НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Заціха Ярослав Володимирович

УДК 512.53+512.64

ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУП МАЛИХ ПОРЯДКІВ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел
111 – математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі алгебри і топології
Інституту математики НАН України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор,
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, завідувач
кафедри алгебри і математичної логіки;

кандидат фізико-математичних наук,
ДЯЧЕНКО Сергій Миколайович,
Національний університет
"Києво-Могилянська академія",
доцент кафедри математики
факультету інформатики.

Захист відбудеться "22" вересня 2020 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий "14" серпня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Ю. Ю. Сорока

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей комбінаторного характеру і матричних зображень над полем напівгруп малих порядків.

Скінченні напівгрупи вивчені не в такій мірі, як групи (і відносно комбінаторного аналізу, і відносно зображень над полями). Якщо говорити про опис, з точністю до ізоморфізму, напівгруп порядку n, то (не рахуючи тривіальні випадки $n = 1, 2$) першими результатами в цьому напрямку є отримані японським математиком Т. Тамурою ще в 1953-1954 рр. класифікації напівгруп порядків 3 і 4[1,2]. Незалежно ці результати отримав в 1955 р. Г. Е. Форсайт за допомогою комп'ютерної програми[3]. Якщо напівгрупи розглядати додатково ще й з точністю до дуальності (в цьому випадку напівгрупи з різних класів еквівалентності називаються різними), то число напівгруп порядків 3, 4 дорівнює відповідно 18, 126. Зауважимо, що обидва автори отримали описи напівгруп у вигляді таблиць Келі. Подальші результати отримано лише з використанням комп'ютерних програм. А саме показано, що число різних напівгруп порядків 5, 6, 7, 8, 9 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021, 1843120128, 52989400714478[4, 5, 6, 7, 8]. При цьому розглядалися лише таблиці Келі, а, отже, мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення не досліджувалися.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені також не в такій мірі, як зображення груп.

Для скінченних груп над полями повністю визначено їх зображувальний тип для поля довільної характеристики. Якщо характеристика p поля не ділить порядок групи, то група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень; група в цьому випадку називається групою скінченного зображувального типу.

Якщо ж характеристика p поля ділить порядок групи, то група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа

[1]Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 / T. Tamura // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**. – P. 1–11.

[2]Tamura T. Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. / T. Tamura // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1954. – **5**, – P. 17–27.

[3]Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 / G. E. Forsythe // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.

[4]Motzkin T. S. Semigroups of order five / T. S. Motzkin, J. L. Selfridge // The November meeting in Los Angeles. Bull. Amer. Math. Soc. — 1956. – **62**, no. 1. – P. 13–23.

[5]Plemmons R. J. There are 15973 semigroups of order 6 / R. J. Plemmons // Math. Algorithms. – 1967. – **2**. – P. 2–17.

[6]Jiirgensen H. Die Halbgruppen der Ordnungen ≤ 7 / H. Jiirgensen, P. Wick // Semigroup Forum. – 1977. – **14**, no. 1. – 3. P. 69–79.

[7]Satoh S. Semigroups of Order 8 / S. Satoh, K. Yama, M. Tokizawa // Semigroup Forum. – 1994. – **49**, no. 1, P. 7–29.

[8]Distler A. The semigroups of order 9 and their automorphism groups / A. Distler, T. Kelsey // Semigroup Forum. – 2014. – **88**, no. 1. – P. 93–112.

циклічна. Для більшості груп задача про опис їх зображень включає в себе класичну задачу про пару матриць. Такі групи називаються дикими, а групи, які допускають явний опис зображень називаються ручними[9].

Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описали В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд[10].

В теорії зображень напівгруп багато робіт присвячено вивченню властивостей незвідних зображень і виділенню класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними, знаходженню зв'язків між незвідними зображеннями напівгрупи та її піднапівгруп, тощо. Відносно ж опису нерозкладних зображень (у випадках, коли не всі вони незвідні), в першу чергу слід виділити добре відомі результати про зображення над "хорошими" полями скінченної цілком простої напівгрупи[11] та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини[12,13]. У цих випадках напівгрупи мають скінченний зображувальнтий тип.

Відносно напівгруп з нескінченним числом нерозкладних зображень (з точністю до еквівалентності) найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які природним чином переформульовуються в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А Пономарьов[14] і Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко[15]) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко[16] і К. Рінгель[17]).

У випадку класів напівгруп відзначимо роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бон-

[9]Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.

[10]Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24-41.

[11]Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154-163.

[12]Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа / И. С. Понизовский // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.

[13]Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 / C. Ringel // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429-434.

[14]Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3-60.

[15]Назарова Л. А. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69-92.

[16]Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63-74.

[17]Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19-34.

даренко, О. М.Тертична[18,19,20]), зображення напівгруп Рісса (С. М. Дяченко[21,22,23]) і напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук[24]). Такі напівгрупи можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

Одним із основних методів вивчення матричних зображень груп і напівгруп (особливо в дослідженнях представників київської школи з теорії зображень) є метод матричних задач.

У дисертації вивчаються напівгрупи третього і моноїди четвертого порядку (зокрема, описуються мінімальні системи твірних і відповідні визначальні співвідношення) та їх матричні зображення. В тому числі розглядається задача про зображувальний тип, яка є однією з основних традиційних задач в сучасних теоріях зображень різних алгебраїчних об'єктів. Матричні зображення вивчаються як з точки зору лінійної алгебри (канонічні форми довільних зображень), так і з точки зору теорії зображень (опис нерозкладних зображень). Основним методом досліджень зображень є добре відомий метод київської школи з теорії матричних задач, який полягає в послідовному зведенні однієї матричної задачі до іншої (з використанням спеціальної техніки).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи безпосередньо пов'язана з науковими дослідженнями відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України — теми "Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації 0111U002096), "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії" (номер державної реєстрації 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис систем мінімальних твірних і відповідних визначальних співвідношень для напівгруп

[18]Бондаренко В. М. О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23-44.

[19]Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н. О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением / В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294-298.

[20]Bondarenko, V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15-22.

[21]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2012. – **126**. – С. 3–6.

[22]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27-31.

[23]Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23-26.

[24]Bondarenko V. M. On classificatio of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition / V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna, O. V. Zubaruk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – Vol. **21**, № 1. – P. 18-23.

третього порядку та моноїдів четвертого порядку і опис нерозкладних матричних зображень цих напівгруп над довільним полем.

Об'єктом дослідження є напівгрупи та їх матричні зображення над полем.

Предметом дослідження є явний вигляд визначальних співвідношень для мінімальних систем твірних скінченних напівгруп та канонічні форми і нерозкладність матричних зображень напівгруп.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є комбінаторний метод та сучасні методи лінійної алгебри і теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі нові результати про напівгрупи та їх матричні зображення:

- Вказана мінімальна система твірних і відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку.
- Знайдено сім загальних властивостей напівгруп, які для напівгруп третього порядку утворюють мінімальну характеристичну множину.
- Доведено, що всі напівгрупи третього порядку є ручними над довільним полем.
- Описано напівгрупи третього порядку скінченного та нескінченного зображувального типу.
- Отримано класифікацію (з точністю до еквівалентності) нерозкладних зображень всіх напівгруп третього порядку.
- Вказано мінімальні системи твірних і відповідні визначальні співвідношення для моноїдів четвертого порядку.
- Доведено, що всі моноїди четвертого порядку є ручними над довільним полем.
- Описано моноїди четвертого порядку скінченного та нескінченного зображувального типу.
- Описано (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення всіх моноїдів четвертого порядку.
- Вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку і моноїдів четвертого порядків, що мають скінченний зображувальний тип.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також відповідні методи, можуть бути використані при дослідженні зображень напівгруп більш високих порядків та в теоріях зображень інших об'єктів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 14-17 травня 2014 р.);

— IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 серпня 2017 р.).

— XII Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 215-й річниці з дня народження В. Буняковського (м. Вінниця, 2-6 липня 2019 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах ([1] – [6]), пять з яких (всі, окрім [3]) опубліковані у фахових виданнях із Переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України; одна з них ([2]) — у виданні, що відображається у наукометричній базі Scopus. Пять робіт опубліковано в матеріалах наукових конференцій ([7] – [11]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 150 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 122 сторінки. Список використаних джерел займає 10 сторінок (75 найменувань).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** виписано таблиці Келі всіх (з точністю до ізоморфізму та дуальності) напівгруп порядку, меншого чотирьох, викладено основні початкові відомості з теорії зображень напівгруп і частково впорядкованих множин, та сформульована основна класифікаційна задача для в'язки ланцюгів.

У **розділі 2 "Комбінаторні властивості напівгруп третього порядку"** в термінах твірних та визначальних співвідношень описані всі напівгрупи третього порядку (підрозділ 2.1). Вказана множина загальних властивостей напівгруп, яка є характеристичною для класу всіх напівгруп третього порядку (підрозділ 2.2).

Згідно робіт Т. Тамури і Г. Е. Форсайта існує 18 різних напівгруп третього порядку, таблиці Келі яких мають наступний вигляд:

Номер	Таблиця Келі	Номер	Таблиця Келі
1	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$	2	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$
3	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$	4	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$
5	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$	6	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$
7	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$	8	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$
9	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$	10	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$
11	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}$	12	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$
13	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$	14	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$
15	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}$	16	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}$
17	$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	18	$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}$

Таблиці Келі виписані в компактному вигляді, коли вказується основна частина таблиці Келі. Повний запис, наприклад, для напівгрупи 1) має такий вигляд:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

З формальних міркувань (у більш традиційних символах) зробимо такі заміни: $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. Одиничний елемент напівгрупи позначаємо через

e (якщо він є), а нульовий — через 0 (також, якщо він є).

Випадки комутативних та некомутативних напівгруп розглядаються окремо і тому нумерація числами $1, 2, \ldots, 18$ вже буде іншою. В перших круглих дужках вказано старий номер, в других круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Теорема 2.1. *Напівгрупи* 1) – 18) *задаються у вигляді твірних та співвідношень наступним чином.*

Комутативні напівгрупи:

1)(1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2)(2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3)(3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4)(6) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5)(7) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6)(9) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7)(10) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8)(12) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9)(15) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10)(16) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11)(17) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12)(18) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

Некомутативні напівгрупи:

13)(4) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

14)(5) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

15)(8) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

16)(11) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

17)(13) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

18)(14) $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$.

Всі виписані системи твірних є мінімальними.

У підрозділі 2.1 доведена також така теорема.

Теорема 2.2. *Будь-яка напівгрупа третього порядку (що не є групою) має єдину мінімальну систему твірних.*

Переходимо до підрозділу 2.2.

Усі властивості напівгруп вважаються інваріантними щодо ізоморфізму та анти-ізоморфізму. Нагадаємо, що напівгрупи S і T називаються анти-ізоморфними, якщо напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T^{op}, дуальній до T (за означенням $T^{op} = T$ як множини і $xy = z$ в T^{op} тоді і лише тоді, коли $yx = z$ в T).

Нехай $\mathcal{K}$ — деяка фіксована множина напівгруп, а $\mathcal{P}$ – деяка множина загальних (якісних та кількісних) властивостей напівгруп. Для напівгрупи $S \in \mathcal{K}$ позначимо через $\mathcal{P}(S)$ набір усіх властивостей $P \in \mathcal{P}$, які виконуються для S.

Будемо говорити, що підмножина властивостей Q множини $\mathcal{P}$ характеристична для напівгрупи $S \in \mathcal{K}$, якщо, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму, S є єдиною напівгрупою в $\mathcal{K}$, для якої виконуються всі властивості із Q; якщо $Q = \{q_1, \ldots, q_s\}$, то властивості $q_1, \ldots, q_s$ називаються характеристичними для S. Множину властивостей $\mathcal{P}$ назвемо char-повною для $\mathcal{K}$, якщо для будь-якої напівгрупи $S \in \mathcal{K}$ підмножина $\mathcal{P}(S)$ є характеристичною для S; char-повна множина властивостей $\mathcal{P}$ називається мінімальною, якщо вона не містить власної char-повної підмножини.

Розглянемо наступні 7 властивостей напівгрупи порядку 3:

$P(C)$: комутативність;

$P(1)$: існування одиничного елемента;

$P(0)$: існування нульового елемента;

$P^+(0)$: існування приєднаного нульового елемента;

$P_{id}(1)$: число ідемпотентів дорівнює 1;

$P_{id}(2)$: число ідемпотентів дорівнює 2;

$P_{gen}(2)$: найменше число твірних дорівнює 2.

Зауважимо, що ідемпотент a напівгрупи S називається приєднаним, якщо $S \setminus a$ — напівгрупа.

Множину всіх цих властивостей позначимо через $P_3(7)$.

Теорема 2.3. *Множина $P_3(7)$ є мінімальною char-повною множиною властивостей для класу всіх напівгруп порядку* 3.

Переходимо до розділу 3 **“Матричні зображення напівгруп третього порядку.”**

Всі матричні зображення розглядаються над полем K. Якщо не вказана характеристика поля, то вважається, що вона довільна. Завжди вважаємо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична).

В підрозділі 3.1 формулюються теореми про зображувальний тип.

Теорема 3.1. *Всі напівгрупи третього порядку є ручними.*

Теорема 3.2. *Лише комутативна напівгрупа*

$$(0, b, c) = \langle b, c\rangle : b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0$$

і некомутативна напівгрупа

$$(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle :$$

$$a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = a, ac = a, ba = b, bc = b, ca = c, cb = c$$

мають (з точністю до еквівалентності) нескінченне число нерозкладних зображень.

Ці напівгрупи вказані в теоремі про опис напівгруп третього порядку відповідно під номерами 1) і 18).

В наступних підрозділах вказана канонічна форма матричних зображень для всіх напівгруп 1)–18), що мають (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень (тобто напівгруп 2)–17)), і повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних зображень для кожної із напівгруп 1)–18).

Підкреслимо, що через E позначається одинична матриця довільного розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$, а тому довільні дві клітини E в матрицях не обов'язково рівні (якщо їх рівність не випливає із деяких умов). Це робиться для того, щоб не нагромаджувати індекси. Матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c позначається відповідно через A, B, C.

Теорема 3.3. *Канонічна форма для комутативних напівгруп* 2)–12) *третього порядку така:*

2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$*:* $c^3 = 0$*;*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = c$*,* $bc = cb = 0$*;*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $(0,b,e)=\langle b,e\rangle$: $b^2=0$;

$$B=\begin{pmatrix}0&E&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

5) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

$$B=\begin{pmatrix}E&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

6) $(0,c^2,c)=\langle 0,c\rangle$: $c^3=c^2$;

$$C=\begin{pmatrix}E&0&0&0\\0&0&E&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

7) $(0,b,e)=\langle 0,b,e\rangle$: $b^2=b$;

$$B=\begin{pmatrix}E&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

8) $(0,e,c)=\langle 0,c\rangle$: $c^2=e$;

$$C=\begin{pmatrix}E&0\\0&-E\end{pmatrix}$$

для $char K\neq 2$;

$$C=\begin{pmatrix}E&E&0\\0&E&0\\0&0&E\end{pmatrix}$$

для $char K=2$.

9) $(c^2,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^3=c$, $b^2=c^2$, $bc=cb=c$;

$$B=\begin{pmatrix}E&0&0&0&0\\0&E&0&0&0\\0&0&0&E&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}E&0&0&0&0\\0&-E&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

для $char K\neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K = 2$.

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c \rangle$: $c^3 = c$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K = 2$.

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c \rangle$: $c^4 = c^2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char = 2$.

12) $(e, b, b^2) = \langle b \rangle$: $b^3 = e$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E \end{pmatrix}$$

для char $\neq 3$, якщо в K існує кубічний корінь $\varepsilon \neq 1$ з одиниці;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & -E & -E \end{pmatrix}$$

для char $\neq 3$, якщо в K не існує кубічного кореня $\varepsilon \neq 1$ з одиниці;

$$B = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для char $= 3$.

Теорема 3.4. *Канонічна форма для некомутативних напівгруп 13)–18) третього порядку така:*

13) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$*:* $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$*:* $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що у випадку, коли матричне зображення напівгрупи з одним твірним задається нормальною формою Жордана, можна це ж зображення задати і нормальною формою Фробеніуса (але не навпаки). Зрозуміло, що ми вибираємо нормальну форму Жордана як більш просту (в деяких випадках обидві форми збігаються).

Використовуючи ці теореми, 3.3 і 3.4 (а також деякі інші методи), описано повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних зображень всіх напівгруп третього порядку.

У розділі 4 **“Моноїди четвертого порядку та їх матричні зображення”** вивчаються комбінаторні властивості моноїдів четвертого порядку і їх матричні зображення; при цьому основним є випадок моноїдів без приєднаного одиничного елемента. Із 126 (попарно різних) напівгруп четвертого порядку (виписаних в розділі 2), такі моноїди вичерпуються комутативними напівгрупами з номерами $58, 88, 99, 112, 118, 125, 126$ і некомутативними напівгрупами з номерами $98, 100$.

Теорема 4.3. *Моноїди четвертого порядку без приєднаного одиничного елемента задаються у вигляді твірних та співвідношень наступним чином.*

Комутативні моноїди:

$1cm)(58)$ $(e, 0, b, d) = \langle b, d\rangle$: $b^2 = 0$, $d^2 = e$,
$db = bd = b$;

$2cm)(88)$ $(e,0,b,d)=\langle 0,b,d\rangle$: $b^2=b$, $d^2=e$, $db=bd=b$;

$3cm)(99)$ $(e,0,c,c^2)=\langle 0,c\rangle$: $c^3=e$;

$4cm)(112)$ $(e,c,d,d^2)=\langle c,d\rangle$: $c^2=e$, $d^3=d$, $dc=cd=d$;

$5cm)(118)$ $(e,a,d,ad)=\langle a,d\rangle$: $a^2=a$, $d^2=e$, $da=ad$;

$6cm)(125)$ $(e,b,c,bc)=\langle b,c\rangle$: $b^2=e$, $c^2=e$, $cb=bc$;
$7cm)(126)$ $(e,c,c^2,c^3)=\langle c\rangle$: $c^4=e$;

Некомутативні моноїди:

$8nm)(98)$ $(e,a,c,d)=\langle a,c,d\rangle$: $a^2=a$, $c^2=e$, $d^2=d$, $ac=a$, $ca=a$, $ad=a$, $da=d$, $cd=d$, $dc=d$;

$9nm)(100)$ $(e,a,d,da)=\langle a,d\rangle$: $a^2=a$, $d^2=e$, $ad=a$.

Букви cm (при нумерації моноїдів) означають “комутативний моноїд”, а nm — “некомутативний моноїд”. В дужках після номеру вказано загальний номер моноїду в списку всіх таблиць Келі напівгруп четвертого порядку.

Переходимо до матричних зображень над довільним полем моноїдів четвертого порядку.

Теорема 4.4. *Всі моноїди четвертого порядку є ручними.*

Теорема 4.5. *Моноїди четвертого порядку, що мають (з точністю до еквівалентності) нескінченне число нерозкладних зображень над полем K, вичерпуються (з точністю до ізоморфізму та дуальності) наступними моноїдами:*
a) $(e,0,b,c)=\langle e,b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=0$, $cb=bc=0$;
K *— поле довільної характеристики;*
b) $(e,0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=e$, $cb=bc=b$;
характеристика поля K *дорівнює* 2;
c) $(e,b,c,bc)=\langle b,c\rangle$: $b^2=e$, $c^2=e$, $cb=bc$;
характеристика поля K *дорівнює* 2.
d) $(e,a,b,c)=\langle e,a,b,c\rangle$: $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $ab=a$, $ac=a$, $ba=b$, $bc=b$, $ca=c$, $cb=c$;
K *— поле довільної характеристики.*

В заключній частині розділу виписуються канонічні форми для матричних зображень моноїдів четвертого порядку, що мають (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень, і виписуються всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей комбінаторного характеру і матричних зображень над полем напівгруп малих порядків.

В термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі напівгрупи третього порядку. Вказана множина із семи властивостей, яка є характеристичною для класу всіх напівгруп третього порядку.

Вивчаються матричні зображення напівгруп третього порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

Вивчаються комбінаторні властивості моноїдів четвертого порядку та їх матричні зображення. В термінах твірних та визначальних співвідношень описані (з точністю до ізоморфізму) всі моноїди четвертого порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп, у випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бондаренко В. М. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.

2. Bondarenko V. M. On characteristic properties of semigroups / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha / Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

3. Заціха Я. В. Про число піднапівгруп напівгруп малого порядку / Я. В. Заціха // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том. **12**, № 3. – С. 142–146.

4. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.

5. Бондаренко В. М. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **33**, № 2. – С. 19–26.

6. Бондаренко В. М. Канонічні форми матричних зображень комутативних моноїдів четвертого порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2019. – **34**, № 1. – С. 12–25.

Тези конференцій:

7. Zaciha Ya. V. On representations of semigroups of small orders / Ya. V. Zaciha // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8-13, 2013: Book of 11 Abstracts. – L'viv, 2013. – P. 223.

8. Бондаренко В. М. Про характеристичні властивості комутативних напівгруп третього порядку / В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 15-17 травня 2014р., Матеріали конференції II (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2014. – С. 53.

9. Bondarenko V. M. On characteristic properties of commutative semigroups of small order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 24.

10. Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups of order 3/Ya. V. Zaciha // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko: Kyiv, July 3-7, 2017: Abstracts. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017. – P. 143.

11. Bondarenko V. M. On classification of matrix representations of monoids of the fourth order / V. M. Bondarenko, Ya. V. Zaciha // 12th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky: Vinnytsia, July 02-06, 2019: Abstracts. – Vinnytsia, 2019. – P. 21.

АНОТАЦІЯ

Заціха Я. В. Зображення напівгруп малих порядків. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 "Алгебра та теорія чисел". – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена вивченню напівгруп порядку, меншого від п'яти, та їх матричних зображень.

У першому розділі виписано таблиці Келі всіх (з точністю до ізоморфізму та дуальності) напівгруп порядку, меншого чотирьох, викладено основні початкові відомості з теорії зображень напівгруп і частково впорядкованих множин, та сформульована основна класифікаційна задача для в'язки ланцюгів.

У другому розділі в термінах твірних та визначальних співвідношень описані всі напівгрупи третього порядку. Доведено, що множина загальних властивостей $P_3(7)$, що складається із властивостей

$P(C)$: комутативність;
$P(1)$: існування одиничного елемента;
$P(0)$: існування нульового елемента;
$P^+(0)$: існування приєднаного нульовог елемента;
$P_{id}(1)$: число ідемпотентів дорівнює 1;
$P_{id}(2)$: число ідемпотентів дорівнює 2;
$P_{gen}(2)$: найменше число твірних дорівнює 2,

є мінімальною характеристично повною множиною властивостей для класу всіх напівгруп порядку 3.

У третьому розділі вивчаються матричні зображення напівгруп третього порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких напівгруп. Зокрема, доведено, що всі напівгрупи третього порядку мають ручний тип. У випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення напівгруп третього порядку.

У четвертому розділі вивчаються моноїди четвертого порядку та їх матричні зображення. В термінах твірних та визначальних співвідношень описані всі моноїди четвертого порядку. Доведено критерії відносно зображувального типу таких моноїдів. Зокрема, доведено, що всі моноїди четвертого порядку мають ручний тип. У випадку скінченного типу вказана канонічна форма матричних зображень. Описано (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні зображення моноїдів четвертого порядку.

Ключові слова: напівгрупа, моноїд, система твірних, визначальні співвідношення, матричні зображення, еквівалентність, нерозкладність, канонічні форми, зображувальний тип, характеристичні властивості.

АННОТАЦИЯ

Зациха Я. В. Представления полугрупп малых порядков. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 алгебра и теория чисел. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертационная работа посвящена изучению полугрупп порядка, меньшего от пяти, и их матричных представлений.

В первом разделе выписаны таблицы Келли всех (с точностью до изоморфизма и дуальности) полугрупп порядка, менее четырех, изложены основные начальные сведения теории представлений полугрупп и частично упорядоченных множеств, и сформулирована основная классификационная задача для связки цепей.

Во втором разделе в терминах образующих и определяющих соотношений описаны все полугруппы третьего порядка. Доказано, что множество общих свойств $P_3(7)$, состоящий из свойств

$P(C)$: коммутативной;
$P(1)$: существования единичного элемента;
$P(0)$: существования нулевого элемента;
$P^+(0)$: существования присоединенного нульового элемента;
$P_{id}(1)$: число идемпотентов равно 1;
$P_{id}(2)$: число идемпотентов равно 2;
$P_{gen}(2)$: наименьшее число образующих равно 2,

является минимальным характеристически полным множеством свойств для класса всех полугрупп порядка 3.

В третьем разделе изучаются матричные представления полугрупп третьего порядка. Доказаны критерии относительно представленческого типа таких полугрупп. В частности, доказано, что все полугруппы третьего порядка имеют ручной тип. В случае конечного типа указана каноническая форма матричных представлений. Описаны (с точностью до эквивалентности) все неразложимые представления полугрупп третьего порядка.

В четвертом разделе изучаются моноиды четвертого порядка и их матричные представления. В терминах образующих и определяющих соотношений описаны все моноиды четвертого порядка. Доказаны критерии относительно представленческого типа таких моноидов. В частности, доказано, что все моноиды четвертого порядка имеют ручной тип. В случае конечного типа указана каноническая форма матричных изображений. Описаны (с точностью до эквивалентности) все неразложимые представления моноидов четвертого порядка.

Ключевые слова: полугруппа, моноид, система образующих, определяющие соотношения, матричные представления, эквивалентность, неразложимость, канонические формы, представленческий тип, характеристичные свойства.

ABSTRACT

Zaciha Ya. V. Representations of semigroups of small orders. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 “Algebra and number theory”. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of semigroups of the order of less than five and their matrix representations.

In the dissertation, the semigroups of the third and fourth order monoids are studied (in particular, one describes the minimum generating systems and the corresponding defining relations) and their matrix representations. Including the problem of the representation type that is one of the main traditional problems in modern theories of representations of various algebraic objects. Matrix representations are studied in terms of linear algebra (canonical forms of arbitrary representations) and in terms of representation theory (a description of the indecomposable representations). The main method of research of representations is the well-known method of the Kiev School of Matrix Problem Theory, which is consistent reducing one matrix problem to another (using special equipment).

The dissertation consists of four chapters.

The first chapter is written out Kelly’s tables of all (up to isomorphism and duality) semigroups of order less than four, basic initial information is given on the theory of representations of semigroups and partially ordered sets, and formulate a basic classification problem for bundles of chains.

In the second chapter, in terms of generators and determining relations, one describes all third order semigroups and the set of seven properties that is characteristic for the class of all third order semigroups.

It is proved that, up to isomorphism and duality, the third order semigroups are exhausted by the following ones.

Commutative semigroups:

1)(1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2)(2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3)(3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4)(6) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5)(7) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6)(9) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7)(10) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8)(12) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9)(15) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10)(16) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11)(17) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12)(18) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

Noncommutative semigroups:

13)(4) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

14)(5) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

15)(8) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

16)(11) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

17)(13) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

18)(14) $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$.

It is proved that the set of common properties $P_3(7)$ consisting of properties

$P(C)$: commutative;

$P(1)$: existence of an identity element;

$P(0)$: existence of a null element;

$P^+(0)$: existence of an attached null element;

$P_{id}(1)$: the number of idempotents is 1;

$P_{id}(2)$: the number of idempotents is 2;

$P_{gen}(2)$: the smallest number of generators is 2,

is the minimal characteristic complete set of properties for the class of all semigroups of order 3.

In the third chapter one studies matrix representations of the third order semigroups. The criteria of representation type of such semigroups are proved. In particular, it is proved that all third order semigroups have tame type. In the case of the finite type, the canonical form of the matrix representations are specified. All (up to equivalence) indecomposable representations of the third order semigroups are described.

In the fourth chapter one studies the fourth order monoids and their matrix representations. In terms of the generators and determining relations all monoids of the fourth order are described. The criteria of representation type of such monoids are proved. In particular, it is proved that all fourth order monoids have tame type. In the case of the finite type, the canonical form of the matrix representations are specified. All (up to equivalence) indecomposable representations of the fourth order monoids are described.

Keywords: semigroup, monoid, system of generatots, defining relations, matrix representations, equivalence, indecomposability, canonical forms, representation type, characteristic properties.