup>a</sup>. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Двійково-п'ятіркова канторівська система зображення дробової частини дійсного числа. *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки»*. 25–26 травня 2017. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 155–157.
- 14<sup>a</sup>. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функції Радемахера. *Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь»*. 13–14 грудня 2017, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 69–70.
- 15<sup>a</sup>. Maslova Yu., Pratsiovytyi M. A generalization of the Walsh series by mean of  $Q_2$ -representation of real numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, September 24–28, 2018, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. 2018. P.32.
- 16<sup>a</sup>. Маслова Ю.П. Функція випадкової величини з фрактальними властивостями. *Тези доповідей VII Всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики*. 19-20 квітня 2018, Київ: НТУУ «КПІ», 2018 р. С.49.
- 17<sup>a</sup>. Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. *Тези доповідей XII Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 23 травня 2019, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2019 р. С. 45
- 18<sup>a</sup>. Goncharenko Ya., Lysenko I., Maslova Yu. Geometry of numerical series and two-symbol systems of encoding of real numbers. *XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky*. July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine: Conf. materials. 2019. P.36.
- 19<sup>a</sup>. Маслова Ю.П., Лисенко І.М. Група неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости  $G_2$ -зображення чисел. *Тези доповідей*

*IX Всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. 10–11 квітня 2020. Київ: НаУКМА, 2020. С. 21.*

- 20<sup>a</sup>. Лисенко І.М., Маслоva Ю.П. Нова двоосновна система кодування дійсних чисел, її основні застосування. *Тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції «Відкриті еволюціонуючі системи»*. 19–21 травня 2020. Київ. 2020. С. 251–256.