ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Заціха Ярослав Володимирович

УДК 512.53+512.64

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУП МАЛИХ ПОРЯДКІВ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________ Я. В. Заціха

Науковий керівник
Бондаренко Віталій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Заціха Я. В. Зображення напівгруп малих порядків. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – “алгебра та теорія чисел”. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена вивченню напівгруп порядку, меншого від п’яти, та їх матричних зображень.

Скінченнні напівгрупи вивчені не в такій мірі, як групи. Якщо говорити про опис напівгруп порядку n, то (не рахуючи тривіальні випадки $n = 1, 2$ і комп’ютерні обчислення) єдиними результатами в цьому напрямку є отримані японським математиком Т. Тамурою ще в 1953-1954 рр. класифікації напівгруп порядків 3 і 4. Незалежно ці результати отримав в 1955 р. Г. Е. Форсайт за допомогою комп’ютерної програми. Нвпівгрупи, як правило, вивчаються з точністю до ізоморфізму і дуальності; в цьому випадку напівгрупи з різних класів еквівалентності називаються різними. Число різних напівгрупп порядків 3 і 4 дорівнює відповідно 18 і 126. Обидва автори отримали описи напівгруп у вигляді таблиць Келі.

Подальші результати отримано лише з використанням комп’ютерних програм. А саме показано, що число різних напівгрупп порядків 5, 6, 7, 8, 9 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021, 1843120128, 52989400714478. При цьому мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення не досліджувалися.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені також не в такій мірі, як зображення груп.

Для скінченних груп над полями повністю визначено їх зображувальний тип для поля довільної характеристики. Якщо характеристика p поля не ділить порядок групи, то група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень; група в цьому випадку називається групою скінченного зображувального типу.

Якщо ж характеристика p поля ділить порядок групи, то група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. Для більшості груп задача про опис їх зображень включає в себе класичну задачу про пару матриць. Такі групи називаються дикими, а групи, які допускають явний опис зображень називаються ручними . Ручні та дикі групи в загальному випадку повністю описали в 1976 році В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд.

В теорії зображень напівгруп багато робіт присвячено вивченню незвідних зображень. Якщо ж говорити про опис нерозкладних зображень (у випадках, коли не всі вони незвідні), то в першу чергу слід виділити добре відомі результати про зображення над "хорошими" полями скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський) та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський, К. Рінгель). У цих випадках напівгрупи мають скінченний зображувальний тип.

Для напівгруп нескінченного зображувальний типу найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які природним чином переформульовуються в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов і Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко і К. Рінгель).

У випадку класів напівгруп відзначимо роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична), зображення напівгруп Рісса (С. М. Дяченко) і напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук). Такі напівгрупи можуть мати як скічення, так і нескінченний зображувальний тип.

У дисертації вивчаються напівгрупи третього і моноїди четвертого порядку (зокрема, описуються мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення) та їх матричні зображення. В тому числі розглядається задача про зображувальний тип, яка є однією з основних традиційних задач в сучасних теоріях зображень різних алгебраїчних об'єктів. Матричні зображення вивчаються як з точки зору лінійної алгебри (канонічні форми довільних зображень), так і з точки зору теорії зображень (опис нерозкладних зображень). Основним методом досліджень зображень є добре відомий метод київської школи з теорії матричних задач, який полягає в послідовному зведенні однієї матричної задачі до іншої (з використанням спеціальної техніки).

Дисертаційна робота складається із чотирьох розділів.

У першому розділі виписано таблиці Келі всіх (з точністю до ізоморфізму та дуальності) напівгруп порядку, меншого чотирьох, викладено основні початкові відомості з теорії зображень напівгруп і частково впорядкованих множин, та сформульована основна класифікаційна задача для в'язки ланцюгів.

У другому розділі в термінах твірних та визначальних співвідношень описані всі напівгрупи третього порядку і вказана множина із семи властивостей, яка є характеристичною для класу всіх напівгруп третього порядку.

Доведено, що з точністю до ізоморфізму і дуальності третього порядку вичерпуються такими напівгрупами.

Комутативні напівгрупи:

1)(1) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2)(2) $(0, c^2, c) = \langle c \rangle$: $c^3 = 0$;

3)(3) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

4)(6) $(0,b,e)=\langle b,e\rangle$: $b^2=0$;

5)(7) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

6)(9) $(0,c^2,c)=\langle 0,c\rangle$: $c^3=c^2$;

7)(10) $(0,b,e)=\langle 0,b,e\rangle$: $b^2=b$;

8)(12) $(0,e,c)=\langle 0,c\rangle$: $c^2=e$;

9)(15) $(c^2,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^3=c$, $b^2=c^2$, $bc=cb=c$;

10)(16) $(c^2,e,c)=\langle e,c\rangle$: $c^3=c$;

11)(17) $(c^2,c^3,c)=\langle c\rangle$: $c^4=c^2$;

12)(18) $(e,b,b^2)=\langle b\rangle$: $b^3=e$.

Некомутативні напівгрупи:

13)(4) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=b$;

14)(5) $(bc,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^2=c$, $bc=b^2$, $cb=c$;

15)(8) $(bc,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $cb=c$;

16)(11) $(0,b,c)=\langle 0,b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=b$, $cb=c$;

17)(13) $(a,e,c)=\langle a,e,c\rangle$: $a^2=a$, $c^2=c$, $ac=a$, $ca=c$;

18)(14) $(a,b,c)=\langle a,b,c\rangle$: $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $ab=a$, $ac=a$, $ba=b$, $bc=b$, $ca=c$, $cb=c$.

Доведено, що множина загальних властивостей $P_3(7)$, що складається із властивостей

$P(C)$: комутативність;

$P(1)$: існування одиничного елемента;

$P(0)$: існування нульового елемента;

$P^+(0)$: існування приєднаного нульового елемента;

$P_{id}(1)$: число ідемпотентів дорівнює 1;

$P_{id}(2)$: число ідемпотентів дорівнює 2;

$P_{gen}(2)$: найменше число твірних дорівнює 2,

є мінімальною характеристично повною множиною властивостей для класу всіх напівгруп порядку 3.

У третьому розділі вивчаються матричні зображення напівгруп третього порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп. Зокрема, доведено, що всі напівгрупи третього порядку мають ручний тип. У випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

У четвертому розділі вивчаються моноїди четвертого порядку та їх матричні зображення. В термінах твірних та визначальних співвідношень описані всі моноїди четвертого порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких моноїдів. Зокрема, доведено, що всі моноїди четвертого порядку мають ручний тип. У випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

Ключові слова: напівгрупа, моноїд, система твірних, визначальні співвідношення, матричні зображення, еквівалентність, нерозкладність, канонічні форми, зображувальний тип, характеристичні властивості.

ABSTRACT

Zaciha Ya. V. Representations of semigroups of small orders. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of semigroups of the order of less than five and their matrix representations.

Finite semigroups have not been studied to the same extent as groups. If we talk about the description of semigroups of order n, then (not counting the trivial cases $n = 1, 2$ and computer programs), the only results in this direction are obtained by the Japanese mathematician T. Tamura in 1953-1954 classifications of semigroups of orders 3 and 4. Regardless, these results were obtained in 1955 by G. E. Forsythe using a computer program. Semiroups are generally studied with precision to isomorphism and duality; in this case, semigroups of different equivalence classes are called different. The number of different semigroups of orders 3 and 4 is 18 and 126, respectively. Both authors received descriptions of semigroups in the form of Kelly tables.

Further results were obtained only by using computer programs. Namely, it is shown that the number of different semigroups of orders 5, 6, 7, 8, 9 is 1160, 15973, 836021, 1843120128, 52989400714478, respectively. However, the minimum systems of generators and the corresponding defining relations were not investigated.

The matrix representations of finite semigroups over fields have also not been studied to the same extent as group representations.

For finite groups above the fields, their representation type is completely defined. If the characteristic p of the field does not divide the order of the group, then the group always has, up to equivalence, finite number of non-decomposable representations; the group in this case is called a group of finite representation type.

If the characteristic p of the field divides the order of the group, then the group has finite representation type type if and only if its Sylow p-subgroup is cyclic. For most groups the problems of describing their representations includes the classic problem of a pair of matrices. Such groups are called wild, and groups that allow explicit descriptions of representations are called tame. The tame and wild groups are generally described in 1976 by V. M. Bondarenko and Yu. A. Drozd.

In semigroup representation theory, a lot of work is devoted to the study of irreducible representations. If we talk about the description of indecomposable representations (when not all of them are irreducible), then first of all, the well-known results should be highlighted over the "good" fields of a finite quite simple semigroup (I. S. Ponizovsky) and semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Ponizovsky, C. Ringel). In these cases, the semigroups have a finite representation type.

For semigroups of infinite representation type the most famous are the results from the theory of representations of algebras, which are naturally reformulated in terms of representations of semigroups: the description of representations pf the algebra $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (I. M. Gelfand, V. A. Po -no -ma -rev and L. O. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk, V. M. Bondarenko) and the algebra $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (V. M. Bondarenko and C. Ringel).

In the case of classes of semigroups, we note works on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna), representations of the Riss semigroups (S.

M. Dyachenko) and semigroups generated by the potential elements (V. M. Bondarenko, O. V. Zubaruk). Such semigroups can have both a finite and infinite representation type.

In the dissertation, the semigroups of the third and fourth order monoids are studied (in particular, one describes the minimum generating systems and the corresponding defining relations) and their matrix representations. Including the problem of the representation type that is one of the main traditional problems in modern theories of representations of various algebraic objects. Matrix representations are studied in terms of linear algebra (canonical forms of arbitrary representations) and in terms of representation theory (a description of the indecomposable representations). The main method of research of representations is the well-known method of the Kiev School of Matrix Problem Theory, which is consistent reducing one matrix problem to another (using special equipment).

The dissertation consists of four chapters.

The first chapter is written out Kelly's tables of all (up to isomorphism and duality) semigroups of order less than four, basic initial information is given on the theory of representations of semigroups and partially ordered sets, and formulate a basic classification problem for bundles of chains.

In the second chapter, in terms of generators and determining relations, one describes all third order semigroups and the set of seven properties that is characteristic for the class of all third order semigroups.

It is proved that, up to isomorphism and duality, the third order semigroups are exhausted by the following ones.

Commutative semigroups:

1)(1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2)(2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3)(3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4)(6) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5)(7) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6)(9) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7)(10) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8)(12) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9)(15) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10)(16) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11)(17) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12)(18) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

Noncommutative semigroups:

13)(4) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

14)(5) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

15)(8) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

16)(11) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

17)(13) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

18)(14) $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$.

It is proved that the set of common properties $P_3(7)$ consisting of properties

$P(C)$: commutative;

$P(1)$: existence of an identity element;

$P(0)$: existence of a null element;

$P^{+}(0)$: existence of an attached null element;

$P_{id}(1)$: the number of idempotents is 1;

$P_{id}(2)$: the number of idempotents is 2;

$P_{gen}(2)$: the smallest number of generators is 2,

is the minimal characteristic complete set of properties for the class of all semigroups of order 3.

In the third chapter one studies matrix representations of the third order semigroups. The criteria of representation type of such semigroups are proved. In particular, it is proved that all third order semigroups have tame type. In the case of the finite type, the canonical form of the matrix representations are specified. All (up to equivalence) indecomposable representations of the third order semigroups are described.

In the fourth chapter one studies the fourth order monoids and their matrix representations. In terms of the generators and determining relations all monoids of the fourth order are described. The criteria of representation type of such monoids are proved. In particular, it is proved that all fourth order monoids have tame type. In the case of the finite type, the canonical form of the matrix representations are specified. All (up to equivalence) indecomposable representations of the fourth order monoids are described.

Keywords: semigroup, monoid, system of generatots, defining relations, matrix representations, equivalence, indecomposability, canonical forms, representation type, characteristic properties.

Список публікацій за темою дисертації

Статті у наукових виданнях

1. Бондаренко В. М. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.

2. Bondarenko V. M. On characteristic properties of semigroups / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha / Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

3. Заціха Я. В. Про число піднапівгруп напівгруп малого порядку / Я. В. Заціха // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том. **12**, № 3. – С. 142–146.

4. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.

5. Бондаренко В. М. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **33**, № 2. – С. 19–26.

6. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень комутативних моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2019. – **34**, № 1. – С. 12–25.

Тези наукових доповідей

1. Zaciha Ya. V. On representations of semigroups of small orders / Ya. V. Zaciha // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of 11 Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 223.

2. Бондаренко В. М. Про характеристичні властивості комутативних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р., Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 53.

3. Bondarenko V. M. On characteristic properties of commutative semigroups of small order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 24.

4. Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups of order 3 / Ya. V. Zaciha // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 143.

5. Bondarenko V. M. On classification of matrix representations of monoids of the fourth order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // 12th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky: Vinnytsia, July 02-06, 2019: Abstracts. – Vinnytsia, 2019. – P. 21.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей комбінаторного характеру і матричних зображень над полем напівгруп малих порядків.

Скінченні напівгрупи вивчені не в такій мірі, як групи (і відносно комбінаторного аналізу, і відносно зображень над полями). Якщо говорити про опис, з точністю до ізоморфізму, напівгруп порядку n, то (не рахуючи тривіальні випадки $n = 1, 2$) першими результатами в цьому напрямку є отримані японським математиком Т. Тамурою ще в 1953-1954 рр. класифікації напівгруп порядків 3 і 4 (див. роботи [1] і [2]). Незалежно ці результати отримав в 1955 р. Г. Е. Форсайт (див.[3]) за допомогою комп'ютерної програми. Якщо напівгрупи розглядати додатково ще й з точністю до дуальності (в цьому випадку напівгрупи з різних класів еквівалентності називаються різними), то число напівгрупп порядків 3, 4 дорівнює відповідно 18, 126. Зауважимо, що обидва автори отримали описи напівгруп у вигляді таблиць Келі. Подальші результати отримано лише з використанням комп'ютерних програм. А саме показано, що число різних напівгрупп порядків 5, 6, 7, 8, 9 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021, 1843120128, 52989400714478 (див. [4] – [8]). При цьому розглядалися лише таблиці Келі, а, отже, мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення не досліджувалися.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені також не в такій мірі, як зображення груп.

Для скінченних груп над полями повністю визначено їх зображувальний тип для поля довільної характеристики. Якщо характеристика p поля не ділить порядок групи, то група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень; група в цьому випадку називається групою скінченного зображувального типу.

Якщо ж характеристика p поля ділить порядок групи, то група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. Для більшості груп задача про опис їх зображень включає в себе класичну задачу про пару матриць. Такі групи називаються дикими, а групи, які допускають явний опис зображень називаються ручними (точні формальні означення див. в [9]). Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описали В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд [10].

В теорії зображень напівгруп багато робіт присвячено вивченню властивостей незвідних зображень і виділенню класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [11, 12]), знаходженню зв'язків між незвідними зображеннями напівгрупи та її піднапівгруп, тощо. Відносно ж опису нерозкладних зображень (у випадках, коли не всі вони незвідні), в першу чергу слід виділити добре відомі результати про зображення над "хорошими" полями скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський [13]) та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський [14], К. Рінгель [15]). У цих випадках напівгрупи мають скінченний зображувальнтий тип.

Відносно напівгруп з нескінченним числом нерозкладних зображень (з точністю до еквівалентності) найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які природним чином переформульовуються в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов [16], Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко [17]) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко [18], К. Рінгель [19]).

У випадку класів напівгруп відзначимо роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням

(В. М. Бондаренко, О. М. Тертична [20, 21, 22]), зображення напівгруп Рісса (С. М. Дяченко [23, 24, 25]) і напівгруп, породжених потентними елементами [26]. Такі напівгрупи можуть мати як скіченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

Одним із основних методів вивчення матричних зображень груп і напівгруп (особливо в дослідженнях представників київської школи з теорії зображень) є метод матричних задач. Наприклад, класифікація модулярних зображень четверної групи Клейна зводиться до відомої задачі про жмуток матриць (В. А. Башев [27]), класифікація модулярних зображень діедральних груп зводиться до зображень в'язки ланцюгів (В. М.Бондаренко [28]), класифікація модулярних зображень квазідіедральних груп та узагальнених груп кватерніонів зводиться до зображень в'язки напівланцюгів (В. М.Бондаренко [28, 29]).

У дисертації вивчаються напівгрупи третього і моноїди четвертого порядку (зокрема, описуються мінімальні системи твірних і відповідні визначальні співвідношення) та їх матричні зображення. В тому числі розглядається задача про зображувальний тип, яка є однією з основних традиційних задач в сучасних теоріях зображень різних алгебраїчних об'єктів (див., зокрема,[30] – [55]). Матричні зображення вивчаються як з точки зору лінійної алгебри (канонічні форми довільних зображень), так і з точки зору теорії зображень (опис нерозкладних зображень). Основним методом досліджень зображень є добре відомий метод київської школи з теорії матричних задач, який полягає в послідовному зведенні однієї матричної задачі до іншої (з використанням спеціальної техніки).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи безпосередньо пов'язана з науковими дослідженнями кафедри алгебри і топології Інституту математики НАН України — теми "Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації 0111U002096), "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії" (номер державної реєстрації 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис систем мінімальних твірних і відповідних визначальних співвідношень для напівгруп третього порядку та моноїдів четвертого порядку і опис нерозкладних матричних зображень цих напівгруп над довільним полем.

Об'єктом дослідження є напівгрупи та їх матричні зображення над полем.

Предметом дослідження є явний вигляд визначальних співвідношень для мінімальних систем твірних скінченних напівгруп та канонічні форми і нерозкладність матричних зображень напівгруп.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є комбінаторний метод та сучасні методи лінійної алгебри і теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі нові результати про напівгрупи та їх матричні зображення:

- Вказана мінімальна система твірних і відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку.
- Знайдено сім загальних властивостей напівгруп, які для напівгруп третього порядку утворюють мінімальну характеристичну множину.
- Доведено, що всі напівгрупи третього порядку є ручними над довільним полем.
- Описано напівгрупи третього порядку скінченного та нескінченного зображувального типу.
- Отримано класифікацію (з точністю до еквівалентності) нерозкладних зображень всіх напівгруп третього порядку.
- Вказано мінімальну системи твірних і відповідні визначальні співвідношення для моноїдів четвертого порядку.
- Доведено, що всі моноїди четвертого порядку є ручними над довіль-

ним полем.

• Описано моноїди четвертого порядку скінченного та нескінченного зображувального типу.

• Описано (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення всіх моноїдів четвертого порядку.

• Вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку і моноїдів четвертого порядків, що мають скінченний зображувальний тип.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також відповідні методи, можуть бути використані при дослідженні зображень напівгруп більш високих порядків та в теоріях зображень інших об'єктів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 14-17 травня 2014 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 серпня 2017 р.).

— XII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій

215-й річниці з дня народження В. Буняковського (м. Вінниця, 2-6 липня 2019 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах ([56] – [61]), пять з яких (всі, окрім [58]) опубліковані у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України; одна з них [57] — у виданні, що відображається у наукометричній базі Scopus. Пять робіт опубліковано в матеріалах наукових конференцій ([62] – [66]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 150 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 122 сторінки. Список використаних джерел займає 910 сторінок (75 найменування).

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору В. М. Бондаренку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Напівгрупи порядку, меншого п'яти

Групам малих порядків присвячено багато робіт і вони досить добре вивчені. Напівгрупи малих порядків вивчені не в такій мірі і це пов'язано, зокрема, з тим, що число напівгруп конкретного порядку набагато більше, ніж груп. Навіть задача про опис напівгруп третього порядку є не зовсім простою, а аналогічна задача для напівгруп четвертого порядку є досить складною. Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності (дуальною до напівгрупи S називається напівгрупа S^{op} така, що $S^{op} = S$ як множини і $ab = c$ в S^{op} тоді і лише тоді, коли $ba = c$ в S). Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

1.1.1. Напівгрупи порядку, меншого чотирьох. Напівгрупа порядку 1 лише одна, а різних напівгруп із 2-х елементів a і b, як легко бачити, всього чотири; задається вони у вигляді твірних та визначальних співвідношень наступним чином: 1) $a^2 = b^2 = ab = ba = a$; 2) $a^2 = ab = ba = a$, $b^2 = b$; 3) $a^2 = ab = a$, $b^2 = ba = b$; 4) $a^2 = b^2 = a$, $ab = ba = b$.

Напівгрупи порядку 3 описали, у вигляді таблиць Келі, Т. Тамура [1] і (з використанням комп'ютерних програм) Г. Е. Форсайт [3]. Ми будемо притримуватися другої роботи (як більш доступної).

Отже, згідно вказаних робіт існує 18 різних напівгруп третього порядку:

Номер	Таблиця Келі			Номер	Таблиця Келі		
1	0	0	0	2	0	0	0
	0	0	0		0	0	0
	0	0	0		0	0	1
3	0	0	0	4	0	0	0
	0	0	0		0	0	0
	0	0	2		0	1	2
5	0	0	0	6	0	0	0
	0	0	0		0	0	1
	2	2	2		0	1	2
7	0	0	0	8	0	0	0
	0	1	0		0	1	0
	0	0	2		2	2	2
9	0	0	0	10	0	0	0
	0	1	1		0	1	1
	0	1	1		0	1	2
11	0	0	0	12	0	0	0
	0	1	1		0	1	2
	0	2	2		0	2	1
13	0	0	0	14	0	0	0
	0	1	2		1	1	1
	2	2	2		2	2	2
15	0	0	2	16	0	0	2
	0	0	2		0	1	2
	2	2	0		2	2	0
17	0	1	1	18	0	1	2
	1	0	0		1	2	0
	1	0	0		2	0	1

Зауважимо ще раз, що таблиці виписані в компактному вигляді, коли вказується основна частина таблиці Келі. Мається на увазі, що елементами напівгрупи є числа 0, 1, 2, а рядки і стовпці таблиці занумеровані (в зростаючому порядку) цими ж числами. Множення задається наступним чином: на перетині i-го рядка і j-го стовпця стоїть елемент напівгрупи, що є добутком i та j як елементів напівгрупи.

Повний запис пояснимо для напівгрупи 1). У розгорнутому вигляді таблиця Келі має такий вигляд:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

Перший рядок (стовпець) такої таблиці будемо називати додатковим.

Зауважимо, що статті про опис напівгруп 3-го порядку з'являлися і значно пізніше; див., наприклад, [67].

1.1.2. Напівгрупи четвертого порядку Напівгрупи порядку 4 описав Т. Тамура в 1954 р. (див. [2]), а в 1955 р. — Г. Е. Форсайт (див. [3]); друга робота виконана за допомогою комп'ютерної програми. В обох роботах опис отримано в термінах таблиць Келі, причому відповіді збігаються (тобто вибрані одні і ті ж представники із класів еквівалентності, що задаються ізоморфізмом і дуальністю). Випишемо таблиці Келі всіх таких (попарно різних) напівгруп, число яких дорівнює 126; елементи кожної напівгрупи позначені числами $0, 1, 2, 3$. При цьому напівгрупи нумеруються в тому ж порядку, як в роботі [3], але починаючи не з 0, а з 1.

Отже, список всіх вказаних таблиць Келі:

$1-5$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{matrix}$
$6-10$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{matrix}$
$11-15$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&1&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&1&2&3\end{matrix}$
$16-20$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{matrix}$
$21-25$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&1&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&3\end{matrix}$
$26-30$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&0&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&3\\0&0&3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&0\\3&3&3&3\end{matrix}$

$31-35$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&2\\0&1&2&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&2\\0&1&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&3&2\end{matrix}$
$36-40$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\2&2&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&3\end{matrix}$
$41-45$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&1&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$
$46-50$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&2&0\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&2&1\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\2&2&2&2\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\2&2&2&2\\0&0&2&3\end{matrix}$
$51-55$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\2&2&2&2\\0&1&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\2&2&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\2&2&2&2\\2&2&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&2\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&2\end{matrix}$
$56-60$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\3&3&3&3\end{matrix}$
$61-65$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&3\\0&0&3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$

$66-70$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\2&2&2&2\\2&2&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\2&2&2&2\\0&1&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\2&2&2&2\\0&1&0&3\end{matrix}$
$71-75$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\2&2&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\2&2&2&2\\0&3&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\2&2&2&2\\2&3&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&3\\2&2&2&2\\0&1&0&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&3\\2&2&2&2\\0&3&0&1\end{matrix}$
$76-80$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&0&3\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&2&3\end{matrix}$
$81-85$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&1\\0&1&1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&1\\0&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&2\end{matrix}$
$86-90$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\end{matrix}$
$91-95$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&1&3\\0&3&3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&1&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&2&3\\0&3&3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&2&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$
$96-100$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&2\\0&2&1&1\\0&2&1&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&1&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&3&1\\0&3&1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\2&2&2&2\\2&3&0&1\end{matrix}$

$101-105$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$
$106-110$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$
$111-115$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$
$116-120$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{matrix}$
$121-125$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$
126	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$				

1.2. Матричні зображення напівгруп

Нехай S — напівгрупа і K — поле. Як завжди $M_n(K)$, $n \geq 0$, позначає напівгрупу (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із K. *Матричне зображення напівгрупи S над полем K* — це довільний гомоморфізмом T із S в $M_n(K)$ для деякого n. Число n називається *розмірністю* зображення T. Зображення розмірності 0 називається нульовим.

Якщо конкретна напівгрупа задана твірними і аизначальними співвідношеннями, то її матричне зображення задається набором матриць, що занумеровані (проіндексовані) твірними, які задовольняють ті ж співвідношенням, що і твірні.

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає, що існує оборотна матриця C така, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для кожного $x \in S$.

Пряма сума $T \oplus T'$, *матричних зображень* T і T' напівгрупи S — це зображення

$$T \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array}\right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі деяких двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі.

Сформулюємо означення еквівалентності матричних зображень напівгрупи S на мові елементарних перетворень рядків та стовпців матриць (див. наступний підрозділ). Вважаємо, що S має скінченну систему твірних G. Нехай T — деяке матричне зображення напівгрупи S. *Допустимими перетвореннями* для зображення T називаються наступні перетворення з рядками і стовпцями матриць $T(g), g \in G$: з рядками матриць

$T(g)$ одночасно можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому треба зробити (одночасно) обернене перетворення з їх стовпцями. Легко бачити, що еквівалентність двох матричних зображень T і T' напівгрупи S означає, що зображення T' можна отримати із зображення T за допомогою допустимих перетворень.

Зауважимо, що згідно означення напівгрупа не обов'язково має одиничний елемент. Це ж саме стосується і нульового елемента. А тому, коли напівгрупа має одиничний (відповідно нульовий) елемент, то із загального означення матричного зображення не випливає, що йому відповідає одинична (відповідно нульова) матриця. Проте ці умови можна вимагати, не обмежуючи по суті загальність. Більш детально, мають місце наступні твердження [68, Розділ 1]. Приведемо їх із доведеннями, які дають можливість більш глибоко зрозуміти логіку подібних тверджень. Доведення, як і формулювання, приводяться із [68] дослівно.

Твердження 1.1. *Якщо M — матричне зображення напівгрупи S з нулем, і ми не вимагаємо, щоб $M : 0 \to 0$, тоді єдиним нерозкладним зображенням, в якому нульовий елемент не переходить в нульову матрицю, буде наступне: $a \to 1$ для всіх $a \in S$.*

Доведення. Нехай M — довільне матричне зображення напівгрупи S. Оскільки ми не вимагаємо, щоб $M(0) = 0$, тоді нехай $M(0) = Q$, де Q — деяка матриця. Для всіх $a \in S$ виконуються рівності $a0 = 0$ і $0a = 0$ (зокрема, якщо $a = 0$, то маємо рівність $0^2 = 0$). Звідси (згідно означення матричного зображення) випливають наступні матричні рівності:

$$M(a)Q = Q, \tag{1.1}$$

$$QM(a) = Q, \tag{1.2}$$

$$Q^2 = Q. \tag{1.3}$$

Оскільки $Q^2 = Q$ (1.3), то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що перетвореннями подібності матрицю Q можна привести до вигляду

$$Q_0 = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

де E — одинична матриця; тобто існує оборотна матриця C така, що

$$Q = C \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) C^{-1} = CQ_0C^{-1}.$$

Розглянемо матричне зображення $\widehat{M} : a \to C^{-1}M(a)C$ (зауважимо, що $\widehat{M}(0) = C^{-1}M(0)C = C^{-1}QC = C^{-1}(CQ_0C^{-1})C = Q_0$). Оскільки зображення M і $\widehat{M}$ еквівалентні, то з рівностей (1.1) – (1.2) випливають наступні рівності:

$$\widehat{M}(a)Q_0 = Q_0,$$

$$Q_0\widehat{M}(a) = Q_0$$

або (що те ж саме)

$$\left(\begin{array}{c|c} \widehat{M}(a)_{11} & \widehat{M}(a)_{12} \\ \hline \widehat{M}(a)_{21} & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{1.4}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \widehat{M}(a)_{11} & \widehat{M}(a)_{12} \\ \hline \widehat{M}(a)_{21} & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Після перемноження матриць із рівності (1.4) отримаємо $\widehat{M}(a)_{11} = E$, $\widehat{M}(a)_{21} = 0$, а з рівності (1.5) маємо $\widehat{M}(a)_{11} = E$, $\widehat{M}(a)_{12} = 0$.

Отже, для довільного ненульового $a \in S$

$$\widehat{M}(a) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & \widehat{M}(a)_{22} \end{array}\right),$$

а для нульового елемента

$$\widehat{M}(0) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, $\widehat{M} = \widehat{M_1} \oplus \widehat{M_2}$, де $\widehat{M_1} : a \to E$ для всіх $a \in S$; $\widehat{M_2} : 0 \to 0$, $\widehat{M_2} : a \to \widehat{M}(a)_{22}$ для всіх ненульових $a \in S$, і до того ж зображення $\widehat{M_1}$ є прямою сумою зображення $a \to 1$ для всіх $a \in S$, звідки і випливає потрібне твердження.

Твердження 1.1 доведено.

Отже, припускаючи для напівгрупи з нулем, що нульовий елемент переходить у нульову матрицю, ми втрачаємо лише одне нерозкладне зображення $a \to 1$ для всіх $a \in S$.

Твердження 1.2. *Якщо M — матричне зображення напівгрупи S з одиницею, і ми не вимагаємо, щоб $M : 1 \to E$, тоді єдиним нерозкладним зображенням, в якому одиничний елемент не переходить в одиничну матрицю, буде наступне: $a \to 0$ для всіх $a \in S$.*

Доведення цього твердження проводиться повністю аналогічно доведенню твердження 1.1. Відмінність полягає лише в тому, що замість рівностей $a0 = 0$, $0a = 0$ і $0^2 = 0$ слід розглянути рівності $a1 = a$, $1a = a$ і $1^2 = 1$ (для всіх $a \in S$).

Кажуть, що напівгрупа S має *скінченний* (*зображувальний*) *тип* над полем K, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень, і *ручний* (відповідно *дикий*) (*зображувальний*) *тип* над полем K або є *ручною* (відповідно *дикою*) над полем K, якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою); відносно точних означення ручних і диких матричних задач див. роботи [9, 69]. Приведемо точні означення ручних і диких напівгруп, притримуючись матричної термінології.

Матричні зображення напівгрупи S можна розглядати також над кільцями (всі означення аналогічні, як у випадку полів). Ми розглядатимемо кільце $K_1 = K[x]$ поліномів від однієї змінної x та кільце $K_2 = K[x, y]$ некомутативних поліномів від двох змінних x і y (в інших термінах, вільну

K-алгебру з двома твірними). Для матричного зображення R напівгрупи S над кільцем K_1 і квадратної матриці A розміру $n \times n$ позначимо через $R(A)$ матричне зображення напівгрупи S над полем K, яке отримано з R підстановкою замість x матриці A, а замість кожного $a \in K$ скалярної матриці aE розміру $n \times n$, де E — одинична матриця. Далі, якщо R — матричне зображення напівгрупи S над кільцем K_2 і (A, B) — пара матриць однакового розміру $n \times n$, то через $RA, B)$ позначатимемо матричне зображення напівгрупи S над полем K, яке отримано з R підстановкою замість x матриці A, замість y матриці B, а замість кожного $a \in K$ скалярної матриці aE розміру $n \times n$.

Говоритимемо, що матричне зображення X напівгрупи S над полем K породжується матричним зображенням R напівгрупи S над кільцем K_1, якщо X еквівалентне зображенню вигляду $R(A)$ для деякого A.

Переходимо тепер безпосередньо до означення ручних та диких напівгруп. В першому випадку поле K вважаємо нескінченним (у випадку скінченного поля K його треба замінити нескінченним надполем). Напівгрупа S називається *ручною над полем* K, якщо для кожної розмірності n існує скінченне число матричних зображень R_i над кільцем K_1 таких, що, з точністю до еквівалентності, кожне нерозкладне матричне зображення напівгрупи S над полем K (розмірності n) породжується деяким R_i.

Очевидно, що напівгрупа скінченного типу є ручною.

Напівгрупа S називається *дикою над полем* K, якщо існує матричне зображення R над кільцем K_2 таке, що

а) $R(A, B)$ та $R(A', B')$ не еквівалентні кожного разу, коли пари (A, B) і (A', B') не подібні;

б) $R(A, B)$ нерозкладне, якщо нерозкладна пара (A, B).

Згідно основного результату роботи [9] напівгрупа не може бути одночасно ручною і дикою, а згідно результатів роботи [69] кожна скінченна напівгрупа є або ручною, або дикою (другий результат виконується при деяких обмеженнях на поле і зокрема, для алгебраїчно замкненого поля; в іншому разі виникає поняття майже дикості).

1.3. Зображення частково впорядкованих множин

Ми розглядаємо лише скінченні частково впорядковані (скорочено ч. в.) множини. Під підмножиною X ч. в. множини A завжди маємо на увазі повну ч. в. підмножину, тобто таку, що $x \leq y$ в X $(x, y \in X)$ тоді і лише тоді, коли $x \leq y$ в A.

Зображення ч. в. множин введено в роботі [31] на матричній мові. Нагадаємо це означення.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — ч. в. множина з відношенням порядку $\leq$. *Матричним зображенням ч. в. множини* A над полем k називається блокова матриця

$$M = \{M(x) \,|\, x \in A\} = \left[\; M(a_1) \,\middle|\, M(a_2) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, M(a_n) \; \right]$$

з елементами з поля k. Вектор $\overline{d} = \overline{d}(M) = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n)$, де d_0 — кількість рядків матриці M і d_i $(i = 1, \ldots, n)$ — кількість стовпців блоку $M(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, називається *вектор-розмірністю* зображення M, а число $d = d(M) = d_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i$ — його *розмірністю.*

Наступні перетворення з рядками і стовпцями зображення M називатимемо *допустимими перетвореннями* для M:

1) довільні елементарні перетворення рядків;

2) довільні елементарні перетворення зі стовпцями кожної матриці $M(a), a \in A$;

3) додавання стовпців матриці $M(a)$ (помножених на елементи поля) до стовпців матриці $M(b)$, якщо $a < b$.

Два матричні зображення ч. в. множини A називаються *еквівалентними*, якщо одне з них може бути отриманим із іншого за допомогою допустимих перетворень.

Прямою сумою зображень M і M' ч. в. множини A називається зображення

$$M \oplus M' = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} M(a_1) & 0 & M(a_2) & 0 & \cdots & M(a_n) & 0 \\ 0 & M'(a_1) & 0 & M'(a_2) & \cdots & 0 & M'(a_n) \end{array} \right].$$

Зображення M називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове зображення — це зображення розмірності 0). Для зображень ч. в. множини стандартним способом доводиться теорема Круля-Шмідта про однозначність розкладу довільного зображення в пряму суму нерозкладних зображень (див., напр., [71]).

Означення еквівалентності двох зображень ч. в. множини можна дати на мові матричних рівностей. Два зображення M і M' ч. в. множини A *еквівалентні*, якщо виконується матрична рівність $M' = XMY$, де X — довільна оборотна матриця, а Y — довільна оборотна матриця, яка задовольняє наступним умовам:

а) $Y = (Y_{ab})$, $a, b \in A$, — блокова матриця з квадратними діагональними блоками, горизонтальні (відповідно вертикальні) смуги якої занумеровані елементами ч. в. множини A; при цьому для будь-якого $a \in A$ кількість рядків у горизонтальній смузі матриці Y з номером a дорівнює кількості стовпців матриці $M(a)$ (в блоковій матриці M);

б) якщо $a \not\leq b$, то блок Y_{ab} матриці Y є нульовим.

Доведення цього факту випливає з того, що матриці елементарних перетворень виду 2) і 3) задовольняють умовам а), б) і, навпаки, довільна оборотна матриця, що задовольняє умовам а), б), є добутком матриць елементарних перетворень виду 2) і 3).

Кажуть, що ч. в. множина A має *скінченний (зображувальний) тип* над полем k, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень. Ч. в. множини скінченного типу описує наступна теорема, доведена М. М. Клейнером у роботі [32].

Теорема 1.3. *Ч. в. множина A має скінченний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить в собі підмножин такого вигляду:*

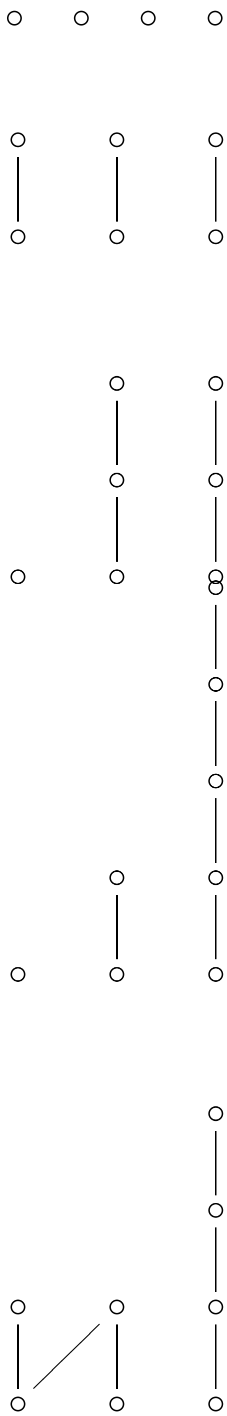
$\mathcal{K}_1$

$\mathcal{K}_2$

$\mathcal{K}_3$

$\mathcal{K}_4$

$\mathcal{K}_5$



Ч. в. множини $\mathcal{K}_i$ часто називають *критичними множинами Клейне-*

ра.

Зупинимося більш детально на зображеннях ч.в. множини A ширини $w(A) \leq 2$ (*ширина ч. в. множини* A — це максимальне число її попарно непорівняльних елементів), яка згідно теореми Клейнера завжди має скінченний тип.

Нехай спочатку A — будь-яка ч. в. множина. *Елементарними зображеннями ч. в. множини* A називаються наступні нерозкладні зображення:

1) M_0 — зображення ч. в. множини A розмірності 1, яке має один рядок і нуль стовпців;

2) M_{a0} $(a \in A)$ — зображення ч. в. множини A розмірності 1, яке має нуль рядків і один стовпець в матриці $M_{a0}(a)$;

3) M_{a1} $(a \in A)$ — зображення ч. в. множини A розмірності 2 з матрицею $M_{a1}(a) = (1)$;

4) $M_{ab} = M_{ba}$ (a і b непорівняльні елементи) — зображення ч. в. множини A розмірності 3 з матрицями $M_{ab}(a) = (1)$, $M_{ab}(b) = (1)$.

У статті [31] доведено наступне твердження.

Твердження 1.4. *Нехай A — ч. в. множина ширини $w \leq 2$. Тоді елементарними зображеннями вичерпуються (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення ч. в. множини A.*

Це твердження дозволяє виписати канонічну форму для будь-якого зображення ч. в. множини A ширини $w \leq 2$. А саме, якщо позначити через $N(a)$, де $a \in A$, множину всіх елементів $x \in A$, непорівняльних з a, а через A_0^2 множину всіх пар (x, y) непорівняльних елементів (вважаючи при цьому, що $(y, x) = (x, y)$), то з останнього твердження маємо, що будь-яке зображення M ч. в. множини A ширини $w \leq 2$ еквівалентне зображенню R_0 наступного вигляду:

1) R_0 — блокова матриця, яка має $1 + |A| + |A_0^2|$ горизонтальних смуг, а матриця $R_0(a)$ для кожного $a \in A$ має $2 + |N(a)|$ вертикальних смуг;

2) горизонтальні смуги матриці R_0 занумеровані (довільним чином) елементами множини $0 \cup A \cup A_0^2$, а вертикальні смуги кожної із матриць $R_0(a)$ — елементами множини $a0 \cup a1 \cup N(a)$;

3) на перетині горизонтальної смуги з номером p та вертикальної смуги з номером q в матриці R_0 стоїть одинична клітина в таких випадках: а) $p = a \in A, q = a1$; б) $p = (b, c) \in A_0^2$ і $q = b$ в матриці $R_0(c)$, або $q = c$ в матриці $R_0(b)$. У решті випадків відповідна клітина є нульовою.

Легко показати, що розміри всіх одиничних клітин матриці R_0 однозначно визначаються зображенням M.

1.4. Зображення в'язок ланцюгів

Зображення в'язок напівланцюгів (введених в загальному випадку в [28]) виникають при вивченні зображень різних класів сагайдаків зі співвідношеннями, алгебр та частково впорядкованих множин, в тому числі з інволюцією і відношенням еквівалентності. Основна класифікаційна теорема роботи [28] використовується також при вивченні різних задач сучасної теорії зображень, топології та алгебраїчної геометрії.

У цьому підрозділі викладено основні результати про зображення в'язок напівланцюгів у випадку, коли всі напівланцюги є ланцюгами. Ми притримуємося монографії [70].

Дамо спочатку означення в'язки ланцюгів та її зображень.

Ланцюгом довжини m називається довільна лінійно впорядкована ч. в. множина, тобто ч. в. множина

$$X = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_m,$$

де

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m.$$

Елементи x_i називаються *компонентами* ланцюга X.

Нехай

$$S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}, \; n \geq 1,$$

— деяка сім'я попарно неперетинних ланцюгів; не обмежуючи загальності, можна вважати, що множина $A_i \cup B_i$ непорожня для будь-якого $1 \leq i \leq n$. Покладемо

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$$

і $S_0 = A \cup B$. Множину S_0 можна вважати частково впорядкованою (порядок на ній індукується порядками, заданими на $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$). *В'язкою ланцюгів* $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ називається пара

$$\overline{S} = (S, \sigma),$$

де σ — деяка інволюція на S_0.

Матричним зображенням в'язки $\overline{S} = (S, \sigma)$ над полем k називається набір блокових матриць

$$U = \{U_1, \ldots, U_n\}$$

з коефіцієнтами з k такий, що виконуються наступні умови:

1) горизонтальні та вертикальні смуги матриці U_i $(1 \leq i \leq n)$ пронумеровані відповідно елементами ланцюгів A_i і B_i; смугу з номером $x \in S_0$ (яка належить U_i, якщо $x \in A_i \cup B_i$) позначимо $P(x)$ і у випадку, коли $x \in A$ (відповідно $x \in B$), число її рядків (відповідно стовпців) позначимо $\dim P(x)$;

2) якщо $x^\sigma = y$, де $x, y \in S_0$, то $\dim P(x) = \dim P(y)$.

Зауважимо, що смуга $P(x)$ може бути порожньою. Якщо порожніх смуг немає, зображення U називається *точним*; в супротивному випадку U називається *неточним*.

Розмірністю матричного зображення U називається сума числа рядків і стовпців усіх матриць U_i, а *вектор-розмірністю* називається вектор

$$(d_x),\ x \in S_0,$$

де $d_x = \mathrm{dim} P(x)$.

Зображення J_0 розмірності 0 назвемо *нульовим*.

Перед тим, як перейти до означення еквівалентності матричних зображень, введемо деякі означення і позначення.

Якщо горизонтальні і вертикальні смуги блокової матриці M пронумеровані відповідно елементами (не обов'язково лінійно впорядкованих) множин X і Y, то матрицю, яка стоїть на перетині горизонтальної смуги з номером x і вертикальної смуги з номером y, будемо позначати через M_{xy}. Якщо N — інша матриця, горизонтальні і вертикальні смуги якої пронумеровані відповідно елементами множин Y і Z, то будемо говорити, що вертикальний поділ матриці M узгоджений з горизонтальним поділом матриці N (і, навпаки, горизонтальний поділ матриці N узгоджений з вертикальним поділом матриці M), якщо для будь-якого $y \in Y$ число стовпців матриці M, що належать вертикальній смузі з номером y, дорівнює числу рядків матриці N, що належать горизонтальній смузі з тим же самим номером y. Очевидно, що в цьому випадку добуток MN можна вважати (причому природним чином) блоковою матрицею; до того ж її можна обчислювати поблоково:

$$(MN)_{xz} = \sum_{y \in Y} M_{xy} N_{yz}$$

для довільних $x \in X$ і $z \in Z$. Аналогічно можна означити узгодженість двох горизонтальних поділів чи двох вертикальних поділів.

Для довільної скінченної ч. в. множини X позначимо через $\mathcal{M}(X)$ (відповідно $\mathcal{M}'(X)$) множину всіх блокових матриць M над полем k, горизонтальні і вертикальні смуги яких пронумеровані елементами множини

X, і таких, що $M_{xy} = 0$, якщо $x \not\leq y$ (відповідно $x \not\geq y$). Множину квадратних матриць $M \in \mathcal{M}(X)$ (відповідно $M \in \mathcal{M}'(X)$) з квадратними діагональними блоками M_{xx} позначимо через $\mathcal{M}_0(X)$ (відповідно $\mathcal{M}'_0(X)$). Зауважимо, що якщо $M \in \mathcal{M}(X)$ — оборотна матриця, то $M^{-1} \in \mathcal{M}(X)$.

Нехай $\overline{S} = (S, \sigma)$ — в'язка ланцюгів $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$. Позначимо через $\mathcal{M}_0(\overline{S})$ сукупність усіх наборів $(M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_n)$ матриць

$$M_1 \in \mathcal{M}'_0(A_1), \quad M_2 \in \mathcal{M}'_0(A_2), \ \ldots, \ M_n \in \mathcal{M}'_0(A_n),$$

$$N_1 \in \mathcal{M}_0(B_1), \quad N_2 \in \mathcal{M}_0(B_2), \ \ldots, \ N_n \in \mathcal{M}_0(B_n)$$

таких, що для довільних зв'язаних між собою інволюцією σ елементів $x \in A_i \cup B_i$ і $y \in A_j \cup B_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ виконані такі умови:

1) $(M_i)_{xx} = (M_j)_{yy}$, якщо $x \in A_i$ і $y \in A_j$;

2) $(N_i)_{xx} = (N_j)_{yy}$, якщо $x \in B_i$ і $y \in B_j$;

3) $(M_i)_{xx} = (N_j)_{yy}$, якщо $x \in A_i$ і $y \in B_j$.

Два зображення $U = \{U_1, \ldots, U_n\}$ і $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ в'язки ланцюгів $\overline{S} = (S, \sigma)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони мають однакову вектор-розмірність і

$$U_1 N_1 = M_1 V_1,$$

$$U_2 N_2 = M_2 V_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_n N_n = M_n V_n,$$

де $(M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_n) \in \mathcal{M}_0(\overline{S})$ і до того ж усі матриці M_i, N_i є оборотними, а їх поділ на смуги узгоджений з поділом на смуги матриць зображень.

Дамо тепер означення еквівалентності матричних зображень в'язки ланцюгів на мові елементарних перетворень матриць.

Укажемо спочатку деяку множину перетворень матриць зображення U, які будемо називати *елементарними допустимими перетвореннями*:

1) якщо $x \in A$ і до того ж $x^\sigma \in A$, то з рядками горизонтальних смуг $P(x)$ і $P(x^\sigma)$ можна одночасно робити довільне елементарне перетворення;

2) якщо $x \in B$ і до того ж $x^\sigma \in B$, то зі стовпцями вертикальних смуг $P(x)$ і $P(x^\sigma)$ можна одночасно робити довільне елементарне перетворення;

3) якщо $x \in A$ і $x^\sigma \in B$, то з рядками горизонтальної смуги $P(x)$ можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому зі стовпцями вертикальної смуги $P(x^\sigma)$ треба зробити обернене елементарне перетворення;

4) якщо $x, y \in A_i$ і до того ж $x < y$, то в матриці U_i рядки, помножені на довільний елемент поля k, горизонтальної смуги $P(x)$ можна додавати до рядків горизонтальної смуги $P(y)$;

4′) якщо $x, y \in B_i$ і до того ж $x < y$, то в матриці U_i стовпці, помножені на довільний елемент поля k, вертикальної смуги $P(x)$ можна додавати до стовпців вертикальної смуги $P(y)$.

Допустимим перетворенням назвемо будь-яку композицію елементарних допустимих пертворень.

Еквівалентність зображень U і V в'язки $\overline{S}$ мовою елементарних перетворень означає, що одне з цих зображень можна отримати з іншого за допомогою допустимих елементарних перетворень (або, що те саме, допустимого перетворення).

Пряма сума зображень U і V — це зображення

$$U \oplus V = \{U_1 \oplus V_1, \ldots, U_n \oplus V_n\},$$

де $U_i \oplus V_i$ позначає пряму суму блокових матриць U_i і V_i $(i = 1, \ldots, n)$, тобто

$$(U_i \oplus V_i)_{xy} = (U_i)_{xy} \oplus (V_i)_{xy}$$

для довільних $x \in A_i$ і $y \in B_i$.

Зображення U називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень; в іншому разі зображення U називається *нерозкладним*.

Для зображень в'язки ланцюгів справедлива теорема Крулля-Шмідта, тобто кожне зображення розкладається в пряму суму нерозкладних зображень однозначно з точністю до еквівалентності та перестановки прямих доданків.

Переходимо до опису нерозкладних зображень довільної в'язки ланцюгів над довільним полем k. Кожне з таких зображень задається деякими інваріантами. Ми спочатку вкажемо формально ці інваріанти, а потім уже покажемо, як по них будуються нерозкладні зображення.

Нехай $\overline{S} = (S, \sigma)$ — в'язка ланцюгів $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$. Покладемо

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n.$$

Позначимо через L об'єднання множин A і B. Задамо на множині L бінарне симетричне відношення α, вважаючи, що $x\alpha y$ тоді і лише тоді, коли $x \neq y$ і $x^\sigma = y$.

Задамо ще на множині L бінарне симетричне відношення β, вважаючи, що $x\beta y$ тоді і лише тоді, коли

$$x \in A_i \ \text{ і } \ y \in B_i,$$

або

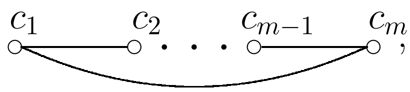
$$x \in B_i \ \text{ і } \ y \in A_i$$

для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Переходимо тепер до означення інваріантів, про які говорилося вище. Ними будуть так звані L-ланцюги та L-цикли.

Нехай Γ_1 — множина неорієнтованих графів, що складається з ланцюгів

де $1 \leq m < \infty$, а Γ_2 — множина неорієнтованих графів, що складається з циклів



де $2 \leq m < \infty$.

L-ланцюгом (відповідно *L-циклом*) називається функція g, означена на деякому графі C із Γ_1 (відповідно Γ_2), яка кожній вершині $c_i \in C$ ставить у відповідність елемент $g(c_i) \in L$ і кожному ребру $\rho \in C$ — відношення $g(\rho) \in \{\alpha, \beta\}$ і до того ж виконані такі умови:

а) якщо ρ зв'язує вершини c_i і c_{i+1}, то $g(c_i)$ і $g(c_{i+1})$ перебувають у відношенні $g(\rho)$;

б) якщо ρ і δ — сусідні ребра, то $g(\rho) \neq g(\delta)$.

Зауважимо, що для циклів індекси $j > m$ і $j < 1$ природно розглядати по модулю m.

Довжиною L-ланцюга (відповідно L-циклу) g називається число $m-1$ (відповідно m); вона буде позначатися через $|g|$. Очевидно, що довжина L-циклу є завжди парним числом.

L-графом, означеним на графі $C \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, назвемо довільний L-ланцюг, якщо $C \in \Gamma_1$, і довільний L-цикл, якщо $C \in \Gamma_2$. Зауважимо в зв'язку з цим означенням, що для графа, який не є ні ланцюгом, ні циклом, не існує функцій, які задовольняють умови а) і б).

L-граф g назвемо *повним*, якщо з $x\alpha y$ для $x \neq y$ і $g(c_i) = x$ випливає існування ребра ρ, одним із кінців якого є точка c_i і такого, що $g(\rho) = \alpha$ (тоді таке ребро єдине). Очевидно, що L-цикл є завжди повним. Множину всіх повних L-ланцюгів позначатимемо $C_1(L)$, а множину всіх L-циклів — $C_2(L)$. Покладемо $C(L) = C_1(L) \cup C_2(L)$.

Природним чином означимо L-*підланцюги* L-графа g (які будемо називати просто *підланцюгами* L-графа) — це обмеження функції g на підланцюги

$$\overset{c_i}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{c_{i+1}}{\circ} \cdots \overset{c_{i+s-1}}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{c_{i+s}}{\circ}$$

графа C (у випадку L-циклу $1 \leq i \leq m, 0 \leq s < m$).

L-ланцюг (відповідно L-цикл) однозначно визнача ється послідовністю

$$g_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

елементів з L і послідовністю відношень

$$g_1 = (\lambda_{12}, \lambda_{23}, \ldots, \lambda_{m-1,m})$$

(відповідно

$$g_1 = (\lambda_{12}, \lambda_{23}, \ldots, \lambda_{m-1,m}, \lambda_{m1})),$$

де $\lambda_{i,i+1} \in \{\alpha, \beta\}$, $\lambda_{i-1,i} \neq \lambda_{i,i+1}$ і $x_i \lambda_{i,i+1} x_{i+1}$.

Дуальним до L-ланцюга g називається L-ланцюг g^* (тієї ж самої довжини), для якого послідовності $(g^*)_0 = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ і $(g^*)_1 = (\lambda_{12}^*, \lambda_{23}^*, \ldots, \lambda_{m-1,m}^*)$ означені таким чином:

$$(g^*)_0 = (x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1),$$

$$(g^*)_1 = (\lambda_{m-1,m}, \ldots, \lambda_{23}, \lambda_{12});$$

нижче замість $(g^*)_0$ і $(g^*)_1$ будемо писати g_0^* і g_1^*. Аналогічно можна означити дуальний L-цикл g^*.

Ізоморфізмом L-графів g і g', визначених відповідно на графах C і C', називається такий ізоморфізм графів $\tau : C \to C'$, що

$$g = \tau g'.$$

Групу автоморфізмів L-графа g позначаємо $\operatorname{Aut} g$. Автоморфізм τ L-циклу g називається *обертанням*, якщо існує ціле s таке, що $\tau(c_i) = c_{i+s}$ для довільного i. Очевидно, що всі автоморфізми L-цикла є обертаннями. Повний L-граф називається *простим*, якщо його група автоморфізмів є одиничною. Очевидно, що L-ланцюг g завжди є простим.

Відношення α (відповідно β) будемо позначати також як $\sim$ (відповідно $\perp$). Тоді L-ланцюг довжини $m-1$ геометрично можна записати у вигляді

$$x_1 \sim x_2 \perp \cdots \perp x_{m-2} \sim x_{m-1} \perp x_m$$

або

$$x_1 \perp x_2 \sim x_3 \perp \cdots \perp x_{m-1} \sim x_m$$

для непарного m і у вигляді

$$x_1 \sim x_2 \perp \cdots \perp x_{m-1} \sim x_m$$

або

$$x_1 \perp x_2 \sim x_3 \perp \cdots \perp x_m$$

для парного m. L-цикл геометрично можна записати у вигляді

$$x_1 \sim x_2 \perp \cdots \perp x_{m-1} \sim x_m \perp$$

або

$$x_1 \perp x_2 \sim x_3 \perp \cdots \perp x_m \sim,$$

де останнє відношення зв'язує елементи x_m і x_1.

Елементарним підланцюгом L-графа g називається довільний підланцюг вигляду $x_{i-1} \perp x_i$.

Переходимо тепер до побудови зображень, що відповідають L-ланцюгам і L-циклам (які додатково задовольняють деякі природні умови, про які говорилося вище). При побудові цих зображень будемо вважати, для визначеності, що в матриці U_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, горизонтальна (відповідно вертикальна) смуга $P(y)$ стоїть вище (відповідно лівіше) горизонтальної (відповідно вертикальної) смуги $P(z)$, якщо $y < z$ в A_i (відповідно $y < z$ в B_i).

Розглянемо спочатку випадок L-ланцюгів.

Нехай $g \in C_1(L)$ — простий L-ланцюг довжини $m-1$ і $g_0 = (x_1, \ldots, x_m)$. Побудуємо для L-ланцюга g зображення $U(g)$, яке будемо називати канонічним зображенням першого типу.

Покладемо для кожного $x \in A \cup B$

$$g_0(x) = \{x_i \in g_0 \,|\, x_i = x\}.$$

Установимо спочатку взаємно однозначну відповідність між рядками і стовпцями "майбутніх" матриць $U_1, \ldots, U_n$ зображення $U(g)$ та елементами з g_0, вважаючи, що для довільного $x \in A_i$ (відповідно $x \in B_i$) рядки (відповідно стовпці) смуги $P(x)$ матриці U_i пронумеровані елементами множини $g_0(x)$. Тут $1 \leq i \leq n$.

До того ж вважаємо, що в кожній горизонтальній (відповідно вертикальній) смузі рядок (відповідно стовпець) із номером x_j стоїть вище рядка (відповідно лівіше стовпця) з номером x_r, якщо $j < r$.

Переходимо безпосередньо до побудови матриць U_i, $1 \leq i \leq n$, зображення $U(g)$.

У матриці U_i на перетині рядка з номером x_j і стовпця з номером x_r стоїть одиничний елемент, якщо в g існує елементарний підланцюг із кінцями x_j і x_r, і нульовий елемент — у супротивному випадку. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між одиничними елементами матриць зображення $U(g)$ та елементарними підланцюгами в g (і всі неодиничні елементи є нульовими).

Побудовані для кожного (повного) L-ланцюга g зображення $U(g)$ називаються *канонічними зображеннями першого типу.*

Розглянемо тепер випадок L-циклів.

Зіставимо кожному простому L-циклу g разом із поліномом $\varphi = \varphi(t)$

(що задовольняє деякі умови) зображення спеціального вигляду, які будемо позначати через $U(g,\varphi)$ і називати канонічними зображеннями другого типу.

Нехай $g \in C_2(L)$ — простий L-цикл, $g_0 = (x_1, \ldots, x_m)$.

Як у випадку, коли g — L-ланцюг, покладемо для кожного $x \in A \cup B$

$$g_0(x) = \{x_i \in g_0 \,|\, x_i = x\},$$

Серед елементарних підланцюгів $x_i \perp x_{i+1}$ візьмемо елементарний підланцюг із найменшим $i \in \{1, \ldots, m\}$; позначимо його через $e_1(g)$.

Зафіксуємо поліном $\varphi = \varphi(t)$ над k, який є степенем незвідного поліному $\varphi_0 \neq t$ (зі старшим коефіцієнтом 1).

Зображення $U(g,\varphi) = \{U_1, \ldots, U_n\}$ будуємо аналогічно зображенню $U(g)$ для L-ланцюга. Відмінним є лише те, що

а) в матрицях U_i, $1 \leq i \leq n$, горизонтальні (відповідно вертикальні) смуги додатково розбиті на підсмуги, що складаються із $j = \deg \varphi$ рядків (відповідно стовпців);

б) елементами із $g_0(x)$ пронумеровані вже не рядки і стовпці, а вказані горизонтальні і вертикальні підсмуги; до того ж елементарним підланцюгам відповідають уже не елементи матриць, а нові клітини (утворені додатковим поділом матриць);

в) кожному елементарному підланцюгу, окрім $e_1(g)$, відповідає одинична матриця E розміру $j \times j$, а підланцюгу $e_1(g)$ — клітина Фробеніуса Φ з характеристичним поліномом φ.

Побудовані для кожного простого L-циклу g зображення $U(g,\varphi)$, де $\varphi = \varphi(t)$ — поліном, який є степенем незвідного поліному $\varphi_0 \neq t$ (зі старшим коефіцієнтом 1) називаються *канонічними зображеннями другого типу.*

Зауважимо, що для зображення $U(g, \varphi)$ матрицю Φ можна замінити на довільну подібну їй матрицю. Це, наприклад, має сенс, коли поліном $\varphi(t)$ є степенем лінійного поліному — тоді замість Φ природно взяти її нормальну форму Жордана. Якщо ж поле k є алгебраїчно замкненим, то це природно зробити для всіх канонічних зображень другого типу.

Сформулюємо основну ковсифікаційну теорему.

Позначимо через $G_1(L)$ множину простих (повних) L-ланцюгів і через $G_2(L)$ множину простих L-циклів; покладемо $G(L) = G_1(L) \cup G_2(L)$. Для кожного L-графа $g \in G(L)$ ми побудували зображення (над полем k) спеціального вигляду, які назвали канонічними. А саме, побудовано зображення $U(g)$, якщо $g \in G_1(L)$, і $U(g, \varphi)$, якщо $g \in G_2(L)$, де $\varphi = \varphi(t)$ — поліном, який є степенем незвідного поліному $\varphi_0 \neq t$ (зі старшим коефіцієнтом 1).

Клас усіх канонічних зображень, побудованих для L-графа $g \in G(L)$, позначимо через $\mathcal{K}(g)$. Очевидно, $|\mathcal{K}(g)| = 1$, коли $g \in G_1(L)$ і $|\mathcal{K}(g)| = \infty$, коли $g \in G_2(L)$. Два класи канонічних зображень $\mathcal{K}(g)$ і $\mathcal{K}(h)$ назвемо *еквівалентними*, якщо для кожного зображення $U \in \mathcal{K}(g)$ існує еквівалентне йому зображення $V \in \mathcal{K}(h)$, і навпаки.

З основного результату роботи [28] випливає (як частинний випадок) наступна теорема.

Теорема 1.5.

1) *Довільне нерозкладне зображення в'язки ланцюгів $\overline{S} = (S, \sigma)$ еквівалентне деякому канонічному зображенню.*

2) *Усі канонічні зображення є нерозкладними.*

3) *Канонічні зображення з одного класу попарно нееквівалентні.*

4) *Якщо L-графи g і h ізоморфні, то класи $\mathcal{K}(g)$ і $\mathcal{K}(h)$ еквівалентні; в іншому разі $\mathcal{K}(g)$ і $\mathcal{K}(h)$ не містять в собі еквівалентних зображень.*

Ця теорема дає повну класифікацію нерозкладних зображень в'язки

$\overline{S} = (S, \sigma)$. Щоб отримати повний список нерозкладних попарно нееквівалентних зображень в'язки $\overline{S}$, треба в кожному класі ізоморфних L-графів зафіксувати по одному представнику і взяти всі вказані для нього канонічні зображення.

1.5. Висновки до розділу

У цьому розділі виписано таблиці Келі всіх (з точністю до ізоморфізму та дуальності) напівгруп порядку, меншого чотирьох, викладено основні початкові відомості з теорії зображень напівгруп і частково впорядкованих множин, та сформульована основна класифікаційна задача для в'язки ланцюгів.

Розділ 2

Комбінаторні властивості напівгруп третього порядку

2.1. Твірні та визначальні співвідношення

Напівгрупи порядку 3 описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. (див. роботу [1]). Із застосуванням комп'ютерних програм такий же опис отримав у 1955 році Г. Е. Форсайт. [3]. Ми будемо притримуватися другої роботи (як більш доступної).

Отже, згідно вказаних робіт існує 18 різних напівгруп третього порядку, таблиці Келі яких виписані в підрозділі 1.1.

Зауважимо, що таблиці виписані в компактному вигляді, коли вказується основна частина таблиці Келі. Мається на увазі, що елементами напівгрупи є числа 0, 1, 2, а рядки і стовпці таблиці занумеровані (в зростаючому порядку) цими ж числами. Множення задається наступним чином: на перетині i-го рядка і j-го стовпця стоїть елемент напівгрупи, що є добутком i та j як елементів напівгрупи.

Повний запис пояснимо для напівгрупи 1). У розгорнутому вигляді таблиця Келі має такий вигляд:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

Надалі з формальних міркувань зробимо в таблицях Келі заміни $0 = \langle 0\rangle$, $1 = \langle 1\rangle$, $2 = \langle 2\rangle$.

У цьому підрозділі для кожної напівгрупи третього порядку, які розглядаються з точністю ізоморфізму і дуальності, вказана деяка мінімальна система твірних та система визначальних співвідношень для цих твірних (дуальною до напівгрупи S називається напівгрупа S^{op} така, що S^{op} як множини і $ab = c$ в S^{op} тоді і лише тоді, коли $ba = c$ в S).

Переходимо до алгоритму, яким ми будемо користуватися.

Нехай $S = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \dots, \langle n\rangle\}$ — скінченна напівгрупа, яка задана таблицею Келі T. Ми хочемо знайти її мінімальну систему твірних та повну систему відповідних визначальних співвідношень. На першому кроці вибираємо деякий елемент $\langle s\rangle$ такий, що є (згідно таблиці) добутком деяких відмінних від нього елементів $\langle i\rangle$ та $\langle j\rangle$ (тобто $\langle s\rangle \neq \langle i\rangle, \langle j\rangle$, причому $\langle i\rangle$ та $\langle j\rangle$ можуть бути рівними); після цього в усій таблиці Келі (в тому числі в заголовному рядку і заголовному стовпцю) замість $\langle s\rangle$ підставляємо $\langle i\rangle\langle j\rangle$. Тоді заголовний рядок та заголовний стовпець нової таблиці T_1 буде складатися із елементів множини $S_1 = S \setminus \{\langle s\rangle\} \cup \{\langle i\rangle\langle j\rangle\}$; елементи основної частини таблиці T_1 також належать цій множині (але, як і для таблиці Келі, не обов'язково кожний елемент із S_1 зустрічається в основній частині таблиці).

На другому кроці серед елементів множини $S^{(1)} = S \setminus \{\langle s\rangle\}$ вибираємо деякий елемент $\langle s^{(1)}\rangle$ такий, що є добутком деяких елементів $i^{(1)}$ та $j^{(1)}$, де $i^{(1)} = \langle i_1\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle\langle i_2\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle\langle i_2\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$, де $\langle s_1\rangle \neq \langle i_1\rangle, \langle i_2\rangle, \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$; після цього в усій таблиці T_1 (в тому числі в заголовному рядку і заголовному стовпеці) замість $\langle s_1\rangle$ підставляємо $i^{(1)}j^{(1)}$ (отримуючи таблицю T_2).

На наступному кроці вибираємо уже елемент $s^{(2)}$ множини $S^{(2)} = S \setminus \{\langle s\rangle, \langle s^{(1)}\rangle\}$ і т. д. По завершенні цього процесу, скажімо після t кроків ($t \geq 0$), ми маємо систему твірних $S^{(t)}$ напівгрупи S (при цьому $S^{(0)} = S$) та систему відповідних визначальних співвідношень у вигляді таблиці $T^{(t)}$ (яку треба брати повністю). Ця система твірних буде мінімальною (це вимагає деяких пояснень).

Зауважимо, що вказаний процес неоднозначний і тому таким чином можна отримувати різні заключні системи твірних. Якщо розглядається досить широкий клас напівгруп, то можна формалізувати процес вибору елементів на кожному кроці (вказавши деяке правило), але це має сенс лише тоді, коли порядок елементів в заголовних рядках (а значить і стовпцях) всіх напівгруп також визначається по деякому правилу (таке правило, зокрема, існує, якщо список напівгруп у вигляді таблиць Келі визнається за допомогою комп'ютерних програм).

Ми не будемо більш детально говорити про загальний випадок, а розглянемо вказаний процес знаходження мінімальної системи твірних та відповідної системи визначальних співвідношень для напівгруп третього порядку. Зауважимо, що при виборі s, i, j (маючи на увазі вказану вище неоднозначність) ми користуємося "принципом максимуму", а саме на першому кроці: спочатку для s, при рівних s — для $i + j$, при рівних $i + j$ — для $\max(i, j)$, а при рівних $\max(i, j)$ — для j; аналогічно на другому кроці, але замість "більший" по відношенню до i (відповідно j) треба взяти "той, що стоїть нижче" (відповідно "той, що стоїть правіше"), маючи на увазі заголовний стовпець (відповідно заголовний рядок).

Отже, переходимо до 18-и попарно різних напівгруп третього порядку (див. підрозділ 2.1) Застосуємо вказаний вище алгоритм. В кожному із випадків (як ми побачимо) кількість кроків дорівнює $t \in \{0, 1, 2\}$. Рівність між стрілками (при переході від однієї таблиці до іншої) вказує на заміну в таблиці.

1) Напівгрупа вигляду 1) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2,$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

2) Напівгрупа вигляду 2) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2,$$

отримаємо таблицю

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Зробимо тепер заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2 \cdot \langle 2\rangle = \langle 2\rangle^3.$$

Маємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\langle 2\rangle^2$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$
$\langle 2\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\langle 2\rangle^2$

Більше замін зробити не можна.

3) Напівгрупа вигляду 3) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle,$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

4) Напівгрупа вигляду 4) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle,$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

5) Напівгрупа вигляду 5) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle),$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

6) Напівгрупа вигляду 6) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle^2,$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

7) Напівгрупа вигляду 7) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle),$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

8) Напівгрупа вигляду 8) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle),$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle\cdot\langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Більше замін зробити не можна.

9) Напівгрупа вигляду 9) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2),$$

отримаємо таблицю

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

10) Напівгрупа вигляду 10) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Замін зробити не можна.

11) Напівгрупа вигляду 11) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Замін зробити не можна.

12) Напівгрупа вигляду 12) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2),$$

отримаємо таблицю

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

13) Напівгрупа вигляду 13) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Замін зробити не можна.

14) Напівгрупа вигляду 14) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

Замін зробити не можна.

15) Напівгрупа вигляду 15) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2),$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

16) Напівгрупа вигляду 16) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2),$$

отримаємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

17) Напівгрупа вигляду 17) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 1\rangle = \langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle),$$

отримаємо таблицю

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

Зробимо тепер заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2.$$

Маємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$
$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Більше замін зробити не можна.

18) Напівгрупа вигляду 18) задається таблицею Келі

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

Зробивши заміну

$$\langle 2\rangle = \langle 1\rangle^2),$$

отримаємо таблицю

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

Зробимо тепер заміну

$$\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 1\rangle^2 = \langle 1\rangle^3.$$

Маємо таблицю

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$
$\langle 1\rangle^2$	$\langle 1\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$

Більше замін зробити не можна.

По заключній таблиці (в кожному конкретному випадку) видно, які елементи утворюють мінімальну систему твірних. А саме, це всі елементи напівгрупи із першого рядка чи стовпця (які ми назвали додатковими), що не записані у вигляді добутку інших. Вся ж таблиця задає визначальні співвідношення (які, звичайно, не зобов'язані утворювати мінімальну систему).

Вкажемо мінімальні системи твірних для кожної з 18 різних напівгруп третього порядку та випишемо визначальні співвідношення для виділених систем твірних. Зауважимо, що системи співвідношень, які будуть виписані не завжди є мінімальними. По-перше, така задача не ставилася, по-друге, для вивчення матричних зображень напівгруп це і не потрібно (інколи зайві співвідношення можуть бути навіть корисними). При описі канонічних форм матричних зображень напівгруп (див. підрозділ 3.2) деякі зайві співвідношення будуть вказані (як наслідок із матричних обчислень).

З формальних міркувань (більш традиційні символи) зробимо наступні заміни: :$a = \langle 0\rangle$, $b = \langle 1\rangle$, $c = \langle 2\rangle$. Одиничний елемент напівгрупи позначаємо через e (якщо він є), а нульовий — через 0 (також, якщо він є).

Випадки комутативних та некомутативних напівгруп розглядаються окремо і тому нумерація числами $1, 2, \ldots, 18$ вже буде іншою. В перших круглих дужках вказано старі номери, в других круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальні системи твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Теорема 2.1. *Напівгрупи* 1) – 18) *задаються у вигляді твірних та співвідношень наступним чином.*

Комутативні напівгрупи:

1)(1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2)(2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3)(3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4)(6) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5)(7) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6)(9) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7)(10) $(0,b,e)=\langle 0,b,e\rangle$: $b^2=b$;

8)(12) $(0,e,c)=\langle 0,c\rangle$: $c^2=e$;

9)(15) $(c^2,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^3=c$, $b^2=c^2$, $bc=cb=c$;

10)(16) $(c^2,e,c)=\langle e,c\rangle$: $c^3=c$;

11)(17) $(c^2,c^3,c)=\langle c\rangle$: $c^4=c^2$;

12)(18) $(e,b,b^2)=\langle b\rangle$: $b^3=e$.

Некомутативні напівгрупи:

13)(4) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=b$;

14)(5) $(bc,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^2=c$, $bc=b^2$, $cb=c$;

15)(8) $(bc,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $cb=c$;

16)(11) $(0,b,c)=\langle 0,b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=b$, $cb=c$;

17)(13) $(a,e,c)=\langle a,e,c\rangle$: $a^2=a$, $c^2=c$, $ac=a$, $ca=c$;

18)(14) $(a,b,c)=\langle a,b,c\rangle$: $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $ab=a$, $ac=a$, $ba=b$, $bc=b$, $ca=c$, $cb=c$.

Доведення теореми 2.1. Будемо по черзі розглядати напівгрупи 1) – 18) (в початковій нумерації). що задаються таблицями Келі (звертаючи увагу на останню, після перетворень, таблицю). Співвідношення, яке задається i-им рядком і j-им стовпцем таблиці Келі, позначається через (i,j).

Напівгрупа 1) комутативна (бо таблиця Келі симетрична). Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b,c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)$ маємо співвідношення $b^2=c^2=bc=cb=0$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b,c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0,b,c$ (в іншому разі існувало б співвідношення, яке не є наслідком вказаних, а тоді напівгрупа 1) була б нетривіальною фактор-напівгрупою напівгрупи із системою твірних b,c і співвідношеннями $b^2 = c^2 = bc = cb = 0$, а значить мало б порядок, менший трьох). В умові теореми ця напівгрупа під номером 1).

Таблиці Келі 2) – 18) (після перетворень) аналізуються аналогічно, тому приведемо потрібні міркування в дещо скороченій формі.

Напівгрупа 2) комутативна. Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елемент c утворює мінімальну систему твірних. Із рівності $(3, 2)$ маємо співвідношення $c^3 = 0$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного c , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, c, c^2$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 2).

Напівгрупа 3) комутативна. Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)$ маємо співвідношення $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, b, c$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 3).

Напівгрупа 4) некомутативна. Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)$ маємо співвідношення $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, b, c$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 13).

Напівгрупа 5) некомутативна.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2, 1), (2, 2), (2, 3)$ маємо співвідношення $b^3 = b^2$, $bc = b^2$, а із рівностей $(3, 2), (3, 3)$ — співвідношення $cb = c$, $c^2 =$

c. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами b, c, bc. В умові теореми ця напівгрупа під номером 14).

Напівгрупа 6) комутативна. Елемент a — нульовий, елемент c — одиничний.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, e утворюють мінімальну систему твірних. Із рівності $(2, 2)$ маємо співвідношення $b^2 = 0$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного b , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, e, b$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 4).

Напівгрупа 7) комутативна. Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)$ маємо співвідношення $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, b, c$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 5).

Напівгрупа 8) некомутативна.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2, 2), (3, 3), (3, 2)$ маємо співвідношення $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами b, c, bc. В умові теореми ця напівгрупа під номером 15).

Напівгрупа 9) комутативна. Елемент a — нульовий.

Із останньої таблиці випливає, що елемент c утворює мінімальну систему твірних. Із рівності $(3, 2)$ маємо співвідношення $c^3 = c^2$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного c , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, c, c^2$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 6).

Напівгрупа 10) комутативна. Елемент a — нульовий, елемент c — одиничний.

Із таблиці Келі випливає, що елементи b, e утворюює мінімальну систему твірних. Із рівності $(2,2)$ маємо співвідношення $b^2 = b$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного b , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, e, b$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 7).

Напівгрупа 11) некомутативна (бо таблиця Келі несиметрична). Елемент a — нульовий.

Із таблиці Келі випливає, що елементи $0, b, c$ утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(2,2), (3,3), (2,3), (3,2)$ маємо співвідношення $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних $0, b, c$, бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, b, c$. В умові теореми ця напівгрупа під номером 16).

Напівгрупа 12) комутативна. Елемент a — нульовий, елемент b — одиничний.

Із останньої таблиці випливає, що елементи $0, c$ утворюює мінімальну систему твірних. Із рівності $(3,3)$ маємо співвідношення $c^2 = e$. Вказане співвідношення є визначальним для твірних $0, c$, бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами $0, e, $. В умові теореми ця напівгрупа під номером 8).

Напівгрупа 13) некомутативна. Елемент b — одиничний.

Із таблиці Келі випливає, що елементи e, a, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(1,1), (3,3), (1,3), (3,1)$ маємо співвідношення $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних e, a, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами e, a, c. В умові теореми ця напівгрупа під номером 17).

Напівгрупа 14) некомутативна.

Із таблиці Келі випливає, що елементи a, b, c утворюють мінімальну систему твірних і виконуються співвідношення $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних a, b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами a, b, c. В умові теореми ця напівгрупа під номером 18).

Напівгрупа 15) комутативна.

Із останньої таблиці випливає, що елементи b, c утворюють мінімальну систему твірних. Із рівностей $(1, 2), (2, 2)$ маємо співвідношення $b^3 = b^2$, із рівностей $(1, 3), (3, 3)$ — співвідношення $c^3 = c$, із рівностей $(2, 2), (3, 3)$ — співвідношення $b^2 = c^2$ і із рівностей $(2, 3), (3, 2)$ — співвідношення $bc = cb = c$. Вказані співвідношення є визначальними для твірних b, c , бо із них випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами b, c, c^2. В умові теореми ця напівгрупа під номером 9).

Напівгрупа 16) комутативна. Елемент b — одиничний.

Із останньої таблиці випливає, що елементи e, c утворюює мінімальну систему твірних. Із рівностей $(1, 3), (3, 3)$ маємо співвідношення $c^3 = c$. Вказане співвідношення є визначальним для твірних e, c , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами e, c, c^2. В умові теореми ця напівгрупа під номером 10).

Напівгрупа 17) комутативна.

Із останньої таблиці випливає, що елемент c утворюює мінімальну систему твірних. Із рівності $(1, 1), (3, 3)$ маємо співвідношення $c^4 = c^2$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного c , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами c, c^2, c^3. В умові теореми ця напівгрупа під номером 11).

Напівгрупа 18) комутативна. Елемент a — одиничний.

Із останньої таблиці випливає, що елемент b утворюює мінімальну систему твірних. Із рівності $(1,3)$ маємо співвідношення $b^3 = e$. Вказане співвідношення є визначальним для твірного b , бо із нього випливає, що всі елементи напівгрупи вичерпуються трьома елементами e, b, b^2. В умові теореми ця напівгрупа під номером 12).

Теорема 2.2. *Будь-яка напівгрупа третього порядку* (*що не є групою*) *має єдину мінімальну систему твірних.*

Теорема випливає із аналізу таблиць Келі, а саме із опису, для кожної напівгрупи 1)–18), всіх піднапівгруп, що породжуються одним чи двома елементами (елементи довільні і фіксовані).

Маємо наступний опис піднапівгруп:

$$1)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

5)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

10)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned}
\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\
\{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\
\{\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\
\{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\
\{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)
\end{aligned}$$

13) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

14) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

15) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

16) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

17) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

18) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$

2.2. Характеристичні властивості

Усі властивості напівгруп вважаються інваріантними щодо ізоморфізму та анти-ізоморфізму (чи дуальності, що еквівалентно). Нагадаємо, що напівгрупи S і T називаються анти-ізоморфними, якщо напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T^{op}.

Нехай $\mathcal{K}$ — деяка фіксована множина напівгруп, а $\mathcal{P}$ – деяка множина загальних (якісних та кількісних) властивостей напівгруп. Для $S \in \mathcal{K}$

позначимо через $\mathcal{P}(S)$ набір усіх властивостей $P \in \mathcal{P}$, які виконуються для напівгрупи S.

Будемо говорити, що підмножина Q множини $\mathcal{P}$ характеристична для напівгрупи $S \in \mathcal{K}$, якщо, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму, S є єдиною напівгрупою в $\mathcal{K}$, для якої виконуються всі властивості із Q; якщо $Q = \{q_1, \ldots, q_s\}$, то властивості $q_1, \ldots, q_s$ називаються характеристичними для S. Множину властивостей $\mathcal{P}$ назвемо char-повною для $\mathcal{K}$, якщо для будь-якого $S \in \mathcal{K}$ підмножина $\mathcal{P}(S)$ є характеристичною для S; char-повна множина властивостей $\mathcal{P}$ називається мінімальною, якщо вона не містить власної char-повної підмножини.

В цьому підрозділі буде вказано 7 властивостей напівгруп, які утворюють мінімальну char-повну множину для класу всіх напівгруп порядку 3.

Розглянемо наступні властивості напівгрупи порядку 3:

$P(C)$: комутативність;

$P(1)$: існування одиничного елемента;

$P(0)$: існування нульового елемента;

$P^+(0)$: існування приєднаного нульового елемента;

$P_{id}(1)$: число ідемпотентів дорівнює 1;

$P_{id}(2)$: число ідемпотентів дорівнює 2;

$P_{gen}(2)$: найменше число твірних дорівнює 2.

Множину усіх цих властивостей позначимо через $P_3(7)$.

Теорема 2.3. *Множина $P_3(7)$ є мінімальною char-повною множиною властивостей для класу всіх напівгруп порядку* 3.

Переходимо до доведення теореми 2.3.

У наступній таблиці $\mathcal{T}$, яка випливає з результатів попереднього підрозділу, показано, які властивості виконуються для напівгруп 1) – 18)

(“ + ” означає, що відповідне властивість має місце, а його відсутність означає, що відповідна властивість не виконується:

	C	$P(1)$	$P(0)$	$P^+(0)$	$P_{id}(1)$	$P_{id}(2)$	$P_{gen}(2)$
1	+		+		+		+
2	+		+		+		
3	+		+			+	+
4			+			+	+
5						+	+
6	+	+	+			+	+
7	+		+				+
8							+
9	+		+	+		+	+
10	+	+	+	+			
11			+	+			
12	+	+	+	+		+	+
13		+					
14							
15	+				+		+
16	+	+				+	+
17	+				+		
18	+	+			+		

Оскільки всі рядки цієї таблиці (без врахування рядка і стовпця заголовків) попарно різні, то множина властивостей $P_3(7)$ є char-повною.

Щоб довести, що char-повна множина $P_3(7)$ мінімальна, достатньо перевірити, що таблиця $\mathcal{T}$ без будь-якого фіксованого стовпця X має два рівні рядки. Легко бачити, що якщо X дорівнює

$C, P(1), P(0), P^+(0), P_{id}(1), P_{id}(2), P_{gen}(2)$, тоді, відповідно, наступні два рядки є рівними: 3 і 4, 13 і 14, 4 і 5, 3 і 9, 1 і 7, 5 і 8, 8 і 14.

2.3. Висновки до розділу

У цьому розділі в термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі напівгрупи третього порядку. Вказана множина із семи властивостей, яка є характеристичною для класу всіх напівгруп третього порядку.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [56], [57], [58], [62] – [65].

Розділ 3

Матричні зображення напівгруп третього порядку

Всі матричні зображення розглядаються над полем K. Якщо не вказана характеристика поля, то вважається, що вона довільна. Згідно означення зображення напівгрупи над полем K називається модулярним, якщо його характеристика ділить порядок деякої скінченної піднапівгрупи.

Завжди вважаємо (див. у зв'язку з цим підрозділ 1.2), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c позначається відповідно через A, B, C. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$.

3.1. Формулювання теорем про зображувальний тип

Усі напівгрупи вважаються такими, що мають порядок три. Під зображенням завжди розуміємо матричне зображення над (довільним) полем K.

Нагадаємо, що напівгрупи розглядаються з точністю дуальності (і, звичайно, ізоморфізму). Це по суті не є обмеженням, бо дуальним напівгрупам відповідають зображення з транспонованими матрицями.

Теорема 3.1. *Всі напівгрупи третього порядку є ручними.*

Наступна теорема виділяє серед напівгруп 1)–18) напівгрупи з нескінченним числом нерозкладних зображень.

Теорема 3.2. *Лише комутативна напівгрупа*
$(0, b, c) = \langle b, c\rangle : b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0$
і некомутативна напівгрупа $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$:
$a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^2 = c,\ ab = a,\ ac = a,\ ba = b,\ bc = b,\ ca = c,\ cb = c$
мають (з точністю до еквівалентності) нескінченне число нерозкладних зображень.

Ці напівгрупи вказані в теоремі 2.1 (про опис опис напівгруп третього порядку) відповідно під номерами 1) і 18).

Те, що всі напівгрупи, окрім вказаних в останній теоремі, мають скінченне число нерозкладних зображень, випливає з наступних теорем 3.3 і 3.4. У таких випадках можна говорити про загальні канонічні форми. Повністю теореми 3.2 і 3.1 будуть доведені в підрозділі 3.5.

3.2. Канонічні форми

Теорема 3.3. *Канонічна форма для комутативних напівгруп* 2)–12) *третього порядку така:*

2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

для $charK \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $charK = 2$.

9) $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $charK \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $charK = 2$.

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c \rangle$: $c^3 = c$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $charK \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $charK = 2$.

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c \rangle$: $c^4 = c^2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char = 2$.

12) $(e, b, b^2) = \langle b \rangle$: $b^3 = e$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E \end{pmatrix}$$

для $char \neq 3$, *якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & -E & -E \end{pmatrix}$$

для $char \neq 3$, *якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$B = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char = 3$.

Теорема 3.4. *Канонічна форма для некомутативних напівгруп* 13)–18) *третього порядку така:*

13) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що у випадку, коли матричне зображення напівгрупи з одним твірним задається нормальною формою Жордана, можна це ж зображення задати і нормальною формою Фробеніуса (але не навпаки). Зрозуміло, що ми вибираємо нормальну форму Жордана як більш просту (в деяких випадках обидві форми збігаються).

3.3. Доведення теореми 3.3

Доведення для напівгруп 2), 4), 6)–8), 10)–12) випливає з відомих результатів лінійної алгебри (нормальна форма Жордана та Фробеніуса).

Розглянемо випадок напівгрупи 3).

Матриці B, C можна приводити одночасними перетвореннями подібності (саме такі перетворення відповідають еквівалентним зображенням). За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю C до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матрицю B, яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через B, щоб не нагромаджувати індекси (і цим принципом будемо користуватися завжди). Тоді, після розбиття матриці B на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці C), вона має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

де B_1, B_2, B_3, B_4 – деякі матриці. Використаємо рівності $BC = CB = 0$ (які відповідають визначальним співвідношенням $bc = cb = 0$):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $B_4^2 = 0$, то залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю B_4 до нормальної форми Жордана у вигляді

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана). При цьому треба розбити додатково матрицю C на нові блоки, відповідно до розбиття матриці B.

Випадок напівгрупи 5) розглядається аналогічно випадку напівгрупи 3), але починаємо з приведення матриці B і на заключному етапі отримуємо матрицю C_4, яка задовольняє рівність $C_4^2 = C_4$, а значить перетвореннями подібності може бути приведена до жорданового вигляду

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок напівгрупи 9).

Приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в такій формі:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці B), маємо

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}$$

і з рівностей $CB = BC = C$ випливає, що

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи рівність $B^2 = C^2$, отримуємо $C_1^2 = E$ і залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю C_1 до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $charK \neq 2$, і до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $charK = 2$. Зауважимо, що рівність $C^3 = C$ виконується автоматично (бо $c^3 = (c^2)c = b^2c = bc = c$).

3.4. Доведення теореми 3.4

Розглянемо спочатку випадок напівгрупи 13).

Приведемо (за допомогою перетворень подібності з обома матрицями) матрицю C до жорданового вигляду

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю B на блоки (такого ж розміру):

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівності $CB = B$, $BC = 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність $B^2 = 0$ виконується автоматично (бо $b^2 = (cb)(cb) = c(bc)b = 0$).

Легко бачить, що перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці C (тобто $X^{-1}CX = C$ або, в еквівалентній мові, $XC = CX$) тоді і лише тоді, коли воно має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X^{-1}BX = \begin{pmatrix} 0 & X_1^{-1}B_2X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а, отже, B_2 допускає довільні (незалежні) перетворення рядків і стовпців. Залишилося лише підставити в B замість блока B_2 його канонічну форму (відносно вказаних перетворень)

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок напівгрупи 14).

Приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в наступному вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix};$$

і використаємо спочатку рівність $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}.$$

Ліва частина цієї рівності (після перемноження матриць) дорівнює

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ C_5 & 0 & C_6 & 0 \\ C_9 & 0 & C_{10} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{14} & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 \\ C_9 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи тепер рівність $BC = B^2$, отримуємо, що

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність $C^2 = C$ виконується автоматично (бо $c^2 = (cb)(cb) = c(bc)b = c(b^2)b = cb^3 = cb^2 = (cb)b = cb = c$).

Виясним тепер, коли перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці B. Після підстановки і перемноження матриць рівність $BX = XB$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 \\ X_5 & 0 & X_6 & 0 \\ X_9 & 0 & X_{10} & 0 \\ X_{13} & 0 & X_{14} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & X_6 & 0 \\ 0 & 0 & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}.$$

Оскільки X^{-1} має вигляд

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_6^{-1} & Y_2 & Y_3 \\ 0 & 0 & X_6^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_8 & X_{16}^{-1} \end{pmatrix},$$

де $Y_3 = -X_6^{-1} X_8 X_{16}^{-1}$ (вирази для Y_2 і Y_8 не знадобляться), то

$$X^{-1}CX = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ X_6^{-1}C_5X_1 - X_6^{-1}X_8X_{16}^{-1}C_{13}X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{16}^{-1}C_{13}X_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, прийшли до задачі про зображення частково впорядкованої множини з двох порівняльних елементів і згідно результатів роботи [31] матриці X_1, X_6, X_8, X_{16} можна вибрати таким чином, що

$$X_6^{-1}C_5X_1 - X_6^{-1}X_8X_{16}^{-1}C_{13}X_1 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{16}^{-1}C_{13}X_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(відповідні вертикальні смуги мають однакову кількість стовпців). Залишилося лише підставити в C замість блоків C_5, C_{13} їхню вказану канонічну форму (як зображення вказаної частково впорядкованої множини).

Розглянемо випадок напівгрупи 15).

Приведемо матрицю B до вигляду

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівність $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді з рівності $C^2 = C$ маємо, що $C_1^2 = C_1$, $C_3C_1 = C_3$.

Перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці B тоді і лише тоді, коли воно має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}$$

(див. випадок 13)). Тоді

$$X^{-1}CX = \begin{pmatrix} X_1^{-1}C_1X_1 & 0 \\ X_4^{-1}C_3X_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Отже, C_1 допускає лише подібної перетворення матриці, а значить її можна привести (за допомогою вибору матриці X_1) до жорданового вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із $C_3C_1 = C_3$ випливає, що

$$C_3 = \begin{pmatrix} C_3' & 0 \end{pmatrix}$$

і, очевидно, матриці X_1 і X_4 можна вибрати таким чином, що (новий) вигляд матриці C_1 не зміниться, а матриця C_3' матиме вигляд

$$C_3' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Залишилося лише підставити в C замість блоків C_1, C_3 їхні вказані канонічні форми.

Розглянемо випадок напівгрупи 16).

Приведемо матрицю B до жорданового вигляду

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівності $BC = B$, $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі доведення проводиться аналогічно, як у випадку 13).

Випадок напівгрупи 17) збігається з випадком 16) з точки зору матричних зображень, бо якщо не враховувати нульові і одиничні елементи напівгруп, то після заміни a на b матимемо ті ж самі співвідношення.

3.5. Доведення теорем 3.1 і 3.2

Доведемо спочатку теорему 3.2.

Два зображення напівгрупи будемо називати переставно еквівалентними, якщо еквівалентність можна здійснити за допомогою мономіальної матриці (тобто матриці, в кожному рядку і кожному стовпці якої стоїть рівно один ненульовий елемент, який є одиницею поля).

Те, що всі напівгрупи 1)–18), окрім вказаних в теоремі 3.2 (тобто 1) і 18)), мають скінченне число нерозкладних зображень, випливає із теорем 3.3 і 3.4. Дійсно, згідно цих теорем довільне нерозкладне зображення еквівалентне деякому зображенню, що має канонічний вигляд, а значить є перестановно нерозкладною компонентою канонічного зображення. А таких компонент лише скінченне число. Зауважимо, що має місце і обернене твердження про те, що довільна переставно нерозкладна компонента канонічного зображення є нерозкладним зображенням, але це буде доведено в наступному рідрозділі.

Напівгрупа 1) має нескінченне число нерозкладних зображень для довільної фіксованої розмірності $n = 2m > 0$, а саме зображення

$$T(b) = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(c) = \begin{pmatrix} 0 & J_m(\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $J_m(\alpha)$ — клітина Жордана розміру $m \times m$ з власним числом α, E_m — одинична матриця розміру $m \times m$, нерозкладні і нееквівалентні між собою.

Серія зображень з аналогічними властивостями існує і для напівгрупи 18):

$$T(a) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(b) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad T(c) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ J_m(\alpha) & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходимо тепер до доведення теореми 3.1. Для її доведення достатньо показати (враховуючи, що теорема 3.2 вже доведена), що напівгрупи 1) і 18) є ручними.

Задача про матричні зображення напівгрупи 1) легко зводиться до відомої задачі про пучок матриць (про дві матриці, які допускають однакові перетворення з рядками обох матриць і однакові перетворення зі стовпцями обох матриць), а значить є ручною [72] (див, також [73]); вперше це показано в [27] для алгебраїчно замнутого поля характеристики 2.

Покажемо. що ручною є і напівгрупа 18).

Згідно випадку 16) (див. доведення теореми 3.4) за допомогою подібних перетворень матриці A і B можна привести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки (такого ж розміру, як в A та B) і використаємо рівності $AC = A$, $CA = C$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ C_9 & C_{10} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівності $C^2 = C$, $BC = C, CB = B$ виконується автоматично (бо $c^2 = (ca)(ca) = c(ac)a = ca^2 = ca = c$; $bc = (ba)c = b(ac) = ba = b$; cb=(ca)b=c(ab)=ca=c).

Виясним тепер, коли перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці A і B (тобто $AX = XA$, $BX = XB$). Після підстановки і перемноження матриць рівності $AX = XA$, $BX = XB$) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & 0 & 0 \\ X_5 & X_6 & 0 & 0 \\ X_9 & X_{10} & 0 & 0 \\ X_{13} & X_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & + & X_3 & X_2 & 0 & 0 \\ X_5 & + & X_7 & X_6 & 0 & 0 \\ X_9 & + & X_{11} & X_{10} & 0 & 0 \\ X_{13} & + & X_{15} & X_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & X_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & X_6 \\ 0 & 0 & 0 & X_8 \end{pmatrix}.$$

Аналіз матриці $X^{-1}CX$ (подібний як у випадку напівгрупи 14) при доведенні теореми 3.3) показує, що задача про опис зображень напівгрупи 18) зводиться до аналогічної задачі для в'язки двох ланцюгів $\{e_1 < e_2\}$ і$\{f_1 < f_2\}$ з наступною інволюцією: $e_1^* = e_1, f_1^* = f_1, e_2^* = f_2$. А саме зображенням вказаної в'язки є матриця

$$M = \begin{pmatrix} C_9 & C_{10} \\ C_{13} & C_{14} \end{pmatrix},$$

де першій і другій горизонтальним смугам відповідають відповідно елементи e_2 і e_1, а першій і другій вертикальним смугам — f_2 і f_1. Згідно класифікаційної теореми будь-яка в'язка ланцюгів є ручною (див. підрозділ 1.4).

Як наслідок маємо, що серед напівгруп третього порядку диких напівгруп немає.

3.6. Нерозкладні зображення

Як і раніше, всі матриці розглядаються над довільним полем K. Одиничну матрицю розміру $s \times s$ позначаємо через E_s. Матрицю (x) розміру 1×1 ототожнюємо з елементом x.

Через $\Phi = \Phi(f)$ позначаємо клітину Фробеніуса з характеристичним поліномом $f = f(x)$, яка (як добре відомо) є нерозкладною матрицею тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є степенем незвідного поліному $f_0 = f_0(x)$; у випадку нерозкладності Φ не оборотна тоді і тільки тоді, коли $f_0 = x$. Клітину Жордана розміру $s \times s$ з власним числом a позначаємо через $J_s(a)$.

В теоремах, які формулюються нижче,s — довільне натуральне число, а нерозкладну матрицю Фробеніуса з характеристичним поліномом $f(x) = (x-a)^s$ можна замінити на клітину Жордана $J_s(a)$. Через $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ позначаємо відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок довільної матриці.

Теорема 3.5. *Повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних зображень комутативних напівгруп третього порядку такі:*

1) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = 0$*,* $bc = cb = 0$*;*

1.1. $b \to 0, \quad c \to 0$*;*

1.2.
$$b \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad c \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & \Phi \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

Φ — *нерозкладна оборотна клітина Фробеніуса;*

1.3. $\quad b \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_s(0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad c \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right);$

1.4.)

$$b \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s \quad \overline{0} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right), \qquad c \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & \overline{0} \quad E_s \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right);$$

1.5.

$$b \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} E_s \\ \widetilde{0} \end{array} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right), \qquad c \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} \widetilde{0} \\ E_s \end{array} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right);$$

2) $(0, c^2, c) = \langle c \rangle$: $c^3 = 0$;

2.1. $c \to 0$;

2.2. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2.3. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

3.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

3.2. $b \to 0, \quad c \to 1$;

3.3. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $(0, b, e) = \langle b, e \rangle$: $b^2 = 0$;

4.1. $b \to 0$;

4.2. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

5.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

5.2. $b \to 1, \quad c \to 0$;

5.3. $b \to 0, \quad c \to 1$;

6) $(0, c^2, c) = \langle 0, c \rangle$: $c^3 = c^2$;

6.1. $c \to 0$;

6.2. $c \to 1$;

6.3. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $(0, b, e) = \langle 0, b, e \rangle$: $b^2 = b$;

7.1. $b \to 0$;

7.3. $b \to 1$:

8) $(0, e, c) = \langle 0, c \rangle$: $c^2 = e$;

для $char K \neq 2$:

8.1. $c \to 1$;

8.2. $c \to -1$;

для $char K = 2$:

8.1. $c \to 1$;

8.2. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

для $char K \neq 2$:

9.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

9.2. $b \to 1, \quad c \to 1$;

9.3. $b \to 1, \quad c \to -1$;

9.4. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

для $char K = 2$:

9.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

9.2. $b \to 1, \quad c \to 1$;

9.3. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

9.4. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c \rangle$: $c^3 = c$;

для $char K \neq 2$:

10.1. $c \to 0$;

10.2. $c \to 1$;

10.3. $c \to -1$;

для $char K = 2$:

10.1. $c \to 0$;

10.2. $c \to 1$;

10.3. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c \rangle$: $c^4 = c^2$;

для $char K \neq 2$:

11.1. $c \to 0$;

11.2. $c \to 1$;

11.3. $c \to -1$;

11.4. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

для $char K = 2$*:*

11.1. $c \to 0$*;*

11.2. $c \to 1$*;*

11.3. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*;*

11.4. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

12) $(e, b, b^2) = \langle b \rangle$*:* $b^3 = e$*;*

для $char \neq 3$*, якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці:*

12.1. $b \to 1$*;*

12.2. $b \to \varepsilon$*;*

12.3. $b \to \varepsilon^2$*;*

для $char \neq 3$*, якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці:*

12.1. $b \to 1$*;*

12.2. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$*;*

для $char = 3$*:*

12.1. $b \to 1$*;*

12.2. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

12.3. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 3.6. *Повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних зображень некомутативних напівгруп третього порядку такі:*

13) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = c$*,* $bc = 0$*,* $cb = b$*;*

13.1. $b \to 0, \quad c \to 0$*;*

13.2. $b \to 0, \quad c \to 1$;

13.3. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

14) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

14.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

14.2. $b \to 1, \quad c \to 1$;

14.3. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

14.4. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

14.5. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

15) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

15.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

15.2. $b \to 1, \quad c \to 0$;

15.3. $b \to 1, \quad c \to 1$;

15.4. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

16) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

16.1. $b \to 0, \quad c \to 0$;

16.2. $b \to 1, \quad c \to 1$;

16.3. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

17) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

17.1. $a \to 0, \quad c \to 0$;

17.2. $a \to 1, \quad c \to 1$;

17.3. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

18) $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$;

18.1. $a \to 0, \quad , b \to 0, \quad c \to 0$;

18.2. $a \to 1, \quad , b \to 1, \quad c \to 1$;

18.3. $a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline E_s & 0 \end{array}\right),$

$$c \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline \Phi & 0 \end{array}\right).$$

Переходимо до доведення цих двох теорем.

Як було сказано в попередньому підрозділі задача про матричні зображення напівгрупи 1) легко зводиться до задачі про пучок матриць. І щоб отримати всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення напівгрупи 1) (див. першу теорему), потрібно взяти всі нерозкладні пучки матриць (див. [74], [75]). В попередньому параграфі задача про матричні зображення напівгрупи 18) також зводиться до матричної задачі без алгебраїчних співвідношень, але вже зображень в'язки двох ланцюгів. І щоб отримати всі нерозкладні зображення напівгрупи 18) (див. другу теорему), потрібно взяти всі нерозкладні вказаної в'язки (див. підрозділ 1.4).

Переходимо тепер до випадків 2)–17). Відмітимо, які зображення включені у відповідні формулювання. Такими зображеннями (в кожному випадку) є ті і лише ті, які є переставно нерозкладними компонентами канонічного зображення у відповідному випадку (причому відібрані вони таким чином, щоб серед них не було переставно еквівалентних). А оскільки довільне нерозкладне зображення (як і взагалі будь-яке) еквівалентне деякому зображенню, що має канонічний вигляд (при деяких розмірах одиничних та нульових клітин), то воно еквівалентне деякій переставно нерозкладній компоненті канонічного зображення (див. у зв'язку з цим початок підрозділу 3.5). Значить, щоб довести теореми у випадках 2)–17), залишилося довести, що

а) всі вказані зображення не лише переставно нерозкладні, а взагалі нерозкладні:

б) вказані в кожному випадку зображення попарно не лише переставно нееквівалентні, а взагалі нееквівалентні.

Переходимо до доведення твердження а).

Зображення розмірності 1 завжди нерозкладні. Зображення 2.2 і 2.3 нерозкладні, бо елементу c відповідає клітина Жордана. Зображення 3.3 і 4.2 нерозкладні, бо елементу b відповідає клітина Жордана. Зображення 6.3 і 8.2 ($char K = 2$) нерозкладні, бо елементу c відповідає клітина Жордана. Зображення 9.4 (при $char K = 2$ і при $char K \neq 2$) нерозкладні, бо елементу b відповідає клітина Жордана. Зображення 10.3 ($char K = 2$), 11.4 (при $char K = 2$ і при $char K \neq 2$) і 11.3 ($char K = 2$) нерозкладні, бо елементу c відповідає клітина Жордана. Зображення 12.2 (при $char K \neq 3$, якщо в K не існує кубічного кореня $\varepsilon \neq 1$ з одиниці) нерозкладне, бо елементу b відповідає нерозкладна клітина Фробеніуса. Зображення 12.2 і 12.3 (обидва при $char K = 3$, 13.3 і 14.3 нерозкладні, бо елементу b відповідає клітина Жордана.

Зображення 14.4, 15.4 16.3 і 17.3 нерозкладні, бо із рівностей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

випливає, що матриця $X = (x_{ij})_{i,j=1.2}$ скалярна. Це видно після перемноження матриць:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{12} & 0 \\ x_{21}+x_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

І нарешті зображення 14.5 нерозкладне, бо із рівностей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

випливає, що матриця $X = (x_{ij})_{i,j=1.2,3}$ маєнаступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Це видно після перемноження матриць:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} \\ x_{31} & 0 & x_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21}+x_{22} & 0 & 0 \\ x_{31}+x_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Деяке зауваження до двох останніх випадків. Виписані для матриці X рівності задають кільце (алгебру) ендоморфізмів відповідного зображення. В обох випадках доведено, що це матричне кільце локальне, тобто немає ідемпотентів, окрім нульової та одиничної матриць. Звідси і випливає нерозкладність, бо пряма сума двох матриць A і B розмірів $n \times n$ і $m \times m$ відповідно комутує з ідемпотеном $E_n \oplus 0_m$, де E_n і 0_m — відповідно одинична матриця розміру $n \times n$ і нульова матриця розміру $m \times m$ (а значить довільне розкладне зображення комутує з деяким нетривіальним ідемпотентом).

Твердження а) доведено.

Твердження б) в кожному із випадків 2)–17) очевидне, бо еквівалентність одновимірних зображень означає їх рівність і два зображення будь-якої розмірності не можуть бути еквівалентними, якщо якісь дві матриці різних зображень, що відповідають одному і тому ж елементу напівгрупи, не подібні.

3.7. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються матричні зображення напівгруп третього порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [59] і [62].

Розділ 4

Моноїди четвертого порядку та їх матричні зображення

4.1. Комбінаторні властивості моноїдів четвертого порядку

4.1.1. Список моноїдів та їх властивості. Напівгрупи порядку 4 описав Т. Тамура в 1954 р. (див. [2]), а в 1955 р. — Г. Е. Форсайт (див. [3]); друга робота виконана за допомогою комп'ютерної програми. В обох роботах опис отримано в термінах таблиць Келі, причому відповіді збігаються (тобто вибрані одні і ті ж представники із класів еквівалентності, що задаються ізоморфізмом і дуальністю).

Таблиці Келі всіх таких (попарно різних) напівгруп, число яких дорівнює 126, виписані в розділі 2. Елементи кожної напівгрупи позначені числами $0, 1, 2, 3$. При цьому напівгрупи нумеруються в тому ж порядку, як в роботі [3], але починаючи не з 0, а з 1.

Із 126 напівгруп моноїдами є 27.

Номер	Таблиця Келі	Номер	Таблиця Келі
42	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	43	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Номер	Таблиця Келі	Номер	Таблиця Келі
45	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	48	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$
52	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	56	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$
58	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$	68	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$
71	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	82	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$
86	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	88	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$
89	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$	93	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}$
94	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$	98	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$

Номер	Таблиця Келі	Номер	Таблиця Келі
99	0 0 0 0 0 1 2 3 0 2 3 1 0 3 1 2	100	0 0 0 0 0 1 2 3 2 2 2 2 2 3 0 1
101	0 0 0 0 0 1 2 3 2 2 2 2 3 3 3 3	107	0 0 0 3 0 0 1 3 0 1 2 3 3 3 3 0
110	0 0 0 3 0 1 1 3 0 1 2 3 3 3 3 0	112	0 0 0 3 0 1 2 3 0 2 1 3 3 3 3 0
117	0 0 2 2 0 1 2 3 2 2 0 0 2 3 0 0	118	0 0 2 2 0 1 2 3 2 2 0 0 2 3 0 1
122	0 0 2 3 0 1 2 3 2 2 3 0 3 3 0 2	125	0 1 2 3 1 0 3 2 2 3 0 1 3 2 1 0
126	0 1 2 3 1 0 3 2 2 3 1 0 3 2 0 1	Всього 27	Комутативних 19

Розглядаємо наступні властивості моноїдів.

C: комутативність;

NC: некомутативність;

$P(0)$: існування нульового елемента;

$P^+(1)$: існування приєднаного одиничного елемента;

$P^+(0)$: існування приєднаного нульового елемента;

n_{id}: число ідемпотентів.

Символ "+" буде означать, що та чи інша властивість виконується, а "−" — що не виконується.

Твердження 4.1. *Виписані моноїди мають такі властивості:*

№	C	NC	$P(0)$	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}
1(42)	+	−	+	+	−	2
2(43)	+	−	+	+	−	2
3(45)	+	−	+	+	−	3
4(48)	−	+	+	+	−	3
5(52)	−	+	−	+	−	3
6(56)	+	−	+	+	−	3
7(58)	+	−	+	−	−	2
8(68)	+	−	+	+	−	4
9(71)	−	+	−	+	−	4
10(82)	+	−	+	+	+	3
11(86)	+	−	+	+	+	4
12(88)	+	−	+	−	+	3
13(89)	−	+	+	+	+	4
14(93)	+	−	+	+	+	3
15(94)	−	+	−	+	−	4
16(98)	−	+	−	−	−	3
17(99)	+	−	+	−	+	2

№	C	NC	$P(0)$	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}
18(100)	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	3
19(101)	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	4
20(107)	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
21(110)	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
22(112)	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	2
23(117)	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
24(118)	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	2
25(122)	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
26(125)	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	1
27(126)	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	1

Твердження доводиться безпосередньою перевіркою.

Наслідок 4.2. *Моноїдами четвертого порядку без приєднаного одиничного елемента є комутативні моноїди з номерами* $58, 88, 99, 112, 118, 125, 126$ *і некомутативні моноїди з номерами* $98, 100$. *Моноїди з іншими номерами мають приєднаний одиничний елемент.*

4.1.2. Твірні та визначальні співвідношення. Враховуємо позначення і домовленості для напівгруп третього порядку (підрозділ 2.1).

Зауважимо, що якщо для моноїда S четвертого порядку з приєднаною одиницею e мінімальна система твірних та відповідні визначальні співвідношення виписуються таким чином:

а) мінімальна система твірних моноїда S складається із мінімальної системи твірних напівгрупи $S \setminus e$ і елемента e; якщо при цьому напівгрупа $S \setminus e$ має одиничний елемент, то він вже позначається не e, а e_0;

б) визначальними співвідношеннями моноїда S є визначальні співвідношення напівгрупи $S \setminus e$; якщо при цьому напівгрупа $S \setminus e$ має одиничний елемент, то треба додати співвідношення $e_0 x = x e_0$ для будь-якого іншого твірного x напівгрупи $S \setminus e$.

Враховуючи, що мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення виписані в підрозділі 2.1, залишилося зробити це для моноїдів четвертого порядку без приєднаної одиниці.

Теорема 4.3. *Вказані в наслідку* 4.2 *моноїди четвертого порядку без приєднаного одиничного елемента задаються у вигляді твірних та співвідношень наступним чином.*

Комутативні моноїди:

$1cm)(58)$ $(e, 0, b, d) = \langle b, d\rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $d^2 = e$*,* $db = bd = b$*;*

$2cm)(88)$ $(e, 0, b, d) = \langle 0, b, d\rangle$*:* $b^2 = b$*,* $d^2 = e$*,* $db = bd = b$*;*

$3cm)(99)$ $(e, 0, c, c^2) = \langle 0, c\rangle$*:* $c^3 = e$*;*

$4cm)(112)$ $(e, c, d, d^2) = \langle c, d\rangle$*:* $c^2 = e$*,* $d^3 = d$*,* $dc = cd = d$*;*

$5cm)(118)]$ $(e, a, d, ad) = \langle a, d\rangle$*:* $a^2 = a$*,* $d^2 = e$*,* $da = ad$*;*

$6cm)(125)$ $(e, b, c, bc) = \langle b, c\rangle$*:* $b^2 = e$*,* $c^2 = e$*,* $cb = bc$*;*
$7cm)(126)$ $(e, c, c^2, c^3) = \langle c\rangle$*:* $c^4 = e$*;*

Некомутативні моноїди:

$8nm)(98)$ $(e, a, c, d) = \langle a, c, d\rangle$*:* $a^2 = a$*,* $c^2 = e$*,* $d^2 = d$*,* $ac = a$*,* $ca = a$*,* $ad = a$*,* $da = d$*,* $cd = d$*,* $dc = d$*;*

$9nm)(100)$ $(e, a, d, da) = \langle a, d\rangle$*:* $a^2 = a$*,* $d^2 = e$*,* $ad = a$*.*

Букви cm (при нумерації моноїдів) означають "комутативний моноїд", а nm — "некомутативний моноїд". В дужках після номеру вказано загальний номер моноїду в списку всіх таблиць Келі напівгруп четвертого порядку.

Теорема доводиться по тій же схемі, що і теорема 2.1. Вкажемо відповідні таблиці Келі, перетворення з ними та проаналізуємо заключні таблиці.

$1cm$) (58) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Таблиця Келі в повному вигляді (після перепозначення елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	b	e	d
0	0	0	0	0
b	0	0	b	b
e	0	b	e	d
d	0	b	d	e

Отже, моноїд складається з елементів $e, 0, b, d$ і має мінімальну систему твірних b, d зі співвідношеннями $b^2 = 0$, $d^2 = e$, $bd = b$, $db = b$, які є визначальними (бо вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

$2cm$) (88) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Таблиця Келі в повному вигляді (після перепозначення елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	b	e	d
0	0	0	0	0
b	0	b	b	b
e	0	b	e	d
d	0	b	d	e

Отже, моноїд складається з елементів $e.0, b, d$ і має мінімальну систему твірних $0, b, d$ зі співвідношеннями $b^2 = b$, $d^2 = e$, $bd = b$, $db = b$, які є визначальними (бо вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

$3cm$) (99) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з

перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	e	c	c^2
0	0	0	0	0
e	0	e	c	c^2
c	0	c	c^2	e
c^2	0	c^2	e	c

Отже, моноїд складається з елементів $e, 0, c, c^2$ і має мінімальну систему твірних $0, c$ зі співвідношенням $c^3 = e$, яке є визначальним (бо вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

$4cm$) (112) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з

перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 3\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	d^2	e	c	d
d^2	d^2	d^2	d^2	d
e	d^2	e	c	d
c	d^2	c	e	d
d	d	d	d	d^2

Отже, моноїд складається з елементів e, c, d, d^2 і має мінімальну систему твірних c, d зі співвідношеннями $c^2 = e$, $d^3 = d$, $cd = d$, $dc = d$, які є визначальними (бо вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

5cm) (118) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з

перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 2\rangle = \langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$
$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	a	e	ad	d
a	a	a	ad	ad
e	a	e	ad	d
ad	ad	ad	a	a
d	ad	d	a	e

Отже, моноїд складається з елементів e, a, d, ad і має мінімальну систему твірних a, d зі співвідношеннями $a^2 = a$, $d^2 = e$, $da = ad$, які є визначальними (бо вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

6cm) (125) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	e	b	c	bc
e	e	b	c	bc
b	b	e	bc	c
c	c	bc	e	b
bc	bc	c	b	e

Отже, моноїд складається з елементів e, b, c, bc і має мінімальну систему твірних b, c зі співвідношеннями $b^2 = e$, $c^2 = e$, $bc = cb$, які є визначальними (бо вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

$7cm$) (126) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	e	c^2	c	c^3
e	e	c^2	c	c^3
c^2	c^2	e	c^3	c
c	c	c^3	c^2	e
c^3	c^3	c	e	c^2

Отже, моноїд складається з елементів $e.c, c^2, c^3$ і має мінімальну систему твірних c зі співвідношенням $c^4 = e$, яке є визначальним (бо вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

$8nm$) (98) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	a	e	c	d
a	a	a	a	a
e	a	e	c	d
c	a	c	e	d
d	d	d	d	d

Отже, моноїд складається з елементів e, a, c, d і має мінімальну систему твірних a, c, d зі співвідношеннями $a^2 = a$, $c^2 = e$, $d^2 = d$, $ac = a$, $ca = a$, $ad = a$, $da = d$, $cd = d$, $dc = d$, які є визначальними (бо вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

$9nm$) (98) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 2\rangle = \langle 3\rangle\cdot\langle 0\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	
$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 3}$
$\langle 3\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle}$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 3\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle \cdot \langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	a	e	da	d
a	a	a	a	a
e	a	e	da	d
da	da	da	da	da
d	da	d	a	e

Отже, моноїд складається з елементів e, a, d, da і має мінімальну систему твірних e, a, d зі співвідношеннями $a^2 = a$, $d^2 = e$, $ad = a$, які є визначальними (бо вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

Доведення завершено.

4.2. Формулювання теорем про зображувальний тип

Всі матричні зображення розглядаються над полем K. Якщо не вказана характеристика поля, то вважається, що вона довільна.

Як і раніше, вважаємо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c позначається відповідно через A, B, C. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$.

Нагадаємо, що напівгрупи розглядаються з точністю дуальності (і, звичайно, ізоморфізму). Це по суті не є обмеженням, бо дуальним напівгрупам відповідають зображення з транспонованими матрицями.

Переходимо до формулювання теорем. При цьому розглядаються всі моноїди четвертого порядку (включаючи моноїди з приєднаною одиницею).

Теорема 4.4. *Всі моноїди четвертого порядку є ручними.*

Теорема 4.5. *Моноїди четвертого порядку, що мають* (*з точністю до еквівалентності*) *нескінченне число нерозкладних зображень над полем* K, *вичерпуються* (*з точністю до ізоморфізму та дуальності*) *наступними моноїдами:*

a) $(e, 0, b, c) = \langle e, b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $cb = bc = 0$;

K *— поле довільної характеристики;*

b) $(e, 0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = e$, $cb = bc = b$;

характеристика поля K *дорівнює* 2;

c) $(e, b, c, bc) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = e$, $c^2 = e$, $cb = bc$;

характеристика поля K *дорівнює* 2.

d) $(e, a, b, c) = \langle e, a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$;

K — поле довільної характеристики.

Перші три моноїди є комутативними, а останній — некомутативний; перший і останній моноїди з приєднаною одиницею.

Моноїди з неприєднаною одиницею b) і c) в теоремі 4.3 (про опис моноїдів четвертого порядку без приєднаної одиниці) вказані відповідно під номерами $1cm$) і $6cm$). Моноїди з приєднаною одиницею a і d) отримуються із напівгруп третього порядку (приєднанням одиничного елемента), які вказані в теоремі 2.1 (про опис опис напівгруп третього порядку) відповідно під номерами 1) і 18).

4.3. Опис матричних зображень моноїдів четвертого порядку

4.3.1. Канонічні форми. У цій частині дисертації ми вкажемо канонічні форми матричних зображень моноїдів четвертого порядку з неприєднаною одиницею $1cm), \ldots, 7cm), 8nm), 9nm)$, що мають (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень, тобто за виключенням моноїдів $1cm$) для будь-якої характеристики поля K і $6cm$) для $char\, K = 2$ (див. теорему 4.5).

Канонічні форми моноїдів четвертого порялку з приєднаною одиницею отримуються з канонічних форм напівгруп третього порядку очевидним чином (приєднаному одиничному елементу відповідає одинична матриця, а якщо відповідна напівгрупа третього порядку має свій одиничний елемент, то до всіх матриць канонічної форми цієї вже піднапівгрупи треба додати на останньому місці нульову горизонтальну і вертикальну смуги); якщо ж напівгрупа третього порядку не має одиничного елемента, то вказані нульові смуги додавати не потрібно, бо вони там уже є (незалежно має напівгрупа нульовий елемент чи не має).

Нагадаємо, що через E позначається одинична матриця довільного розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$, а тому довільні дві клітини E в матрицях не обов'язково рівні (якщо їх рівність не випливає із деяких умов). Це робиться для того, щоб не нагромаджувати індекси. Матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c позначається відповідно через A, B, C.

Теорема 4.6. *Канонічна форма для матричних зображень моноїдів четвертого порядку з неприєднаним одиничним елементом, що мають (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень, така:*

1cm) $(e, 0, b, d) = \langle b, d \rangle$: $b^2 = 0$, $d^2 = e$, $db = bd = b$;

$char\ K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}.$$

2cm) $(e, 0, b, d) = \langle 0, b, d \rangle$: $b^2 = b$, $d^2 = e$, $db = bd = b$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

для $char\ K \neq 2$ і

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char\ K = 2$.

3ст) $(e,0,c,c^2)=\langle 0,c\rangle$*:* $c^3=e$*;*

$$C=\begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon E & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E\end{pmatrix}$$

для $\mathrm{char}\,K\neq 3$*, якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon\neq 1$ *з одиниці;*

$$C=\begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & 0 & E\\ 0 & -E & -E\end{pmatrix}$$

для $\mathrm{char}\,K\neq 3$*, якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon\neq 1$ *з одиниці;*

$$C=\begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E\end{pmatrix}$$

для $\mathrm{char}\,K=3$*.*

4ст) $(e,c,d,d^2)=\langle c,d\rangle$*:* $c^2=e$*,* $d^3=d$*,* $dc=cd=d$*;*

$$C=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0\\ 0 & E & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & -E\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0\\ 0 & -E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

для $\mathrm{char}\,K\neq 2$ *і*

$$C=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E\\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

для $char\ K = 2$.

5*ст*) $(e, a, d, ad) = \langle a, d \rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $da = ad$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

для $char\ K \neq 2$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char\ K = 2$.

6*ст*) $(e, b, c, bc) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = e$, $c^2 = e$, $cb = bc$;

$char\ K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}.$$

7*ст*) $(e, c, c^2, c^3) = \langle c \rangle$: $c^4 = e$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

для $\operatorname{char} K \neq 2$, *якщо в* K *існує квадратний корінь і з* -1;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{pmatrix},$$

для $\operatorname{char} K \neq 2$, *якщо в* K *не існує квадратного кореня з* -1;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{char} K = 2$.

8*nm*) $(e, a, c, d) = \langle a, c, d \rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = e$, $d^2 = d$, $ac = a$, $ca = a$, $ad = a$, $da = d$, $cd = d$, $dc = d$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

npu char $K \neq 2$ *i*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

npu char $K = 2$.

9nm) $(e, a, d, da) = \langle a, d \rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $ad = a$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

при $\operatorname{char} K \neq 2$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

при $\operatorname{char} K = 2$.

4.4. Доведення теореми 4.6

Оскільки теорема доводиться таким же методом, як теорема 3.3, то при приведенні матриць занадто детальні міркування опускаються.

Доведення для моноїдів $3cm$) і $7cm$) випливає з відомих результатів лінійної алгебри (нормальна форма Жордана та Фробеніуса). У випадку моноїда $2cm$) ці результати треба застосувати до матриці D, яка після приведення матриці 0_1 (яка відповідає елементу 0_1) до вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(також за теоремою про нормальну форму Жордана) і врахування співвідношень для елемента 0_1 має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix}.$$

І теорему про нормальну форму Жордана потрібно застосувати до матриці D_{22} (яка задовольняє рівність $D_{22}^2 = E$). Нормальна форма в цьому випадку залежить від характеристики поля; її для $char\, K \neq 2$ і $char\, K = 2$ можна записати відповідно у вигляді

$$D_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \text{ і } D_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Аналогічно розглядається випадок $5cm$). Після приведення матриці A до такого ж вигляду, як матриці 0_1 (і врахування співвідношення $da = ad$) матриця D має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix}$$

(про нормальну форму Жордана матриць D_{11}, D_{22}, які задовольняють рівності $D_{11}^2 = E$, $D_{22}^2 = E$, див. вище).

Також аналогічно розглядаються випадки $1cm$), $6cm$) і випадок $4cm$) для $char\, K \neq 2$. Після приведення матриці D у випадку $1cm$) і матриці C у випадку $6cm$) до вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

матриця B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

в першому випадку і вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

в другому випадку. У випадку $4cm$) для $char\, K \neq 2$ після приведення матриці C до такого ж вигляду, як у випадку $6cm$), матриця D має такий вигляд, як матриця B у випадку $1cm$), а саме.

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(нормальна форма Жордана матриці D_{11}, які задовольняє рівність $D_{11}^3 = D$, є прямою сумою матриць E, $-E$ і 0).

Залишилося розглянути випадок $4cm$) для $char\, K = 2$.

За допомогою перетворень подібності (одночасно матриць C і D) приведемо матрицю D до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці D), і використання співвідношень $dc = cd = d$ вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}.$$

І залишилося лише привести матрицю D_{44} (яка задовольняє рівність $D_{44}^2 = E$) до нормальної форми Жордана.

4.4.1. Нерозкладні зображення. В теоремах, які формулюються нижче,s — довільне натуральне число, а нерозкладну матрицю Фробеніуса з характеристичним поліномом $f(x) = (x - a)^s$ можна замінити на клітину Жордана $J_s(a)$. Через $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ позначаємо відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок довільної матриці.

Теорема 4.7. *Повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних зображень моноїдів четвертого порядку без приєднаного одиничного елемента такі:*

1ст) $(e,0,b,d)=\langle b,d\rangle$: $b^2=0$, $d^2=e$, $db=bd=b$;

для $charK\neq 2$:

1.1. $b\to 0,\quad d\to 1$;

1.2. $b\to 0,\quad d\to -1$;

1.3. $b\to \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad d\to \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

для $charK=2$:

1.1. $b\to 0,\quad d\to 1$;

1.2. $\quad b\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad d\to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \Phi\\ \hline 0 & E_s\end{array}\right),$

Φ — *нерозкладна оборотна клітина Фробеніуса;*

1.3. $\quad b\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_s(0)\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad d\to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s\\ \hline 0 & E_s\end{array}\right);$

$$1.4.)\quad b\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_s\ \ \overline{0}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\qquad d\to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0}\ \ E_s\\ \hline 0 & E_{s+1}\end{array}\right);$$

$$1.5.\ b\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} E_s\\ \widetilde{0}\end{matrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\qquad d\to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0}\\ E_s\end{matrix}\\ \hline 0 & E_s\end{array}\right);$$

2ст) $(e,0,b,d)=\langle 0,0_1,d\rangle$: $d^2=e$;

для $charK\neq 2$:

2.1. $b \to 0, \quad d \to 1$;

2.2. $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

для $\mathit{char} K = 2$:

2.1. $b \to 0, \quad d \to 1$;

2.2. $b \to 1, \quad d \to 1$;

2.3. $b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3*cm*) $(e, 0, c, c^2) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = e$;

для $\mathit{char}\, K \neq 3$, *якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці:*

3.1. $c \to 1$;

3.2. $c \to \varepsilon$;

3.3. $c \to \varepsilon^2$;

для $\mathit{char}\, K \neq 3$, *якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці:*

3.1. $c \to 1$;

3.2. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

для $\mathit{char}\, K = 3$:

3.1. $c \to 1$;

3.2. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3.3. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4*cm*) $(e, c, d, d^2) = \langle c, d\rangle$: $c^2 = e$, $d^3 = d$, $dc = cd = d$;

для $char K \neq 2$*:*

4.1. $c \to 1, \quad d \to 0$*;*

4.2. $c \to -1, \quad d \to 0$*;*

4.3. $c \to 1, \quad d \to 1$*;*

4.4. $c \to 1, \quad d \to -1$*;*

для $char K = 2$*:*

4.1. $c \to 1, \quad d \to 0$*;*

4.2. $c \to 1, \quad d \to 1$*;*

4.3. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*;*

4.4. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

5*cm*) $(e, a, d, ad) = \langle a, d \rangle$*:* $a^2 = a$*,* $d^2 = e$*,* $da = ad$*;*

для $char K \neq 2$*:*

5.1. $a \to 0, \quad d \to 1$*;*

5.2. $a \to 0, \quad d \to -1$*;*

5.3. $a \to 1, \quad d \to 1$*;*

5.4. $a \to 1, \quad d \to -1$*;*

для $char K = 2$*:*

5.1. $a \to 0, \quad d \to 1$*;*

5.2. $a \to 1, \quad d \to 1$*;*

5.3. $a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

5.4. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

6ст) $(e,b,c,bc)=\langle b,c\rangle$*:* $b^2=e$*,* $c^2=e$*,* $cb=bc$*;*

char $K\neq 2$*:*

6.1. $b\to 1, \quad c\to 1$*;*

6.2. $b\to 1, \quad c\to -1$*;*

6.3. $b\to -1, \quad c\to 1$*;*

6.4. $a\to -1, \quad c\to -1$*;*

для char$K=2$*:*

6.1. $b\to 1, \quad c\to 1$*;*

6.2.

$$b\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \qquad c\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

6.3.

$$b\to\left(\begin{array}{c|c}E_s&E_s\\\hline 0&E_s\end{array}\right), \qquad c\to\left(\begin{array}{c|c}E_s&\Phi\\\hline 0&E_s\end{array}\right),$$

Φ *— нерозкладна оборотна клітина Фробеніуса;*

6.4. $$b\to\left(\begin{array}{c|c}E_s&J_s(0)\\\hline 0&E_s\end{array}\right), \qquad c\to\left(\begin{array}{c|c}E_s&E_s\\\hline 0&E_s\end{array}\right);$$

6.5.)

$$b\to\left(\begin{array}{c|cc}E_s&E_s&\overline{0}\\\hline 0&\multicolumn{2}{c}{E_{s+1}}\end{array}\right), \qquad c\to\left(\begin{array}{c|cc}E_s&\overline{0}&E_s\\\hline 0&\multicolumn{2}{c}{E_{s+1}}\end{array}\right);$$

6.6.

$$b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad c \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right);$$

7ст) $(e, c, c^2, c^3) = \langle c \rangle$*:* $c^4 = e$*;*

для $\mathrm{char}\, K \neq 2$*, якщо в* K *існує квадратний корінь* i *з* -1*:*

7.1. $c \to 1$*;*

7.2. $c \to -1$*;*

7.3. $c \to i$*;*

7.4. $c \to -i$*;*

для $\mathrm{char}\, K \neq 2$*, якщо в* K *не існує квадратного кореня з* -1*:*

7.1. $c \to 1$*;*

7.2. $c \to -1$*;*

7.3. $c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*;*

для $\mathrm{char}\, K = 2$*:*

7.1. $c \to 1$*;*

7.2. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

7.3. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7.4. $c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8nm) $(e, a, c, d) = \langle a, c, d\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = e$, $d^2 = d$, $ac = a$, $ca = a$, $ad = a$, $da = d$, $cd = d$, $dc = d$;

для $char K \neq 2$:

8.1. $a \to 0, \quad c \to 1, \quad d \to 0$;

8.2. $a \to 0, \quad c \to -1, \quad d \to 0$;

8.3. $a \to 1, \quad c \to 1, \quad d \to 1$;

8.4. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

для $char K = 2$:

8.1. $a \to 0, \quad c \to 1, \quad d \to 0$;

8.2. $a \to 1, \quad c \to 1, \quad d \to 1$;

8.3. $a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8.4. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

8.5. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

9nm) $(e, a, d, da) = \langle a, d\rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $ad = a$;

для $char K \neq 2$:

9.1. $a \to 0, \quad d \to 1$;

9.2. $a \to 0, \quad d \to -1$;

9.3. $a \to 1, \quad d \to 1$;

9.4. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

для $char K = 2$:

9.1. $a \to 0, \quad d \to 1$;

9.2. $a \to 1, \quad d \to 1$;

9.3. $a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9.4. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

9.5. $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теорем про нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

Випадок $1cm)$ для $char K = 2$ зводиться до випадку 1) для напівгруп третього порядку заміною $d \to d + 1$. Випадок $6cm)$ для $char K = 2$ розглянуто в роботі [27].

Для решти випадків, в яких маємо скінченне число зображень, доведення нерозкладності і попарної нееквівалентності є елементарним і проводиться по тій же схемі, що і для напівгруп третього порядку.

4.5. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються комбінаторні властивості моноїдів четвертого порядку иа їх матричні зображення. В термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі моноїди четвертого порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [60], [61] і [66].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей комбінаторного характеру і матричних зображень над полем напівгруп малих порядків.

В термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі напівгрупи третього порядку. Вказана множина із семи властивостей, яка є характеристичною для класу всіх напівгруп третього порядку.

Вивчаються матричні зображення напівгруп третього порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

Вивчаються комбінаторні властивості моноїдів четвертого порядку иа їх матричні зображення. В термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі моноїди четвертого порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 / T. Tamura //J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**. – P. 1–11.

2. Tamura T. Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. / T. Tamura // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1954. – **5**, – P. 17–27.

3. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 / G. E. Forsythe // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.

4. Motzkin T. S. Semigroups of order five / T. S. Motzkin, J. L. Selfridge // The November meeting in Los Angeles. Bull. Amer. Math. Soc. — 1956. – **62**, no. 1. – P. 13–23.

5. Plemmons R. J. There are 15973 semigroups of order 6 / R. J. Plemmons // Math. Algorithms. – 1967. – **2**. – P. 2–17.

6. Jiirgensen H. Die Halbgruppen der Ordnungen ≤ 7 / H. Jiirgensen, P. Wick // Semigroup Forum. – 1977. – **14**, no. 1. – З. P. 69–79.

7. Satoh S. Semigroups of Order 8 / S. Satoh, K. Yama, M. Tokizawa // Semigroup Forum. – 1994. – **49**, no. 1, P. 7–29.

8. Distler A. The semigroups of order 9 and their automorphism groups / A. Distler, T. Kelsey // Semigroup Forum. – 2014. – **88**, no. 1. – P. 93–112.

9. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.

10. Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24-41.

11. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: "Мир", 1972. – 285 с.

12. Okninski J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

13. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154-163.

14. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа / И. С. Понизовский // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.

15. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 / C. Ringel // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429-434.

16. Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3-60.

17. Назарова Л. А. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69-92.

18. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63-74.

19. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19-34.

20. Бондаренко В. М. О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23-44.

21. Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н. О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294-298.

22. Bondarenko, V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15-22.

23. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2012. – **126**. – С. 3–6.

24. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27-31.

25. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23-26.

26. Bondarenko V. M. On classificatio of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna, O. V. Zubaruk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – Vol. **21**, № 1. – P. 18-23.

27. Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 / В. А. Башев // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015-1018.

28. Бондаренко В. М. Представления связок полуцепных множеств и их приложения / В. М. Бондаренко // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38-61.

29. Бондаренко В. М. Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів / В. М. Бондаренко // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3-9.

30. Gabriel P. Unzerlegbure Darstellungen, I / Pier Gabriel // Manus. Math. – 1972. – Vol. **6**, №1. – P. 71-103.

31. Назарова Л. А. Представления частично упорядоченных множеств / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. **28**. – С. 5-31.

32. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. **28**. – С. 32-41.

33. Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. **37**, №4. – С. 752-791.

34. Donovan P. The representation theory of finite graphs and assosiated algebras / P. Donovan, M. R. Freislich // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3-86.

35. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств / Ю. А. Дрозд // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. **8**. – С. 34-42.

36. Dlab V. On algebras of finite representation type / V. Dlab, C. Ringel // J. Algebra. – 1975. – **33**. – P. 306-394.

37. Завадский А. Г. Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа / А. Г. Завадский, А. С. Шкабара // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1976. – № 3. – 52 с.

38. Шкабара А. С. Коммутативные колчаны ручного типа. / А. С. Шкабара // Киев: 1978. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78.42).

39. Leszczynski Z. On triangular matrix rings of finite representation type / Z. Leszczynski, D. Simson // .J. London Math. Soc. (2). – 1979. – **20**, no. 3. – P. 396-402.

40. Назарова Л. А. Конечнопредставимые диадические множества / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Укр. матем. журнал. – 2000. – **52**, №10. – С. 1363-1396.

41. Yamagata K. On algebras whose trivial extensions are of finite representation type. Representations of algebras (Puebla, 1980), pp. 364-371, Lecture Notes in Math., 903, Springer, Berlin-New York, 1981.

42. Bautista R. Classification of certain algebras of finite representation type / R. Bautista // An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico. – 1982. – **22**. – P. 1-82..

43. Assem I. Gradings of B_n and C_n of finite representation type / I. Assem, O. Roldan // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – **279**, no. 2. – P. 589-609.

44. Skowronski A. On triangular matrix rings of finite representation type / A. Skowronski // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1983. – **31**, no. 5-8. – P. 227-233.

45. Bongartz K. A criterion for finite representation type / K. Bongartz // Math. Ann. – 1984. – **269**, no. 1. – P. 1-12.

46. Yamagata K. On algebras whose trivial extensions are of finite representation type. II / K. Yamagata // J. London Math. Soc. (2). – 1985. – **32**, no. 2. – P. 203-216.

47. Igusa K. Auslander algebras of finite representation type / K. Igusa, M. Platzeck, G. Todorov, D. Zacharia // Comm. Algebra – 1987. – **15**, no. 1-2. – P. 377-424.

48. Sato M. $QF-3$ algebras of finite representation type / M. Sato // J. Algebra. – 1995. – **177**, no. 1. – P. 186-198.

49. Farnsteiner R. On cocommutative Hopf algebras of finite representation type / R. Farnsteiner, D. Voigt // Adv. Math. – 2000. – **155**, no. 1, – P. 1-22.

50. Buan A. Cluster-tilted algebras of finite representation type / A. Buan, R. Marsh, I. Reiten // J. Algebra. – 2006. – **306**, no. 2. – P. 412-431.

51. Zhu X. The $N=1$ quivers of types A_n and D_n have finite representation type / X. Zhu // Linear Algebra Appl. – 2008. – **428**, no. 4. – P. 919-929.

52. Fu Q. Finite representation type of infinitesimal q-Schur algebras / Q. Fu // Pacific J. Math. – 2008. – **237**, no. 1. – P. 57-76.

53. Liu G. Super cocommutative Hopf algebras of finite representation type / G. Liu // J. Algebra. – 2012. – **358**. – P. 128-142.

54. Blaszkiewicz M. On self-injective algebras of finite representation type / M. Blaszkiewicz, A. Skowronski // Colloq. Math. – 2012. – **127**, no. 1. – P. 111-126.

55. Arnold D. The class of $(1, 3)$-groups with a homocyclic regulator quotient of exponent p5 is of finite representation type / D. Arnold, A. Mader, O. Mutzbauer, E. Solak // Bull. Hellenic Math. Soc. – 2017. – **61**. – P. 55-72.

56. Бондаренко В. М. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.

57. Bondarenko V. M. On characteristic properties of semigroups / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha / Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

58. Заціха Я. В. Про число піднапівгруп напівгруп малого порядку / Я. В. Заціха // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том. **12**, № 3. – С. 142–146.

59. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.

60. Бондаренко В. М. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **33**, № 2. – С. 19–26.

61. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень комутативних моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2019. – **34**, № 1. – С. 12–25.

62. Zaciha Ya. V. On representations of semigroups of small orders / Ya. V. Zaciha // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of 11 Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 223.

63. Бондаренко В. М. Про характеристичні властивості комутативних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р., Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 53.

64. Bondarenko V. M. On characteristic properties of commutative semigroups of small order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 24.

65. Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups of order 3 / Ya. V. Zaciha // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 143.

66. Bondarenko V. M. On classification of matrix representations of monoids of the fourth order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // 12th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky: Vinnytsia, July 02-06, 2019: Abstracts. – Vinnytsia, 2019. – P. 21.

67. Chotchaisthit S. Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 /S. Chotchaisthit // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.

68. Тертична О. М. Матричні зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2009.

69. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

70. Бондаренко В. М. Зображення гельфандових графів. Видавництво Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 228 с.

71. Клейнер М. М., Ройтер А. В. Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. - Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.

72. Дрозд Ю. А. Представления коммутативных алгебр / Ю. А. Дрозд // Функц. анализ и его прил. – 1972. – **6**, №4. – С. 41–43.

    Функц. анализ и его прил., 6:4 (1972), 41–43

73. Бондаренко В. М. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга / В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – **23**, №1. – С. 19–27.

74. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука. – 1966, 576 с.

75. Gabriel P., Roiter A. V. Representations of finite-dimensional algebras, Algebra – 8, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 73, VINITI, Moscow, 2003, 224 p.

ДОДАТОК

Список публікацій за темою дисертації

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Бондаренко В. М. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.

2. Bondarenko V. M. On characteristic properties of semigroups / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha / Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

3. Заціха Я. В. Про число піднапівгруп напівгруп малого порядку / Я. В. Заціха // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том. **12**, № 3. – С. 142–146.

4. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.

5. Бондаренко В. М. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **33**, № 2. – С. 19–26.

6. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень комутативних моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2019. – **34**, № 1. – С. 12–25.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Zaciha Ya. V. On representations of semigroups of small orders / Ya. V. Zaciha // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of 11 Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 223.

2. Бондаренко В. М. Про характеристичні властивості комутативних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р., Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 53.

3. Bondarenko V. M. On characteristic properties of commutative semigroups of small order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 24.

4. Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups of order 3 / Ya. V. Zaciha // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 143.

5. Bondarenko V. M. On classification of matrix representations of monoids of the fourth order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // 12th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky: Vinnytsia, July 02-06, 2019: Abstracts. – Vinnytsia, 2019. – P. 21.