Національна академія наук України
Інститут математики

Маслова Юлія Петрівна

УДК 511.72

Тополого–метрична та фрактальна теорія двоосновного G_2–зображення чисел і її застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, декан фізико–математичного факультету.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Олійник Богдана Віталіївна,
Національний університет «Києво–Могилянська академія», завідувач кафедри математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем.

Захист відбудеться «22» вересня 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «15» серпня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Сорока Ю. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційне дослідження проведено у галузі метричної теорії чисел. Воно присвячене розвитку топологічної, метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій дійсних чисел, що ґрунтуються на двосимвольній системі кодування чисел (G_2–зображення), яка є аналогом відомої двоосновної системи (Q_2–зображення). Обидві основи другої системи додатні, а першої – одна основа додатна, а друга від'ємна. Для другої системи запропоновано нові застосування, а для першої створено нову цілісну теорію, яка має ряд принципових відмінностей від раніше відомих.

Актуальність дослідження. Сьогодні в математиці і її застосуваннях використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел: зі скінченним і нескінченним, сталим і змінним алфавітами; з нульовою, екстранульовою й ненульовою надлишковістю. На окрему увагу заслуговують двосимвольні системи, які використовують алфавіт $A = \{0; 1\}$ і мають за код (формальний запис) числа послідовність нулів і одиниць. Їхня роль у науці й техніці вагома. Серед них історично першою була класична двійкова система (Фо Гі, 4 ст. до н.е.), яка використовує основу 2, має просту арифметику (Г. Лейбніц, 1697 р.) і геометрію, є універсальним способом кодування інформармації в цифровій техніці (Джон фон Нейман, 1946 р.). Моделлю дійсного числа у цій системі є додатний двійковий ряд. Згодом виникла нега–двійкова система (Вітторіо Грюнвальд, 1885 р.), основою якої є число (-2), а моделлю числа — лакунарний знакопочережний ряд. Іще пізніше до розгляду були введені системи зі дробовою (і навіть ірраціональною) основою (Дж. Бергман, 1957 р.). Знедавна почали використовувати двоосновні (Працьовитий М.В., 1986 р.) і поліосновні (Працьовитий М.В., Торбін Г.М., 1992 р.) системи, а також безосновні системи: фібоначієве (Стахов А.П., Василенко Н.М., Працьовитий М.В.), медіантне зображення (Працьовитий М.В., Дмитренко С.О.), марковське (Працьовитий О.М.) зображення, ланцюгове A_2–зображення (Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В., 2009 р.) та ін. Кожна з двосимвольних систем має свою специфіку, геометрію (метричну і позиційну), нішу продуктивних застосувань і перспективи для розвитку та застосувань. Неперервна математика взаємодіє з континуальними множинами і неперервними відображеннями й мірами. Потенціал двосимвольних систем зображення чисел для неї невичерпний.

Системи кодування чисел забезпечують інструментарій для розвитку теорії чисел, теорії фракталів, конструктивної теорії локально складних функцій, сингулярних мір, розподілів ймовірностей на фракталах, динамічних систем зі фрактальними атракторами тощо. Детальний опис геометричних властивостей (геометрії) зображення, а саме: властивостей циліндричних і хвостових множин, метричних відношень, розв'язків метричних задач, дає змогу компактизувати задання об'єктів, вивчати їхні структуру і властивості, описувати динаміку й фінальні стани. Розвиток теорії відомих систем кодування чисел посилює інтерес до нових перспективних для застосувань систем, принципово відмінних від наявних.

У цій роботі, продовжуючи дослідження і розгляд нових застосувань відомих систем кодування чисел, ми запроваджуємо нову систему, яка є певним аналогом наявних (Q_2–зображення, нега–двійкове зображення), але має свої специфічні особливості тополого–метричного характеру.Водночас це потужний інструмент розвитку фрактальної геометрії та фрактального аналізу (множин, функцій, мір тощо).

Дві системи кодування чисел називаються *топологічно еквівалентними*, якщо *проектор цифр* зображення числа в першій системі на ті самі цифри іншої системи — це неперервна строго монотонна функція.

Класична теорія рядів Фур'є пов'язана з розкладами функцій за синусоїдальними гармоніками. Альтернативною теорією розкладів функцій у ряди за ортонормованою системою функцій є теорія рядів Уолша. Систему функцій Уолша, графік яких є «прямокутні» хвилі, ввів 1923 року американський математик Дж. Уолш. Як з'ясувалось, в теорії передачі сигналів такі хвилі мають суттєві переваги. Існує не лише глибокий паралелізм між теорією рядів Уолша і класичною теорією тригонометричних рядів, а й принципові відмінності. Система функцій Уолша, бувши одним із найпростіших прикладів повної ортонормованої системи, цікава з погляду теорії загальних ортогональних рядів. За минулі півсторіччя з'явилось чимало робіт, пов'язаних із застосуваннями функцій і рядів Уолша в обчислювальній математиці, в теорії кодування, в цифровій обробці сигналів тощо. Одним із природних шляхів узагальнення функцій Радемахера й Уолша, перетворень і рядів Уолша, які тісно пов'язані зі класичним двійковим зображенням чисел, є використання загальніших двосимвольних зображень чисел, зокрема Q_2–зображення чисел. Ця ідея реалізується у нашій роботі.

Неперервні ніде не монотонні функції віднедавна стали об'єктами підвищеного наукового інтересу як із боку теорії фракталів, так і з боку теорії функції з локально складними властивостями, оскільки з'явилися нові засоби їхнього теоретичного аналізу. Для поглиблення їхньої індивідуальної й загальної теорії широко використовуються різні системи кодування чисел. Понад те, такі функції все частіше фігурують у дослідженнях із інших галузей науки. Для конструювання і дослідження широкого класу неперервних ніде не монотонних функцій необмеженої варіації у цій роботі ми використовуємо поліосновне Q_s^*–зображення чисел.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова й у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках таких науково–дослідних тем:

— Дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого–метричної структури. Фрактальні властивості, керованість (номер державної реєстрації 0115U00557);
— Моделювання та фрактальний аналіз динамічних систем з локально складними відображеннями (номер державної реєстрації 0116U00850);
— Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059);
— Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (номер державної реєстрації 0119U002582).

Об'єкт дослідження. Двоосновні системи кодування дійсних чисел засобами двосимвольного алфавіту, їхня геометрія і застосування.

Предметом дослідження є властивості (топологічні, метричні, фрактальні, ймовірнісні тощо) зображень дійсних чисел, які ґрунтуються на двоосновних розкладах чисел у ряди (додатні або знакозмінні). Основами для розкладу чисел є два додатні чи два різнознакові числа. Складовою предмету дослідження є різнопланові застосування цих двосимвольних систем кодування дійсних чисел у метричній і ймовірнісній теоріях чисел і конструктивній теорії функцій.

Мета. Обґрунтувати нову двоосновну систему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту, яка не є топологічно еквалентною до класичної двійкової системи, проте є метричним аналогом Q_2–зображенням чисел. Детально вивчити її геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, тополого–метричні властивості множин чисел, визначених обмеженнями на вживання цифр), знайти природні застосування в різних галузях математики.

Завдання дисертаційного дослідження полягає в подальшому.

1. Для нової двоосновної і двосимвольної системи кодування дійсних чисел побудувати цілісну тополого–метричну і фрактальну теорії; розв'язати базисні задачі відповідної ймовірнісної теорії; продемонструвати ефективність нової системи для розвитку констру-

ктивної теорії неперервних локально складних функцій і теорії динамічних систем.

2. Розглянути перетворення, що зберігають хвости зображення чисел у новій системі, вивчити їхні групові властивості й інваріанти.
3. Запропонувати узагальнення функцій і рядів Уолша на основі використання відомої двоосновної системи зображення чисел (Q_2–зображення) і вивчити їхні властивості.
4. На основі трисимвольного Q_3–зображення дійсних чисел побудувати аналог неперервної ніде не диференційовної функції Буша — Вундерліха і Трибін–функції з детальним обґрунтування диференціальних властивостей.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи метричної й ймовірнісної теорії чисел, математичного аналізу, фрактальної геометрії і фрактального аналізу, конструктивної теорії локально складних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі.

1. Розроблено аналітичну систему кодування (G_2-зображення) чисел відрізка $[0; g_0]$ засобами двосимвольного алфавіту $A \equiv \{0; 1\}$ із двома різнознаковими основами: $g_0 \in (0; 1)$ і $g_1 = g_0 - 1$, яка ґрунтується на розкладі числа у ряд; вивчено її геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, геометричних перетворень, що зберігають хвости зображення).
2. Описано властивості операторів лівостороннього і правостороннього зсувів і з їхніми використанням побудовано нескінченну некомутативну групу перетворень відрізка, які зберігають хвости G_2–зображення чисел. При цьому доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення — це неперервна функція, що принципово відрізняє таке зображення від раніше вивчених.
3. Здійснено порівняльний аналіз властивостей G_2–зображення зі двоосновним Q_2–зображенням (обидві основи додатні) через проектор цифр одного зображення на інше.
4. Доведено, що інверсор цифр G_2–зображення цифр не має властивостей неперервності й монотонності. Це принципово відрізняє це зображення від інших, раніше вивчених.
5. Закладено основи ймовірнісної теорії G_2–зображення дійсних чисел з використанням спорідненості G_2– і Q_2–зображень.
6. Запропоновано узагальнення функцій Радемахера й Уолша, які ґрунтуються на Q_2-зображенні дійсних чисел, що є самоподібним, топологічно еквівалентним узагальненням класичного двійкового

зображення чисел $x \in [0;1]$. Досліджено інтегральні властивості цих функцій, зокрема доведено, що узагальнені функції Радемахера утворюють ортогональну систему функцій. Для кожної узагальненої функції Уолша знайдено її аналітичний вираз.

7. Запропоновано трійковий аналог функцій Радемахера і його узагальнення на основі Q_3–зображення дійсних чисел відрізка $[0;1]$, що є трисимвольним самоподібним кодуванням чисел із нульовою надлишковістю. Доведено кілька співвідношень, що стосуються нового поняття.
8. Запропоновано узагальнення неперервних недиференційовних функцій Буша, Вундерліха, Трибін–функції, яке ґрунтується на Q_s^*–зображенні чисел відрізка $[0;1]$ зі збереженням властивостей неперервності, ніде не монотонності, автомодельності. Вивчено варіаційні властивості функкії, описано властивості її рівнів, зокрема їхню масивність.

Одержані результати нові, строго і цілком обґрунтовані.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер, але отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у різних галузях математики: теорії чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, конструктивній теорії функцій з фрактальними властивостями, теорії динамічних систем.

Особистий внесок здобувачки. Наукові результати, які виносяться на захист, отримала авторка самостійно. Науковому керівнику належать постановки задач, деякі ідеї щодо методів обґрунтування гіпотетичних тверджень і перевірка їхнього доведення. Співавторам спільних публікацій належать твердження, які до дисертації не ввійшли.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів і наукових семінарах, а саме:

1. IV всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23 – 25 квітня 2015;
2. Міжнародна науково–методична конференція «Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 25–26 червня 2015;
3. V всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 25–26 квітня 2016;
4. Всеукраїнська науково–методична конференція «Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7–8 жовтня 2016;

5. VI всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21–22 квітня 2017;
6. Міжнародна наукова конференція «Асиптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13–14 грудня 2017;
7. Міжнародна наукова-практична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки», Київ, 25–26 травня 2017;
8. VII всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19–20 квітня 2018;
9. VIII всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 23 травня 2019;
10. Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tesellatons, Kyiv, September 24–28, 2018;
11. The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, Vinnytsia, July 02–06, 2019.
12. IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10–11 квітня 2020;
13. V Міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи», Київ, 19–21 травня, 2020;
14. Семінар з фрактально аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: д–р фіз.–мат. наук, професор Працьовитий М.В.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7 статтях [1]–[7] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них одна стаття [4] – у журналі, який індексується міжнародною наукометричною базою «MathSciNet», стаття [7] – у журналі, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus. Результати дослідження наведені також у матеріалах конференцій [8]–[20].

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел (140 найменувань) і додатка (список публікації авторки, 20 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 136 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувачки, висвітлено апробацію результатів дисертаційної роботи й висвітлення їх у публікаціях.

Перший розділ «Огляд літератури й концептуальні засади дослідження» має вступний характер. У ньому систематизовано відомості, що стосуються «геометрії» Q_s^*-зображення дійсних чисел, яке далі використовується для конструювання й дослідження локально складних функцій, проведено огляд літератури і наведено факти, необхідні для подальшого дослідження об'єктів.

Другий розділ «Нова двоосновна система кодування чисел відрізка $[0; g_0]$ із різнознаковими основами» у дисертації основний. У ньому обґрунтовують двоосновне і двосимвольне G_2–зображення чисел $[0; g_0] \subset [0; 1]$ із основами $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$ і $g_1 \equiv g_0 - 1 < 0$; доведено, що переважна кількість чисел має єдине зображення (G_2–унарними числами), а числа зліченної множини мають їх два: $\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 11(0)}$ (G_2–бінарними числами); вивчається її геометрія, розв'язуються позиційні й метричні задачі, системно вибудовуються основи метричної та ймовірнісної теорій чисел у цьому зображенні. Встановлено правила порівняння чисел за їхніми зображеннями, здійснено порівняльний аналіз G_2–зображення з Q_2–зображенням (зокрема обгрунтовано властивості проектора цифр одного зображення на інше), вивчено властивості операторів: ω — лівостороннього й τ_0 і τ_1 — правосторонніх зсувів цифр: $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $\tau_i\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр зображення чисел неперервний, а інверсор цифр зображення $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ — це всюди розривна, ніде не монотонна функція. Ці два факти принципово відрізняють це зображення від інших відомих двосимвольних зображень.

У цьому розділі вивчаються властивості хвостових множин і неперервні перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости зображення чисел. Доведено, що множина всіх неперервних перетворень відрізка $[0; g_0]$, які зберігають хвости G_2–зображення чисел, стосовно операції «композиція» (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції. Доведено, що при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної підмножини відрізка $[0; g_0]$ достатньо розглядати покриття цієї множини G_2–циліндрами. Описано фрактальні властивості множин типу Безиковича– Егглстона, визначених обмеженнями для частот цифр G_2–зображення чисел.

Теорема 2.1.2. *Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L = A \times A \times ...$, яка містить нескінченну кількість одиниць, ряд*

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad \delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}, \tag{1}$$

є абсолютно збіжним знакопочережним і його сума не перевищує першого ненульового доданка $v_1 = g_0^m$, *де* $\alpha_m = 1$, *але* $\alpha_j = 0$ *при* $j < m$.

Теорема 2.1.3. *Для будь-якого* $x \in [0; g_0]$ *існує* $(\alpha_n) \in L$, *така, що*

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots} \tag{2}$$

Зауваження. Ряд (2) містить доданки додатні, від'ємні і які дорівнюють нулю, причому чинне твердження: *для будь–якого набору* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *нулів і одиниць значення виразу* u_{n+1},

$$\text{де} \quad u_1 \equiv \delta_{\alpha_1},\ u_{n+1} \equiv \delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} g_{\alpha_j} = \delta_{\alpha_{n+1}} g_0^{N_0} g_1^{N_1}$$

— *є нулем тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_{n+1} = 0$;
— *додатним числом, якщо* $\alpha_{n+1} = 1$ *і кількість одиниць серед чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — *це парне число;*
— *від'ємним числом, якщо* $\alpha_{n+1} = 1$ *і кількість одиниць серед чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — *це непарне число, причому* $|u_{n+1}| < |u_n|$.

Означення 2.2. *Числа відрізка* $[0, g_0]$, *що мають два* G_2*–зображення, називаються* G_2–бінарними.

Лема 2.2.1. *Множина* B *всіх* G_2*–бінарних чисел вичерпується числами з* G_2*–зображеннями виду:* $\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 11(0)}$.

Лема 2.5.1. *Якщо раціональне* G_2*–зображення числа* $x = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m (c_{m+1} \ldots c_{m+p})}$ *періодичне, то число* x *раціональне.*

У пункті ***«Порівняння чисел за їхніми*** G_2***–зображеннями»*** вичерпно вивчаються відношення чисел $'' =, >, <''$ за їхніми G_2–зображеннями.

Теорема 2.6.1. *Якщо* $x_1 \neq x_2$ *і* $m(x_1, x_2) = m$ — *номер місця першої з неспівпадаючих цифр, то числа*

$$\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 1 d_1 d_2 \ldots} = x_1 \quad i \quad x_2 = \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 0 d'_1 d'_2 \ldots}$$

перебувають у відношенні $x_1 \geqslant x_2$, *якщо* $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k$, $x_1 \leqslant x_2$, *якщо* $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k - 1$.

Означення 2.4. *Нехай* $(c_n) \in L_2$, G_2*–циліндром рангу* m *із основою* $c_1 c_2 ... c_m$ *називається множина* $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ *усіх чисел* $x \in [0; g_0]$, *які мають таке* G_2*–зображення:* $x = \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots \alpha_{m+k} \ldots}$, $\quad \alpha_{m+j} \in A$, *тобто* $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1, m}\}$.

Лема 2.7.1. *Циліндр* $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *— це відрізок, причому 1)* $[a;b]$, *якщо* $N_1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_m$ *— парне, 2)* $[b;a]$, *якщо* N_1 *— непарне, де* $a = \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m} (\delta_{c_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$, $b = a + g_0 \prod\limits_{j=1}^{m} g_{c_j}$.

Теорема 2.8.1. *Оператор* ω *лівостороннього зсуву цифр* G_2*–зображення чисел відрізка* $[0;g_0]$, *який означується рівністю* $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, *аналітично задається формулою*

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \tag{3}$$

— це неперервна коректно означена на $[0;g_0]$ *функція, лінійна на кожному з циліндрів 1–го рангу, зростає на* $\Delta^{G_2}_0$ *і спадає на* $\Delta^{G_2}_1$.

Теорема 2.9.1. *Функція* ω^n *— це коректно означена рівність*

$$\omega(\omega^{n-1}(x)) = \omega^n(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots},$$

яка має аналітичний вираз $\omega^n(x) = \dfrac{1}{P_n} x - \dfrac{B_n}{P_n}$, *де* $P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} g_{\alpha_j(x)}$, $B_n = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum\limits_{k=2}^{n} (\delta_{\alpha_k(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)})$; *вона неперервна на відрізку* $[0;g_0]$, *лінійна на кожному циліндрі рангу* n.

Означення 2.5. *Функція* τ_i, *означена на* $[0;g_0]$ *рівністю*

$$\tau_i(x) = \tau_i\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots},$$

де $i \in \{0;1\}$, *називається оператором правостороннього зсуву цифр* G_2*–зображення чисел із параметром* i.

Лема 2.10.1. *Функція* τ_i *неперервна в кожній точці відрізка* $[0;g_0]$ *і аналітично виражається* $\tau_i(x) = \delta_i + g_i x$.

Лема 2.11.1. *Оператор* $\tau_{i_1i_2\ldots i_n}$ *має аналітичний вираз*

$$\tau_{i_1i_2\ldots i_n}(x) = \delta_{i_1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\delta_{i_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{i_j}\right) + \left(\prod_{j=1}^{n} g_{i_j}\right) x$$

і є лінійною функцією, зростаючою, якщо $P_n = \prod_{j=1}^{n} g_{i_j} > 0$ *(рівносильно* $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ *– парне число), і спадною, якщо* $P_n < 0$ *(рівносильно* $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ *– непарне число).*

Означення 2.6. *Кажуть, що* G_2*–зображення чисел* $x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *і* $y = \Delta^{G_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ *мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні* k

і m, *такі, що* $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ *для будь–якого* $j \in N$. *Якщо* k *і* m *— найменші числа, для яких виконується вказана умова, то число* $z \equiv x \wedge y = \Delta^{G_2}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} = \Delta^{G_2}_{\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}$, *називається* спільним хвостом *чисел* x *та* y.

Теорема 2.12.1. *Множина всіх чисел, які мають однаковий хвіст* G_2*–зображення (хвостова множина), є зліченною всюди щільною у* $[0; g_0]$ *множиною. Множина* W *усіх хвостових множин — континуальна.*

Зауваження 2.12.2. *Принциповою відмінністю* G_2*–зображення чисел від інших двосимвольних систем є те, що всі* G_2*–бінарні числа утворюють одну хвостову множину, тоді як для класичної двійкової системи, нега–двійкової,* Q_2 *–,* Q_2^* *– зображення чисел вони належать різним хвостовим множинам.*

Означення 2.7. *Кажуть, що функція* $y = f(x)$ *зберігає хвости* G_2*–зображення чисел відрізка* $[0; g_0]$, *якщо числа* x *і* $y = f(x)$ *мають однаковий хвіст* G_2*–зображення для кожного* x *із області визначення.*

Прикладами функцій, що зберігають хвости G_2–зображення чисел, є оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр.

Означення 2.8. *Під перетворенням відрізка* $[0; g_0]$, *що зберігає хвости* G_2*–зображення чисел (далі хвостовим перетворенням), ми розуміємо бієктивне відображення* φ *відрізка на себе, при якому* x *і* $\varphi(x)$ *мають однакову суть для кожного* $x \in [0; g_0]$.

Теорема 2.16.1. (Основний результат). *Множина* C *всіх неперервних бієкцій відрізка* $[0; g_0]$, *які зберігають хвости* G_2*–зображення чисел, щодо операції* $\circ$ *— "композиція" (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції.*

Означення 2.9. *Функція* I, *яка означена рівністю* $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$, *називається* ***інверсором*** G_2*–зображення чисел.*

Означення функції є коректне для точок, що мають єдине G_2–зображення. Оскільки $\dfrac{g_0(1+g_1^2)}{1-g_1} = I(\Delta^{G_2}_{01(0)}) \neq I(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \dfrac{g_0^3}{1-g_1}$, то воно не коректне без домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень G_2–бінарних точок. Тому домовимось не використовувати зображення $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)}$.

Теорема 2.18.1. (Основний результат). *Інверсор* I *є ніде не монотонною неперервною за множиною* G_2*–унарних точок відрізка* $[0; g_0]$.

Означення 2.10. *Функція* p, *яка числу* $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ *ставить у відповідність число* $y = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, *називається* ***проектором*** Q_2*–зображення на* G_2*–зображення.*

Означення 2.11. G_2*–зображення і* Q_2*–зображення чисел із основами* (g_0, g_1) *і* (q_0, q_1) *відповідно називаються* ***двоїстими***, *якщо* $g_0 = q_0$.

Теорема 2.19.1. *Якщо Q_2–зображення і G_2–зображення двоїсті, то функція p, означена рівністю $p\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, є ніде не монотонною неперервною в кожній Q_2–унарній точці. В Q_2–бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)}$ функція p має скінченний стрибок*

$$\frac{2g_0(1-g_0)}{2-g_0}\prod_{j=1}^{m-1}|g_{c_j}|.$$

У **третьому розділі «Узагальнення функцій Радемахера й рядів Уолша»** пропонуються узагальнення функцій Радемахера:

$$r^*_0(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ x \in \Delta^2_0 \equiv \left[0, \dfrac{1}{2}\right); \\ -1 \ \text{ при } \ x \in \Delta^2_1 \equiv \left[\dfrac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$r^*_k(x) \equiv r^*_0\left(\{2^k x\}\right)$, де $\{2^k x\}$ – дробова частина числа $2^k x$; і Уолша, що є всеможливими добутками функцій Радемахера. Вони ґрунтуються на Q_2–зображенні чисел відрізка $[0;1]$ замість класичного двійкового. У розділі вивчено інтегральні властивості отриманих узагальнень і побудовано систему ортогональних функцій із використанням нумерації Пеллі.

Означення 3.1. *На піввідрізку [0;1) означмо послідовність функцій*

$$(r_n)_{n=0}^{\infty}:$$

$$r_0(x) \equiv (-1)^{\alpha_1(x)} \cdot 2q_{1-\alpha_1(x)} =$$

$$= \begin{cases} 2q_1, \quad \textit{якщо} \ \ x \in [0; q_0) = \Delta^{Q_2}_0 \ \Leftrightarrow \ \alpha_1(x) = 0; \\ -2q_0, \quad \textit{якщо} \ \ x \in [q_0; 1) = \Delta^{Q_2}_1 \ \Leftrightarrow \ \alpha_1(x) = 1; \end{cases}$$

$$r_n(x) \equiv r_0\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}\right), \ n \in N.$$

Функції r_n — це *узагальнення функцій Радемахера*, які співпадають з ними при $q_0 = \dfrac{1}{2}$.

Зауваження 3.2.1 *Функція r_n набуває лише двох значень $2q_1$ і $-2q_0$, причому на кожному циліндрі рангу n вона стала, а отже, стала на кожному з циліндрів рангу $m > n$.*

Теорема 3.2.1. *Для узагальнення r_n функції Радемахера r^*_n має місце рівність: $\int\limits_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_n}} r_n(x)dx = 0$ при довільному наборі $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ з 0 та 1.*

Наслідок 3.2.1. *Виконується рівність* $\int\limits_0^1 r_n(x)dx = 0.$

Теорема 3.2.2 *Система функцій Радемахера ортогональна, а саме:*

$$\int\limits_0^1 r_n(x)r_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n \neq m, \\ 4q_0q_1, & \text{якщо} \quad n = m. \end{cases}$$

Систему узагальнених функцій Уолша $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ми будуємо, використовуючи традиційну нумерацію Пеллі, поклавши $\omega_0(x) \equiv 1$. Для означення функції $\omega_n(x)$ число n представляється у двійковій системі числення: $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_0 = (1\varepsilon_{k-1}...\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$, $\varepsilon_i \in A_2$. Звідси бачимо, що $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, де $k = k(n)$. Тепер означуємо функцію ω_n рівністю:

$$\omega_n(x) \equiv \prod_{i=0}^{k} r_i^{\varepsilon_i}(x) = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} r_i^{\varepsilon_i}(x).$$

Зауваження 3.3.1. *Узагальнення функцій Уолша, як і самі функції Уолша, в точках розриву неперервні справа. Але класичні функції Уолша набувають лише двох значень 1 і -1, що не збереглося для щойно введеного їхнього узагальнення.*

Теорема 3.3.1. *Якщо* $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, *тобто*

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0,$$

то узагальнена функція Уолша $\omega_n(x) = r_k(x)r_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}(x) \ldots r_0^{\varepsilon_0}(x)$ *на кожному циліндрі* $(k+1)$*-го рангу стала, причому на циліндрі* $\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1c_2\ldots c_kc_{k+1}}$ *вона набуває значення* $\omega_n(x) = (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c}$, *де* $s = 1 + \varepsilon_{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 + \varepsilon_0$*– кількість цифр "1" у зображенні числа* n, $c = \varepsilon_0 c_1 + \ldots + \varepsilon_{k-1}c_k + c_{k+1}$ *– кількість* j, *таких, що* $\varepsilon_j = 1 = c_{j+1}$ *серед* $0, 1, \ldots, k$.

Теорема 3.3.2. *Для узагальненої функції Уолша* ω_n *при* $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, *тобто* $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0$ *і кожного циліндра* $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_kc_{k+1}}$ *має місце рівність* $\int\limits_{x \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_kc_{k+1}}} \omega_n(x)dx = 0 = \int\limits_0^1 \omega_n(x)dx.$

Зауваження 3.3.2. *Якщо* $n < m$, $\left(1\varepsilon'_{k-1}\varepsilon'_{k-2}\ldots\varepsilon'_1\varepsilon'_0\right)_2$ *– двійкове зображення числа* n, *а* $(1\varepsilon_{m-1}\varepsilon_{m-2}\ldots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ *– двійкове зображення числа* m, *і при цьому* $\varepsilon_j\varepsilon'_i = 0$ *для всіх* $j \leqslant k-1$, *то добуток* $\omega_n\omega_m$ *функцій Уолша є функцією Уолша з номером* $l = (1\varepsilon_{m-1}\ldots\varepsilon_{k+1}1\delta_{k-1}\ldots\delta_1\delta_0)_2$, *де*

$\delta_j = \varepsilon'_j + \varepsilon_j,\ j = \overline{1, k-1}$. *Для таких n і m виконується рівність:*

$$\int\limits_0^1 \omega_n(x)\omega_m(x) = 0.$$

Лема 3.4.3. *Якщо $\alpha_k(t)$ – k–та трійкова цифра числа $t \in [0;1)$,*

$$v_k(t) \equiv 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \tag{4}$$

то $\int\limits_0^1 \exp\left(ix\dfrac{v_k(t)}{3^k}\right)dt = \dfrac{1 + 2\cos\frac{x}{3^k}}{3}$.

Означення 3.2. *Функції $v_k(x), k = 0, 1, 2, \ldots,$ визначені рівністю (4), називаються R_3–функціями, це трійкові аналоги функцій Радемахера.*

Теорема 3.4.1. *Якщо $\alpha_k(t)$ – k–та трійкова цифра числа $t \in [0;1)$, а*

$$v_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \qquad \text{то}$$

$$\int\limits_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right)dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^1 \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right)dt.$$

Теорема 3.4.2. *R_3–функції мають властивості:*

$$\int\limits_{x \in \Delta^3_{c_1 \ldots c_m}} v_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \ \ k > m, \\ \dfrac{1 - c_k}{3^m}, & \text{якщо} \quad k \leqslant m, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 v_k(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^1 v_k(x)v_m dx = \begin{cases} 0, \ \text{якщо}\ k \neq m, \\ \frac{2}{3}, \ \text{якщо}\ k = m. \end{cases}$$

Нехай $Q_3 = (q_0, q_1, q_2)$ – заданий упорядкований набір додатних чисел, сума яких дорівнює 1, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Якщо $q_0 = q_2$, то Q_3 – зображення називається симетричним. Очевидно, що класичне трійкове зображення — це симетричне Q_3 – зображення.

Лема 3.5.1. *Якщо $\alpha_k(t)$ – k–та цифра симетричного Q_3 – зображення числа $t \in [0;1)$, тобто*

$$t = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(t)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(t)}\right) = \beta_{\alpha_1(t)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k(t)} q_0^{N_0(t,k)} q_1^{N_1(t,k)} q_2^{N_2(t,k)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$$u_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \tag{5}$$

то для будь–якого дійсного числа x чинна рівність

$$\int_0^1 \exp\left(ixAu_k(t)\right) dt = q_1 + 2q_0 \cos Ax.$$

Зауваження 3.5.1. *Функції $u_k(x), k = 1, 2, \ldots,$ визначені рівністю (5), називаються R_3^*–функціями, вони є узагальненням R_3–функцій на основі симетричного Q_3–зображення чисел.*

Теорема 3.5.1. *Для R_3^*–функцій дійсні рівності:*

$$\int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}} u_k(x)dx = 0, \quad \int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}} u_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad k > m, \\ (1-c_k)\prod\limits_{j=1}^{m} q_{c_j} & \textit{при} \quad k \leqslant m, \end{cases}$$

$$\int_0^1 u_k(x)dx = 0, \int_0^1 u_k(x)u_m(x)dx = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо}\ k \neq m, \\ 2q_0, \ \textit{якщо}\ k = m. \end{cases}$$

Об'єктом дослідження **четвертого розділу «Узагальнення Трибін–функції»** є функція f, означена в термінах поліосновного Q_s^*–зображення чисел, визначеного нескінченною додатною стохастичною матрицею $Q_s^* = \|q_{ik}\|$, $q_{0k}+q_{1k}+\cdots+q_{s-1,k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{q_{ik}\} = 0$, а саме: $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \beta_{\alpha_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_k k}\prod\limits_{j-1}^{k-1} q_{\alpha_j j})$, де $\alpha_k \in A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\beta_{ik} = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_{jk}$, яка означується рівністю

$$y = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{G_s^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots} = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\delta_{\gamma_k k}\prod_{j-1}^{k-1} g_{\gamma_j j}),$$

де (g_{0k}) — послідовність чисел, менших від 1, $g_{1k} \equiv 1 - g_{0k}$, $\delta_{0k} = 0$, $\delta_{1k} = g_{0k}$,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, \text{ якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, \text{ якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \quad n \in N. \tag{6}$$

Теорема ***(Основний результат).*** *Функція f неперервна в кожній точці відрізка [0;1], ніде не монотонна, має необмежену варіацію при будь–яких матрицях $Q_s^* =\| q_{ik} \|$ і $G_2^* =\| g_{jk} \|$.*

Лема 4.3.1. *1) Образом Q_s^*-циліндра $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ при відображенні f є G_2^*-циліндр $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$, де γ_i знаходять за формулами (6);*

2) $$\max_{x\in\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}} f(x) = \begin{cases} f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}(c_m)}) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}(1)}, \text{ якщо } \gamma_m(y) = 1, \\ f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(i)}) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}0(1)}, \text{ якщо } \gamma_m(y) = 0, \end{cases}$$

де $i \neq c_m$ (в останньому випадку максимумів $s-2$);

3) $$\min_{x\in\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}} f(x) = \begin{cases} f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}(c_m)}) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}(0)}, \text{ якщо } \gamma_m(y) = 0, \\ f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(i)}) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}1(0)}, \text{ якщо } \gamma_m(y) = 1, \end{cases}$$

де $i \neq c_m$ (в останньому випадку мінімумів $s-2$).

Наслідок 4.3.1. *Коливання ψ_f функції f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ дорівнює довжині циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m} = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})$, тобто: $\psi_f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}) = |\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}| = \prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j}$.*

Лема 4.3.2. *Кількість k прообразів циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_m}$ обчислюється за формулою*

$$k = k(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}) = \begin{cases} (s-1)^{\sigma_m}, \text{ якщо } \gamma_1 = 0, \\ (s-1)^{1+\sigma_m}, \text{ якщо } \gamma_1 \neq 0, \end{cases}$$

де σ_m – це кількість таких j, що $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Наслідок 4.3.2. *Найбільшу кількість прообразів серед циліндрів m–го рангу має G_2^*–циліндр $\Delta^{G_2^*}_{1010\ldots c}$, де $c = 0$, якщо m – парне, і $c = 1$, якщо m – непарне.*

ВИСНОВКИ

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел — це добрий засіб для розвитку теорії чисел (метричної й ймовірнісної), опису і дослідження множин, функцій, мір із локально складними властивостями топологометричного характеру, для вдосконалення інструментарію теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу). Так понад три десятиріччя двосимвольне Q_2–зображення чисел, яке ґрунтується на їхній розкладах у ряди за двома додатними основами, різнопланово використовувалось для розвитку теорії дійсних чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, теорії функцій, теорії фракталів. Ми його використали для узагальнення функцій і рядів Радемахера й Уолша зі збереженням їхніх основних властивостей і маємо надію на їхнє подальше практичне застосування.

Нове двосимвольне G_2–зображення чисел, яке ми ввели, використовує дві основи різного знаку. Воно є аналогом Q_2–зображення чисел, має схожу метричну та ймовірнісну складові теорії, що є наслідком збігу основних метричних відношень, але інші топологічні властивості (позиційну складову геометрії зображення). Це зображення має принципові відмінності не лише з Q_2–зображенням, а й із іншими раніше вивченими двосимвольними зображеннями. Однією з таких відмінностей є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр неперервний, а це важливо для ергодичної теорії, яка ґрунтується на такому зображенні, а також для конструктивної теорії ніде не монотонних і недиференційовних функцій. Іншою особливістю G_2–зображення є те, що інверсор цифр — це ніде не монотонна всюди розривна функція, а числа, що мають два зображення (G_2–бінарні числа), належать одній хвостовій множині. Зрештою, група неперервних перетворень відрізка, що зберігають хвости G_2–зображення чисел, має нетривіальну підгрупу зростаючих функцій.

Для запропонованого у роботі узагальнення неперервних недиференційовних функцій Буша, Вундерліха, Трибін–функції, яке ґрунтується на Q_s^*–зображенні чисел відрізка $[0;1]$, доведено неперервність, ніде не монотонність, необмеженість варіації й описано властивості рівнів при будь–якому наборі параметрів (а їх — континуальна кількість). При цьому залишились поза увагою диференціальні, інтегральні і фрактальні властивості функції. А вони є об'єктом самостійного наукового інтересу, який ми плануємо у майбутньому розвивати.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, № 3. С. 146 – 157.
2. Маслова Ю.П. Працьовитий М.В. Узагальнення та аналоги функцій Радемахера, пов'язані з симетричними Q_s–зображенням дійсних чисел. *Зб. праць. Ін-ту матем. НАН України.* 2017. Т.14, № 4. С. 82–96.
3. Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2018. Т. 15, № 1. С. 132-146.
4. Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. *Нелінійні коливання.* 2019, Т. 22, №3, С. 380–390.
5. Василенко Н.А., Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Потужність множини неперервних функцій, які зберігають цифру 1 Q_3–зображення числа. *Буковинський математичний журнал.* 2019, Т. 7, №1. С. 69–81.
6. Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2019. Т. 16, № 2. С. 50–62.
7. Ptaysiovytyi M., Lysenko I., Maslova Yu. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2 — representation of numbers. A*lgebra and Discrete Mathematics.* Vol. 29 (2020). № 1, pp. 99–108.
8. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Ряди Уолша в метричній теорії чисел. *Тези доповідей IV Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики*, 23 – 25 квітня 2015, Київ: НТУУ «КПІ», 2015 р. С.46
9. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне з узагальнень системи функцій Радемахера та Уолша. *Тези доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25 – 26 червня 2015 р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 34 – 37.
10. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Одне узагальнення системи функцій Уолша. *Тези доповідей V всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 25–26 квітня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 37.

11. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Аналог Трибін-функції, означений в термінах представлення чисел у двійковій та канторівській двійково-трійковій системах числення. *Тези доповідей всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 7–8 жовтня 2016, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 р. С. 65.
12. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функцій Радемахера та його узагальнення. *Тези доповідей VI Всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики.* 21–22 квітня 2017, Київ: НаУКМА, 2017 р. С. 45.
13. Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Двійково–п'ятіркова канторівська система зображення дробової частини дійсного числа. *Тези доповідей Міжнародної науково–практичної конференції «Сучасні проблеми фізико–математичної освіти і науки».* 25–26 травня 2017. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 155–157.
14. Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Трійковий аналог функції Радемахера. *Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Асиптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь».* 13–14 грудня 2017, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017 р. С. 69–70.
15. Maslova Yu., Pratsiovytyi M. A generalization of the Walsh seres by mean of Q_2–representation of real numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tesellatons*, September 24–28, 2018, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. 2018. P.32.
16. Маслова Ю.П. Функція випадкової величини з фрактальними властивостями. *Тези доповідей VII Всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики.* 19-20 квітня 2018, Київ: НТУУ «КПІ», 2018 р. С.49.
17. Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін–функції. *Тези доповідей XII Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 23 травня 2019, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2019 р. С. 45
18. Goncharenko Ya., Lysenko I., Maslova Yu. Geometry of numerical series and two–symbol systems of encoding of real numbers. *XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary if V. Bunyakovsky.* july 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine: Conf. materials. 2019. P.36.
19. Маслова Ю.П., Лисенко І.М. Група неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости G_2–зображення чисел. *Тези доповідей IX Всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та моло-*

дих вчених з математики. 10–11 квітня 2020. Київ: НаУКМА, 2020. С. 21.

20. Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Нова двоосновна система кодування дійсних чисел, її основні застосування. *Тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції «Відкриті еволюціонуючі системи».* 19–21 травня 2020. Київ. 2020. С. 251–256.

АНОТАЦІЯ

Маслова Ю.П. Тополого–метрична та фрактальна теорія двоосновного G_2–зображення чисел і її застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційне дослідження проведено у галузі метричної теорії чисел. Воно присвячене розвитку топологічної, метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій дійсних чисел, що ґрунтуються на двосимвольній системі кодування чисел (G_2–зображення), яка є аналогом відомої двоосновної системи (Q_2–зображення). Обидві основи другої системи додатні, а першої — одна основа додатна, а друга від'ємна. Для другої системи запропоновано нові застосування, а для першої створено нову цілісну теорію, яка має ряд принципових відмінностей.

G_2–зображення чисел відрізка $[0; g_0]$, де $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$, визначається розкладом числа в лакунарний знакопочережний ряд

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\alpha_k \in \{0; 1\}$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $\delta_i = i g_{1-i}$. Обидва зображення чисел формально однотипні, але не є топологічно еквівалентними. Вони мають однакові основні метричні відношення і схожу метричну складову теорії, але принципово різні властивості спеціальних функцій: операторів лівостороннього і правостороннього зсувів, інверсора. Доведено, що оператор лівостороннього зсуву цифр $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ неперервний, інверсор цифр зображення чисел $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ є всюди розривна, ніде не монотонна функція, а оператори правостороннього зсуву цифр $\tau_0\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\tau_1\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, бувши лінійними функціями, мають різну монотонність і однакові значення в точці g_0. Це категорично відрізняє G_2–зображення від інших відомих двосимвольних зображень, зокрема нега–двійкового.

У роботі запропоновано узагальнення функцій Радемахера й Уолша, які ґрунтуються на Q_2-зображенні чисел. Досліджено їх інтегральні властивості; доведено, що узагальнені функції Радемахера утворюють ортогональну систему функцій. Для кожної узагальненої функції Уолша знайдено її аналітичний вираз. Запропоновано узагальнення неперервних недиференційовних функцій Буша, Вундерліха, Трибін–функції, яке ґрунтується на Q_s^*–зображенні чисел відрізка $[0;1]$, зі збереженням властивостей неперервності, ніде не монотонності, автомодельності. Вивчено його варіаційні властивості, описано властивості рівнів, зокрема їхню масивність.

Ключові слова: система кодування (зображення) дійсних чисел; Q_2–зображення; G_2–зображення; циліндри; оператор лівостороннього зсуву; оператор правостороннього зсуву; інверсор цифр зображення; узагальнення функцій Радемахера й Уолша; Трибін–функція і її узагальнення; неперервні перетворення, які зберігають хвости G_2–зображення чисел.

АННОТАЦИЯ

Маслова Ю.П. Тополого — метрическая и фрактальная теория двухосновного G_2 – изображение цифр и ёё применение. — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертационное исследование проведено в области метрической теории чисел. Оно посвящено развитию топологической, метрической, вероятностной и фрактальной теории действительных чисел, основана на двухсимвольной системе кодирования чисел (G_2–изображение), которая является аналогом известной двухосновной системы (Q_2 – изображение). Обе основы второй системы являются положительными, а первой — одна основа положительная, а вторая отрицательная. Для второй системы предложены новые применения, а для первой создана новая целостная теория, которая имеет ряд принципиальных отличий.

G_2–изображение чисел отрезка $[0;g_0]$, где $g_0 \in (\frac{1}{2};1)$ определяется расписанием числа в ряд

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

где $\alpha_k = \{0;1\}$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = g_0$. Оба изображения чисел формально однотипные, но не являются топологически эквивалентными. Они

имеют одинаковые основные метрические отношения и похожую метрическую составляющую теории, но принципиально разные свойства специальных функций: операторов левостороннего и правостороннего сдвигов, инверсоров. Доказано, что оператор левостороннего сдвига цифр изображения чисел $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ является непрерывным, инверсоры цифр изображения чисел $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ есть везде разрывной, нигде не монотонной функцией, а операторы правостороннего сдвига цифр $\tau_0\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\tau_1\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, будучи линейными функциями, имеют разную монотонность и одинаковые значения в точке g_0. Это категорически отличает G_2 – изображение от других известных двухсимвольных изображений, в частности нега–двоичного.

В работе предложено обобщение функций Радемахера и Уолша, которые основываются на Q_2–изображении чисел. Исследовано интегральные свойства этих функций, доказано, что обобщённые функции Радемахера образуют ортогональную систему функций. Для каждой обобщённой функции Уолша найдено её аналитическое выражение. Предложено обобщение непрерывных недифференцированных функций Буша, Вундерлиха, Трибин–функции, основанное на Q_s^*–изображении цифр отрезка $[0;1]$ с сохранением свойств непрерывности, нигде не монотонности, автомодельности. Изучены вариационные свойства функции, описаны свойства её уровней, в том числе их массивность.

Ключевые слова: Система кодирования (изображение) действительных чисел; Q_2 – изображение; G_2 – изображение; цилиндры; оператор левостороннего сдвига; оператор правостороннего сдвига; инверсоры цифр изображения; обобщение функций Радемахера и Уолша; Трибин – функция и её обобщение; непрерывные преобразования, которые сохраняют хвосты G_2 – изображение чисел.

ABSTRACT

Maslova Yu.P. Topological–metric and fractal theory of the bi-based G_2–representation of numbers and its application. — Manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Scienses, speciality 01.01.06 — Algebra and Number Theory. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis belongs to the field of metric number theory. In the work, we develop topological, metric, probabilistic, and fractal theory of real numbers based on two-symbol system of encoding of numbers (G_2-representation).

This representation is an analogue of the known two-base system (Q_2-representation). Both bases of the latter system are positive but, for the former system, one base is positive and other base is negative. For the latter system, we give new applications and, for the former system, we create a new complete theory having some essential differences.

G_2-representation for numbers of closed interval $[0, g_0]$, where $g_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, is defined by expansion of a number to a lacunary alternating series

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

where $\alpha_k \in \{0, 1\}$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $\delta_i = ig_{1-i}$. Both representations are of the same type formally, however they are not topologically equivalent. They have the same basic metric relations and similar metric component of the theory but some special functions (left and right shift operators, inversor) have essentially different properties. We prove that the left shift operator $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ is continuous, the inversor of digits of the representation $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ is everywhere discontinuous nowhere monotonic function and the right shift operators $\tau_0\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\tau_1\left(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ are linear functions with different monotonicity and the same values at point g_0. This is an essential difference between the G_2-representation and other known two-symbol representations, particularly nega-binary representation.

In the thesis, we propose a generalization of Rademacher and Walsh functions based on the Q_2-representation of numbers. Their integral properties are studied. We prove that generalized Rademacher functions form an orthogonal system of functions. For every generalized Walsh function, its analytical expression is found. We give a generalization of continuous non-differentiable Bush, Wunderlich, and Tribin functions based on Q_s^*-representation of numbers of closed interval $[0, 1]$ such that properties of continuity, nowhere monotonicity, and self-similarity are preserved. Its variational properties are studied. We also describe the properties of level sets, particularly their massivity.

Key words: coding (representation) system of real numbers; Q_2-representation; G_2-representation; cylinders; left shift operator; right-hand shift operator; representation digit inversor; Rademacher functions and Walsh functions and their generalizations; Tribine-function and its generalization; continuous transformations that keep the tails G_2-representationof numbers.

Підписано до друку 10.08.2020. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,37. Умовн. друк. арк. 1,27.
Тираж 100 пр. Зам. №36

Інститут математики НАН України
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3