Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Маркітан Віта Петрівна

УДК 517.51

Дисертація

Стохастичні та двічі стохастичні матриці в задачах фрактального аналізу функцій

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________ В. П. Маркітан

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ.

Маркітан В.П. Стохастичні та двічі стохастичні матриці в задачах фрактального аналізу функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Робота виконана у лабораторії фрактального аналізу відділу динамічних систем і фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Дисертаційна робота виконана в галузі конструктивної теорії функцій і присвячена функціям і розподілам випадкових величин із неоднорідною локальною структурою і фрактальними властивостями з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць й різних систем кодування дійсних чисел, а також множинам, суттєвим для функцій та розподілів.

Знедавна все частіше в моделях реальних процесів та явищ з'являються функції з "нетривіальними" локальними властивостями. До таких функцій належать: сингулярні, ніде не диференційовні, ніде не монотонні функції. Потужне знаряддя для їхнього дослідження забезпечують фрактальна геометрія і фрактальний аналіз, геометрична теорія дійсних чисел. Для аналітичного задання фрактальних функцій (зі складними локальними властивостями структурного, варіаційного, диференціального характеру), розподілів випадкових величин і множин, для них суттєвих, сьогодні широко використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел. Зокрема такі, які у своїй конструкції використовують стохастичні та двічі стохастичні скінченні й нескінченні матриці.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятьох розділів, поділених на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел і додатка.

Основними об'єктами дослідження є:

— функції, які є проекторами цифр:

а) двосимвольного марковського зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею, у класичне двійкове зображення;

б) нега-двійкового зображення в марковське зображення;

— функції, що мають вид

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k$$

і розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k,$$

визначені для двох класів збіжних додатних рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з певними умовами однорідності, а також поведінка модуля характеристичної функції нескінченної згортки Бернуллі, керованої рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з одного зі класів.

— спектр функції розподілу неперервної випадкової величини

$$\tau = \Delta^{Q_\infty^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$$

з незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q_∞^*-зображення, визначеного нескінченною додатною двічі стохастичною матрицею за умови, що одна з координат стохастичного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0;

— множини з заборонами вживання певних комбінацій цифр для двосимвольного марковського зображення дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету й завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувачки.

У першому розділі подано огляд літератури з тематики дослідження й викладено основні поняття і твердження, потрібні для проведення дослідження. У цьому розділі систематизовано основні відомості щодо стохастичних та двічі стохастичних матриць, деяких зображень дійсних чисел (Q^*_∞-зображення, марковського зображення, нега-двійкового зображення), теорії фракталів, теорії рядів, теорії розподілів випадкових величин тощо.

У другому розділі сконструйовано континуальну сім'ю нескінченних двічі стохастичних додатних матриць, залежних від одного параметра. Вивчено геометрію і властивості Q^*_∞-зображення, визначеного матрицею зі вказаної сім'ї. Описано властивості спектра функції розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ із незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q^*_∞-зображення, визначеного нескінченною двічі стохастичною матрицею за умови, що одна з координат стохастичного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0. Зокрема, встановлено, що спектром є ніде не щільна множина додатної міри Лебега.

У третьому розділі вивчаються дві функції, які встановлюють зв'язок між числами відрізка $[0;1]$. Перша функція означена прямим проектуванням цифр марковського зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею, у цифри класичного двійкового зображення, а друга – нега-двійкового в марковське зображення, визначене двічі стохастичною матрицею. Встановлено умови їхньої неперервності, монотонності, сингулярності, а також знайдено систему функціональних рівнянь, розв'язком якої є друга функція. У цьому розділі для множин канторівського типу, означених заборонами вживання символів у марковському двосимвольному зображенні дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею, встановлено їхню нуль-мірність (у розумінні міри Лебега) і знайдено розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

У четвертому розділі вивчаються функції й розподіли випадкових величин, пов'язані з заданим збіжним додатним рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$. Розглядається

функція
$$f(x) = f(\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) d_k,$$
де $\alpha_k = \alpha_k(x)$ – k-та цифра Q_2^*-зображення числа $x \in [0,1]$. Окрім ряду, функцію визначає нескінченна стохастична матриця $||q_{ik}||$, яка задає Q_2^*-зображення чисел із відрізка $[0,1]$. Множиною значень функції f є множина неповних сум $E\{d_n\}$ ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$.

У цьому розділі наведено конструкцію сім'ї збіжних додатних рядів, для членів яких виконується умова
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_n}{r_n} = +\infty.$$
Доведено, що множина неповних сум кожного з указаних рядів, а отже, й множина значень функції $f(x)$ – це суперфрактальна множина. Досліджено властивості нескінченної згортки Бернуллі $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n$, керованої рядом зі вказаної сім'ї й визначеної нескінченною стохастичною матрицею. Доведено критерій її дискретності, вивчено її лебегівську структуру, тополого-метричні і фрактальні властивості. Для вказаної нескінченної згортки Бернуллі досліджено поведінку модуля її характеристичної функції на нескінченності, встановлено сингулярність розподілу ξ і його близькість за властивостями до дискретного. Розглянуто автозгортки вказаних нескінченних згорток Бернуллі. Вивчено властивості їхнього спектра розподілу та умови сингулярності розподілу.

У п'ятому розділі продовжується вивчення множин значень функцій та розподілів випадкових величин, які розглядались у четвертому розділі. Побудовано континуальну сім'ю додатних рядів, визначених двома зростаючими послідовностями натуральних чисел, множина неповних сум кожного з яких є канторвалом, міра Лебега якого в залежності від вибору послідовностей може бути як завгодно близькою до 1.

Додаток містить список публікацій здобувачки на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: стохастичні матриці, скінченні й нескінченні двічі стохастичні матриці, Q_∞^*-зображення дійсного числа, марковське зображення дійсного числа, сингулярна функція, канторвал, множина неповних сум, фрактальні множини.

Markitan V.P. Stochastic and doubly stochastic matrices in the problems of fractal analysis of functions. — Manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Scienses, speciality 01.01.06 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The work is prepared at Laboratory of Fractal Analysis of Department, Department of Dynamical Systems and Fractal Analysis, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine.

The dissertation is carried out in the field of constructive theory of functions. It is devoted to the study of functions and distributions of random variables with inhomogeneous local structure and fractal properties using stochastic and doubly stochastic matrices and different systems of encoding of real numbers, as well as to the study of certain sets which are essential for functions and distributions.

In recent years, functions with "nontrivial" local properties very often appear in models of real processes and phenomena. In particular, such functions include singular, nowhere differentiated, and nowhere monotonic functions. Various systems of encoding of real numbers are widely used nowadays for analytic representations of fractal functions (with complex local properties of structural, variational, and differentiable nature), distributions of random variables and their significant sets. For instance, systems of encoding of real numbers use in its construction stochastic and doubly stochastic finite and infinite matrices.

The thesis consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of abbreviations and symbols, introduction, five sections, divided into subsections, conclusions for each section and general conclusions, a list of sources used, and appendix.

The main objects of research are:

— functions that are projectors of numbers

a) of a binary Markov representation defined by a doubly stochastic matrix into a classical binary representation, and

b) of non-binary representation into a Markov representation;

— functions having the form

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k,$$

the distribution of a random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k$$

defined for two classes of convergent positive series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ with some homogeneity conditions, and the behavior of the absolute value of the characteristic function of the infinite Bernoulli convolution managed by the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ from one of the classes;

— spectrum of the distribution function of a continuous random variable

$$\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$$

with independent identical distributed symbols τ_n of its Q^*_∞-representation; the latter is defined by an infinite positive doubly stochastic matrix provided that one of the coordinates of the stochastic vector $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ specifying the distribution is zero;

— sets with prohibitions on the use of certain combinations of numbers for a binary Markov representation of the fractional part of a real number defined by a doubly stochastic matrix.

The introduction substantiates the relevance of the investigation, defines the object, subject, purpose and objectives, indicates the scientific novelty of the results and personal contribution of the applicant.

The first section provides an overview of the literature on the subject of research and sets out the basic concepts and statements that are necessary for the study. This section systematizes the basic information on stochastic and doubly stochastic matrices, some representations of real numbers (Q^*_∞-representation, Markov representation, non-binary representation), fractal theory, series theory, distributions of random variables theory etc.

In the second section it is constructed a continuum family of infinitely doubly stochastic positive matrices dependent on one parameter. The geometry and properties of Q^*_∞-representation defined by a matrix from the specified family are studied. It is described the properties of the spectrum of the distribution function of a continuous random variable $\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ with independent identical distributed symbols τ_n of its Q^*_∞-representation defined by an infinitely double stochastic matrix provided that one of the coordinates of the stochastic vector $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ specifying the distribution is equal to 0. In particular, it is established that the spectrum is nowhere dense set of a positive Lebesgue measure.

Studied in the third section are two functions that establish a relationship between the numbers of the segment $[0; 1]$. The first function is characterized by the direct projection of digits of the Markov representation defined by a doubly stochastic matrix into the digits of the classical binary representation. The second function is given by the direct projection of digits of the non-binary representation into the Markov representation defined by the doubly stochastic matrix. Obtained here are the conditions of their continuity, monotony, singularity. The system of functional equations, the solution of which is the second function, is found. Established in the section is zero-dimensionality (in the sense of Lebesgue measure) of Cantor-type sets denoted by prohibitions on the using of symbols in the binary Markov representation of the the fractional part of a real number defined by a doubly stochastic matrix. The Hausdorff-Besicovitch dimension of the sets is found.

Studied in the fourth section are the functions and distributions of random variables associated with a given convergent positive series $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$. Considered here is a function

$$f(x) = f(\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) d_k,$$

where $\alpha_k = \alpha_k(x)$ is the k-th digit of Q_2^*-representation of the number $x \in [0,1]$. In addition to the series, this function is defined by an infinite stochastic matrix $||q_{ik}||$ specifying Q_2^*-representation of the number $x \in [0,1]$.

The set of values of the function f is the set of incomplete sums $E\{d_n\}$ of the series $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$. Given here is a construction of a convergent positive series family for which the following condition holds

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_n}{r_n} = +\infty.$$

It is proved that the set of incomplete specified series, and hence the set of values of the function $f(x)$, is a superfractal set.

Consider in the section is a Bernoulli's infinite convolution

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n$$

which is managed by the series of the specified family and defined by an infinite stochastic matrix. The criterion of its discreteness is proved. Its Lebesgue structure, topological, metric and fractal properties are studied. Investigated here is the behavior of the absolute value of the characteristic function at infinity of this infinite Bernoulli convolution. The singularity of the distribution ξ and its proximity in terms of properties to the discrete one are established. Autoconvolutions of the specified infinite Bernoulli convolutions are considered. The properties of their distribution spectrum and the conditions of the distribution singularity are studied.

In the fifth section, the study of sets of values of functions and the distribution of random variables, which were considered in the fourth section, continues. Constructed here is a continuum family of positive series defined by two increasing sequences. It is proved that one of the above classes consists of series whose sets of incomplete sums are cantorvals, and the Lebesgue measures of those cantorvals can be arbitrary close to 1.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the dissertation and information about the approbation of the results presented in the dissertation.

Key words: stochastic matrices, finite and infinite doubly stochastic matrices, Q_∞^*-representation of a real number, Markov representation of a real number, singular function, Cantorval, set of incomplete sums, fractal sets.

Список опублікованих праць здобувачки

1. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В.* Q_∞^*-зображення дійсних чисел, визначені двічі стохастичними матрицями і множини з ними пов'язані // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. – №17. – С. 35 – 43.
2. *Маркітан В.П.* Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, №. 4. – С. 34 – 49.
3. *Виннишин Я., Маркітан В., Працьовитий М., Савченко І.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – Вип. 12, № 2. – С. 26 – 42.
4. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 10. – С. 1403 – 1416.
5. *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним рядом і двічі стохастичною матрицею // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2019. – Т.16, №. 2. – С. 101 – 120.

Тези наукових доповідей

6. *Маркітан В.П.* Q_∞^* - зображення, визначені двічі стохастичними

матрицями, і їх застосування // П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і методики їх навчання": тези доповідей / НПУ імені М.П. Драгоманова. – Київ, 2016. – С. 35.

7. *Markitan V.* Q_∞^* - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them // Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі": матеріали конф. – Київ, 2016. – С. 53.
8. *Markitan V.* Infinite double stochastic matrices and Q_∞^* -representation of real numbers generated by them // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1-14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2016. – С. 93.
9. *Маркітан В.П.* Множина чисел з обмеженням на вживання символа у Q_∞^*-зображенні числа, визначеного двічі стохастичною матрицею // Міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі-2016", 2 - 8 червня 2016 р.: Тези доповідей. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд "Наука", 2016. – С. 45.
10. *Markitan V.P.* Geometry of one infinitely symbolic representation of real numbers and metric problems associated with it // International Conference "Modern Advances in Geometry and Topology": Book of abstracts. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. — P. 32.
11. *Markitan V.P.* Q_∞^* - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them //The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski 27 September – 1 October. – Lviv: Ivan Franko National University, 2016, – P. 33.
12. *Маркітан В.П.* Фрактальні множини, пов'язані з марковським зображенням чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Шо-

ста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ: НаУКМА, 2017. – С. 44.

13. *Markitan V.* Fractal properties of sets associated with Markov representation of real numbers difened by the double stochastic matrix // Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія і топологія в Одесі-2017", 2 - 8 червня 2017 р. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд "Наука", 2017. – С. 78.
14. *Маркітан В., Савченко І.,* Суперфрактальність однієї множини, визначеної $\tilde{Q}$-зображенням чисел // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольского (1917-2008). 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 43.
15. *Markitan V.P., Savchenko I.O.* The distributions of random incomplete sums of a series with essential overlaps of cylindrical intervals // XII Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 10-23 липня 2017 р., с. Колочава, Міжгірський район, Закарпатська область, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 41 – 42.
16. *Markitan V., Savchenko I.* Positive series whose partial sumsets are Cantorvals // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of STEFAN BANACH, 18-23 September 2017. Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University, 2017.– P. 66 – 67.
17. *Маркітан В.П.* Сингулярна функція, пов'язана з марковським та двійковим зображенням дійсного числа // Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ: Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2018. – С.48.
18. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В.* Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум // International scientific confe-

rence “Algebraic and geometric methods of analysis” May 30 – June 4 2018. Book of Abstracts. – Odesa: ONAHT, 2018. – P. 77 – 79.

19. *Markitan V., Savchenko I.* Superfractality of an incomplete sums set of a certain positive series // The 13th Summer School “Analysis, Topology and Applications”, July 29 – August 11, 2018 Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 32 – 34.
20. *Markitan V., Savchenko I.* Cantorvals & incomplete sums of positive series // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28, 2018, Kyiv, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 28.
21. *Markitan V.* Singular monotonic functions defined by a convergent positive series and a double stochastic matrix // International scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis” May 28 – June 3 2019. Book of Abstracts. . – Odesa: ONAHT, 2019. – P. 36 – 37.
22. *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним додатним рядом і двічі стохастичною матрицею // Міжнародна конференція молодих математиків. 6-8 червня 2019 р., Київ, Україна. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2019. – С. 110.
23. *Markitan V.* Self-similar singular function defined by double stochasctic matrices // The 14th Summer School “Analysis, Topology, Algebra and Applications”, August 10 – August 20, 2019 Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 23 – 25.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	—	множина натуральних чисел;
$\mathbb{R}$	—	множина дійсних чисел;
в.в.	—	випадкова величина;
ф.р.	—	функція розподілу;
$\square$	—	кінець доведення;
(a_n)	—	числова послідовність;
$E\{d_n\}$	—	множина неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$;
$\lambda(E)$	—	міра Лебега множини E;
$H^{\alpha}(E)$	—	α-мірна міра Гаусдорфа множини E;
$\alpha_0(E)$	—	розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E;
$\Delta^{Q_\infty^*}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$	—	Q_∞^*-зображення дійсного числа x;
$\Delta^{M}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$	—	марковське зображення дійсного числа x;
$\overline{\Delta}^{2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$	—	нега-двійкове зображення дійсного числа x;
$\Delta_{c_1\ldots c_k}$	—	циліндр рангу k, що відповідає певному зображенню чисел, відомому з контексту;
$\lvert\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_n}\rvert$	—	довжина циліндра Q_∞^*-зображення;
$\nabla_{c_1\ldots c_k}$	—	інтервал, що є внутрішністю $\Delta_{c_1\ldots c_k}$;
$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$	—	точка числової осі (число), спільна для всіх циліндрів $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$;
$(c_1c_2\ldots c_n)$	—	набір символів $c_1c_2\ldots c_n$ у періоді;
S_ξ	—	спектр випадкової величини ξ (мінімальний замкнений носій розподілу);
$A \overset{k}{\sim} B$	—	множина A, геометрично подібна до B з коефіцієнтом k;
$\mathsf{P}(E)$	—	ймовірність події (множини) E;
$D[Q_\infty^*, \overline{ij}]$	—	множина дійсних чисел, у Q_∞^*-зображенні яких забороняється комбінація наперед заданих символів i та j;
$\equiv$	—	рівність за означенням.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню математичних об'єктів зі фрактальними властивостями (множин, функцій, розподілів випадкових величин, означених у термінах різних зображень дійсних чисел, які використовують стохастичні та двічі стохастичні матриці).

Актуальність теми. Інтерес до локально складних неперервних функцій (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних тощо) має довготривалу і яскраву історію, пов'язану з іменами видатних науковців: К. Вейєрштрасс, Г. Мінковський [31], Е. Гелінґер, Г. Кантор [13, 68], В. Серпінський, Р. Салем [41], С. Банах [7], С. Мазуркевич [30] та ін. Сьогодні такі функції – це об'єкт підвищеної наукової уваги завдяки різним обставинам. Окрім внутрішньої логіки розвитку математики увагу до них привертає те, що віднедавна вони дедалі частіше з'являються в моделях реальних процесів і явищ. Але головне у ланцюзі аргументації те, що з'явились нові потужні засоби для їхнього теоретичного аналізу. Це різні системи кодування дійсних чисел, зокрема такі, що ґрунтуються на використанні стохастичних та двічі стохастичних матриць, а також теорія фракталів (фрактальна геометрія і фрактальний аналіз) із ідеями самоафінності й автомодельності. Додатковим аргументом інтересу до певних класів локально складних функцій є фундаментальні результати щодо їхньої масивності у метричних і топологічних просторах. До таких належать: теорема Банаха-Мазуркевича (1931) [7, 30], яка твердить, що множина ніде не диференційовних функцій у просторі $C_{[0,1]}$ є множиною другої категорії Бера; теорема Замфіреску (1981) [49], яка твердить, що сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій із супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера тощо. Сингулярні функції були об'єктами дослідження у роботах Л. Шварца [43], Н. Вінера та А. Вінтнера [48], В. Джессена й А. Вінтнера [25], Я. Ф. Виннишина [54,55], М. В. Працьовитого [76, 81, 80, 78], М. В. Працьовитого, Г. М. Торбіна і Я. В. Гончаренко [62], А. А. Довгошея [16], М. В. Працьовитого й А. В. Калашнікова [65, 82], М. В. Працьовитого й О. В. Косопльоткіної [84], М. В. Працьовитого та О. В. Свинчук [85, 86] та ін.

Велика група київських математиків (Торбін Г.М. [95], Барановський О.М. [50], Василенко Н.М. [53], Гетьман Б.І. [57] , Гончаренко Я.В. [58], Жихарєва Ю.І. [63], Ісаєва Т.М. [64], Кюрчев Д.В. [67], Лисенко І.М. [74], Працьовитий М.В. [81], Фещенко О.Ю. [98], Хворостіна Ю.В. [99] та ін.) розробляє нові системи кодування (зображення) дійсних чисел, які ґрунтуються на розкладах чисел у ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо. Такі системи використовують скінченносимвольний, зокрема двосимвольний, або нескінченний алфавіти, мають одну або кілька основ, мають нульову або ненульову надлишковість. У цій роботі ми використовуємо системи зображення дійсних чисел, які вони розробили: Q_∞^*-зображення, марковське зображення тощо.

Окремий клас локально складних функцій утворюють ті, множини значень яких є фракталами. Зокрема, до таких належать функції, чиї множини значень збігаються зі множинами неповних сум абсолютно збіжних числових рядів. Тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів є відображенням відповідних властивостей функцій. Це один із основних аспектів у нашому дослідженні. Варто зазначити, що множина неповних сум ряду як об'єкт метричного простору $\mathbb{R}^1$ потенційно є лінійним фракталом або множиною зі фрактальними локальними властивостями. Це робить її об'єктом самостійного наукового розгляду [1, 60, 75, 66, 35, 92, 93, 94, 89, 90]. Множини неповних сум із погляду теорії ймовірностей (теорії розподілів випадкових величин і теорії випадкових процесів) виступають у ролі спектрів і носіїв розподілів (сингулярних, нетривіальних сумішей сингулярних і абсолютно неперервних). Множини неповних сум рядів у теорії нескінченних згорток Бернуллі (симетричних і несиметричних) також відіграють важливе значення. Впродовж майже сторічної історії розвитку теорії наразі відкритим є ряд складних ймовірнісних проблем, пов'язаних із їхньою лебегівською структурою, тополого-метричними і фрактальними властивостями носіїв (зокрема, суттєвих носіїв щільності) [36, 37, 69, 3, 15, 97] тощо.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводяться у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України й на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

— фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053);

— фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583);

— фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (№ державної реєстрації 0118U002059).

Об'єктом дослідження є локально складні функції зі фрактальними властивостями, визначені з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць.

Предметом дослідження є структурні, автомодельні, тополого-метричні та інші властивості функцій.

Мета дослідження полягає у моделюванні й дослідженні функцій і розподілів випадкових величин із неоднорідною локальною структурою і фрактальними властивостями з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць і різних систем кодування дійсних чисел, а також у здійсненні тополого-метричного аналізу множин, суттєвих для функцій і розподілів.

Основними **завданнями** дисертаційного **дослідження** є:

— сконструювати сім'ю W додатних нескінченних двічі стохастичних матриць, залежних від одного параметра;

— для Q^*_∞-зображень, що ґрунтуються на матрицях із W, дослідити тополого-метричні властивості спектра (множини точок росту) функції розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ із незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q^*_∞-зображення за умови, що одна з координат стохастичного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0;

— для двосимвольного марковського зображення дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею, вивчити фрактальні властивості множин із заборонами вживання певних комбінацій цифр;

— вивчити властивості функцій, що є проекторами цифр:

а) двосимвольного марковського зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею, у класичне двійкове зображення;

б) нега-двійкового зображення в марковське зображення;

— для двох класів збіжних додатних рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з певними умовами однорідності вивчити властивості функції $f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) =$ $= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k$ і розподілу випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k$;

— вивчити поведінку модуля характеристичної функції нескінченної згортки Бернуллі, керованої рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з одного зі класів.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, метричної теорії чисел, фрактального аналізу і фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

— сконструйовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і описано тополого-метричні властивості спектра функції розподілу неперервної випадкової величини, заданої Q^*_∞-зображенням чисел, яке визначається нескінченною двічі стохастичною матрицею;

— досліджено фрактальні властивості множин чисел із заборонами вживання комбінацій символів у їхньому марковському зображенні, визначеному двічі стохастичною матрицею;

— знайдено необхідні й достатні умови сингулярності функції, яка проектує цифри:

– марковського зображення у цифри класичного двійкового зображення;

– нега-двійкового зображення у цифри марковського зображення;

Для зазначеної вище функції знайдено систему функціональних рівнянь, яка її однозначно визначає.

— вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні і фрактальні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом із суперфрактальною множиною підсум; поведінку модуля її характеристичної функції на нескінченності; доведено критерій дискретності; вивчено фрактальні властивості автозгорток цієї нескінченної згортки Бернуллі.

— Описано тополого-метричні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої нормованим додатним рядом, визначеним двома зростаючими послідовностями натуральних чисел; доведено, що її спектром є канторвал, міра Лебега якого залежно від вибору параметрів може бути як завгодно близькою до 1.

Одержані результати є новими, строго і цілком обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати – це певний внесок у теорію функцій дійсної змінної, фрактального аналізу і фрактальної геометрії, теорії розподілів випадкових величин. Запропоновані у дисертації прийоми й методи можуть бути використані при дослідженні інших локально складних математичних об'єктів (множин, функцій, мір) зі фрактальними властивостями.

Особистий внесок здобувачки. Усі положення і результати, які виносяться на захист, належать авторці й отримані самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, Працьовитому М. В. належить загальна постановка задач, редагування і перевірка одержаних результатів. У роботі [3^a] Савченку І.О. належить ідея доведення теореми 4. У роботі [4^a] Савченку І.О. й Виннишину Я.Ф. належать ідеї доведення лем 3.2 і 3.3.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів і наукових семінарах, а саме:

— Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (Київ, 2016);

— XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз" (Одеса, 2016);

— Міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі-2016" (Одеса, 2016);

— International Conference "Modern Advances in Geometry and Topology" (Kharkiv, 2016);

— The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, 2016);

— Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2017);

— Міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі-2017" (Одеса, 2017)

— Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю народження академіка НАН України Ю.О. Митропольского

(1917-2008) (Київ, 2017);

— XII Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз” (Колочава, 2017);

— International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of STEFAN BANACH (Lviv, 2017);

— Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2018);

— International scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis” (Odesa, 2018);

— The 13th Summer School “Analysis, Topology and Applications” (Vyzhnytsya, 2018);

— The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (Kyiv, 2018);

— Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2019);

— International scientific conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis” (Odesa, 2019);

— The 14th Summer School “Analysis, Topology, Algebra and Applications” (Pidzakharychi, 2019);

— семінар з фрактального аналізу, Інститут математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

— семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ імені Ігоря Сікорського (керівники: д-р фіз.-мат. наук, проф. О.І. Клесов, д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В. Іванов).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у чотирьох статтях [2^a] – [5^a], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 2 статті [3^a,4^a] – у наукових виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, і додатково відображено в матеріалах конференцій [6^a] – [23^a].

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел (102 найменування) і додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації – 144 сторінки.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційного дослідження, вивчено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні наукові результати.

Розділ 1 «Концептуальні основи дослідження й огляд літератури» має вступний характер. У ньому сформульовано означення стохастичних та двічі стохастичних матриць як центрального об'єкта дослідження.

Означення 1.1. *Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається стохастичною, якщо*

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ та } \sum_i p_{ij} = 1 \text{ або } \sum_j p_{ij} = 1,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2. *Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається двічі стохастичною, якщо*

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_i p_{ij} = 1, \quad \sum_j p_{ij} = 1,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

У цьому розділі описано відоме нескінченносимвольне Q_∞^*-зображен-ня дійсних чисел із $[0; 1)$, що є узагальненням Q_∞-зображення, яке є системою кодування чисел із нульовою надлишковістю (кожне число має єдине зображення). Описано його властивості, необхідні для подальшого конструювання й дослідження функцій. Тут також проведено огляд окремих двосимвольних систем числення.

Нехай $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – алфавіт системи числення, $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей; $Q^*_\infty = ||q_{ik}||$ – задана нескінченна додатна матриця, яка має властивості: 1) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik} = 1$; 2) для довільної послідовності чисел $(\alpha_n) \in L$: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_{\alpha_n n} = 0$.

Означення 1.3. *Розклад числа $x \in [0; 1)$ у ряд*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] \equiv \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots},$$

де $\beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}$, $i \in N, k \in N$ називається Q^*_∞-представленням*, а скорочений його запис $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ – Q^*_∞-зображенням числа x, визначеного матрицею Q^*_∞.* При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення.

У розділі описано основні факти стосовно сингулярних функцій розподілу ймовірностей, випадкових величин окремих типів, а також висвітлено актуальні результати дослідження множин неповних сум числових рядів, яке продовжуватиметься в подальших розділах.

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots - \tag{1}$$

деякий числовий ряд, а M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1), а кожен ряд виду $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n$ називається *підрядом* ряду (1).

Множину всіх неповних сум ряду (1) позначаємо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x : \ x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\} =$$

$$= \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\},$$

і називаємо *множиною неповних сум (множиною підсум)* ряду (1).

У другому розділі **«Q_∞^*-зображення дійсних чисел, визначене двічі стохастичними матрицями, й функції, з ними пов'язані»** у підрозділі 2.1 означуються нескінченні двічі стохастичні матриці й доводиться континуальність сім'ї нескінченних двічі стохастичних матриць.

Означення 2.1. *Нескінченною двічі стохастичною* матрицею називають матрицю $||q_{ik}||$, елементи якої є невід'ємними, а сума елементів кожного рядка і кожного стовпця дорівнює 1, тобто водночас виконуються умови: $q_{ik} \geqslant 0$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik} = 1 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik}$.

Лема 2.2. *Якщо для матриці $||q_{ik}||$ виконуються умови:*

1. $q_{01} = b \in (0;1)$*;*
2. $b + q = 1$*;*
3. $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ *для всіх* $i \neq k-1$, $k \in N$*;*
4. $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ *для всіх* $i = k-1$, $k \in N$, *то вона є двічі стохастичною.*

У підрозділах 2.3 і 2.4 уточнюються результати для Q_∞^*-зображення дійсних чисел, які здобув Працьовитий М.В., для випадку, коли матриця двічі стохастична і визначається одним параметром.

У підрозділі 2.5. розглядається випадкова величина $\tau = \Delta^{Q_\infty^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, задана своїм Q_∞^*-зображенням, визначеним нескінченною двічі стохастичною матрицею, залежною від одного параметра, де τ_n – незалежні однаково розподілені випадкові величини

$$P\{\tau_i = i\} = p_i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Теорема 2.1. *Якщо $p_c = 0$ і $p_j \neq 0$ при $j \neq c$, то спектром (множиною точок росту) функції розподілу $F_\tau(x) = P\{\tau < x\}$ є множина*

$$D_c \equiv [Q_\infty^*; \bar{c}] = \left\{x : x = \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \text{ де } \alpha_k \neq c \in \{0,1,2,3,\ldots\} \quad \forall k \in \mathbb{N}\right\},$$

яка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Наслідок 2.1. *Для міри Лебега множини D_c $(c \neq 0)$ справедливо*

$$q^{2c+1} - (1 - q^c + q^{c+1})^2 q^{3c+1} < \lambda(D_c) < 1 + \frac{q^{3c+2} - q^c}{1+q} - \frac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}.$$

Розділ 3 «Фрактальні властивості множин і функцій, пов'язаних зі двійковими зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею» присвячений дослідженню марковського двосимвольного зображення дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею, сингулярних функцій, пов'язаних із цим зображенням тощо. Нехай $A = \{0, 1\}$ – алфавіт системи числення; $q = (q_0, q_1)$ – упорядкований набір додатних чисел, причому $q_0 + q_1 = 1$; $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей алфавіту; $Q = ||q_{ik}||$ – додатна стохастична матриця. Формальний (скорочений) запис $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}} \right) \equiv \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$$\text{де} \quad \beta_{\alpha_1} = \alpha_1 q_{1-\alpha_1}, \quad \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = (\alpha_{k+1}) q_{\alpha_k, 1-\alpha_{k+1}},$$

і його суми x називають *марковським зображенням* числа x, яке є його кодуванням засобами двосимвольного алфавіту A.

У підрозділі 3.1 для множин чисел із заборонами вживання символів у їхньому марковському зображенні, визначеному додатною двічі стохастичною матрицею $Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, доведено факти.

Теорема 3.1. *Множина*

$$C = \Big\{ x : \quad x = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \; c_{2k-1}c_{2k} \in \{00, 11\} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \Big\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $a^x(a^x + (1-a)^x) = 1$.

Теорема 3.2. *Множина*

$$D = \{ x : \quad x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \; c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1 \; \forall k \in \mathbb{N} \} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $(a(1-a)^2)^x + a^x = 1$.

У підрозділі 3.2. вводиться до розгляду функція G й досліджуються її властивості.

Означення 3.2. *Функція G означується рівністю:*

$$G(x) = G(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) := \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Вона числу $x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ із відрізка $[0;1]$ (заданого своїм марковським зображенням) ставить у відповідність число з відрізка $[0;1]$, двійкове зображення якого записане тими самими символами ($\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$).

Теорема 3.4. *Функція $G(x)$ є неперервною, строго зростаючою;*

1. *кусково-лінійною, якщо $q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$, причому лінійною, якщо $q_0 = q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$;*
2. *сингулярною, в решті випадків.*

У підрозділі 3.3 вивчається сингулярна монотонна функція (проектор цифр нега-двійкового зображення дробової частини дійсного числа в марковське), яка визначається збіжним додатним рядом $1 = \frac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n} = = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ і додатною двічі стохастичною матрицею $\|p_{ik}\| = = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$:

$$F(x) = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \\ = \beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{i=1}^{k-1} p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}), \qquad (2)$$

$$\text{де } \beta_{\alpha_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n-1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \beta^{(1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) \neq \alpha_{2n}(x) = 1, \\ p_{10}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) = \alpha_{2n}(x) = 1, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \beta^{(0)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n+1}(x) = 1, \\ p_{01}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = \alpha_{2n+1}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) \neq \alpha_{2n+1}(x) = 0, \end{cases}$$

і $\alpha_k(x)$ – це k-а нега-двійкова цифра зображення числа x.

Лема 3.2. *Для функції $F(x)$, означеної рівністю (2), образом циліндра $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ нега-двійкового зображення є відрізок $[a;b]$, де*

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right), \qquad b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}}.$$

Теорема 3.5. *Образи різних циліндрів одного рангу при відображенні F не перекриваються і в об'єднанні дають увесь відрізок $[0,1]$.*

Теорема 3.6. *Функція $F(x)$, означена рівністю (2), є:*

1) *коректно означеною,*
2) *неперервною,*
3) *строго зростаючою,*
4) *причому лінійною при $p_{00} = 0,5$ і сингулярною при $p_{00} \neq 0,5$ (має похідну, яка дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Теорема 3.7. *Функція $y = F(x)$, означена рівністю (2), є функцією розподілу випадкової величини ξ, цифри ξ_k нега-двійкового зображення $\overline{\Delta}^2_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots\xi_n\ldots}$ якої є випадковими величинами, які набувають значень 0 й 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $\frac{1}{2}$ й $\frac{1}{2}$ і матрицею перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.

Теорема 3.8. *Функція $F(x)$, означена рівністю (2), задовольняє си-*

стему функціональних рівнянь:

$$F(\delta_{ij}(x)) = \begin{cases} F(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}p_{01}^2 - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{00}^2 + p_{00}^2F_0(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{01}^2 + p_{01}^2F_0(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00}^2 - \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + p_{00}p_{01}F_0(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x) = p_{01}^2F_1(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + p_{00}^2F_1(x), \\ \qquad\qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}. \end{cases}$$

Розділ 4 «Множина неповних сум збіжного ряду як множина значень функції й носій розподілу випадкової величини» присвячений функціям і розподілам випадкових величин, пов'язаних із заданим збіжним додатним рядом $d_1+d_2+\ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ і визначеними нескінченними стохастичними матрицями, а саме:

1) множинам значень функції f, визначеної на відрізку $[0;1]$ і означеної рівністю

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k, \tag{3}$$

2) спектрові розподілу випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k, \tag{4}$$

де (ξ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, причому ξ_k набуває значень 0 і 1 зі ймовірностями p_{0k} й p_{1k} відповідно.

Лема 4.1. Множиною значень функції (3) є множина неповних сум $E\{d_k\}$ ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$.

Розглядається ряд:

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = \underbrace{c_1 + ... + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + ... + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1, \quad (5)$$

для якого виконується умова

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} \equiv b_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \ ,$$

$$\text{де} \ \ \widetilde{r}_n = \underbrace{c_{n+1} + ... + c_{n+1}}_{a_{n+1}} + \underbrace{c_{n+2} + ... + c_{n+2}}_{a_{n+2}} + ...,$$

причому (a_n) і (b_n) – неспадні послідовності натуральних чисел.

Теорема 4.1. *Загальний член ряду* (5) *має вигляд:* $c_n = b_n \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}$.

Наслідок 4.1. *Для членів і залишків ряду (5) справедливі співвідношення:*

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}; \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n(a_{n+1} + 1)}, \quad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1} + 1}.$$

Теорема 4.3. *Множина неповних сум ряду*

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + ... + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{2^{n-1}} + \widetilde{r}_n, \quad (6)$$

для якого виконується умова $\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} = n + 1 = \frac{d_m}{r_m}, \ \ m = 2^k - 1, \ \ k = 1, 2, 3, ...$, *є суперфрактальною множиною.*

У підрозділі 4.2 досліджено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної й сингулярної компонент) і властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої рядом (6).

Теорема 4.4. *Розподіл випадкової величини* (4)*, визначеної рядом* (6)*, є чистим, причому чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли* $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.

У випадку дискретності розподілу випадкової величини (4) *його точковий спектр складається з точки*

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* k_n, \quad \text{де} \quad p_{\alpha_k^* k} \geqslant p_{[1-\alpha_k^*]k},$$

й усіх таких точок x, що

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k d_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k^* d_k,$$

де $\alpha_k \in \{0,1\}$, $p_{\alpha_k k} \neq 0$ при $k \leqslant m$.

Лема 4.2. *Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0,1\}$ і всіх $k \in \mathbb{N}$, то спектром S_ξ розподілу випадкової величини ξ є множина $E\{d_k\}$ всіх неповних сум ряду (6), тобто $S_\xi = E\{d_k\} \equiv \left\{x : x = \sum_{k\in M} d_k, \quad M \in 2^{\mathbb{N}}\right\}$.*

Наслідок 4.2. *Для спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ справедливе включення $S_\xi \subset E\{d_k\}$.*

Наслідок 4.3. *Спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є суперфрактальною множиною.*

Теорема 4.5. *У випадку неперервності ($M = 0$) розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу із суперфрактальним спектром.*

У підрозділі 4.3 досліджено асимптотичні властивості характеристичної функції розподілу.

Теорема 4.6. *Для випадкової величини ξ, визначеної рядом (6), справедлива рівність $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 1$.*

Підрозділ 4.4 присвячено дослідженню автозгорток нескінченної згортки Бернуллі.

Автозгорткою розподілу випадкової величини ξ називають розподіл випадкової величини $\psi_2 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, а *$s$–кратною згорткою розподілу випадкової величини ξ* — розподіл випадкової величини

$$\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)},$$

де $\xi^{(j)}$ — незалежні й однаково розподілені випадкові величини, розподіл кожної з яких збігається з розподілом ξ.

Лема 4.4. *Спектр S_{ψ_s} розподілу випадкової величини ψ_s є підмножиною відрізка $[0,s]$ і належить об'єднанню $\prod\limits_{k=0}^{n} (s \cdot 2^k + 1)$ ізометричних відрізків довжини $s\widetilde{r}_n$, $n = 1, 2, 3, \ \dots$.*

Теорема 4.7. *У випадку неперервності ($M = 0$) випадкової величини ξ розподіл випадкової величини ψ_s, для будь-якого натурального $s \geqslant 2$ є сингулярним розподілом канторівського типу з суперфрактальним спектром.*

Розділ 5 «Нескінченні згортки Бернуллі, спектри яких є канторвалами» присвячений дослідженню множини неповних сум, а саме: з'ясовується, якої найбільшої масивності (у розумінні міри Лебега) може досягати множина неповних сум додатного монотонного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для якого виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{r_n} = +\infty$. Основним результатом цього розділу є теорема

Теорема 5.4. Для довільного $\varepsilon > 0$ існують послідовності (s_n), (m_n), і (a_n), такі, що виконуються наступні умови:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = 1$*;*
2. $\widetilde{r}_n = \dfrac{2a_n}{m_n}$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$*, де* $\widetilde{r}_n = \sum\limits_{k>n} (s_k + m_k) a_k$*;*
3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{d_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_{n+k}} = \infty$*;*
4. *множина* $E\{d_n\}$ *– це канторвал, міра Лебега якого більша, ніж* $1 - \varepsilon$*.*

У цьому розділі вивчаються нескінченні згортки Бернуллі, керовані рядами, множинами неповних сум яких є канторвали.

Подяка. Висловлюю глибокі слова вдячності моєму сенсею, людині з великим серцем, відкритою душею і щирістю у вчинках – науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук,професору **М. В. Працьовитому** за постановку задач, постійну увагу до цієї праці, підтримку й допомогу.

Присвячується світлій пам'яті мого батька – Маркітана Петра Васильовича.

РОЗДІЛ 1
КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ Й ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Цей розділ має вступний характер. У ньому систематизовано відомості, що стосуються стохастичних та двічі стохастичних матриць; систем кодування дійсних чисел, теорії фракталів тощо. Наведено факти, необхідні для подальшого дослідження об'єктів зі складною локальною будовою.

1.1. Стохастичні та двічі стохастичні матриці

Стохастичні матриці стали одним із об'єктів досліджень науковців у галузі теорії ймовірностей з початку XX ст. Це вивчення започаткував російський математик Марков А.А., досліджуючи в серії робіт (1907 - 1912 р.р.) [71, 72] ймовірнісні моделі (сьогодні відомі як "ланцюги Маркова"), де породжувальним елементом фігурує стохастична матриця. Теорія стохастичних матриць має певний блок класичних результатів, який увійшов до найбільш відомих енциклопедичних монографій Bellman R. [9], Гантмахера Ф. [56] , Хорна Р. і Джонсона Ч. [101], Bapat R.B. і Raghavan T.E.S. [6] та ін.

Означення 1.1. Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається *стохастичною*, якщо

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ для } i, j = 1, \ldots, n$$

і

$$\sum_i p_{ij} = 1 \text{ або } \sum_j p_{ij} = 1, \; i, j = 1, \ldots, n.$$

Якщо у стохастичної матриці ще й сума елементів по стовпцям дорівнює одиниці, то матрицю називають *двічі стохастичною*, тобто

Означення 1.2. Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається *двічі стохастичною*, якщо

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ для } i, j = 1, \ldots, n$$

і

$$\sum_i p_{ij} = 1, \quad \sum_j p_{ij} = 1, \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

У термінах вектора $e = (1, \ldots, 1)$ умова (1.1) має більш компактну форму

$$eP = e; \quad Pe' = e'.$$

Таким чином, 1 – це власне значення P, що відповідає власному вектору e.

Термін “стохастична матриця” бере свій початок принаймні з досліджень Романовського [39,40], де він в одній із робіт пише: “Матриці з цими властивостями відіграють важливу роль у теорії дискретних марковських ланцюгів. Ось чому ми називаємо ці матриці стохастичними”. Варто зазначити, що двічі стохастичні матриці називаються також *перетвореннями Шура* [8, с. 31], або *бістохастичними матрицями* [10, с. 180]. Певно, найпростіший приклад двічі стохастичної матриці – це матриця розміром $n \times n$, у якої кожен елемент дорівнює $\frac{1}{n}$. Це єдина незвідна (ідемпотентна) двічі стохастична матриця розміром $n \times n$ [44]. Властивості таких матриць детально викладено у Маршала й Олкіна [29]. Особливо цікавими прикладами є матриці перестановок. Квадратну матрицю $\prod$ називають матрицею перестановок, якщо кожен із її рядків і стовпців містить єдиний одиничний елемент, а всі інші елементи – нулі. Існує $n!$ таких матриць розміром $n \times n$, кожна з яких отримана шляхом перестановки рядків (або стовпців) одиничної матриці. Множина $n \times n$ двічі стохастичних матриць опукла, а матриці перестановок – екстремальні точки цієї множини.

Теорема 1.1 (Теорема Біркгофа [11]). *Множина двічі стохастичних матриць є опуклою оболонкою матриць перестановок. Інакше ка-*

жучи, множина всіх двічі стохастичних матриць – це опуклий багатогранник із вершинами, що є матрицями перестановок.

Багатогранник усіх двічі стохастичних матриць розміром $n \times n$ називається *багатогранником Біркгофа*, причому його розмірність дорівнює $(n-1)^2$. Історичне обговорення теореми Біркофа можна зустріти у працях Андо [4] й Бапата і Рагхавана [6].

Сінкгорн довів твердження у 1964 році [45] про те, що двічі стохастичну матрицю можна отримати з довільної додатної квадратної матриці за кілька кроків. За кожен такий крок можна помножити будь-який рядок або стовпець на додатне число.

1.2. Системи кодування дійсних чисел

Значний клас математичних об'єктів зі складною локальною будовою (множин, функцій, розподілів ймовірностей, перетворень простору, динамічних систем тощо) відносно просто можна описати і вивчити завдяки використанню різних систем числення [81, 96]: зі скінченним і нескінченним алфавітом, суттєво надлишкових і з нульовою надлишковістю, з самоподібною геометрією і несамоподібною тощо. Це s-адичні розклади (двійкова, трійкова, десяткова системи числення), ланцюгові дроби, медіантне, подання Фібоначчі, подання за допомогою рядів (Люрота [63], Енгеля [57], Кантора, Остроградського-Серпінського-Пірса [51], Остроградського 2-го виду [74] абощо) та ін. Кожний спосіб формального зображення дійсних чисел має свій алфавіт A (набір символів, цифр).

1.2.1. Q_∞^*-зображення дійсного числа. Q_∞^*-зображення дійсного числа з піввідрізка $[0;1)$, будучи узагальненням Q_∞-зображення, як система числення з нескінченним алфавітом і нульовою надлишковістю (кожне число має єдине зображення) вів Працьовитий М.В. [81]. Нагадаємо його суть.

Нехай $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – алфавіт системи числення, $L = A \times A \times \times A \ldots$ – простір послідовностей; $Q^*_\infty = ||q_{ik}||$ – задана матриця, яка має властивості:

1. містить нескінченну кількість рядків і стовпців;
2. $q_{ik} > 0 \ \ \forall i \in A, \ \ \forall k \in N$;
3. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik} = 1$;
4. для довільної послідовності чисел $(\alpha_n) \in L$: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_{\alpha_n n} = 0$.

Означення 1.3. Розклад числа $x \in [0; 1)$ у ряд

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] \equiv \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{1.2}$$

$$\text{де} \ \ \beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}, \quad i \in N, k \in N$$

називається Q^*_∞-*представленням*, а скорочений його запис $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ – Q^*_∞-*зображенням числа* x, визначеного матрицею Q^*_∞. При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення. Цифра є символом у зображенні числа і не відіграє ролі числа у виразі ряду (1.2). Варто зазначити, якщо всі стовпці матриці Q^*_∞ є однаковими, то Q^*_∞-зображення є Q_∞-зображенням.

Задача, що приводить до Q^*_∞-зображення. Розгляньмо двійкове зображення довільного дійсного числа $x \in (0; 1]$ і здійснимо перекодування його символів за таким правилом:

$$x = \Delta^2_{\underbrace{0 \ldots 0}_{a_1} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{a_2} 1 \ldots 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{a_k} 1 \ldots} = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}, \tag{1.3}$$

де $\Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$ – формальний запис розкладу числа x у ряд:

$$x = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + k}},$$

Запис (1.3) встановлює відповідність між класичним двійковим зображенням дійсного числа $x \in (0; 1]$ зі двосимвольним алфавітом $A_2 = \{0, 1\}$ і кодуванням його засобами нескінченносимвольного алфавіту $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Розгляньмо випадкову величину

$$\xi = \Delta^{2^\infty}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$$

де η_k – незалежні випадкові величини, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots, i, \ldots$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, ...p_{ik}, ...$ відповідно $(p_{0k}+p_{1k}+p_{2k}+\ldots+p_{ik}+$ $+\ldots=1,\ k\in\mathbb{N})$.

Теорема 1.2. *Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ подаєтьcя у вигляді*

$$F_\xi\left(x\right)=\beta_{a_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\right],\quad \text{де}\quad \beta_{a_k(x)k}\equiv\sum_{j=a_k+1}^{\infty}p_{jk},\quad k\in N.$$

Доведення. За означенням функції розподілу $F_\xi(x)=\mathsf{P}\left\{\xi<x\right\}$. Враховуючи, що $x_1<x_2\Leftrightarrow\exists\, m:\ a_m(x_1)>a_m(x_2)$ і $a_i(x_1)=a_i(x_2),$ при $i<m$ то подію $\{\xi<x\}$ можна подати у вигляді об'єднання несумісних подій:

$$\{\xi<x\}=\{\eta_1>a_1(x)\}\cup\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\}\cup\ldots$$
$$\ldots\cup\left\{\eta_j=a_j(x), j=\overline{1,k+1}\wedge\eta_k>a_k(x)\right\}\ldots.$$

Тому:

$$F_\xi(x)=\mathsf{P}\left\{\xi<x\right\}=\mathsf{P}\big\{\{\eta_1>a_1(x)\}\cup\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\}\cup$$
$$\ldots\cup\left\{\eta_j=a_j(x), j=\overline{1,k-1}\wedge\eta_k>a_k(x)\right\}\ldots\big\}=\mathsf{P}\left\{\eta_1>a_1(x)\right\}+$$
$$+\,\mathsf{P}\left\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\right\}+\ldots+$$
$$+\,\mathsf{P}\left\{\eta_j=a_j(x), j=\overline{1,k-1}\wedge\eta_k>a_k(x)\right\}+\ldots$$

Врахувавши незалежність подій η_k, отримаємо:

$$F_\xi(x)=\mathsf{P}\left\{\eta_1>a_1(x)\right\}+\mathsf{P}\left\{\eta_1=a_1(x)\right\}\cdot\mathsf{P}\left\{\eta_2>a_2(x)\right\}+\ldots+$$
$$+\,\mathsf{P}\left\{\eta_1=a_1(x)\right\}\cdot\mathsf{P}\left\{\eta_2=a_2(x)\right\}\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}\left\{\eta_{k-1}=a_{k-1}(x)\right\}\cdot\mathsf{P}\left\{\eta_k>a_k(x)\right\}+$$
$$+\ldots=\sum_{k=a_1+1}^{\infty}p_{k1}+p_{a_1(x)1}\cdot\sum_{k=a_2+1}^{\infty}p_{k2}+\ldots+\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\cdot\sum_{k=a_k+1}^{\infty}p_{kk}+\ldots=$$
$$=\beta_{a_1(x)1}+\beta_{a_2(x)2}\cdot p_{a_1(x)1}+\ldots+\beta_{a_k(x)k}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}+\ldots=$$
$$=\beta_{a_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\right],$$

що потрібно було довести. $\square$

Нехай $1 < s \in \mathbb{N}$ – фіксоване число й $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ – алфавіт s-кової системи числення, $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, $j \in N$, $i \in A_s$, тоді подання числа (1.2) називається його Q_s^*-*представленням*, а його символічний запис $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ – Q_s^*-*зображенням*. Поняття j-ї Q_s^*-цифри числа x не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q_s^*-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}.$$

Їх називають Q_s^*-*раціональними*. Числа, що не містять періоду (0) або $(s-1)$, мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^*-*ірраціональними*.

Якщо для всіх $i \in A_s$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_s^*-зображення називається Q_s-*зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$,то Q_s-зображення є звичайним s-*ковим зображенням*.

1.2.2. Деякі двосимвольні системи числення. Існує багато принципово різних двосимвольних систем зображення (кодування) дійсних чисел. Найпоширенішою й широковживаною системою, що обслуговує множину дійсних чисел, є класична двійкова система, в якій алфавіт (набір цифр) містить два елементи 0 і 1 і дійсне число x подається (представляється) як сума своєї цілої і дробової частин: $x = [x] + \{x\} = \pm u + \{x\}$, де $u \in \mathbb{N}$ і

$$u = a_n 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 \equiv (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2, \quad a_j \in \{0; 1\},$$

$$\{x\} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad \alpha_j \in \{0; 1\},$$

або компактніше:

$$x = \pm\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 2^n\right), \ a_n \in A.$$

Двійником класичної двійкової системи числення є нега-двійкова система, основою якої є число -2. Цю систему числення, ймовірно, вперше описав Вітторіо Грюнвальдом [23].

Традиційно множину $A = \{0; 1\}$ називають *алфавітом* двійкової й нега-двійкової систем числення, а її елементи — *цифрами*. Цифри виконують дві функції:

1) функцію цілого числа, яке можна додавати до інших чисел і на яке можна множити інші числа;

2) функцію символа для формального (скороченого) запису виразів (представлення числа).

1.3. Неперервні функції зі фрактальними властивостями

Функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов:

1) функція має хоча б одну фрактальну множину рівня;

2) функція має фрактальний графік (як множину в $\mathbb{R}^2$);

3) функція має фрактальну множину несталості;

4) функція має фрактальну множину особливостей (диференціального чи іншого характеру);

5) функція «трансформує» фрактальну розмірність принаймні однієї борелівської множини відрізка $[0, 1]$;

6) розподіл значень функції при рівномірному розподілі її аргументу зосереджений на фракталі тощо.

Способи задання функцій зі фрактальними властивостями:

1) системою функціональних рівнянь;

2) як функцію розподілу ймовірностей на лінійному фракталі;

3) методом ітерованих функцій;

4) перетворенням цифр однієї системи зображення в іншу, з тим самим алфавітом, але принципово з різними геометріями;

5) інваріантами цифр тощо.

Означення 1.4. Неперервна функція, відмінна від константи, називається *сингулярною (сингулярно неперервною)*, якщо її похідна майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює 0.

Серед сингулярних функцій існують монотонні, зокрема строго монотонні, й немотонні функції.

Означення 1.5. Функція називається *ніде не монотонною*, якщо вона не має жодного проміжку монотонності.

Означення 1.6. Функція називається *ніде не диференційовною*, якщо вона не має похідної в жодній точці області визначення.

Теорема 1.3 (Банаха-Мазуркевича, 1931). *Ніде не диференційовні функції у просторі $C_{[0;1]}$ утворюють множину другої категорії Бера.*

Теорема 1.4 (Замфіреску, 1981). *Сингулярні функції в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій зі супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера.*

1.4. Сингулярні розподіли ймовірностей

Сингулярні розподіли ймовірностей – це найменш вивчений тип розподілів. Сучасний підвищений інтерес до них продиктований розвитком науки й тісним зв'язком зі фракталами.

Нехай $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір ($\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелівських множин і $\mathbf{P}$ – ймовірнісна міра), на якому задано випадкову величину ξ, $F_\xi = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ — її функція розподілу. Як відомо, функція розподілу відображає властивості розподілу.

Означення 1.7. Розподіл в.в. ξ називається *дискретним*, якщо він зосереджений на не більш ніж зліченній множині, тобто існує не більш ніж зліченна множина $E \in \mathfrak{B}$, така, що $\mathbf{P}(E) = 1$.

Функцію розподілу дискретної в.в. ξ можна записати:

$$F_\xi(x) = \sum_{k: x_k < x} p(x_k), \text{ де } p(x_k) = \mathbf{P}\left\{\xi = x_k\right\}.$$

Функція дискретного розподілу зростає виключно стрибками.

Означення 1.8. Розподіл в.в. ξ називається *неперервним*, якщо ймовірність будь-якої одноточкової множини дорівнює нулю.

Функція розподілу неперервної випадкової величини $F_\xi(x)$ неперервна на всій числовій осі.

Означення 1.9. Розподіл в.в. ξ називається *абсолютно неперервним*, якщо $\mathbf{P}(E) = 0$ для кожної множини E нульової міри Лебега.

Означення 1.10. Розподіл неперервної в.в. ξ називається *сингулярним*, якщо існує така множина E нульової міри Лебега, що $\mathbf{P}(E) = 1$.

Функція розподілу сингулярної випадкової величини неперервна і її похідна майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює 0.

Означення 1.11. *Спектром* S_ξ (рівносильно мінімальний замкнений носій розподілу) функції розподілу F_ξ в.в. ξ (розподілу в.в. ξ) називається множина всіх точок зростання функції F_ξ, тобто

$$S_\xi = S_{F_\xi} = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 \ \forall\, \varepsilon > 0\} = \\ = \{x : \mathbf{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \forall\, \varepsilon > 0\}. \quad (1.4)$$

Означення 1.12. *Точковим спектром* розподілу в.в. ξ з функцією розподілу F_ξ називається множина $D_\xi = D_{F_\xi}$ його атомів, тобто множина всіх точок, у яких відбуваються стрибки F_ξ.

Спектр – груба характеристика розподілу випадкової величини, яка неузгоджена з лебегівською класифікацією чистих розподілів.

1.5. Випадкові величини Джессена-Вінтнера й типу Джессена-Вінтнера

Розгляньмо дві незалежні в.в. ξ_1 і ξ_2 із відповідними для них функціями розподілу F_1 і F_2, характеристичними функціями f_1 і f_2, ймовірнісними мірами μ_1 і μ_2.

Означення 1.13. *Згорткою* (або *композицією*) розподілів незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 (або мір μ_1 і μ_2, або функцій розподілу F_1

і F_2) називається розподіл (або міра, або функція розподілу) випадкової величини $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

Теорема 1.5 ([69]). *Функція розподілу F є згорткою функцій розподілу F_1 і F_2, тобто*

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-x)dF_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(z-x)dF_1(x),$$

тоді й тільки тоді, коли відповідні характеристичні функції задовольняють рівність

$$f(t) = f_1(t)f_2(t).$$

Якщо $F_1,\ F_2,\ \ldots, F_k$ – функції розподілу, то їхню згортку позначають

$$\prod_{j=1}^{k}{}^{*} F_j = F_1 * F_2 \ldots * F_k.$$

Теорема 1.6 (Джессен-Вінтнер [25]). *Нехай*

$$F = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k$$

збіжна нескінченна згортка чисто дискретних функцій розподілу F_k. Тоді F є чистою, тобто або чисто дискретною, або чисто сингулярною, або чисто абсолютно неперервною функцією розподілу.

Це твердження в термінах випадкових величин формулюється таким чином:

Теорема 1.7 (Джессена-Вінтнера [25,81,100]). *Нехай (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які мають дискретний розподіл. Тоді з ймовірністю 1 збіжний ряд*

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots$$

має чистий лебегівський тип розподілу (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярний).

Означення 1.14. Випадкова величина, яка є сумою збіжного з ймовірністю 1 ряду з незалежних дискретно розподілених випадкових величин, називається *випадковою величиною типу Джессена-Вінтнера.*

Згідно з теоремою (1.7), кожна випадкова величина типу Джессена-Вінтнера має чистий розподіл, проте питання, який саме з розподілів (чисто дискретний, чисто сингулярний, чисто абсолютно неперервний) має місце залишає відкритим.

Теорема 1.8 (Леві [28]). *Нехай*

$$F = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k$$

збіжна нескінченна згортка і p_k *максимальний стрибок функції розподілу* F_k*. Точковий спектр* $D_F = \varnothing$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

Нехай $B(x)$ – функція розподілу дискретної випадкової величини, яка набуває значень –1 і 1 з імовірностями $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{2}$. Відповідною характеристичною функцією є функція $b(t) = cost$. Розгляньмо послідовність (r_k) додатних чисел і послідовність функцій розподілу $F_k(x) = B(x/r_k)$.

Означення 1.15. Нескінченна згортка

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} B\left(\frac{x}{r_k}\right)$$

називається *симетричною згорткою Бернуллі* або просто *згорткою Бернуллі.*

Теорема 1.9 ([69]). *Симетрична згорка Бернуллі* (1.15) *є збіжною тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2.$$

1.6. Лебегівська структура функції обмеженої варіації й розподілу ймовірностей

Означення 1.16. Число

$$V_a^b(f) = \sup_T V_a^b(T; f),$$

де $V_a^b(T; f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, $n \in N$ і верхня грань береться за всіма можливими T-розбиттями відрізка $[a; b]$, називається *варіацією* функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Якщо число $V_a^b(f) < +\infty$, то функцію $f(x)$ називають *функцією обмеженої варіації* на відрізку $[a; b]$, у протилежному випадку – *необмеженої варіації*.

Теорема 1.10 (Лебега). *Будь-яка функція обмеженої варіації f, визначена на $[a; b]$, подається у вигляді*

$$f(x) = d(x) + f_1(x) = d(x) + \varphi(x) + r(x), \tag{1.5}$$

де d – функція стрибків (дискретна функція), f_1 – неперервна функція, φ – абсолютно неперервна функція ($\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)dt$), r – сингулярна функція або 0. За умови $f(a) = f_1(a) = \varphi(a)$, розклад (1.5) – єдиний.

Розклад (1.5) називається лебегівською структурою функції обмеженої варіації f.

Теорема 1.11 (Лебега). *Кожну функцію розподілу $F_\xi(x)$ можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації*

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha F_c(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{a.c}(x) + \alpha_3 F_s(x), \tag{1.6}$$

де F_d – дискретна, F_c – неперервна, $F_{a.c}$ – абсолютно неперервна, F_s – сингулярна функція розподілу, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\alpha_1 + \alpha = 1$, $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$.

Розклад (1.6) називають *лебегівською структурою функції* $F_\xi(x)$ або *лебегівською структурою розподілу* в.в. ξ. Якщо один із коефіцієнтів α_i

дорівнює 1, то розподіл називається чистим: *чисто дискретним*, якщо $\alpha_1 = 1$; *чисто абсолютно неперервним*, якщо $\alpha_2 = 1$; *чисто сингулярним*, якщо $\alpha_3 = 1$.

1.7. Нескінченні згортки Бернуллі

Означення 1.17. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний числовий ряд. Розподіл в.в.

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n,$$

де ξ_n – послідовність незалежних в.в., які набувають двох значень $c < 1$ і 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n} відповідно, називається *нескінченною згорткою Бернуллі*, керованою рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо $c = -1$, а $p_{0n} = \frac{1}{2} = p_{1n}$, то розподіл ξ називається *нескінченною симетричною згорткою Бернуллі.*

Понад сторіччя проводяться дослідження нескінченних симетричних згорток Бернуллі й їхніх різнопланових узагальнень, зокрема нескінченних згорток Бернуллі з різними порушеннями симетрії. Це розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n,$$

де (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин із розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

Зрозуміло, що властивості розподілу випадкової величини ξ однозначно визначаються послідовністю (d_n) членів ряду, точніше – рядом, і нескінченною стохастичною матрицею $\|p_{in}\|$. Варто зазначити, що інтерес до таких розподілів випадкових величин через різноманітні причини віднедавна значно посилився $[1, 36, 35, 46, 51, 59, 87]$. Зокрема, це пов’язано, з дослідженнями їхніх фрактальних властивостей [61]. Із теореми Джессена–Вінтнера

(1.7) випливає, що випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу, тобто її функція розподілу або чисто дискретна, або чисто абсолютно неперервна, або сингулярна. Відома теорема П. Леві [28] разом з теоремою Джессена–Вінтнера дає необхідні й достатні умови дискретності й неперервності розподілу ξ. Та розділити випадки абсолютної неперервності й сингулярності в загальній постановці задачі до цього часу нікому не вдалось. Хоч це успішно зроблено для певних класів рядів, що володіють певними властивостями однорідності [89, 90].

У теорії нескінченних згорток Бернуллі існує ряд складних ймовірнісних проблем [76, 79]. Однією з них є проблема поглиблення теореми Джессена-Вінтнера [2], яка стверджує лебегівську чистоту (дискретність, абсолютну неперервність, сингулярність) розподілу суми з ймовірністю 1 збіжного випадкового ряду з незалежними дискретно розподіленими доданками, проте не дає відповіді на питання: коли який? Інша проблема стосується тополого-метричних і фрактальних властивостей спектра розподілу (множини точок росту функції розподілу), яка безпосередньо пов'язана з тополого-метричними властивостями множини неповних сум ряду. Третя стосується поведінки модуля характеристичної функції на нескінченності [51,79]. Поки що вони не піддаються розв'язанню в загальній постановці, а тому дослідники їх розглядають в окремих класах.

1.8. Теорія фракталів

Для тоншої характеризації множин нульової міри Лебега можна (доцільно) використовувати апарат теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу). Нагадаємо деякі теоретичні відомості з цієї галузі, зокрема, означення $\mathcal{H}^{\alpha}-$*міри Гаусдорфа* і *розмірності Гаусдорфа-Безиковича* множини $M \subset \mathbb{R}^1$.

Нехай M – обмежена підмножина метричного простору (X, ρ). Величина $d(M) \equiv \sup\{\rho(x, y) : \ x, y \in M\}$ називається діаметром множини M.

Діаметр лінійної множини M далі позначатимемо через $|M|$.

Означення 1.18. Нехай ε – додатна константа. Скінченне або зліченне сімейство $\{M_j\}$ множин називається *ε-покриттям* множини M, якщо $M \subset \bigcup\limits_j M_j$, де

$$d(E_j) \leqslant \varepsilon, \quad E_j \in X, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Означення 1.19. Нехай α і ε – додатні числа, $\alpha - \varepsilon$*-мірою Гаусдорфа* (*наближаючою мірою* порядку ε) обмеженої множини M називається

$$\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(M) \equiv \inf_{d(M_j)\leqslant\varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(M_j) \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш ніж зліченними ε-покриттями $\{M_j\}$ множини M множинами $M_j \subset X$.

Означення 1.20. Нехай α — фіксоване додатне число, *α-вимірною мірою ($\mathcal{H}^\alpha$-мірою) Гаусдорфа* обмеженої множини M називається значення функції множини, визначеної рівністю

$$\mathcal{H}^\alpha(M) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(M),$$

і точна нижня грань визначається за всіма можливими не більш ніж зліченними покриттями множини M відрізками M_j, діаметри $d(M_i)$ яких не перевищують ε. Зрозуміло, що границя $\mathcal{H}^\alpha(M)$ завжди існує, хоча й граничне значення може бути (і зазвичай є) 0 або ∞.

Для α-вимірної міри Гаусдорфа справедливі *властивості* [18]. Зафіксуємо $\beta > \alpha > 0$, якщо:

1. $\mathcal{H}^\alpha(M) < \infty$, то $\mathcal{H}^\beta(M) = 0$;
2. $\mathcal{H}^\beta(M) > 0$, то $\mathcal{H}^\alpha(M) = \infty$;
3. $M \subset M'$, то $\mathcal{H}^\alpha(M) \leqslant \mathcal{H}^\alpha(M')$;
4. $M \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} M_j$, то $\mathcal{H}^\alpha(M) \leqslant \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\alpha(M_j)$.

Означення 1.21. Невід'ємне число

$$\alpha_0(M) = \sup\{\alpha : \ \mathcal{H}^\alpha(M) = +\infty\} = \inf\{\alpha : \ \mathcal{H}^\alpha(M) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини* M.

Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича справедливі *властивості*:

1. $\alpha_0(M) = 0$ для довільної не більш ніж зліченної множини M;

2. якщо $M_1 \subset M_2$, то $\alpha_0(M_1) \leqslant \alpha_0(M_2)$;

3. якщо M_1 і M_2 – афінно еквівалентні (зокрема геометрично подібні) множини, то $\alpha_0(M_1) = \alpha_0(M_2)$;

4. $\alpha_0\left(\bigcup\limits_n M_n\right) = \sup\limits_n \alpha_0(M_n)$.

Оскільки α-вимірна міра Гаусдорфа у просторі $\mathbb{R}^1$ при $\alpha = 1$ є зовнішньою мірою Лебега, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин додатної міри Лебега дорівнює 1.

Означення 1.22 ([81]). *Фракталом* називається кожна континуальна обмежена множина простору $\mathbb{R}^1$, яка має тривіальну (що дорівнює 0 або ∞) H^α-міру Гаусдорфа, порядок α якої дорівнює топологічній розмірності.

Означення 1.23. Множини нульової міри Лебега простору $\mathbb{R}^1$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича яких дорівнює 1, називаються *суперфрактальними*, а континуальні множини, що мають нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича, — *аномально фрактальними.*

Найпростіший клас фракталів – це *самоподібні фрактали.* Відображення g метричного простору $\mathbb{R}^1$ на себе, при якому відстані між точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається *перетворенням подібності.* При цьому число k називають *коефіцієнтом подібності.*

Кажуть, що множина $E \subset \mathbb{R}^1$ *подібна* множині $E' \subset \mathbb{R}^1$ з *коефіцієнтом подібності* $k > 0$, якщо існує відображення $g : E \to E'$, таке, що

$$\frac{|g(x_2) - g(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = k \quad \text{для всіх} \quad x_1, x_2 \in E.$$

Символічно це записують так: $E \overset{k}{\sim} E'$.

Означення 1.24 ([81]). Непорожня обмежена множина E простору

$\mathbb{R}^1$ називається *самоподібною*, якщо

$$\begin{cases} 1)\ E = E_1 \cup ... \cup E_n,\ n > 1, \\ 2)\ E \overset{k_i}{\sim} E_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ 3)\ \alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E) \ \ \forall i \neq j, \end{cases}$$

тобто множина E самоподібна, якщо її можна подати у вигляді скінченного об'єднання власних підмножин E_i, які подібні E (загалом, кожна зі своїм коефіцієнтом подібності k_i), причому розмірність Гаусдорфа-Безиковича перетину довільних двох таких підмножин менша, ніж розмірність самої множини E. Найменше таке число n називається *показником самоподібності*, а (K, n) – законом самоподібності $K = \{k_1, ..., k_n\}$.

Означення 1.25 ([81]). Якщо E – самоподібна множина з законом самоподібності (K, n), $\quad K = \{k_1, ..., k_n\}$, то додатне число α, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + ... + k_n^x = 1, \tag{1.7}$$

називається *самоподібною розмірністю* множини E і позначається $\alpha_s(E)$.

Оскільки рівняння (1.7) завжди має єдиний додатний корінь, то означення самоподібної розмірності коректне.

Лема 1.1 ([81]). *Якшо E – самоподібна множина, існує таке α, що $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, то її самоподібна розмірність дорівнює розмірності Гаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_s(E) = \alpha_0(E)$.*

Теорема 1.12 ([81]). *Якщо E – обмежена замкнена самоподібна множина простору $\mathbb{R}^1$, то її самоподібна розмірність дорівнює розмірності Гаусдорфа-Безиковича.*

Означення 1.26. Число

$$\alpha_E(x_0) = \lim_{n\to\infty} \alpha_0(E \cap O_n(x_0)),$$

де $\{O_n(x_0)\}$ – довільна послідовність околів точки $x_0 \in M$, які монотонно стягуються до x_0, називається *локальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини E в точці x_0.*

Теорема 1.13 ([81]). *Кожна обмежена замкнена множина E тривимірного евклідового простору містить точку $x_0 \in E$, таку, що*

$$\alpha_E(x_0) = \alpha_0(E).$$

Одним із напрямів застосування теорії фракталів є фрактальний аналіз: функцій (сингулярних, неперервних ніде не монотонних); неповних сум числових рядів; зображень чисел, що ґрунтуються на різних системах кодування.

1.9. Геометрія числових рядів

Геометрія числових рядів вивчає тополого-метричні і фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів, їх арифметичні суми тощо.

Розглядається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \ . \tag{1.8}$$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$.

Означення 1.27. Число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1.8), а кожен ряд виду $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n$ називається *підрядом* ряду (1.8).

Множину всіх неповних сум ряду (1.8) позначаємо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x : \ x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\} =$$

$$= \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\},$$

і називаємо *множиною неповних сум (множиною підсум)* ряду (1.8).

Зрозуміло, що всі частинні суми $S_n \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ і залишки $r_n \equiv \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ряду (1.8) – це його неповні суми. Якщо ряд (1.8) збіжний знакододатний, то $E\{a_n\} \subseteq [0, r_0]$. Якщо ряд (1.8) знакозмінний і абсолютно збіжний, то $E\{a_n\} \subseteq [\alpha, \beta]$, де

$$\alpha \equiv \sum_{a_n<0} a_n \quad \text{і} \quad \beta \equiv \sum_{a_n>0} a_n.$$

Неважко переконатися, що множина неповних сум ряду (1.8) континуальна.

Як окремий об'єкт вивчення множина підсум абсолютно збіжного ряду фігурує в дослідженнях із 1914 року, коли була опублікована піонерська в цьому напрямі робота японського математика Соічі Какея [27] ("Про неповні суми нескінченних рядів"), де він описав структуру множини неповних сум, не надавши при цьому строгих доведень. 1941 року результати Какея перевідкрив Г. Горнич [24], а 1948 року П. К. Менон [33]; основний результат того часу сформульовано так:

Теорема 1.14. *Множина неповних сум $E\{a_n\}$ абсолютно збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є досконалою множиною.*

1. *Більш того, $E\{a_n\}$ є скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли*

$$|a_n| \leqslant r_n \equiv |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ є відрізком тоді й лише тоді, коли $|a_n| \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$).

2. *Якщо ж*

$$|a_n| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots$$

для всіх достатньо великих n, то $E\{a_n\}$ гомеоморфна класичній множині Кантора.

У згаданій роботі [27] С. Какея висунув припущення, що необхідною і достатньою умовою ніде не щільності множини $E\{a_n\}$ є існування зліченної кількості членів ряду, для яких $|a_n| > r_n$. Перший контрприклад до цієї гіпотези навели 1980 р. А. Д. Вайнштейн і Б. З. Шапіро [52]. У роботі [38] Ф. Прус-Вішньовський, визнаючи спростування гіпотези Какея вказаними авторами, зазначає, що їхня робота містить і хибні твердження. 1984 р. Ц. Ференс [21] навів інший контрприклад для спростування гіпотези Какея, а зовсім простий приклад ряду 1988 р. навели Дж. Ґатрі і Дж. Німан [22]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \cdots \tag{1.9}$$

Для цього ряду, як і для рядів із наведених вище робіт, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leqslant r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина неповних сум ряду (1.9) містить відрізок $[\frac{2}{3}, 1]$, але не є скінченним об'єднанням відрізків [12]. Множина неповних сум ряду (1.9) гомеоморфна множині

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C – класична множина Кантора (тобто множина чисел з відрізка $[0,1]$, які записуються у трійковій системі числення з використанням двох цифр 0 і 2, або, що рівносильно – це множина неповних сум геометричного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$), G_k – відкрита множина всіх чисел відрізка $[0,1]$, які мають у своєму трійковому зображенні k-ту цифру 1, якщо всі попередні цифри зображення – 0 або 2.

Завершальними у напрямі класифікації існуючих "топологічних типів" множин неповних сум абсолютно збіжних рядів стали роботи [22, 34], де доведено наступний факт.

Теорема 1.15. *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ або*

1. *є скінченним об'єднанням відрізків, або*
2. *гомеоморфна множині Кантора, або*
3. *гомеоморфна множині T.*

Означення 1.28. [5, 38] *Симетричним канторвалом* (або *M-канторвалом*) називається множина, яка гомеоморфна множині T.

Термін "*канторвал*" запропонували бразильські математики П. Мендес і Ф. Олівейра у роботі [32], присвяченій вивченню топологічної структури арифметичної суми двох множин канторівського типу (непорожніх обмежених досконалих нуль-множин Лебега з $\mathbb{R}$). У цій роботі автори дали канторвалам дещо інакше означення.

Означення 1.29. [32] *M-канторвалом* називається досконала підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ така, що кожен суміжний інтервал цієї множини накопичує по обидва боки нескінченну кількість своїх нетривіальних компонент зв'язності й суміжних інтервалів.

Лема 1.2. *Довільні два симетричні канторвали є гомеоморфними.*

Задля вивчення властивостей множини $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1.8), корисні поняття *циліндра* й *циліндричного відрізка.*

Означення 1.30. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – фіксований впорядкований набір нулів і одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить усі неповні суми ряду (1.8) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m},\ \sup \Delta'_{c_1...c_m}] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n,\ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

Із означень випливають такі *властивості циліндричних множин*:

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, $\inf \Delta_{c_1...c_m} = \inf \Delta'_{c_1...c_m}$, $\sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta'_{c_1...c_m}$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m 0} \cup \Delta'_{c_1...c_m 1}$.

3) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

4) Для довільної послідовності (c_m) нулів і одиниць має місце

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1...c_m} \equiv \Delta_{c_1...c_m...} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m = x \in E\{a_n\} \subset [0, r_0].$$

5) $E\{a_n\} \subset F_{m+1} \subset F_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, де $F_m = \bigcup\limits_{c_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,m}} \Delta_{c_1 \ldots c_m}$.

6) $E\{a_n\} = \lim\limits_{m \to \infty} F_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

7) Умова

$$\Delta_{c_1..c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1..c_{2n-2}1} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}0111} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}1000}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

рівносильна рівності

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \, .$$

Висновки до розділу 1

Цей розділ має вступний характер. У ньому сформульовані необхідні факти, які використовуватимуться у подальших розділах щодо:

— стохастичних та двічі стохастичних матриць;

— Q_∞^*-зображення дробової частини дійсного числа і його частинних випадків, деяких двосимвольних систем числення тощо;

— теорії фракталів;

— неперервних функцій зі складною локальною будовою;

— теорії рядів (множин неповних сум, їхніх властивостей);

— розподілів та їхньої лебегівської структури; згорток Бернуллі.

Наведено огляд літератури з тематики дослідження.

РОЗДІЛ 2
Q_∞^*-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ВИЗНАЧЕНЕ ДВІЧІ СТОХАСТИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ, Й ФУНКЦІЇ, З НИМИ ПОВ'ЯЗАНІ

У цьому розділі конструюється сім'я W додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і уточнюються результати, які здобув Працьовитий М.В. [81] для випадку, коли матриця є двічі стохастичною й визначається одним параметром; для Q_∞^*-зображень, що ґрунтуються на матрицях із W, описуються тополого-метричні властивості спектра (множини точок росту) функції розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta^{Q_\infty^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ з незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q_∞^*-зображення за умови, що одна з координат стохастичного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0.

2.1. Нескінченні двічі стохастичні матриці

Означення 2.1. *Нескінченною двічі стохастичною* матрицею називають матрицю $||q_{ik}||$, елементи якої є невід'ємними, а сума елементів кожного рядка і кожного стовпця дорівнює 1, тобто водночас виконуються умови

1. $q_{ik} \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik} = 1 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik}$.

Очевидно, що перестановка будь-яких двох рядків або стовпців двічі стохастичної матриці залишає її двічі стохастичною.

Задачу про існування й кількість нескінченних двічі стохастичних матриць розв'язує твердження.

Лема 2.1. *Якщо* (a_n) *– будь-яка послідовність невід'ємних чисел, та-*

ка, що

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = 1;$$

$$S_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in N,$$

то матриця $\|q_{ij}\|$, така, що

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-1}, & \text{якщо} \quad i \neq j; \\ a_{2i-1} + S_{i-1}, & \text{якщо} \quad i = j, \end{cases}$$

є нескінченною двічі стохастичною симетричною матрицею.

Доведення. Справді, симетричність матриці $\|q_{ij}\|$ очевидна водночас

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_{ij} = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{2i-2} + (a_{2i-1} + S_{i-1}) + a_{2i} + a_{2i+1} + \ldots = 1.$$

$\square$

2.2. Нескінченні двічі стохастичні матриці, залежні від одного параметра

Побудуймо нескінченну матрицю за правилом: елементи матриці утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію зі знаменником $q \in (0; 1)$ і першим членом $b = 1 - q$, тобто

$$Q^*_\infty = \begin{pmatrix} b & bq & bq^2 & \cdots & bq^{n-1} & \cdots \\ bq & bq^2 & bq^3 & \cdots & bq^n & \cdots \\ bq^2 & bq^3 & bq^4 & \cdots & bq^{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ bq^{n-1} & bq^n & bq^{n+1} & \cdots & bq^{2(n-1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Позначмо через S_k суму елементів k-го рядка матриці (2.1). Зрозуміло, що сума елементів k-го стовпця теж дорівнюватиме S_k, оскільки матриця Q^*_∞ симетрична. Обчислимо значення S_k:

$S_1 = \frac{b}{1-q} = \frac{b}{b} = 1;$

$S_2 = \frac{bq}{1-q} = \frac{bq}{b} = q;$

$S_3 = \frac{bq^2}{1-q} = \frac{bq^2}{b} = q^2;$

$\ldots$

$S_n = \frac{bq^{n-1}}{1-q} = \frac{bq^{n-1}}{b} = q^{n-1};$

$\ldots.$

Для виконання умови двічі стохастичності матриці Q^*_∞ покладемо:

$q_{01} := b;$

$q_{12} := bq^2 + 1 - S_2 = bq^2 + 1 - q;$

$q_{23} := bq^4 + 1 - S_3 = bq^4 + 1 - q^2;$

$\ldots$

$q_{(n-1)n} := bq^{2(n-1)} + 1 - S_n = bq^{2(n-1)} + 1 - q^{n-1}$

$\ldots.$

Таким чином отримаємо матрицю вигляду:

$$Q^*_\infty = \begin{pmatrix} b & bq & bq^2 & \cdots & bq^{n-1} & \cdots \\ bq & bq^2+1-q & bq^3 & \cdots & bq^n & \cdots \\ bq^2 & bq^3 & bq^4+1-q^4 & \cdots & bq^{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ bq^{n-1} & bq^n & bq^{n+1} & \cdots & bq^{2(n-1)}+1-q^{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Отже, доведено:

Лема 2.2. *Якщо для матриці Q^*_∞ виконуються умови:*

1. $q_{01} = b \in (0;1)$*;*

2. $b + q = 1$*;*

3. $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ *для всіх* $i \neq k-1$, $k \in N$*;*

4. $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ *для всіх* $i = k-1$, $k \in N$,

то вона є двічі стохастичною.

Враховуючи, що параметр $q_{01} = b \in (0;1)$, то сім'я матриць Q^*_∞ – континуальна. Позначмо дану сім'ю W.

2.3. Q_∞^*-зображення чисел, визначене двічі стохастичною матрицею

З'ясуймо яких значень набуватимуть $\beta_{\alpha_k k}$ й $q_{\alpha_k k}$ для Q_∞^*-представлення числа у (1.2), визначеного нескінченною двічі стохастичною матрицею (2.2). Оскільки $q_{\alpha_k k}$ – це елементи матриці (2.2), то

$$\begin{cases} q_{\alpha_k k} = bq^{\alpha_k+(k-1)} \text{ для всіх } \alpha_k \neq k-1, k \in \mathbb{N}, \\ q_{\alpha_k k} = bq^{2\alpha_k} + 1 - q^{\alpha_k} \text{ для всіх } \alpha_k = k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для $\beta_{\alpha_k k}$ справедливо:

1) при $\alpha_k < k$

$$\beta_{\alpha_k k} = \sum_{j=0}^{\alpha_k - 1} q_{jk} = q_{0k} + q_{1k} + q_{2k} + \ldots + q_{\alpha_k k} =$$
$$= bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{\alpha_k - 1 + k - 1} =$$
$$= bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{\alpha_k + k - 2} = \frac{bq^{k-1}(1-q^{\alpha_k})}{1-q} = q^{k-1}\left(1 - q^{\alpha_k}\right);$$

2) при $\alpha_k \geqslant k$

$$\beta_{\alpha_k k} = \sum_{j=0}^{\alpha_k - 1} q_{jk} = q_{0k} + q_{1k} + q_{2k} + \ldots + q_{(k-2)k} + q_{(k-1)k} + q_{kk} + \ldots + q_{\alpha_k k} =$$
$$= bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{2k-3} + bq^{2k-2} + 1 - q^{k-1} + \ldots +$$
$$+ bq^{\alpha_k + k - 2} = \frac{bq^{k-1}(1-q^{\alpha_k})}{1-q} + 1 - q^{k-1} = q^{k-1}\left(1 - q^{\alpha_k}\right) + 1 - q^{k-1} =$$
$$= 1 - q^{\alpha_k + k - 1}.$$

Тобто

$$\begin{cases} \beta_{0k} = 0, \\ \beta_{\alpha_k k} = q^{k-1}\left(1 - q^{\alpha_k}\right) \text{ для всіх } \alpha_k < k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{\alpha_k k} = 1 - q^{\alpha_k + k - 1} \text{ для всіх } \alpha_k \geqslant k \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{2.3}$$

Варто зазначити, якщо у зображенні $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$, визначеному матрицею

(2.2), для $\alpha_k(x)$ справджується $\alpha_k \neq k-1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то

$$x = 1 - q^{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k}(1-q)^{k-1} q^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2}},$$

де $\beta_{\alpha_k k}$ визначаються за формулами (2.3).

2.4. Геометрія циліндричного Q_∞^*-зображення чисел, визначеного двічі стохастичною матрицею

Під геометрією зображення дійсного числа ми розуміємо геометричний зміст цифр, який індукує тополого-метричні і фрактальні властивості множин чисел, визначених умовами на використання цифр (наприклад, заборонами), а також метричне співвідношення, породжене ним.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – упорядкований набір цілих невід'ємних чисел.

Означення 2.2. Циліндром рангу m із основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in [0;1)$, першими m цифр Q_∞^*- зображення яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{x: \quad x = \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}\ldots}, \quad a_{m+i} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

Для Q_∞^*-зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею (2.2), справедливі такі властивості циліндрів:

1. $\bigcup\limits_{c_1=0}^{\infty} \bigcup\limits_{c_2=0}^{\infty} \ldots \bigcup\limits_{c_m=0}^{\infty} \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = [0;1)$;

2. $\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;

3. $\min \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m(i+1)} = \sup \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$, $i = 1, 2, \ldots$;

4. Циліндри одного рангу не перетинаються або збігаються (рівні), причому

$$\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1^{'}c_2^{'}\ldots c_m^{'}} \Leftrightarrow c_i = c_i^{'} \quad i = 1, 2, \ldots m;$$

5. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = x = \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$$

– це точка півінтервала $[0;1)$;

6. $\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m} = \left[\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}; \Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m+1(0)}\right)$.

7. Довжина циліндра $|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|$ обчислюється за формулою:

$$|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}| = b^m \prod_{i=1}^{m} q^{c_i+i-1} \text{ при } c_i \neq i-1;$$

Справді,

$$|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1 c_2\ldots c_m}| = q_{\alpha_1 1} \cdot q_{\alpha_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_m m} = bq^{\alpha_1} \cdot bq^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot bq^{\alpha_m+(m-1)} =$$
$$= b^m \prod_{i=1}^{m} q^{c_i+i-1}.$$

Якщо ж серед c_i міститься t символів, для яких виконується рівність $c_i = i-1$, то довжина циліндра обчислюється за формулою:

$$|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}| = b^{m-t} \prod_{\substack{k=1 \\ c_k \neq k-1}}^{m} q^{c_k+k-1} \prod_{\substack{k=1 \\ c_k = k-1}}^{m} (bq^{2c_k} + q^{c_k} + 1).$$

8. Справедлива рівність (основне метричне відношення):

$$\frac{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|} = \begin{cases} bq^{i+m}, & \text{якщо } i \neq m, \\ bq^{2m} - q^m + 1, & \text{якщо } i = m. \end{cases}$$

Справді, враховуючи властивість 7, маємо:

1) при $i \neq m$

$$\frac{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m i}| \cdot q_{i(m+1)}}{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|} = q_{i(m+1)} = bq^{i+m};$$

2) при $i = m$

$$\frac{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|}{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m m}| \cdot q_{m(m+1)}}{|\Delta^{Q_\infty^*}_{c_1\ldots c_m}|} = bq^{2m} - q^m + 1.$$

2.5. Функція розподілу і спектр випадкової величини, заданої Q^*_∞-зображенням, визначеним двічі стохастичною матрицею

Розгляньмо в.в.

$$\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots},$$

задану своїм Q^*_∞-зображенням, визначеним матрицею з W, де τ_n – незалежні однаково розподілені в.в.

$$P\{\tau_i = i\} = p_i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Згідно з теоремою (1.2), функція розподілу в.в. τ задається у вигляді

$$F_\tau (x) = \beta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j} \right],$$

де значення $\beta_{a_k(x)k}$ описано в пункті 2.4.

Теорема 2.1. *Якщо $p_c = 0$ і $p_j \neq 0$ при $j \neq c$, то спектром розподілу (множиною точок росту) функції розподілу F_τ є множина*

$$D_c \equiv [Q^*_\infty; \bar{c}] = \left\{ x : x = \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \quad \text{де} \quad \alpha_k \neq c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

яка є ніде не щільною додатної міри Лебега.

Доведення. Розподіл в.в. τ неперервний, оскільки

$$[max\{p_0, p_1, \ldots p_n, \ldots\}]^n \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Отже, й функція розподілу F_τ неперервна. Тоді

$$P\{\tau \in \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}\} = \prod_{j=1}^{m} p_{\alpha_j} \neq 0 \ \text{ при } \ \alpha_j \neq c, \quad j = \overline{1, m},$$

але

$$P\{\tau \in \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} c}\} = p_c \prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} = 0.$$

Отже, $S_\tau = D_c$.

Доведемо, що D_c є ніде не щільною множиною за означенням, тобто покажемо, що в будь-якому інтервалі $(a;b) \subset [0;1)$ існує підінтервал, що не містить точок множини D_c. З урахуванням властивості (6) циліндричних множин нам достатньо вказати циліндр, який повністю міститься в $(a;b)$, проте не має з $(a;b)$ спільних точок.

Нехай $a = \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ і $b = \Delta^{Q_\infty^*}_{\beta_1\beta_2...\beta_n...}$. Оскільки $a < b$, то існує k, таке, що $\alpha_k < \beta_k$ й $\alpha_j = \beta_j$ при $j < k$. Тому $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]} \subset (a;b)$ і $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]c} \subset \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]} \subset (a;b)$, а $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]c} \cap D_c = \varnothing$.

Отже, D_c – ніде не щільна множина за означенням.

Покажемо, що $\lambda(D_c) > 0$:

1) якщо $c = 0$, то

$$\lambda([0;1) \setminus (D_0))q_{01} + q_{02}(1-q_{01}) + q_{03}(1-q_{01})(1-q_{02}) + q_{04}(1-q_{01})\cdot$$
$$\cdot(1-q_{02})(1-q_{03}) + \ldots = b + bq(1-b) + bq^2(1-b)(1-bq) + bq^3(1-b)\cdot$$
$$\cdot(1-bq^2)(1-bq^3) + \ldots < b(1 + q(1-b) + q^2(1-b) + q^3(1-b) + \ldots) =$$
$$= b(1 + \frac{q(1-b)}{1-q}) = 1 - q + q^2, \quad \text{звідки} \quad \lambda(D_0) > q - q^2 > 0.$$

2) якщо $c \in \mathbb{N}$, то

$$\lambda([0;1) \setminus (D_c)) = q_{c1} + q_{c2}(1-q_{c1}) + q_{c3}(1-q_{c1})\cdot(1-q_{c2}) + q_{c4}(1-q_{c1})\cdot$$
$$\cdot(1-q_{c2})(1-q_{c3}) + \ldots + q_{cc}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3})\cdot\ \ldots\cdot(1-q_{c(c-1)}) +$$
$$+ q_{c(c+1)}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3})\cdot\ldots\cdot(1-q_{c(c-1)})(1-q_{cc}) + q_{c(c+2)}\cdot$$
$$\cdot(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3})\cdot\ \ldots\cdot(1-q_{c(c-1)})\cdot(1-q_{cc})\cdot(1-q_{c(c+1)}) + \ldots =$$
$$= bq^c + bq^{c+1}(1-bq^c) + bq^{c+2}(1-bq^c)(1-bq^{c+1}) + bq^{c+3}(1-bq^c)(1-bq^{c+1})\cdot$$
$$\cdot(1-bq^{c+2}) + \ldots + bq^{2c-1}(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2})\cdot\ \ldots\cdot(1-bq^{2c-2})\cdot$$
$$+ (bq^{2c} + 1 - q^c)(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2})\cdot\ \ldots\cdot(1-bq^{2c-2})\cdot$$
$$\cdot(1-bq^{2c-1})q^c(1-bq^c) + bq^{2c+2}(1-bq^{2c-1}) + bq^{2c+1}(1-bq^c)(1-bq^{c+1})\cdot$$
$$\cdot(1-bq^{c+2})\cdot\ \ldots\cdot(1-bq^{2c-2})(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2})\cdot\ \ldots\cdot$$
$$\cdot(1-bq^{2c-2})(1-bq^{2c-1})q^c(1-bq^c)(1-bq^{2c+1}) + \ldots = S < bq^c + bq^{c+1} +$$

$$+ bq^{c+2} + bq^{c+3} + \ldots + bq^{2c-1} + bq^{2c} + 1 - q^c + bq^{3c+1}(1 - bq^c)^2 + bq^{3c+2}(1-$$
$$- bq^c)^2 + \ldots = bq^c \cdot \frac{1 \cdot (1 - q^{c+1})}{1-q} + 1 - q^c + \frac{(1 - bq^c)^2 bq^{3c+1}}{1-q} =$$
$$= 1 - q^{2c+1} + (1 - q^c + q^{c+1})^2 q^{3c+1},$$

звідки маємо

$$\lambda(D_c) > q^{2c+1} - (1 - q^c + q^{c+1})^2 q^{3c+1} > q^{2c+1} - q^{3c+1} = q^{2c+1}(1 - q^c) > 0.$$

Оцінимо міру $\lambda(D_c)$ зверху.

$$\lambda([0;1) \setminus (D_c)) = S > bq^c + bq^{c+1}(1 - bq^c) + bq^{c+2}(1 - bq^c)^2 + bq^{c+3} \cdot$$
$$\cdot (1 - bq^c)^3 + \ldots + + bq^{2c-1}(1 - bq^c)^{c-1} + bq^{2c}(1 - bq^c)^c + bq^{3c+1}(1 - b)^{c+1} \cdot$$
$$\cdot (1 + (1 - bq^{2c+1})q + (1 - bq^{2c+1})^2 q^2 + \ldots) = bq^c + bq^{c+1}(1 - b) + bq^{c+2} \cdot$$
$$\cdot (1 - b)^2 + bq^{c+3}(1 - b)^3 + \ldots + bq^{2c-1}(1 - b)^{c-1} + bq^{2c}(1 - b)^c + bq^{3c+1} \cdot$$
$$+ \frac{q^{4(c+1)-2}}{1 + q^c}.$$

Тому $\lambda(D_c) < 1 + \dfrac{q^{3c+2} - q^c}{1+q} - \dfrac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}$. □

Наслідок 2.1. *Для міри Лебега множини D_c $(c \neq 0)$ справедливо*

$$q^{2c+1} - (1 - q^c + q^{c+1})^2 q^{3c+1} < \lambda(D_c) < 1 + \frac{q^{3c+2} - q^c}{1+q} - \frac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}.$$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі:

— побудовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць W;

— уточнено результати, які здобув Працьовитий М.В. для Q_∞^*-зображення за умови, що матриця є двічі стохастичною і визначається одним параметром;

— вивчено геометрію Q_∞^*-зображення, визначеного нескінченною двічі стохастичною додатною матрицею;

— досліджено тополого-метричні властивості спектра (множини точок росту) функції розподілу неперервної в.в. $\tau = \Delta^{Q_\infty^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ із незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q_∞^*-зображення за умови, що одна з координат вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботі $[1^a]$ і доповідалися на семінарі зі фрактального аналізу й на наукових конференціях $[6^a, 7^a, 8^a, 9^a, 10^a, 11^a]$.

РОЗДІЛ 3
ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН І ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ ЗІ ДВОСИМВОЛЬНИМИ ЗОБРАЖЕННЯМИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ВИЗНАЧЕНИМИ ДВІЧІ СТОХАСТИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ

Марковське зображення дробової частини дійсного числа, породжене двічі стохастичною матрицею, має додаткові "симетрії", що спрощує розв'язання деяких задач метричної та ймовірнісної теорії чисел і допускає тонший аналіз об'єктів, визначених в його термінах.

У цьому розділі, використовуючи марковське двосимвольне зображення дробової частини дійсного числа, визначене двічі стохастичною матрицею, вивчаються множини канторівського типу, означені заборонами вживання комбінацій символів у марковському зображенні числа; описуються властивості функції, яка встановлює зв'язок між числами відрізка $[0;1]$, через "однакові" за формою зображення: марковське і двійкове. Також використовуючи дві двосимвольні топологічно еквівалентні системи кодування чисел засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, а саме: нега-двійкову, яка насправді дає перекодування класичного двійкового зображення чисел, а також марковське зображення, яке визначається двічі стохастичною матрицею, задається і вивчається функція, яка отримується прямим проектуванням цифр першого зображення в цифри другого зображення.

3.1. Множини чисел із заборонами вживання символів у марковському зображенні чисел

Нехай $A = \{0, 1\}$ – алфавіт системи числення; $q = (q_0, q_1)$ – упорядкований набір додатних чисел, причому $q_0 + q_1 = 1$; $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей алфавіту;

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} -$$

додатна стохастична матриця (сума елементів у кожному рядку дорівнює 1).

Теорема 3.1 ([70]). *Для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n) із нулів та одиниць, така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} \right) \equiv \Delta^M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{3.1}$$

$$\text{\textit{де}} \quad \beta_{\alpha_1} = \alpha_1 q_{1-\alpha_1}, \quad \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = (\alpha_{k+1}) q_{\alpha_k, 1-\alpha_{k+1}}.$$

Доведення. Доведемо існування розкладу (3.1). Зазначимо, що $1 = \Delta^M_{(1)}$. Оскільки

$$[0;1) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_i; \beta_{(i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_1 \in \{0;1\}$, таке, що

$$\beta_{\alpha_1} \leqslant x < \beta_{\alpha_1+1}, \text{ або } 0 \leqslant x - \beta_{\alpha_1} \equiv x_1 < q_{\alpha_1},$$

звідки отримуємо $x = \beta_{\alpha_1} + x_1$. Якщо $x_1 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} = \Delta^M_{\alpha_1(0)}$. Тобто $\alpha_k = 0$ для всіх $k > 1$.

Нехай $x_1 > 0$. Аналогічно, оскільки

$$x_1 \in [0; q_{\alpha_1}) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_{\alpha_1 i}; \beta_{\alpha_1(i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_2 \in \{0;1\}$, таке, що

$$\beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} \leqslant x_1 < \beta_{\alpha_1(\alpha_2+1)} q_{\alpha_1}, \text{ або } 0 \leqslant x_1 - \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} \equiv x_2 < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2},$$

звідки отримуємо $x_1 = \beta_q \alpha_1 \alpha_2 q_{\alpha_1} + x_2$ і $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + x_2$.

Якщо $x_2 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2(0)}$. Тобто $\alpha_k = 0$ для всіх $k > 2$.

Продовжуючи цей процес, знайдемо числа $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_k$ і $x_3, x_4, \ldots x_k$ такі, що

$$0 \leqslant x_{k-1} - \beta_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}} \equiv x_k < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k}$$

і $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}} + x_k$.

Аналогічно, оскільки

$$x_k \in \left[0; q_{\alpha_1} \prod_{n=1}^{k-1} q_{\alpha_n\alpha_{n+1}}\right) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_{\alpha_k i}; \beta_{\alpha_k (i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_{k+1} \in \{0; 1\}$, таке, що

$$0 \leqslant x_k - \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k} \equiv x_{k+1} <$$

$$< q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \prod_{n=1}^{k} q_{\alpha_n\alpha_{n+1}}.$$

Цей процес нескінченний, але збіжний, оскільки

$$x_{k+1} < (\max\{q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11},\})^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Отже, справедливий розклад (3.1). □

Означення 3.1. Формальний (скорочений) запис $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (3.1) і його суми x називають *марковським зображенням* числа x, яке є його кодуванням засобами двосимвольного алфавіту A.

При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення. Вираз функції розподілу випадкової величини, заданий своїм Q_2-зображенням «природним» чином призводить до поняття марковського зображення числа. У роботі [70] вивчалося циліндричне марковське s-символьне зображення чисел, яке у випадку $s = 2$ заслуговує на окрему увагу. Саме його ми й розглядаємо.

Зауваження 3.1. Зліченна множина чисел має рівно два зображення. Це числа виду:

$$\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0(1)} = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1(0)}.$$

Їх називатимемо M-раціональними й використовуватимемо їхнє зображення з періодом 0. Решту ж чисел називатимемо M-ірраціональними, вони мають рівно одне зображення.

Означення 3.2. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – упорядкований набір нулів й одиниць. Циліндром рангу m із основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in [0;1]$, першими m цифр у зображенні яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{x : \quad x = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}, \quad \alpha_{m+i} \in A, \quad i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Справджуються такі властивості циліндрів:

1. $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m0} \cup \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m1}$;

2. $\min\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m(i+1)} = \sup\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_mi},\ i = \{0,1\}$;

3. $\frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_mij}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_mi}|} = q_{ij}$;

4. Довжина циліндра $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^M_{c_1\ldots c_m}| = q_{c_1}\prod_{i=1}^{m-1} q_{c_ic_{i+1}};$$

5. $\bigcup\limits_{c_1=0}^{1}\bigcup\limits_{c_2=0}^{1}\ldots\bigcup\limits_{c_m=0}^{1}\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = [0;1]$;

6. Циліндри одного рангу не перетинаються або збігаються (рівні), причому $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \Leftrightarrow c_i = c'_i\ \ i = \overline{1,m}$;

7.$\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \cap \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_mc'_{m+1}\ldots c'_{m+k}} =$

$$= \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\, i \leqslant m,\ c_i \neq c'_i, \\ \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_mc'_{m+1}\ldots c'_{m+k}}, & \text{якщо } c_i = c'_i\ i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

8. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$$

– це точка $[0;1]$;

9. $\Delta^M_{c_1\ldots c_m} = \left[\Delta^M_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](0)}; \Delta^M_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(1)}\right)$;

10. Якщо матриця Q не містить нулів і є двічі стохастичною (сума елементів у кожному рядку і стовпці дорівнює одиниці), то

$$\frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 01}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 0}|} = \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 10}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 1}|} \quad \text{та} \quad \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 00}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 0}|} = \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 11}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m 1}|}.$$

Нехай $x \in [0;1]$ задане своїм марковським зображенням $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ (3.1), яке визначене двічі стохастичною матрицею

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix},$$

причому $0 < a < 1$.

Теорема 3.2. *Множина*

$$C = \left\{x : \quad x = \Delta^M_{c_1 c_2\ldots c_n\ldots}, \ c_{2k-1}c_{2k} \in \{00, 11\} \ \forall k \in \mathbb{N}\right\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $a^x(a^x + (1-a)^x) = 1$.

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \bigcap C$. Знайдемо міру Лебега $\lambda(C)$.

Очевидно, що $C = \overline{\Delta}^M_{00} \cup \overline{\Delta}^M_{11}$, причому $\overline{\Delta}^M_{00} \bigcap \overline{\Delta}^M_{11} = \varnothing$. Тому

$$\lambda(C) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{00}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{11}).$$

Множини $\overline{\Delta}^M_{00}$ і $\overline{\Delta}^M_{11}$ самоподібні, оскільки

$$\overline{\Delta}^M_{ii} = \overline{\Delta}^M_{ii00} \cup \overline{\Delta}^M_{ii11}, \quad i = \{0, 1\},$$

$$\overline{\Delta}^M_{00} \overset{k_1}{\sim} \overline{\Delta}^M_{0000}, \quad \overline{\Delta}^M_{00} \overset{k_2}{\sim} \overline{\Delta}^M_{0011},$$

$$k_1 = a^2, \quad k_2 = a(1-a).$$

Тоді

$$\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{ii00} \cup \overline{\Delta}^M_{ii11}) = \\ = k_1\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) + k_2\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) = (k_1 + k_2)\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}).$$

Оскільки $0 < k_1 + k_2 < 1$, то $\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) = 0$, а тому $\lambda(C) = 0$.

Оскільки кожна зі множин $\overline{\Delta}^M_{ii}$, бувши самоподібною, задовольняє умову відкритої множини, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігається з самоподібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x = 1, \quad \text{тобто} \quad a^x(a^x + (1-a)^x) = 1.$$

Теорему доведено. $\square$

Теорема 3.3. *Множина*

$$D = \left\{x : \quad x = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_n\ldots},\ c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1\ \forall k \in \mathbb{N}\right\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $(a(1-a)^2)^x + a^x = 1$.

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \bigcap D$. Знайдемо міру Лебега $\lambda(D)$.

Очевидно, що $D = \overline{\Delta}^M_{11} \cup \overline{\Delta}^M_{011} \cup \overline{\Delta}^M_{1011} \cup \overline{\Delta}^M_{(0)}$, причому $\overline{\Delta}^M_{11} \bigcap \overline{\Delta}^M_{011} = \varnothing$, $\overline{\Delta}^M_{11} \cap \overline{\Delta}^M_{1011} = \varnothing$, $\overline{\Delta}^M_{011} \cap \overline{\Delta}^M_{1011} = \varnothing$. Тому

$$\lambda(D) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{011}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{1011}).$$

Множина $\overline{\Delta}^M_{11}$ самоподібна, оскільки

$$\overline{\Delta}^M_{11} = \overline{\Delta}^M_{111} \cup \overline{\Delta}^M_{11011},$$

$$\overline{\Delta}^M_{11} \overset{k_1}{\sim} \overline{\Delta}^M_{111}, \quad \overline{\Delta}^M_{11} \overset{k_2}{\sim} \overline{\Delta}^M_{11011},$$

$$k_1 = a, \quad k_2 = a(1-a)^2.$$

Тоді

$$\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{111} \cup \overline{\Delta}^M_{11011}) =$$
$$= k_1\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) + k_2\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = (k_1 + k_2)\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}).$$

Оскільки $0 < k_1 + k_2 < 1$, то $\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = 0$, а тому, враховуючи $\overline{\Delta}^M_{11} \sim \overline{\Delta}^M_{011}$ і $\overline{\Delta}^M_{11} \sim \overline{\Delta}^M_{1011}$, маємо $\lambda(D) = 0$.

Оскільки множина $\overline{\Delta}_{11}^{M}$, бувши самоподібною, задовольняє умову відкритої множини, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігається з самоподібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x = 1, \qquad \text{тобто} \quad a^x + (a(1-a)^2)^x = 1.$$

Теорему доведено. $\square$

3.2. Сингулярна функція, пов'язана з марковським і двійковим зображенням дійсних чисел

Надалі розглядатимемо марковське зображення дійсних чисел із відрізка $x \in [0;1]$, визначене впорядкованим набором додатних чисел $\overline{q} = (q_0, q_1)$, причому $q_0 + q_1 = 1$, і стохастичною матрицею з додатними елементами

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}.$$

Для пари $ij \in \{00, 01, 10, 11\}$ через $N_{ij}(x,n)$ позначмо кількість появ цієї пари до n місця включно у марковському зображенні числа $x = \Delta^{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, тобто

$$N_{ij}(x,n) = \#\left\{k(k+1) : \alpha_k\alpha_{k+1} = ij,\ k \leqslant n-1\right\}.$$

Означення 3.3. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(x,n)}{n} = \nu_{ij}(x)$, то її значення $\nu_{ij}(x)$ називають *частотою* пари цифр ij у марковському зображенні числа $x \in [0;1]$.

Означення 3.4 ([73]). Число $x \in [0;1]$ називається *нормальним за Марковим*, якщо для кожної пари цифр $ij \in \{00, 01, 10, 11\}$ частота пари існує і дорівнює:

$$\nu_{00}(x) = q_0q_{00},\ \nu_{01}(x) = q_0q_{01},\ \nu_{10}(x) = q_1q_{10},\ \nu_{11}(x) = q_1q_{11}.$$

Теорема 3.4 ([73]). *Міра Лебега множини нормальних за Марковим чисел дорівнює 1.*

Наразі, використовуючи марковське і двійкове представлення чисел, розглянемо функцію G.

Означення 3.5. Функція G означується рівністю:

$$G(x) = G(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) := \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Вона числу $x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ із відрізка $[0;1]$ (заданого своїм марковським зображенням) ставить у відповідність число з відрізка $[0;1]$, двійкове зображення якого записане тими самими символами ($\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$).

Лема 3.1. *Для довільного набору* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A^n$ *справедлива рівність:*

$$G\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}\right) = G\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)}\right).$$

Доведення. Справді, перетворимо ліву частину рівності:

$$G\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}\right) = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}};$$

тепер перетворимо праву частину:

$$G\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Таким чином, права і ліва частини рівності рівні між собою. □

Лема 3.1 дає змогу стверджувати, що функція $G(x)$ коректно визначена для усіх точок $x \in [0;1]$, які мають по два марковські зображення.

Теорема 3.5. *Функція* $G(x)$ *є неперервною, строго зростаючою;*

1. *кусково-лінійною, якщо* $q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$, *причому лінійною, якщо* $q_0 = q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$;
2. *сингулярною, в решті випадків.*

Доведення. 1. Доведемо, що функція $G(x)$ неперервна в кожній точці відрізка $[0;1]$.

Нехай x_0 – довільна точка $[0;1]$. Для доведення неперервності $G(x)$ у точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x\to x_0} |G(x) - G(x_0)| = 0.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли точка x_0 M-ірраціональна. Для довільного $x \in [0;1]$ існує $m = m(x)$, таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), & \text{якщо} \;\; 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0); \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} &|G(x) - G(x_0)| = \\ &\quad = \left|\Delta^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} - \Delta^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)\ldots}\right| = \\ &\quad = \left|\sum_{i=m}^{\infty}\left(\frac{\alpha_i(x)}{2^i} - \frac{\alpha_i(x_0)}{2^i}\right)\right| \leqslant \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{m-1}} \to 0 \;\text{ при }\; m \to \infty. \end{aligned}$$

Отже, функція $G(x)$ неперервна в точці x_0.

Нехай x_0 – M-раціональне число. Доведемо, що $G(x)$ неперервна зліва і неперервна справа в точці x_0.

Для доведення неперервності зліва досить використати марковське зображення точки x_0, що містить період (1), а неперервності справа – марковське зображення точки x_0, що містить період (0), і повторити попередні міркування, які проводилися для M-ірраціональної точки.

Таким чином, функція $G(x)$ неперервна в кожній точці відрізка $[0;1]$.

2. Покажемо, що функція $G(x)$ є строго зростаючою.

Нехай $x_1 = \Delta^M_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots}$, $x_2 = \Delta^M_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots}$ та $x_1 < x_2$.

Це означає, що існує $m \in \mathbb{N}$, таке, що:

$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = \alpha_n$, $\alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_2$, ..., $\alpha_{m-1}^{(1)} = \alpha_{m-1}^{(2)} = \alpha_{m-1}$, але $\alpha_m^{(1)} < \alpha_m^{(2)}$.

Розгляньмо різницю значень функції у заданих точках:

$$G(x_2)-G(x_1)=\Delta^2_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots}-\Delta^2_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots}=$$
$$=\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m^{(2)}\alpha_{m+1}^{(2)}\ldots}-\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m^{(1)}\alpha_{m+1}^{(1)}\ldots}=$$
$$=\frac{1}{2^m}+\frac{\alpha_{m+1}^{(2)}}{2^{m+1}}+\frac{\alpha_{m+1}^{(2)}}{2^{m+2}}+\ldots-(\frac{0}{2^m}+\frac{\alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+1}}+\frac{\alpha_{m+2}^{(1)}}{2^{m+2}}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2^m}+\frac{\alpha_{m+1}^{(2)}-\alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+1}}+\frac{\alpha_{m+1}^{(2)}-\alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+2}}+\ldots\geqslant 0.$$

Оскільки $x_2\neq x_1$, то

$$\begin{cases}\alpha_j^{(2)}(x)\neq 1, & \text{для всіх } \ j\geqslant m+1,\\ \alpha_i^{(1)}(x)\neq 0, & \text{для всіх } \ i\geqslant m+1,\end{cases}$$

тому, $G(x_2)-G(x_1)>0$ при $x_2>x_1$, тобто функція $G(x)$ строго зростаюча.

3. Якщо $q_0=q_{00}=q_{01}=\dfrac{1}{2}$, то марковське зображення є звичайним двійковим зображенням і $G(x)=x$.

Нехай $q_{00}=q_{01}=\dfrac{1}{2}$. Тоді

$$x=\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}=\beta_{\alpha_1}+q_{\alpha_1}u,\ \text{ а } y=\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{1}{2}u,$$

де $u=\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2^2}+\ldots=\Delta^2_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$. Звідки

$$y=\frac{1}{2q_{\alpha_1}}x+\left(\frac{\alpha_1}{2}-\frac{\beta_{\alpha_1}}{2q_{\alpha_1}}\right).$$

Якщо $\alpha_1=0$, то $y=\frac{1}{2q_0}x$. Якщо $\alpha_1=1$, то $y=\frac{1}{2q_1}x$. Це означає, що функція $G(x)$ – кусково-лінійна на циліндрах першого рангу.

Доведемо сингулярність функції $G(x)$ у решті випадків. Нехай число x – нормальне за Марковим число і $G^{'}(x)$ існує. Оскільки функція $G(x)$ монотонна, то згідно з відомою теоремою Лебега в майже кожній точці відрізка $[0;1]$ існує скінченна похідна. Тому множина чисел $x\in[0;1]$, які є нормальними за Марковим і в яких існує скінченна похідна, є множиною повної міри. Нехай x – одне з таких чисел. Обчислимо похідну функції

$G(x)$:

$$G^{'}(x) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left| G(\Delta^M_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n+1}(x)}) \right|}{\left| \Delta^M_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n+1}(x)} \right|} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{q_{\alpha_1} \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}} = \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2q_{00}^{\frac{N_{00}}{n}} q_{01}^{\frac{N_{01}}{n}} q_{10}^{\frac{N_{10}}{n}} q_{11}^{\frac{N_{11}}{n}}} \right)^n =$$
$$= \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q_{00}} \right)^{q_0 q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{(1 - q_{00})} \right)^{q_0 q_{01}} \cdot \left(\frac{1}{(1 - q_{11})} \right)^{q_1 q_{10}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{1}{q_{11}} \right)^{q_1 q_{11}} \right]^n = \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{q_{00}} \right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{00}} \right)^{1 - q_{00}} \right)^{q_0} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\left(\frac{1}{q_{11}} \right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{11}} \right)^{1 - q_{11}} \right)^{q_1} \right]^n .$$

Доведемо, що

$$\left(\left(\frac{1}{q_{00}} \right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{00}} \right)^{1 - q_{00}} \right)^{q_0} \cdot \left(\left(\frac{1}{q_{11}} \right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{11}} \right)^{1 - q_{11}} \right)^{q_1} < 2$$

Показавши, що

$$\left(\frac{1}{x} \right)^x \cdot \left(\frac{1}{1 - x} \right)^{1 - x} < 2 \text{ при } x \in (0; 1) \tag{3.2}$$

матимемо

$$\left(\left(\frac{1}{q_{00}} \right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{00}} \right)^{1 - q_{00}} \right)^{q_0} \cdot \left(\left(\frac{1}{q_{11}} \right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1 - q_{11}} \right)^{1 - q_{11}} \right)^{q_1} <$$
$$< 2^{q_0} \cdot 2^{1 - q_0} = 2.$$

Нерівність (3.2) рівносильна нерівності

$$f(x) \equiv -x \cdot \ln x - (1 - x) \cdot \ln(1 - x) < \ln 2.$$

Для її доведення зазначимо, що

$$f(x) = f(1 - x) \quad \forall \quad x \in (0; 1) \, ,$$

тому розглядатимемо функцію f для $x: \ 0 < x < \frac{1}{2}$.

Оскільки

$$f^{'}(x) = \ln(1-x) - \ln x = \ln\frac{1-x}{x} > 0,$$

то f зростає на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. А отже, $f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$, що й вимагалось довести.

Тому

$$G^{'}(x) = \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{00}}\right)^{1-q_{00}}\right)^{q_0} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left(\left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{11}}\right)^{1-q_{11}}\right)^{q_1}\right]^n = 0.$$

Оскільки, згідно з теоремою 3.4, множина нормальних за Марковим чисел – це множина міри 1, то похідна функції $G(x)$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тому за означенням ця функція сингулярна.

Теорему доведено. $\square$

3.3. Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним додатним рядом і двічі стохастичною матрицею

Вважаємо заданими:

1) $1 = \frac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ – нормований знакопочережний двійковий ряд, який визначає нега-двійкове зображення чисел відрізка $[0; 1]$:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{\alpha_1(x)}{(-2)^1} + \frac{\alpha_2(x)}{(-2)^2} + \frac{\alpha_3(x)}{(-2)^3} + \ldots + \equiv \overline{\Delta}^{2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots};$$

2) додатна двічі стохастична матриця

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

тобто $p_{ij} > 0, \ p_{i0} + p_{i1} = 1, \ p_{0j} + p_{1j} = 1, \ i = 0, 1, \ j = 0, 1;$

3) вектор $\overline{p} = (p_0; p_1)$, $p_0 = \frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$ та $p_1 = \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$.

Відомо [77], що нега-двійкове зображення числа є перекодуванням класичного двійкового зображення:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots}, \quad a_n \in \{0;1\},$$

оскільки

$x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \Delta^2_{[1-\alpha_1(x)]\alpha_2(x)[1-\alpha_3(x)]\alpha_4(x)\ldots[1-\alpha_{2k-1}(x)]\alpha_{2k}(x)\ldots}.$

Розглядається функція F, означена рівністю

$$F(x) = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{i=1}^{k-1}p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}), \quad \text{де} \tag{3.3}$$

$$\beta_{\alpha_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n-1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \beta^{(1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) \neq \alpha_{2n}(x) = 1, \\ p_{10}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) = \alpha_{2n}(x) = 1, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \beta^{(0)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n+1}(x) = 1, \\ p_{01}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = \alpha_{2n+1}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) \neq \alpha_{2n+1}(x) = 0, \end{cases}$$

і $\alpha_k(x)$ – це k-а нега-двійкова цифра зображення числа x.

Означення 3.6. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$– упорядкований набір нулів й одиниць. *Циліндром рангу* m *із основою* $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in (0;1]$, першими m цифр нега-двійкового зображення яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{x : \; x = \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}\ldots}, \quad a_{m+i} \in \{0,1\}, \; i = 1,2,3,\ldots\right\}.$$

Лема 3.2. *Для функції F, означеної рівністю (3.3), образом циліндра $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m}$ нега-двійкового зображення є відрізок $[a;b]$, де*

$$a=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right),\qquad b=a+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Доведення. Зрозуміло, що m може бути як парним, так і непарним. Нехай $m=2k-1$. Тоді $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m}=[\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m(01)};\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m(10)}]$ і

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m(01)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+0+0+\ldots=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right).$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2...c_m(10)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+$$

$$+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}p_{01}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}(1+p_{10}+p_{10}^2+\ldots)\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}\frac{1}{1-p_{10}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Нехай $m = 2k$. Тоді $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m} = [\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}; \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}]$ і

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) = \beta_{c_1} + +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}} + \ldots =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + 0 + 0 + \ldots = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right).$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}} \ldots = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}p_{0[1-c_m]}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}p_{00}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}p_{00}p_{c_m0}p_{01}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} + \ldots =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Покажемо, що для будь-якої точки $x \in \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ значення функції $F(x)$ належить $[a; b]$. Справді, нехай $x = \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, причому $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)} \neq x \neq$ $\neq \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}$. Маємо

$$F(x) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \beta^{(m)}_{c_mc_{m+1}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+ \beta^{(m+1)}_{c_{m+1}c_{m+2}}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \ldots = a + C.$$

Припустимо, що $C = 0$; це відповідно означає, що x є однією з точок ($\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}$ або $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}$), що неможливо у зв'язку з накладеною вище умовою, тому $C > 0$, а отже, $a < F(x)$.

Покажемо, що $F(x) < b$. Розглянемо кожен із можливих випадків для $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$:

1) $m = 2k-1$. Маємо $b = F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})$. Розглянемо різницю $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) - F(x)$ та покажемо, що вона додатна. Справді,

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) - F(x) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots - (\beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{m[m+1]}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} + +\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{[m+1][m+2]}}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{[m+2][m+3]}}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}((\beta^{(1)}_{c_m1} - \beta^{(1)}_{c_{m[m+1]}}) + (\beta^{(0)}_{10}q_{c_m1} - \beta^{(0)}_{c_{[m+1][m+2]}}q_{c_{m[m+1]}}) +$$

$$+(\beta^{(1)}_{10}q_{c_m1}q_{10} - \beta^{(1)}_{c_{[m+2][m+3]}}q_{c_{m[m+1]}}q_{c_{[m+1][m+2]}}) + \ldots) > 0,$$

оскільки принаймні в одній із дужок останнього виразу різниця буде додатною. Це означає, що $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) > F(x)$, тобто $b > F(x)$

2) $m = 2k$. Маємо $b = F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})$. Розглянемо різницю $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}) - F(x)$ і покажемо, що вона додатна. Справді,

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}) - F(x) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots - (\beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{m[m+1]}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{[m+1][m+2]}}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{[m+2][m+3]}}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}((\beta^{(0)}_{c_m0} - \beta^{(0)}_{c_{m[m+1]}}) + (\beta^{(1)}_{01}q_{c_m1} - \beta^{(1)}_{c_{[m+1][m+2]}}q_{c_{m[m+1]}}) +$$

$$+(\beta^{(0)}_{01}q_{c_m1}q_{01} - \beta^{(0)}_{c_{[m+2][m+3]}}q_{c_{m[m+1]}}q_{c_{[m+1][m+2]}}) + \ldots) > 0,$$

оскільки принаймні в одній із дужок останнього виразу різниця буде додатною. Це означає, що $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) > F(x)$, тобто $b > F(x)$.

Отже, лему доведено. $\square$

Теорема 3.6. *Образи різних циліндрів одного рангу при відображенні F не перекриваються і в об'єднанні дають увесь відрізок* $[0, 1]$.

Доведення. Розглянемо циліндри першого рангу: $\overline{\Delta}^2_0$ і $\overline{\Delta}^2_1$. Згідно з лемою (3.2) маємо

$$F(\overline{\Delta}^2_0) = [a_1, b_1], \text{ де } a_1 = \beta_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = a_1 + \frac{1}{2} = 1;$$

$$F(\overline{\Delta}^2_1) = [a_2, b_2], \text{ де } a_2 = \beta_1 = 0, \quad b_2 = a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

звідки $F(\overline{\Delta}^2_0) \cap F(\overline{\Delta}^2_1) = [\frac{1}{2}, 1] \cap [0, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ і $F(\overline{\Delta}^2_0) \cup F(\overline{\Delta}^2_1) = [\frac{1}{2}, 1] \cup [0, \frac{1}{2}] =$ $= [0, 1]$.

Розглянемо циліндри другого рангу: $\overline{\Delta}^2_{00}$, $\overline{\Delta}^2_{01}$, $\overline{\Delta}^2_{10}$, $\overline{\Delta}^2_{11}$.

Згідно з лемою (3.2) маємо

$$F(\overline{\Delta}^2_{00}) = [c_1, d_1], \text{ де } c_1 = \beta_0 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{00} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = c_1 + \frac{1}{2}q_{00} = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2};$$

$F(\overline{\Delta}^2_{01}) = [c_2, d_2]$, де $c_2 = \beta_0 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01} = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}$, $\quad d_2 = c_2 + \frac{1}{2}q_{01} = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2} +$ $+ \frac{p_{00}}{2} = 1$; $F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [c_3, d_3]$, де $c_3 = \beta_1 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10} = 0 + 0 = 0$, $\quad d_3 = c_3 + \frac{1}{2}q_{10} =$ $0 + \frac{1}{2}p_{10} = \frac{1}{2}p_{01}$; $F(\overline{\Delta}^2_{11}) = [c_4, d_4]$, де $c_4 = \beta_1 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{11} = 0 + \frac{1}{2}p_{10} = \frac{1}{2}p_{01}$, $\quad d_4 =$ $= c_4 + \frac{1}{2}q_{11} = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00} = \frac{1}{2}$, звідки

$$F(\overline{\Delta}^2_{00}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{01}) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}] \cap [\frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}, 1] = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2},$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{11}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [\frac{1}{2}p_{10}, \frac{1}{2}] \cap [0, \frac{1}{2}p_{10}] = \frac{1}{2}p_{10},$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{11}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{00}) = F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{01}) = F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{11}) = \varnothing$$

і $F(\overline{\Delta}^2_{00}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{01}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [0, 1]$.

Для повного доведення твердження досить показати, що циліндри $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}$ і $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}$ не перекриваються.

Справді, при $m = 2k - 1$ маємо $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}) = [a, b]$, де

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}p_{c_m 0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$\beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}}.$$

$F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}) = [c, d]$, де

$$c = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$d = c + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}}.$$

З урахуванням геометрії циліндрів ($\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}$ ліворуч від $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$) і $b = c$ маємо, що циліндри $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}$ і $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$ не перекриваються для $m = 2k - 1$.

При $m = 2k$ маємо $F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}) = [a, b]$, де

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m 0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}}$$

$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}) = [c,d]$, де

$$c = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right),$$

$$d = c + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}p_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}}.$$

З урахуванням $d = a$ і геометрії циліндрів ($\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}$ праворуч від $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}$) маємо, що циліндри $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}$ і $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}$ не перекриваються для $m = 2k$. Теорему доведено. □

Теорема 3.7. *Функція $F(x)$, означена рівністю* (3), *є:*

1) *коректно означеною,*
2) *неперервною,*
3) *строго зростаючою,*
4) *причому лінійною при $p_{00} = 0,5$ і сингулярною при $p_{00} \neq 0,5$ (має похідну, яка дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Доведення. 1) Збіжність ряду (3.3), що є виразом функції, очевидна. Оскільки числа зі зліченної підмножини відрізка $[0;1]$ мають два нега-двійкові зображення

$$\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m0(01)} \text{ і } \overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m1(10)},$$

то коректність могла би порушитись, якби вираз функції $F(x)$ від двох різних зображень того самого числа набував різних значень. Покажемо, що це не так.

Введемо позначення

$$A = p_{\alpha_1} p_{\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_2\alpha_3} \dots p_{\alpha_{m-1}\alpha_m}$$

і розглянемо різницю

$$\delta \equiv F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(10)}).$$

Покажемо, що ця різниця дорівнює 0.

Розглянемо значення виразу δ для кожного з можливих випадків.

a. Нехай $m = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$. Тоді маємо

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(10)}) =$$

$$= A[\beta^{(1)}_{\alpha_m 0} + \beta^{(0)}_{00} p_{\alpha_m 0} + \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} + \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} p_{10} + \dots$$

$$-(\beta^{(1)}_{\alpha_m 1} + \beta^{(0)}_{11} p_{\alpha_m 1} + \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} + \beta^{(0)}_{01} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{01} + \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{10} p_{01} + \dots)] =$$

$$= A[0 + p_{\alpha_m 0}(p_{01} + p_{00} p_{00} + p_{00} p_{00} p_{01} + p_{00} p_{00} p_{01} p_{10} \dots) -$$

$$-(\beta^{(1)}_{\alpha_m 1} + 0 + 0 + 0 + \dots)] = A[p_{\alpha_m 0}(p_{01} + \frac{p_{00}^2}{1 - p_{01}}) - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1}] =$$

$$= A[p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1}].$$

При $\alpha_m = 0$ отримуємо

$$p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1} = p_{00} - \beta^{(1)}_{01} = p_{00} - p_{00} = 0,$$

а при $\alpha_m = 1$ –

$$p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1} = p_{10} - \beta^{(1)}_{11} = p_{10} - p_{01} = 0.$$

Тому

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(10)}) = 0.$$

b. Нехай $m = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Тоді маємо

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(10)}) =$$

$$= A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} + \beta^{(1)}_{00} p_{\alpha_m 0} + \beta^{(0)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} + \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} + \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} p_{10} + \ldots$$

$$-(\beta^{(0)}_{\alpha_m 1} + \beta^{(1)}_{11} p_{\alpha_m 1} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} + \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{01} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{10} p_{01} + \ldots)] =$$

$$= A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} + 0 + 0 + 0 + 0 - (0 + p_{\alpha_m 1}(p_{10} + p_{00}p_{11} + p_{00}p_{11}p_{10} +$$

$$+ p_{00}p_{11}p_{10}p_{01} \ldots)] = A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1}(p_{10} + \frac{p_{11}^2}{1 - p_{10}})] = A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1}],$$

звідки за умови $\alpha_m = 0$, маємо

$$\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1} = \beta^{(0)}_{00} - p_{01} = p_{01} - p_{01} = 0.$$

Якщо $\alpha_m = 1$, то

$$\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1} = \beta^{(0)}_{10} - p_{11} = p_{00} - p_{11} = p_{11} - p_{11} = 0.$$

Тому

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)}) = 0$$

і функція $F(x)$ коректно означена.

2) Нехай $x_0 = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ – довільне число з $[0;1]$. Для доведення неперервності F у точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0.$$

а. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — нега-двійково-ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0,1]$, $x \neq x_0$, існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \quad i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0). \end{cases}$$

Тоді

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\beta^{(m)}_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}\right) - \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\beta^{(m)}_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\alpha_k(x_0)\alpha_{k+1}(x_0)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right)(C_1 - C_2) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

де $0 \leqslant C_1 = \beta_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \beta_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)} p_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \ldots < 1,$

$0 \leqslant C_2 = \beta_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \beta_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x)} p_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \ldots < 1.$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

і функція $F(x)$ неперервна у точці x_0 за означенням.

b. У випадку, коли x_0 — нега-двійково-раціональна точка, тобто

$$\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)} = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)},$$

можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді ситуації, коли x прямує до x_0 зліва, досить скористатися зображенням числа x_0 з періодом (10), а коли x прямує до x_0 справа — з періодом (01).

3) Щоб показати, що $F(x)$ строго зростає досить довести, що приріст $u_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ функції F на циліндрі $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ додатний.

Справді,

$$u_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=m}^{m-1} p_{c_ic_{i+1}} > 0$$

і функція F строго зростає. 4) Покажемо, що при $p_{00} = 0,5$ функція $F(x)$ лінійна.

Оскільки, $p_{00} = 0,5$, то з урахуванням двічі стохастичності матриці, $p_{01} =$

$= p_{10} = p_{11} = p_0 = p_1 = 0,5$

Приріст функції F на циліндрі $\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ збігається з його довжиною. Справді,

$$\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=m}^{m-1} p_{c_ic_{i+1}} = \frac{1}{2^m} = \left|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right|.$$

А це означає, що функція $F(x)$ лінійна, причому $F(x) = x$.

Покажемо, що при $p_{00} \neq 0,5$ функція $F(x)$ сингулярна, тобто має похідну, як дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Справді, якщо похідна функції $F'(x)$ існує в точці x_0, то

$$F'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\right)}{|\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}|},$$

але

$$\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x_0)\alpha_{j+1}(x_0)},$$

а

$$|\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}| = \frac{1}{2^k}.$$

Звідки й випливає

$$F'(x_0) = \prod_{j=1}^{\infty}\left[2p_{\alpha_j(x_0)\alpha_{j+1}(x_0)}\right] = 0,$$

оскільки згідно з теоремою Лебега кожна неперервна монотонна функція має скінченну похідну майже скрізь, а необхідна умова збіжності нескінченного добутку (прямування n-го члена до 1) не виконується. Отже, при $p_{00} \neq 0,5$ функція $F(x)$ сингулярна. □

Теорема 3.8. *Функція $y = F(x)$, означена рівністю* (3.3)*, є функцією розподілу випадкової величини ξ, цифри ξ_k нега-двійкового зображення $\overline{\Delta}^2_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots\xi_n\ldots}$ якої є випадковими величинами, які набувають значень 0 й 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $\frac{1}{2}$ й $\frac{1}{2}$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11}\end{pmatrix}$.*

Доведення. Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, то проаналізуємо подію $\{\xi < x\}$ і виразимо її ймовірність. Із урахуванням геометрії нега-двійкового зображення чисел ($x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$), маємо

$$\{\xi < x\} = \{\xi_1 > \alpha_1(x)\} \cup \{\xi_1 = a_1(x) \ \wedge \ \xi_2 < \alpha_2(x)\} \cup \ldots$$
$$\cup\{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\}\cup$$

$$\cup\{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1,2k} \ \wedge \ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \cup \ldots,$$

де події у правій частині рівності попарно несумісні. Тому:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\Big\{\{\xi_1 > \alpha_1(x)\} \cup \{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 < \alpha_2(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1,2k-1} \ \wedge \ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1,2k} \ \wedge \ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \cup \ldots\Big\} = P\{\xi_1 > \alpha_1(x)\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 < \alpha_2(x)\} + \ldots +$$
$$+ P\{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1,2k-1} \ \wedge \ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} +$$
$$+ P\{\xi_i = \alpha_i(x), \text{ при } i = \overline{1,2k} \ \wedge \ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \ldots$$

Врахувавши незалежність подій ξ_k, отримаємо:

$$F_\xi(x) = P\{\xi_1 > \alpha_1(x)\} + P\{\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\xi_2 < \alpha_2(x)\} + \ldots +$$
$$+ P\{\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\xi_2 = \alpha_2(x)\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_{2k-1} = \alpha_{2k-1}(x)\} \cdot P\{\xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} +$$

$$+ P\{\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\xi_2 = \alpha_2(x)\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_{2k} = \alpha_{2k}(x)\} \cdot P\{\xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} +$$
$$\ldots = \beta_{\alpha_1} + \tfrac{1}{2}\beta_{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \tfrac{1}{2} p_{\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k-1}} \beta_{\alpha_{2k}\alpha_{2k}} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} p_{\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{2k}\alpha_{2k}} \beta_{\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+1}} = \beta_{\alpha_1(x)} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}).$$

Твердження доведено.

□

Зауваження 3.2. Для функції $F(x)$ виконуються рівності

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_1 \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 1, \\ F_0(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_0 \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

де

$$F_1(x) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + p_{1\alpha_2}\beta^{(2)}_{\alpha_2\alpha_3} + p_{1\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3}\beta^{(3)}_{\alpha_3\alpha_4} + \ldots)$$
$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + p_{0\alpha_2}\beta^{(2)}_{\alpha_2\alpha_3} + p_{0\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3}\beta^{(3)}_{\alpha_3\alpha_4} + \ldots).$$

Лема 3.3. *Оператор $\delta_{ij}(x)$ правостороннього зсуву $\overline{\Delta}^2$-зображення числа з параметрами $(i;j)$, який означується рівністю*

$$\delta_{ij}(x) = \delta_{ij}(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \overline{\Delta}^2_{ij\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots},$$

аналітично задається

$$\delta_{ij}(x) = \frac{1-i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x.$$

Доведення. Оскільки $x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - x_1$, де $x_1 = \frac{\alpha_1(x)}{2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^3} - \ldots$ і $\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{ij\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{i}{2} - \frac{j}{2^2} + \frac{\alpha_1(x)}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4}\ldots$, то з отриманих рівностей маємо:

$$t_1 = \frac{i}{2} - \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x_1.$$

Звідси

$$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{i}{2} + \frac{j}{2^2} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1-i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x.$$

□

Теорема 3.9. *Функція $F(x)$ задовольняє систему функціональних рівнянь:*

$$F(\delta_{ij}(x)) = $$
$$= \begin{cases} F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}p_{01}^2 - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{00}^2 + p_{00}^2F_0(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{01}^2 + p_{01}^2F_0(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00}^2 - \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + p_{00}p_{01}F_0(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + p_{00}p_{01}F_1(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + p_{00}p_{01}F_1(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x) = p_{01}^2F_1(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + p_{00}^2F_1(x), & \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Доведення. Розглянемо усі можливі випадки:

1. Якщо $\alpha_1 = 0$, то $x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - x_1$, де $x_1 = -\frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^3} - \ldots$.

Нехай:

а) $i = 1; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{10} + \beta^{(0)}_{00}p_{10} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{10}p_{00} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}(0 + p_{10}p_{01} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{10}p_{00} + \beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p^2_{01} + \frac{1}{2}p_{10}p_{00}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p^2_{01} + \frac{1}{2}p_{10}p_{00}(2F_0(x) - 1) = \frac{1}{2}p^2_{01} - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x),$$

звідки випливає перше рівняння системи (3.4).

б) $i = 0; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = -\frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{00} + \beta^{(0)}_{00}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p^2_{00} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0 + p_{01}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p^2_{00} + \beta_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00}(2F_0(x) - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p^2_{00} + p^2_{00}F_0(x),$$

звідки випливає друге рівняння системи (3.4).

в) $i = 0; j = 1$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = -\frac{1}{2^2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{1}{4}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{01} + \beta^{(0)}_{10}p_{01} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{01}p_{10} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{10}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p_{00} + p_{01}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{01}p_{10} + \beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{10}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} +$$
$$+ \frac{1}{2}p_{01}p_{10}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + \frac{1}{2}p_{01}p_{10}(2F_0(x) - 1) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p^2_{01} + p^2_{01}F_0(x)$$

звідки випливає третє рівняння системи (3.4).

г) $i=1; j=1$. Тоді

$\delta_{ij}(x)=\overline{\Delta}^{2}_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}=\frac{2}{3}-t_1$, де $t_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{\alpha_2(x)}{2^4}+\frac{\alpha_3(x)}{2^5}-\ldots$, звідки $t_1=\frac{1}{2^2}x_1+\frac{1}{4}$.

$\delta_{ij}(x)=\frac{2}{3}-t_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2^2}x_1-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2^2}(\frac{2}{3}-x)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x))=F(\overline{\Delta}^{2}_{110\alpha_2\alpha_3\ldots})=$$
$$=\frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{11}+\beta^{(0)}_{10}p_{11}+\beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{11}p_{10}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{11}p_{10}p_{0\alpha_2}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}(p_{10}+p_{11}p_{00}+\beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{11}p_{10}+\beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{11}p_{10}p_{0\alpha_2}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}p_{01}+\frac{1}{2}p^2_{00}+\frac{1}{2}p_{00}p_{01}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}p_{01}+\frac{1}{2}p^2_{00}+\frac{1}{2}p_{00}p_{01}(2F_0(x)-1)=\frac{1}{2}p_{01}+\frac{1}{2}p^2_{00}-\frac{1}{2}p_{00}p_{01}+p_{00}p_{01}F_0(x),$$

звідки випливає четверте рівняння системи (3.4).

2. Якщо $\alpha_1=1$, то $x=\overline{\Delta}^{2}_{1\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-x_1=\frac{1}{6}-x_1$, де $x_1=-\frac{\alpha_2(x)}{2^2}+\frac{\alpha_3(x)}{2^3}-\ldots$.

Нехай:

а) $i=0; j=0$. Тоді

$\delta_{ij}(x)=\overline{\Delta}^{2}_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}=\frac{2}{3}-t_1$, де $t_1=\frac{1}{2^3}-\frac{\alpha_2(x)}{2^4}+\frac{\alpha_3(x)}{2^5}-\ldots$, звідки $t_1=\frac{1}{8}+\frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x)=\frac{2}{3}-t_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2^2}x_1=\frac{13}{24}-\frac{1}{4}(\frac{1}{6}-x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

$$F(\delta_{ij}(x))=F(\overline{\Delta}^{2}_{001\alpha_2\alpha_3\ldots})=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{00}+\beta^{(0)}_{01}p_{00}+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{00}p_{01}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{00}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0+0+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{00}p_{01}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{00}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{00}p_{01}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2}+\ldots)=\frac{1}{2}+p_{00}p_{01}F_1(x),$$

звідки випливає п'яте рівняння системи (3.4).

б) $i=0; j=1$. Тоді

$\delta_{ij}(x)=\overline{\Delta}^{2}_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}=\frac{2}{3}-t_1$, де $t_1=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{\alpha_2(x)}{2^4}+\frac{\alpha_3(x)}{2^5}-\ldots$, звідки $t_1=\frac{1}{2^2}x_1-\frac{1}{8}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{19}{24} - \frac{1}{4}(\frac{1}{6} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{01} + \beta^{(0)}_{11}p_{01} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{01}p_{11} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p_{00} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{01}p_{11} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{01}p_{11}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + p_{00}p_{01}F_1(x),$$

звідки випливає шосте рівняння системи (3.4).

в) $i = 1; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{5}{8}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{5}{8} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{1}{6} - x) - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}x$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{10} + \beta^{(0)}_{01}p_{10} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{10}p_{01} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}(0+0+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{10}p_{01}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}p^2_{01}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$
$$= p^2_{01}F_1(x),$$

звідки випливає сьоме рівняння системи (3.4).

г) $i = 1; j = 1$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{3}{8}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{3}{8} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{1}{6} - x) - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{11}+\beta^{(0)}_{11}p_{11}+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p^2_{11}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{11}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}(p_{10}+0+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p^2_{11}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{11}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}p_{01}+\frac{1}{2}p^2_{00}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p_{01} + p^2_{00}F_1(x),$$

звідки випливає восьме рівняння системи (3.4). □

Висновки до розділу 3

У цьому розділі:

— досліджено множини канторівського типу, означені заборонами вживання символів у марковському двосимвольному зображенні дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею. Зокрема, встановлено їхню нуль-мірність (у розумінні міри Лебега) й визначено розмірність Гаусдорфа-Безиковича;

— досліджено функцію, яка встановлює зв'язок між числами відрізка $[0; 1]$ через "однакові" за формою зображення: марковське і двійкове;

— досліджено функцію, яка встановлює зв'язок між числами відрізка $[0; 1]$ через "однакові" за формою зображення: нега-двійкове й марковське, визначене двічі стохастичною матрицею; вказано випадкову величину для якої ця функція є функцією розподілу; знайдено системи функціональних рівнянь, чиїм розв'язком є ця функція.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [$2^a, 5^a$] і доповідалися на семінарі зі фрактального аналізу й на наукових конференціях [$12^a, 13^a, 17^a, 21^a, 22^a, 23^a$].

РОЗДІЛ 4
МНОЖИНА НЕПОВНИХ СУМ ЗБІЖНОГО РЯДУ ЯК МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ Й НОСІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Цей розділ присвячено функціям і розподілам випадкових величин, пов'язаних із заданим збіжним додатним рядом

$$d_1 + d_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k, \tag{4.1}$$

а саме:

1) множинам значень функції f, визначеної на відрізку $[0;1]$ і означеної рівністю

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k, \tag{4.2}$$

2) спектрові розподілу випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_n, \tag{4.3}$$

де (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин із розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1. \tag{4.4}$$

Окрім ряду (4.1) функцію (4.2) визначає нескінченна стохастична матриця $||q_{ik}||$, яка задає Q_2^*-зображення чисел з відрізка $[0,1]$, а випадкову величину (4.3) – нескінченна стохастична матриця $||p_{ik}||$.

Якщо $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра всіх борелівських підмножин відрізка $[0,1]$, $A \in \mathfrak{B}$, то відображення $f : A \to E\{d_n\}$ деталізує локальні властивості функції f. Воно є вимірним відображенням $\mathfrak{B} \to E\{d_n\} \cap \mathfrak{B}$.

4.1. Множина неповних сум ряду як множина значень функції

Нехай задано Q_2^*-зображення чисел із відрізка $[0,1]$, визначене нескінченною стохастичною матрицею $||q_{ik}||$, і ряд (4.1).

Розглядається функція

$$f(x) = f(\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) d_k, \tag{4.5}$$

де $\alpha_k = \alpha_k(x)$ – k-та цифра Q_2^*-зображення числа $x \in [0,1]$.

Означення функції f рівністю (4.5) буде коректним після домовленості використовувати лише одне із двох існуючих зображень Q_2^*-раціональних чисел. Домовимось використовувати зображення з періодом (0). При цьому зауважимо, що число 1 має єдине Q_2^*-зображення: $1 = \Delta^{Q_2^*}_{(1)}$.

Тополого-метричні і фрактальні властивості функції f найбільш повно відображає її множина значень. При цьому справедливе очевидне твердження.

Лема 4.1. *Множиною значень функції f, означеної рівністю* (4.5)*, є множина неповних сум $E\{d_n\}$ ряду* (4.1)*.*

Тому візьмімося за вивчення топологічних і метричних властивостей множини неповних сум ряду (4.1). Ця задача у загальній постановці, як зазначалось вище, непроста, тому ми зосередимо свою увагу на рядах, які задовольняють певні умови.

Розгляньмо ряд:

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + \ldots + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1, \tag{4.6}$$

для якого виконується умова

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} \equiv b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{4.7}$$

$$\text{де } \ \widetilde{r}_n = \underbrace{c_{n+1} + \ldots + c_{n+1}}_{a_{n+1}} + \underbrace{c_{n+2} + \ldots + c_{n+2}}_{a_{n+2}} + \ldots,$$

причому (a_n) і (b_n) – неспадні послідовності натуральних чисел.

Теорема 4.1. *Загальний член ряду* (4.6) *має вигляд:*

$$c_n = b_n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}. \tag{4.8}$$

Доведення. Для $n = 1$ маємо:

$$r_0 = a_1 c_1 + \widetilde{r}_1 = a_1 c_1 + \frac{c_1}{b_1} = c_1(a_1 + \frac{1}{b_1}) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{b_1}{a_1 b_1 + 1}.$$

Аналогічно, з рівності (4.7) маємо:

$$c_n = b_n \widetilde{r}_n = b_n(a_{n+1} c_{n+1} + \widetilde{r}_{n+1}) = b_n c_{n+1} \left(a_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} \right),$$

звідки

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n(a_{n+1} + 1)}. \tag{4.9}$$

Рівність (4.8) доведемо за індукцією. Нехай формула (4.8) справедлива при $n = p$.

При $n = p + 1$, згідно з (4.9), маємо:

$$c_{p+1} = c_p \cdot \frac{b_{p+1}}{b_p(a_{p+1} + 1)} = b_p \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k b_k + 1} \cdot \frac{b_{p+1}}{b_p(a_{p+1} + 1)} = b_{p+1} \prod_{k=1}^{p+1} \frac{1}{a_k b_k + 1}.$$

Теорему доведено. □

Наслідок 4.1. *Для членів та залишків ряду* (4.6) *справедливі співвідношення:*

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1};$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n(a_{n+1} + 1)}, \qquad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1} + 1}.$$

Для ряду (4.6), у якого $d_n \geqslant d_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відомо, що якщо виконується умова $r_n \geqslant d_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то множина його неповних сум – це відрізок $[0, 1]$ ([27]). Якщо $r_n \geqslant d_n$ для всіх достатньо великих n, то множина неповних сум – це скінченне об'єднання відрізків. Якщо $r_n < d_n$

для всіх достатньо великих n, то множина неповних сум ніде не щільна [27,59]. Менш дослідженим є випадок, коли нерівності $d_n \leqslant r_n$ і $d_n > r_n$ виконуються для нескінченної кількості n. У такому разі множина неповних сум ряду може бути як ніде не щільною, так і містити цілі відрізки. Тополого-метричні властивості множин неповних сум суттєво залежать від швидкості збіжності ряду. На сьогодні невідомі необхідні і достатні умови її нуль-мірності (у розумінні міри Лебега). Ще менш досліджено фрактальні властивості множини неповних сум, хоча для певних класів рядів це зроблено у [35], [60], [61], [59], [93], [94].

Відомо [27], що при виконанні умов

$$d_n \geqslant r_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+k} \quad \text{для всіх достатньо великих} \quad n \tag{4.10}$$

множина $E\{d_n\}$ неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ніде не щільна (нуль-множина Лебега чи множина додатної міри). При виконанні умови

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{r_n} = +\infty$$

множина $E\{d_n\}$ *аномально фрактальна* (континуальна множина, нульової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) [59].

З теореми 2.2 роботи [42] випливає, що при виконанні умов (4.10) і

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{r_n} = +\infty \tag{4.11}$$

множина підсум ряду $E\{d_n\}$ аномально фрактальна. Нас цікавить: чи буде множина $E\{d_n\}$ аномально фрактальною при виконанні умови (4.11)?

При обчисленні розмірності множини зазвичай досить-таки складно отримати нижню оцінку, тобто довести, що $\alpha_0(E) \geqslant \delta$, водночас верхню оцінку $\alpha_0(E) \leqslant \delta$, можна часто отримати без особливих труднощів. Для швидкого отримання нижньої оцінки іноді зручно використовувати теорему, яку довів Х. Г. Еґґлстон у роботі [17]; її успішно використовував у роботах Т. Шалат ([42,102]).

Не маючи перспектив вичерпно розв'язати вищезазначені задачі, ми звужуємо розгляд питання до випадку, коли ряд (4.6) визначається умовами: $a_n = 2^{n-1}$ і $b_n = n+1$ і має вигляд

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{2^{n-1}} + \widetilde{r}_n, \quad (4.12)$$

де

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} = n+1 = \frac{d_m}{r_m}, \quad m = 2^k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,, \quad (4.13)$$

$$\widetilde{r}_m = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} d_k = \underbrace{c_{n+1} + \ldots + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + \ldots + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + \ldots =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + \ldots\,,$$

$$c_n = d_{2^{n-1}} = d_{2^{n-1}+1} = d_{2^{n-1}+2} = \ldots = d_{2^n-1}. \quad (4.14)$$

Із рівностей (4.13) і (4.14) випливає те, що для всіх номерів $m \neq 2^{k-1}$ виконується нерівність $d_m < r_m = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} d_i$.

Загальний член ряду (4.12), згідно з (4.8), має вигляд

$$c_n = (n+1) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1},$$

а відповідний залишок —

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}.$$

Теорема 4.2 ([17, 102]). *Нехай* $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$

$$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \ldots$$

і нехай кожна зі множин J_n *складається зі скінченного числа* g_n *скінченних відрізків* i_n^m *однакової довжини* $\lambda_n > 0$*, які не містять попарно спільних внутрішніх точок. Нехай кожен відрізок* $i_n^m \in J_n$ *містить однакове число* ($= g_{n+1}/g_n$) *інтервалів* $i_{n+1}^m \in J_{n+1}$*. Нехай для заданої системи*

F вимірних функцій $\mu^{(\alpha)}(t)$ існує число $\delta \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, таке, що для кожного $\alpha < \delta$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ буде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)} < +\infty \qquad (\lambda_0 = 1). \tag{4.15}$$

Твердження: $\dim_F M \geqslant \delta$.

Теорема 4.3. *Множина неповних сум ряду* (4.12)*, для якого виконується умова* (4.13) *є суперфрактальною множиною.*

Доведення. Доведемо, що множина $E\{d_n\}$ неповних сум ряду (4.12) – це ніде не щільна нуль-множина Лебега. Оскільки $E\{d_n\}$ належить об'єднанню $k_n \equiv \prod\limits_{k=1}^{n} (2^{k-1}+1)$ ізометричних відрізків довжини $\widetilde{r_n}$, то для її міри Лебега справедлива нерівність

$$\lambda(E\{d_n\}) \leqslant \lim_{n\to\infty} k_n \cdot \widetilde{r_n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2^{k-1}+1)}{2^{k-1}(k+1)+1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1}+1)}{2^{k-1}(k+1)+1} = 0,$$

оскільки n-ий член добутку

$$p_n = \frac{(2^{n-1}+1)}{2^{n-1}(n+1)+1} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оскільки непорожня множина $E\{d_n\}$ – це досконала нуль-множина Лебега, то вона ніде не щільна.

Зробимо нижню оцінку розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{d_n\}$. Враховуючи, що для ряду (4.12)

$$\lambda_n = \widetilde{r_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}, \quad g_n = \prod_{k=1}^{n} (2^{k-1}+1), \quad \mu^{\alpha}(\lambda_n) = \widetilde{r_n}^{\,\alpha},$$

запишемо формулу відповідного n-ого члену для ряду (4.15). Маємо

$$a_n = \frac{\widetilde{r_{n-1}}}{\widetilde{r_n}} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2^{k-1}+1) \cdot \widetilde{r_n}^{\,\alpha}} = \frac{2^{n-1}(n+1)+1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2^{k-1}+1) \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}} =$$

$$= \frac{2^{n-1}(n+1)+1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}}.$$

Дослідимо збіжність ряду (4.15) за ознакою Д'Аламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n(n+2)+1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^\alpha}\cdot\frac{2^n+1}{(2^n(n+2)+1)^\alpha}}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^\alpha}}{2^{n-1}(n+1)+1}=$$

$$=\frac{(2^n(n+2)+1)^{\alpha+1}}{(2^n+1)(2^{n-1}(n+1)+1)}\leqslant\leqslant\frac{((n+3)\cdot 2^n)^{1+\alpha}}{2^n\cdot 2^{n-1}\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{2(n+3)^{\alpha+1}}{(2^{1-\alpha})^n\cdot(1+n)}=\frac{2\cdot(1+\frac{3}{n})\cdot(n+3)^\alpha}{(2^{1-\alpha})^n\cdot(1+\frac{1}{n})}\to 0\quad(n\to\infty),\quad\text{якщо}\quad\alpha<1.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний при всіх $\alpha<1$, то згідно з попередньою теоремою розмірність Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E\{d_n\})\geqslant 1$, а це означає $\alpha_0(E\{d_n\})=1$, що й доводить теорему. □

4.2. Нескінченна згортка Бернуллі, керована збіжним додатним рядом зі суперфрактальною множиною неповних сум

Нас цікавлять лебегівська структура і властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом (4.12).

Теорема 4.4. *Розподіл випадкової величини* (4.3)*, визначеної рядом* (4.12)*, є чистим, причому чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли*

$$M=\prod_{k=1}^{\infty}max\{p_{0k},p_{1k}\}>0. \tag{4.16}$$

У випадку дискретності розподілу випадкової величини (4.3) *його точковий спектр складається з точки*

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*d_n,\quad\text{де}\quad p_{\alpha_n^*n}\geqslant p_{[1-\alpha_n^*]n},$$

і всіх таких точок x, що

$$x=\sum_{n=1}^{m}\alpha_nd_n+\sum_{n=m+1}^{\infty}\alpha_n^*d_n,$$

де $\alpha_n\in\{0,1\}$, $p_{\alpha_nn}\neq 0$ при $n\leqslant m$.

Доведення. Перша частина твердження безпосередньо випливає з теорем Джессена-Вінтнера і П. Леві [69, 59]. Доведемо другу частину твердження.

Нехай $M > 0$. Рівності (4.4) визначають не лише ймовірнісну міру (розподіл) на $[0;1]$, але й у просторі L послідовностей елементів алфавіту $A_2 = \{0;1\}$. Для останнього розподілу очевидно, що точка $(\alpha_n^*) \in L$, визначена умовами $p_{\alpha_n^* n} \neq 0$ і $p_{\alpha_n^* n} \geqslant p_{[1-\alpha_n^*]n}$, $n = 1, 2, 3, ...,$ – це атом, причому максимальної маси M, оскільки

$$P\{(\xi_n) = (\alpha_n)\} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{\alpha_n n} \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} p_{\alpha_n^* n} = M.$$

Зазначимо, що таких точок може бути не одна, оскільки можливо, що $p_{0n} = \frac{1}{2} = p_{1n}$. Однак їх неминуче скінченна кількість, оскільки необхідною умовою збіжності нескінченного добутку (4.16) є наступна умова: $max\{p_{0n}, p_{1n}\} \to 1 \ \ (n \to \infty)$, а отже, існує $m \in N$, таке, що $p_{0m} = \frac{1}{2} = p_{1m}$ і $p_{\alpha_j j} > p_{[1-\alpha_j]j}$ при $j > m$. Тоді атомів максимальної маси існує 2^t штук, де $t = \#\left\{j : p_{0j} = \frac{1}{2}\right\}$.

Нехай (α_n^*) – одна з таких точок простору L, тобто атом розподілу в.в. ξ максимальної маси M, а саме: $(\alpha_n^*) = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{k-1}^*, \alpha_k^*, \alpha_{k+1}^*, ...)$. Якщо $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}^*, ...)$ і при цьому $p_{\alpha_j j} > 0$ при $j = \overline{1, k}$, то послідовність $(\alpha_n) \in L$ – це атом розподілу і відрізняється від (α_n^*) не більш, ніж k першими членами, причому

$$P\{(\xi_n) = (\alpha_n)\} = \frac{M}{\prod\limits_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} > 0.$$

Нехай B_k – множина всіх послідовностей (α_n), які відрізняються від (α_n^*) не більш, ніж k першими членами, причому $p_{\alpha_j j} > 0$ при $j = \overline{1, k}$.

Тоді B_0 – містить лише одну точку (α_n^*), B_1 – не більше двох точок тощо. Більше того, $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_k \subset B_{k+1} \ldots$ і

$$P\{\xi \in B_k\} = \sum_{\alpha_1=0}^{1} \cdots \sum_{\alpha_k=0}^{1} \frac{M}{\prod\limits_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} =$$

$$= \frac{M}{\prod\limits_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \sum_{\alpha_1=0}^{1} \cdots \sum_{\alpha_k=0}^{1} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} = \frac{M}{\prod\limits_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

Тоді точковий спектр $D_{\overline{\xi}}$ збігається з хвостовою множиною зі представником (α_n^*), тобто з множиною

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \lim_{n\to\infty} B_k.$$

Таким чином, у просторі L існує злічення множина точок, ймовірність якої дорівнює 1. Якщо (α_n) – це атом розподілу $\overline{\xi}$ у просторі L, то $x = \alpha_1 d_1 + {} + \alpha_2 d_2 + \ldots + \alpha_n d_n + \ldots$ – це атом розподілу на $[0;1]$. Маса останнього теоретично може перевищувати $P\{\overline{\xi} = (\alpha_n)\}$, оскільки число x може бути значенням різних підсум. Таким чином, існує не більш ніж злічення множина $G \subset [0;1]$, така, що $P(G) = 1$. $\square$

Лема 4.2. *Якщо* $p_{in} > 0$ *для всіх* $i \in \{0,1\}$ *і всіх* $n \in \mathbb{N}$, *то спектром* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є множина* $E\{d_n\}$ *всіх підсум (неповних сум) ряду* (4.12), *тобто*

$$S_\xi = E\{d_n\} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n\in M} d_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Доведення. Це твердження випливає безпосередньо з означень спектра розподілу і того, що кожну неповну суму ряду можна записати у вигляді

$$x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \;\; n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \;\; n \notin M, \end{cases}$$

а також властивостей множини всіх неповних сум ряду, яка є досконалою (замкненою множиною без ізольованих точок) [27]. $\square$

Наслідок 4.2. *Для спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ справедливе включення $S_\xi \subset E\{d_n\}$.*

Наслідок 4.3. *Спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є суперфрактальною множиною.*

Теорема 4.5. *У випадку неперервності ($M = 0$) розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу із суперфрактальним спектром.*

Доведення. При $M = 0$ випадкова величина ξ має неперервний розподіл. Її спектр – це підмножина множини неповних сум відповідного ряду згідно з наслідком 4.2. Зі проведених досліджень геометричної структури множини неповних сум ряду (4.12), а саме за теоремою 4.3, спектр розподілу випадкової величини ξ є суперфрактальною нуль-множиною Лебега. □

4.3. Асимптотичні властивості характеристичної функції розподілу

Означення 4.1. Характеристичною функцією $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ називається математичне сподівання комплекснозначної випадкової величини $e^{it\xi}$, тобто

$$f_\xi(t) = \mathbf{M}e^{it\xi}.$$

Апарат характеристичних функцій зручний для дослідження структури і властивостей розподілів дійснозначних випадкових величин. Зокрема, відомо [69], що величина

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$$

дорівнює

1) 1, якщо ξ має дискретний розподіл;

2) 0, якщо ξ має абсолютно неперервний розподіл.

Для сингулярних розподілів L_ξ може набувати всіх значень із $[0, 1]$. Сингулярні розподіли з $L_\xi = 1$ близькі до дискретних, а з $L_\xi = 0$ – до абсолютно неперервних. Тому величина L_ξ характеризує близькість за властивостями сингулярного розподілу до дискретного чи абсолютно неперервного.

Лема 4.3 ([35]). *Характеристична функція випадкової величини ξ, визначеної рівністю* (1.7), *має вигляд*

$$f_\xi(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k}+p_{1k}e^{itd_k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k}+p_{1k}\cos(d_kt)+ip_{1k}\sin(d_kt)\right),$$

а її модуль записується

$$|f_\xi|=\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|, \quad \text{де} \quad |f_k(t)|=\sqrt{1-4p_{0k}p_{ik}\sin^2\frac{td_k}{2}}.$$

Теорема 4.6. *Для випадкової величини ξ, визначеної рядом* (4.12), *справедлива рівність*

$$L_\xi=\lim_{|t|\to\infty}\sup|f_\xi(t)|=1.$$

Доведення. Розглянемо послідовність $t_n=\frac{2\pi}{\tilde{r}_n}=2\pi\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(2^{k+1}(k+1)+1)$.

Оцінимо

$$|f_\xi(t)|=\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)|=\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-4p_{0k}p_{ik}\sin^2\frac{td_k}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-\sin^2\frac{td_k}{2}}=\prod_{k=1}^{\infty}|\cos\frac{td_k}{2}|.$$

Маємо

$$L_\xi\geqslant\lim_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)|=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)|\geqslant\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}|\cos\frac{t_nd_k}{2}|.$$

Оскільки для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ існує єдина пара $(m,r)\in\mathbb{N}$, така, що $k=2^{m-1}+r$, де $r\in\{0,1,2,\ldots,2^{m-1}\}$, то $d_k=d_{2^{m-1}+r}=c_m$.

Таким чином, для кожного $k=2^{m-1}+r$ маємо

$$\frac{t_nd_k}{2}=\frac{t_nc_m}{2}=\begin{cases}\pi(m+1)\cdot\prod\limits_{j=m+1}^{n}(2^{j-1}(j+1)+1), & \text{якщо } n\geqslant m;\\ \frac{\pi(m+1)}{\prod\limits_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}, & \text{якщо } n<m\end{cases}$$

і тому

$$|\cos\frac{t_n d_k}{2}| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \geqslant m; \\ \cos(\frac{\pi(m+1)}{\prod\limits_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}), & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)| \geqslant \prod_{k=1}^{\infty}|\cos\frac{t_n d_k}{2}| = |\cos\frac{t_n d_1}{2}|\cdot\ldots\cdot|\cos\frac{t_n d_{2^n-1}}{2}|\cdot\prod_{k=2^n}^{\infty}|\cos\frac{t_n d_k}{2}| =$$

$$= \prod_{k=2^n}^{\infty}|\cos\frac{t_n d_k}{2}| = \prod_{m=n+1}^{\infty}(\cos\frac{t_n c_m}{2})^{2^{m-1}} =$$

$$= \prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right).$$

Для $m > n$ маємо

$$\prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right) =$$

$$= \prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1-\sin^2\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right)^{2^{m-2}} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2(m+1)^2}{\prod_{i=n+1}^{m}(4^{i-1}(i+1)^2)}\right)^{2^{m-2}} \geqslant \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{4^{jn}}\right)^{2^{n+j-2}} \equiv \pi_{n+1}.$$

Добуток π_{n+1} збіжний при кожному $n \in \mathbb{N}$, оскільки ряд

$$\underbrace{\frac{\pi^2}{4^n}+...+\frac{\pi^2}{4^n}}_{2^{n-1}}+\underbrace{\frac{\pi^2}{4^{2n}}+...+\frac{\pi^2}{4^{2n}}}_{2^n}+\underbrace{\frac{\pi^2}{4^{3n}}+...+\frac{\pi^2}{4^{3n}}}_{2^{n+1}}+\ldots = \frac{\pi^2}{2^{n+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{n+j-2}}{4^{jn}}$$

збігається і має суму $\frac{\pi^2 . 2^{n-2}}{2^{2n-1}-1}$, а тому збігається і нескінченний добуток

$$\prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right).$$

Зі збіжності цього добутку випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right) = 1,$$

звідки $L_\xi \geqslant 1$. Оскільки завжди $L_\xi \leqslant 1$, то $L_\xi = 1$. □

4.4. Автозгортки нескінченної згортки Бернуллі

Нагадаємо, що *автозгорткою розподілу випадкової величини* ξ називають розподіл випадкової величини $\psi_2 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, а *$s$–кратною згорткою розподілу випадкової величини* ξ — розподіл випадкової величини

$$\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)},$$

де $\xi^{(j)}$ — незалежні й однаково розподілені випадкові величини, розподіл кожної з яких збігається з розподілом ξ. Добре відомо: якщо ξ дискретно розподілена, то ψ_s матиме дискретний розподіл. Нас цікавить випадок, коли розподіл ξ сингулярний, оскільки згортка двох сингулярних розподілів може бути як сингулярною чи абсолютно неперервною, так і їхньою сумішшю.

Зауваження 4.1. Автозгортка двох (скінченного числа) нескінченних згорток Бернуллі не може бути сумішшю, оскільки сума двох (скінченного числа) незалежних випадкових величин типу Джессена–Вінтнера – це випадкова величина Джессена–Вінтнера, а тому має чистий тип розподілу.

Зауваження 4.2. Випадкову величину ξ можна подати у вигляді

$$\xi = \xi_1 c_1 + (\xi_2 + \xi_3)c_2 + (\xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7)c_3 + \ldots + \\ + (\xi_{2^{n-1}} + \ldots + \xi_{2^n-1})c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\xi}_n c_n$$

де

$$\widetilde{\xi}_n = \xi_{2^{n-1}} + \ldots + \xi_{2^n-1}$$

— незалежні випадкові величини, які мають розподіли

$$P\{\widetilde{\xi}_n = i\} = \widetilde{p}_{in}, \quad i \in \{0, 1, 2, ..., 2^{n-1}\} = A_n, \quad \sum_{i=0}^{2^{n-1}} \widetilde{p}_{in} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ймовірності $\widetilde{p}_{in}$ стандартно виражаються через ймовірності p_{in}:

$$\widetilde{p}_{01} = p_{01}, \quad \widetilde{p}_{11} = p_{11}, \quad \widetilde{p}_{02} = p_{02}p_{03}, \quad \widetilde{p}_{12} = p_{02}p_{13} + p_{12}p_{03}, \quad \widetilde{p}_{22} = p_{12}p_{13},$$

$$\widetilde{p}_{03} = p_{04}p_{05}p_{06}p_{07}, \quad \widetilde{p}_{43} = p_{14}p_{15}p_{16}p_{17},$$

$$\widetilde{p}_{13} = p_{14}p_{05}p_{06}p_{07} + p_{04}p_{15}p_{06}p_{07} + p_{04}p_{05}p_{16}p_{07} + p_{04}p_{05}p_{06}p_{17},$$

$$\widetilde{p}_{33} = p_{04}p_{15}p_{16}p_{17} + p_{14}p_{05}p_{16}p_{17} + p_{14}p_{15}p_{06}p_{17} + p_{14}p_{15}p_{16}p_{07},$$

$$\widetilde{p}_{23} = p_{04}p_{05}p_{16}p_{17} + p_{04}p_{15}p_{06}p_{17} + p_{14}p_{05}p_{06}p_{17} + p_{04}p_{15}p_{16}p_{07} + \\ + p_{14}p_{05}p_{16}p_{07} + p_{14}p_{15}p_{06}p_{07},$$

тощо.

Лема 4.4. *Спектр S_{ψ_s} розподілу випадкової величини ψ_s є підмножиною відрізка $[0, s]$ і належить об'єднанню $\prod\limits_{k=0}^{n}(s \cdot 2^k + 1)$ ізометричних відрізків довжини $s\widetilde{r}_n$, $n = 1, 2, 3, \ \ldots$.*

Доведення. Випадкову величину ψ_s можна подати у вигляді

$$\psi_s = \eta_1 c_1 + \eta_2 c_2 + ... + \eta_n c_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n c_n,$$

де

$$\eta_n = \widetilde{\xi}_n^{(1)} + \widetilde{\xi}_n^{(2)} + ... + \widetilde{\xi}_n^{(s)}$$

— незалежні випадкові величини, які мають розподіли

$$P\{\eta_n = i\} = p'_{in}, \quad i \in \{0, 1, 2, ..., s \cdot 2^{n-1}\} = A_n, \quad \sum_{i=0}^{s \cdot 2^{n-1}} p'_{in} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $p_{in} > 0$, то спектр випадкової величини ψ_s збігається з множиною

$$S_{\psi_s} = S_{\xi^{(1)}} \oplus S_{\xi^{(2)}} \oplus ... \oplus S_{\xi^{(s)}} = \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n c_n, \ \zeta_n \in A_n^{\infty} \right\}.$$

Нехай $(f_1, f_2, ..., f_m)$ – фіксований упорядкований набір чисел, де $f_i \in \ A_i$, $i = \overline{1, m}$, а $\Delta'_{f_1 \cdots f_m}$ – множина всіх чисел виду

$$\sum_{n=1}^{m} f_n c_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \zeta_n c_n, \quad \text{де} \quad \zeta_n \in A_n.$$

Легко помітити, що множина S_{ψ_s} належить об'єднанню всіх відрізків виду

$$\Delta_{f_1 f_2 \ldots f_m} = \left[\sum_{n=1}^{m} f_n a_n,\ s\widetilde{r}_m + \sum_{n=1}^{m} f_n c_n\right] = [\inf \Delta'_{f_1 \ldots f_m},\ \sup \Delta'_{f_1 \ldots f_m}],$$

які називаються *циліндричними відрізками рангу* m *із основою* $f_1 f_2 \ldots f_m$ ($f_i \in A_i$). Діаметр такого відрізка дорівнює $|\Delta_{f_1 \ldots f_n}| = s\widetilde{r}_n$. Оскільки

$$\Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m} = \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m 0} \cup \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m 1} \cup \ldots \cup \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m (s \cdot 2^{n-1})},$$

то кількість $\widetilde{k}_m$ відповідних циліндричних відрізків рангу m становить

$$\widetilde{k}_m = (s+1) \cdot (2s+1) \cdot (4s+1) \cdot \ldots \cdot (s2^{m-1}+1) = \prod_{k=1}^{m} (s \cdot 2^{k-1} + 1).$$

Таким чином, $S_{\psi_s} \subset G_{m+1} \subset G_m$ для всіх m і справедлива рівність

$$S_{\psi_s} = \lim_{m \to \infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m, \quad \text{де} \quad G_m = \bigcup_{(d_1 \ldots d_m)} \Delta_{f_1 \ldots f_m}.$$

Лему доведено. $\square$

Теорема 4.7. *У випадку неперервності випадкової величини* ξ ($M = 0$) *розподіл випадкової величини* ψ_s, *для будь-якого натурального* $s \geqslant 2$ *є сингулярним розподілом канторівського типу з суперфрактальним спектром.*

Доведення. Оскільки, згідно з попередньою лемою, множина S_{ψ_s} належить об'єднанню $\widetilde{k}_n = \prod_{k=1}^{n} (s \cdot 2^{k-1} + 1)$ циліндричних відрізків рангу n діаметра $s\widetilde{r}_n$, то міра Лебега

$$\lambda(S_{\psi_s}) \leqslant \lim_{n \to \infty} \widetilde{k}_n \widetilde{r}_n = s \cdot \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{s2^{k-1}+1}{(k+1)2^{k-1}+1} = s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{s2^{k-1}+1}{(k+1)2^{k-1}+1} = 0,$$

оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s2^{n-1}+1}{(n+1)2^{n-1}+1} = 0.$$

Оскільки нуль-множина Лебега S_{ψ_s} має суперфрактальну підмножину S_ξ, то S_{ψ_s}, згідно з першою властивістю розмірності Гаусдорфа-Безиковича, також є суперфрактальною, тобто $\alpha_0(S_{\psi_s}) = 1$ при довільному $s \in \mathbb{N}$. $\square$

Висновки до розділу 4

У цьому розділі:

— визначено множину неповних сум збіжного додатного ряду, як множину значень функції, роль аргументу якої відіграють числа з відрізка $[0;1]$, задані своїм Q_2^*-зображенням, яке в свою чергу визначається стохастичною матрицею;

— вивчено властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом, і встановлено суперфрактальність множини її неповних сум;

— досліджено автозгортки вказаної нескінченної згортки Бернуллі;

— вивчено асимптотичні властивості характеристичної функції розподілу в.в. і доведено близькість за властивостями її сингулярного розподілу до дискретного.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботі $[4^a]$ і доповідалися на семінарі зі фрактального аналізу й на наукових конференціях $[14^a, 15^a, 19^a]$.

РОЗДІЛ 5
НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, СПЕКТРИ ЯКИХ Є КАНТОРВАЛАМИ

У цьому розділі з'ясовується, якої найбільшої масивності (у розумінні міри Лебега) може досягати множина неповних сум додатного монотонного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для якого виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{r_n} = +\infty$. Як відповідь на задане питання побудовано сім'ю додатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, кожен ряд якої задовольняє цю умову, а множина $E\{a_n\}$ його неповних сум (підсум) – це канторвал (об'єднання ніде не щільної множини і множини, яка є нескінченним об'єднанням відрізків), чия міра Лебега як завгодно близька до 1. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ в побудованій сім'ї існує ряд міра Лебега множини неповних сум якого більша ніж $1 - \varepsilon$.

У цьому розділі вивчаються нескінченні згортки Бернуллі, керовані рядами, множини неповних сум яких є канторвалами.

5.1. Континуальна сім'я додатних нормованих рядів, визначених двома послідовностями натуральних чисел

Нехай (s_n) і (m_n) – послідовності натуральних чисел і (a_n) – така послідовність додатних дійсних чисел, що

$$\begin{gathered}\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{s_1+1} + \underbrace{\frac{m_1-1}{m_1}a_1 + \cdots + \frac{m_1-1}{m_1}a_1}_{m_1} + \\ + \underbrace{a_2 + \cdots + a_2}_{s_2+1} + \underbrace{\frac{m_2-1}{m_2}a_2 + \cdots + \frac{m_2-1}{m_2}a_2}_{m_2} + \ldots + \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{s_n+1} + \\ + \underbrace{\frac{m_n-1}{m_n}a_n + \cdots + \frac{m_n-1}{m_n}a_n}_{m_n} + \widetilde{r}_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = r_0 = 1 \qquad (5.1)\end{gathered}$$

– збіжний додатний ряд, для якого виконується умова

$$\widetilde{r}_n = \frac{2a_n}{m_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{5.2}$$

де

$$\widetilde{r}_n = \sum_{k=n+1+\sum_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}^{\infty} d_k = \sum_{i=n+1}^{\infty} (s_i + m_i)a_i,$$

а d_k – це k-ий елемент послідовності утвореної з членів ряду (5.1), тобто

$$\underbrace{a_1,\ \dots,\ a_1}_{s_1+1},\ \underbrace{\frac{m_1-1}{m_1}a_1,\ \dots,\ \frac{m_1-1}{m_1}a_1}_{m_1},$$

$$\underbrace{a_2,\ \dots,\ a_2}_{s_2+1},\ \underbrace{\frac{m_2-1}{m_2}a_2,\ \dots,\ \frac{m_2-1}{m_2}a_2}_{m_2},\ \dots,$$

$$\underbrace{a_n,\ \dots,\ a_n}_{s_n+1},\ \underbrace{\frac{m_n-1}{m_n}a_n,\ \dots\ \frac{m_n-1}{m_n}a_n}_{m_n},\ \dots$$

Зокрема,

$$d_1 = \dots = d_{s_1+1} = a_1,$$

$$d_{s_1+2} = \dots = d_{s_1+m_1+1} = \frac{m_1-1}{m_1}a_1,$$

$$d_{s_1+m_1+2} = \dots = d_{s_1+m_1+s_2+2} = a_2,$$

$$d_{s_1+m_1+s_2+3} = \dots = d_{s_1+m_1+s_2+m_2+2} = \frac{m_2-1}{m_2}a_2$$

тощо. Зрозуміло, що при виконанні умови (5.2) послідовності (s_n) і (m_n) визначають члени ряду (5.1).

Теорема 5.1. *При виконанні умов* (5.1) *і* (5.2) *члени послідовності* (a_n) *мають вигляд*

$$a_n = \frac{2^{n-1} \cdot m_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (m_k^2 + s_k m_k + 2)}. \tag{5.3}$$

Доведення. Для $n = 1$ маємо

$$1 = (s_1 + 1)a_1 + (m_1 - 1)a_1 + \widetilde{r}_1 = (s_1 + m_1)a_1 + \frac{2a_1}{m_1}.$$

Звідси

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1^2 + s_1 m_1 + 2}.$$

З урахуванням означення $\widetilde{r}_n$ і рівності (5.2), маємо

$$\widetilde{r}_n = a_{n+1}(s_{n+1} + m_{n+1}) + \widetilde{r}_{n+1} = a_{n+1}(s_{n+1} + m_{n+1}) + \frac{2a_{n+1}}{m_{n+1}},$$

$$a_n = \frac{m_n \widetilde{r}_n}{2} = \frac{a_{n+1} m_n}{2}\left(s_{n+1} + m_{n+1} + \frac{2}{m_{n+1}}\right),$$

звідки

$$a_{n+1} = \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{a_n}{m_n}. \tag{5.4}$$

Послідовно підставляючи вирази $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ з (5.4), отримуємо

$$a_{n+1} = \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{a_n}{m_n} =$$

$$= \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{1}{m_n} \cdot \frac{2m_n}{m_n^2 + s_n m_n + 2} \cdot \frac{a_{n-1}}{m_{n-1}} = \cdots$$

$$= \frac{2^n \cdot m_{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (m_i^2 + s_i m_i + 2)}.$$

Отже, має справедлива рівність (5.3). □

Наслідок 5.1. *Для членів і залишків ряду* (5.1) *справедливі співвідношення:*

$$\widetilde{r}_n = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^{n}(m_k^2 + s_k m_k + 2)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2m_{n+1}}{m_n(m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2)}, \qquad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{2}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2}.$$

Приклад 1. Якщо $s_n = m_n = m$ – const, то

$$a_n = \frac{m}{2(m^2+1)^n}, \quad \widetilde{r}_n = \frac{1}{(m^2+1)^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{m^2+1}.$$

Приклад 2. Якщо $s_n = s$ – const, $m_n = 2^n s$, то

$$a_n = \frac{2^{n-1}s}{\prod_{k=1}^{n}((2^{2k-1}+2^{k-1})s+1)}, \quad \widetilde{r}_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}((2^{2k-1}+2^{k-1})s+1)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{(2^{2n+1}+2^n)s+1}, \quad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{(2^{2n+1}+2^n)s+1}.$$

Приклад 3. Якщо $m_n = m$ – const, $s_n = 2^n m$, то

$$a_n = \frac{2^{n-1}m}{\prod_{k=1}^{n}((2^k+1)m^2+2)}, \quad \widetilde{r}_n = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^{n}((2^k+1)m^2+2)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{2}{(2^{n+1}+1)m^2+2}.$$

5.2. Множина неповних сум ряду

Нас цікавлять тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (5.1) за умови, коли (s_n) і (m_n) – зростаючі послідовності натуральних чисел. Нижче ми доведемо, що множина неповних сум цього ряду містить відрізки, скориставшись простою ідеєю: *якщо множина неповних сум ряду є щільною у деякому відрізку, то цей відрізок повністю належить множині неповних сум через її замкненість.* Задля цього ми використовуватимемо поняття *ε-апроксимації множини*, яке успішно застосовував Цезар Ференс у роботі [21].

Нехай ε – деяке додатне число. Будемо казати, що множина $J \subset \mathbb{R}$ *ε-апроксимується множиною* $U \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\forall x \in J \quad \exists\, u \in U: \quad 0 \leqslant x - u \leqslant \varepsilon. \tag{5.5}$$

Подвійна нерівність (5.5) рівносильна

$$x - \varepsilon \leqslant u \leqslant x \quad \text{і} \quad u \leqslant x \leqslant u + \varepsilon. \tag{5.6}$$

Тому

$$J \subset \bigcup_{u\in U} [u,\ u+\varepsilon]. \tag{5.7}$$

Введімо позначення:

$$\varepsilon_n \equiv \frac{a_n}{m_n} = \frac{\widetilde{r}_n}{2},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (s_k + 1 + m_k) = n + \sum_{k=1}^{n} (s_k + m_k),$$

$$l_n = (m_n - 3)a_n + \frac{2a_n}{m_n} = \frac{a_n}{m_n}(m_n^2 - 3m_n + 2) = \frac{a_n}{m_n}(m_n - 1)(m_n - 2),$$

$$L_n = (s_n + 3)a_n - \frac{2a_n}{m_n} = \frac{a_n}{m_n}(s_n m_n + 3m_n - 2),$$

$$D_n \equiv \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{S_n} \alpha_i d_i,\quad \alpha_i \in \{0,1\} \right\}$$

– множина неповних сум частинної суми $d_1 + d_2 + \ldots + d_{S_n}$ ряду (5.1) рангу n.

Лема 5.1. *Множина E всіх підсум скінченного ряду*

$$\underbrace{m + m + \ldots + m}_{s+1} + \underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m}$$

містить множину

$$\mathbb{N} \cap [(m-1)(m-2),\ sm + 3m - 2],$$

де $s, m \in \mathbb{N}$ і $s \geqslant m - 3$.

Доведення. Очевидно, що

$$\{0,\, m,\, 2m,\, (m-2)m,\, \ldots,\, (s+1)m\} +$$
$$+\ \{0,\, (m-1)m\}\ =\ \{0,\, m,\, \ldots,\, (s+m)m\}\ \subseteq\ E.$$

Якщо $m - 2 \leqslant k \leqslant s + 1$ і $1 \leqslant i \leqslant m - 1$, то

$$km + i = (k + i + 1 - m)m + (m - i)(m + 1) \in E,$$

а отже,

$$[(m-2)m,(s+2)m]\cap\mathbb{N}\subseteq E.$$

Якщо $1\leqslant i\leqslant m-2$, то

$$(m-2)m-i=(m-2-i)m+i(m-1)\in E,$$

а тому

$$[(m-2)(m-1),(m-2)m]\cap\mathbb{N}\subseteq E.$$

Зрештою, для $1\leqslant i\leqslant m-2$ маємо, що

$$(s+2)m+i=(s+3+i-m)m+(m-i)(m-1)\in E,$$

а отже $[(s+2)m,sm+3m-2]\cap\mathbb{N}\subseteq E$. □

Лема 5.2. *Для довільного $d\in D_n$ відрізок*

$$[d+l_{n+1},\ d+L_{n+1}+\varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1} за умови $s_n\geqslant m_n-3$.

Доведення. Нехай $y\in D_{n+1}$. Тоді

$$\begin{aligned}
y=\sum_{i=1}^{S_{n+1}}\alpha_i d_i=\Big(&\alpha_1a_1+\alpha_2a_1+\dots+\alpha_{s_1+1}a_1+\\
&+\alpha_{s_1+2}\frac{m_1-1}{m_1}a_1+\dots+\alpha_{s_1+m_1+1}\frac{m_1-1}{m_1}a_1\Big)+\dots+\\
+\Big(&\alpha_{n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}a_n+\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}a_n+\dots+\\
&+\alpha_{n+s_n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}\frac{m_n-1}{m_n}a_n+\dots\Big)+\\
+\Big(&\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}a_{n+1}+\alpha_{n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}a_{n+1}+\dots+\\
&+\alpha_{n+s_n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}\frac{m_{n+1}-1}{m_{n+1}}a_{n+1}+\dots+\\
&+\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n+1}(s_i+m_i)}\frac{m_{n+1}-1}{m_{n+1}}a_{n+1}\Big)=
\end{aligned}$$

$$= \frac{a_1}{m_1}\big(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_1 + \dots + \alpha_{s_1+1} m_1 +$$

$$+ \alpha_{s_1+2}(m_1 - 1) + \dots + \alpha_{s_1+m_1+1}(m_1 - 1)\big) + \dots +$$

$$+ \frac{a_n}{m_n}\Bigg(\alpha_{n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)} m_n + \alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)} m_n + \dots +$$

$$+ \alpha_{n+s_n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}(m_n - 1) + \cdots \Bigg) +$$

$$+ \frac{a_{n+1}}{m_{n+1}}\Bigg(\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)} m_{n+1} + \alpha_{n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)} m_{n+1} + \dots +$$

$$+ \alpha_{n+s_n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}(m_{n+1} - 1) + \dots +$$

$$\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n+1}(s_i+m_i)}(m_{n+1} - 1)\Bigg) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta_i \varepsilon_i + \theta_{n+1}\varepsilon_{n+1} = d + \theta_{n+1}\varepsilon_{n+1},$$

де

$$d = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \varepsilon_i \in D_n \subset D_{n+1}, \qquad \varepsilon_n = \frac{a_n}{m_n}, \qquad \theta_n \in A_n,$$

A_n – множина всіх неповних сум скінченного ряду

$$\underbrace{m_n + m_n + \ldots + m_n}_{s_n+1} + \underbrace{(m_n - 1) + (m_n - 1) + \ldots + (m_n - 1)}_{m_n}.$$

І навпаки, якщо число y має вигляд

$$y = d + \theta_{n+1}\varepsilon_{n+1},$$

де $\theta_{n+1} \in A_{n+1}$, то $y \in D_{n+1}$.

Оскільки, згідно з лемою 5.1, справедливо

$$[d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}] =$$

$$= [d + (m_{n+1}(m_{n+1} - 3) + 2)\varepsilon_{n+1},\ d + (m_{n+1}(m_{n+1} + 3) - 1)\varepsilon_{n+1}] \subset$$

$$\subset \bigcup_{d \in D_{n+1}} [d; d + \varepsilon_{n+1}],$$

то, згідно зі (5.7), відрізок

$$[d + l_{n+1};\ d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}. Лему доведено. $\square$

Лема 5.3. *Якщо $s_n \geqslant 3m_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то відрізок*

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$$

ε_n-апроксимується множиною D_n.

Доведення. Доведемо твердження за індукцією.

При $n = 0$ множина D_0 складається з однієї точки 0 і. згідно з лемою 5.2, відрізок $[l_1,\ L_1 + \varepsilon_1]$ ε_1-апроксимується множиною D_1, а тому й відрізок $\big[l_1,\ \frac{1}{2}\big]$ також ε_1-апроксимується множиною D_1, оскільки

$$\frac{1}{2} \leqslant L_1 + \varepsilon_1.$$

Справді,

$$L_1 + \varepsilon_1 > L_1 = \frac{a_1}{m_1}(s_1 m_1 + 3m_1 - 2) = \frac{s_1 m_1 + 3m_1 - 2}{s_1 m_1 + m_1^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1(s_1 - m_1) + 6(m_1 - 1)}{s_1 m_1 + m_1^2 + 2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Припустимо, що відрізок $\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$ ε_n-апроксимується множиною D_n. Тоді для довільної точки $x \in \Big[\sum\limits_{k=1}^{n+1} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$ з нерівності

$$x \geqslant \sum_{k=1}^{n} l_k + l_{n+1}$$

випливає, що

$$x - l_{n+1} \in \Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2} - l_{n+1}\Big] \subset \Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big].$$

Згідно зі припущенням і властивістю (5.7), ми можемо вказати таке $d \in D_n$, при якому з включення

$$x - l_{n+1} \in [d, d + \varepsilon_n]$$

випливає

$$x \in [d + l_{n+1}, d + l_{n+1} + \varepsilon_n].$$

Для завершення доведення леми достатньо довести, що при

$$s_{n+1} \geqslant 3m_{n+1}$$

справедливе включення:

$$[d + l_{n+1}, d + l_{n+1} + \varepsilon_n] \subset [d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

або, що те саме,

$$l_{n+1} + \varepsilon_n \leqslant L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}.$$

Зауважимо, що згідно з наслідком 5.1,

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = \frac{\widetilde{r}_n}{\widetilde{r}_{n+1}} = \varepsilon_{n+1} \frac{m_{n+1}^2 + s_{n+1}m_{n+1} + 2}{2}.$$

Тому при $s_{n+1} \geqslant 3m_{n+1}$ маємо

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (l_{n+1} + \varepsilon_n) = \\
&= \varepsilon_{n+1}\Big(s_{n+1}m_{n+1} + 3m_{n+1} - 1 - m_{n+1}^2 + 3m_{n+1} - \\
&\qquad - 2 - \frac{m_{n+1}^2 + s_{n+1}m_{n+1} + 2}{2}\Big) = \\
&= \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}(s_{n+1}m_{n+1} - 3m_{n+1}^2 + 12m_{n+1} - 8) = \\
&= \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}(m_{n+1}(s_{n+1} - 3m_{n+1}) + 12m_{n+1} - 8) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Згідно з лемою 5.2, відрізок

$$[d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}, а тому й відрізок

$$[d + l_{n+1}; d + l_{n+1} + \varepsilon_n]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}. Лему доведено. $\square$

Теорема 5.2. *Множина $E\{d_n\}$ містить відрізок*

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k, \quad 1 - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\right].$$

Доведення. Покажемо, що

$$E\{d_n\} \supseteq \left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n, \ \frac{1}{2}\right].$$

Оскільки

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k, \ \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\sum_{k=1}^{n} l_k, \ \frac{1}{2}\right]$$

і $D_n \subseteq E\{d_n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то з леми 5.3 випливає, що відрізок

$$\left[\sum_{k=1}^{n} l_k, \ \frac{1}{2}\right]$$

ε_n-апроксимується множиною $E\{d_n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\widetilde{r}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому множина $E\{d_n\}$ щільна у відрізку $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k, \ \frac{1}{2}\right]$, тобто

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n, \ \frac{1}{2}\right] \subseteq E\{d_n\}.$$

Теорему доведено. $\square$

Лема 5.4. *[38] Якщо $d_k > r_k$ для деякого індексу k, тоді інтервал (r_k, d_k) є суміжним інтервалом до множини неповних сум $E\{d_n\}$, тобто*

1. *$r_k \in E\{d_n\}$, $d_k \in E\{d_n\}$;*
2. *$(r_k, d_k) \cap E\{d_n\} = \varnothing$.*

Теорема 5.3. *Якщо відрізок*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n, \ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right]$$

непорожній, $s_n \geqslant 3m_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m_n \geqslant 4$, то множина $E\{d_n\}$ – це симетричний канторвал.

Доведення. Згідно з теоремою 1.15, множина $E\{d_n\}$ належить до одного зі трьох "топологічних типів". Тому для доведення того, що вона є канторвалом покажемо, що $E\{d_n\}$ не належить до решти двох.

Множина $E\{d_n\}$ не є гомеоморфною множині Кантора, оскільки згідно з теоремою 5.2 містить відрізок

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k,\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\right].$$

Покажемо, що $E\{d_n\}$ не є скінченним об'єднанням відрізків. Припустимо супротивне: $E\{d_n\}$ є скінченним об'єднанням відрізків, тобто

$$E\{d_n\} = [0, c_1] \cup [c_2, c_3] \cup \ldots \cup [c_n, 1],$$

де

$$0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \ldots \leqslant c_n < 1.$$

Оберемо номер k так, що $a_k < c_1$ і $m_k \geqslant 4$. Тоді

$$0 < \widetilde{r}_k = \frac{2a_k}{m_k} < \frac{m_k - 1}{m_k} a_k < c_1.$$

Оскільки, згідно з лемою 5.4, інтервал $(\widetilde{r}_k, a_k)$ буде суміжним інтервалом до множини $E\{d_n\}$, то з цього випливає, що множина неповних сум $E\{d_n\}$ не містить відрізка $[0, c_1]$, що суперечить нашому припущенню. Тому $E\{d_n\}$ не є скінченним об'єднанням відрізків.

Отже, множина $E\{d_n\}$ – це симетричний канторвал. $\square$

Теорема 5.4. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існують послідовності (s_n), (m_n), і (a_n), такі, що виконуються наступні умови:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = 1$;
2. $\widetilde{r}_n = \dfrac{2a_n}{m_n}$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *де* $\widetilde{r}_n = \sum\limits_{k>n} (s_k + m_k) a_k$;

3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{d_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_{n+k}} = \infty$;

4. *множина* $E\{d_n\}$ *– це канторвал, міра Лебега якого більша, ніж* $1-\varepsilon$

Доведення. Візьмемо довільну строго зростаючу послідовність (m_n) і виберемо послідовність (s_n), таку, що

$$s_n \geqslant 3m_n \quad \text{і} \quad \frac{(m_n-1)(m_n-2)}{m_n(s_n+m_n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тепер для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$l_n = \frac{a_n}{m_n}(m_n-1)(m_n-2) = a_n(s_n+m_n)\frac{(m_n-1)(m_n-2)}{m_n(s_n+m_n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(s_n+m_n).$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2}(s_n+m_n) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+m_n) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже,

$$\lambda(E\{a_n\}) > \lambda\left(\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n,\ 1-\sum_{n=1}^{\infty} l_n\right]\right) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} l_n \geqslant 1-\varepsilon.$$

Теорему доведено. □

Наслідок 5.2. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ *– це ряд виду* (5.1), *для якого виконуються умова* (5.2). *Спектром роподілу в.в.*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k,$$

де (ξ_k) *— послідовність незалежних випадкових величин із розподілами*

$$P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, \quad P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, \quad p_{0k} + p_{1k} = 1$$

є множина неповних сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, *тобто канторвал, якщо* $p_{0k} \neq 0 \neq$ $\neq p_{1k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, *або її підмножина, якщо існує* $p_{ik} = 0$ *для деяких* $i,\ k \in \mathbb{N}$.

5.3. Розподіл випадкової величини, спектром якої є канторвал

Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi_n, \tag{5.8}$$

де

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{4^k} + \frac{2}{4^k}) = \frac{5}{3} \ - \tag{5.9}$$

ряд, члени якого задовольняють співвідношення:

1. $d_{2k-1} = \frac{3}{4^k} < r_{2k-1} = \frac{11}{3 \cdot 4^k}$;

2. $d_{2k} = \frac{2}{4^k} > r_{2k} = \frac{5}{3 \cdot 4^k}$.

Як відомо [22], множина неповних сум ряду (5.9) – це канторвал $\mathbb{K}$ – об'єднання ніде не щільної множини і множини, яка є об'єднанням зліченної кількості відрізків (містить відрізки $[\frac{2}{3 \cdot 4^{k-1}}; \frac{1}{4^{k-1}}]$, $[\frac{5}{3} - \frac{1}{4^{k-1}}; \frac{5}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^{k-1}}]$, $k \in \mathbb{N}$), тобто

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3\varepsilon_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\varepsilon_{2k}}{4^k} \right) = \Delta^V_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots} : \varepsilon_k \in \{0,\ 1\} \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n} = \Delta^W_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} :\ a_n \in \{0,\ 2,\ 3,\ 5\} = A \right\}.$$

Канторвал $\mathbb{K}$ симетричний відносно точки

$$\frac{5}{6} = \Delta^V_{0(00011)} = \Delta^V_{1(11100)}.$$

[12, **Наслідок 4.2**] Канторвал $\mathbb{K}$ містить відрізок $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Варто зазначити, що $\frac{2}{3} = \Delta^V_{(01)}$, $1 = \Delta^V_{(10)}$.

Лема 5.5. *Відрізок* $\left[a = \Delta^V_{c_1 c_2 \ldots c_{2m}(01)};\ b = \Delta^V_{c_1 c_2 \ldots c_{2m}(10)}\right] \subset \mathbb{K}$, $c_i \in A$.

Доведення. Справді,

$$a = C + \frac{1}{4^{2m}} \cdot \Delta^V_{(01)};$$

$$b = C + \frac{1}{4^{2m}} \cdot \Delta^V_{(10)},$$

де

$$C = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{3c_{2k-1}}{4^k} + \frac{2c_{2k}}{4^k} \right).$$

Оскільки, $\left[\Delta^V_{(01)}; \Delta^V_{(10)}\right] \subset \mathbb{K}$, то для будь-якого

$$x = \Delta^V_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} \in \mathbb{K}$$

відповідно,

$$y = \Delta^V_{c_1 c_2 \ldots c_{2m} a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} \in [a; b].$$

Отже, $[a; b] \subset \mathbb{K}$. $\square$

Зауважимо, що ряд (5.9) є результатом додавання двох рядів, які є сумами всіх членів нескінченно спадних геометричних прогресій. Їхні множини неповних сум просто виражаються у термінах четвіркового зображення чисел, а саме:

$$E'\left(\frac{3}{4^n}\right) = \{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta^4_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in \{0, 3\}\},$$

$$E''\left(\frac{2}{4^n}\right) = \{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta^4_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in \{0, 2\}\}.$$

Для арифметичної суми цих множин виконується рівність

$$E'\left(\frac{3}{4^n}\right) \oplus E''\left(\frac{2}{4^n}\right) = E\left(\frac{3}{4^{2k-1}} + \frac{2}{4^{2k}}\right).$$

Об'єктом нашого інтересу є структурні й тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (5.9) і розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{3\xi_1}{4} + \frac{2\xi_2}{4} + \frac{3\xi_3}{4^2} + \frac{2\xi_4}{4^2} + \ldots + \frac{3\xi_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\xi_{2k}}{4^k} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\xi_{2n-1} + 2\xi_{2n}}{4^n}, \quad (5.10)$$

де (ξ_k) – послідовність незалежних випадкових величин із розподілами:

$$P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geqslant 0, \quad P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geqslant 0, \quad p_{0k} + p_{1k} = 1.$$

Лема 5.6. *Якщо* $p_{0k} = \frac{1}{2}$ *для* $\forall k \in \mathbb{N}$, *то характеристична функція випадкової величини* ξ, *визначеної рівністю* (5.10), *має вигляд*

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \prod_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4}(1+e^{\frac{it3}{4^n}})(1+e^{\frac{it2}{4^n}})),$$

а її модуль записується

$$|f_\xi| = \prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|, \quad \text{де} \ \ |f_k(t)| = |\cos\frac{3t}{2\cdot 4^k}||\cos\frac{t}{4^k}|.$$

Доведення. Для характеристичної функція випадкової величини ξ, визначеної рівністю (5.10), маємо

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = Me^{it\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\xi_{2n-1}+2\xi_{2n}}{4^n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(Me^{it\frac{3\xi_{2n-1}}{4^n}}Me^{it\frac{2\xi_{2n}}{4^n}}\right) =$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left((\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{it3}{4^n}})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{it2}{4^n}})\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{2n-1}(t)\varphi_{2n}(t)\right).$$

$$|f_k(t)| = |\varphi_{2k-1}(t)||\varphi_{2k}(t)| = |\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{it3}{4^k}}||\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{it2}{4^k}}| = \frac{1}{4}|1+e^{\frac{it3}{4^k}}||1+e^{\frac{it2}{4^k}}| =$$
$$= \frac{1}{4}|1+cos\frac{3t}{4^k}+isin\frac{3t}{4^k}||1+cos\frac{2t}{4^k}+isin\frac{2t}{4^k}| = \frac{1}{4}\sqrt{(1+cos\frac{3t}{4^k})^2+sin^2\frac{3t}{4^k}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{(1+cos\frac{2t}{4^k})^2+sin^2\frac{2t}{4^k}} = \frac{1}{4}\sqrt{2+2cos\frac{3t}{4^k}}\sqrt{2+2cos\frac{2t}{4^k}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+cos\frac{3t}{4^k}}\sqrt{1+cos\frac{2t}{4^k}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+2cos^2\frac{3t}{2\cdot 4^k}-1)(1+2cos^2\frac{2t}{2\cdot 2^k}-1)} =$$
$$= |\cos\frac{3t}{2\cdot 4^k}||\cos\frac{t}{4^k}|.$$

Маючи гіпотезу про те, що $L_\xi = 0$, нам наразі не вдалось її ні довести, ні спростувати.

Теорема 5.5. *Випадкова величина* ξ *має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли* $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.

Якщо $M = 0$ *і для* $\forall k \in \mathbb{N}$ *виконується одна з умов:*

1. $p_{i_k 2k} = 0$;
2. $p_{i_k[2k-1]} = 0$;

3. $p_{i_k 2k} = 0$ *або* $p_{i_k[2k-1]} = 0$,

то ξ *має сингулярний розподіл канторівського типу.*

Доведення. Перша частина твердження є наслідком теорем Джессена-Вінтнера (1.7) і П. Леві (1.8).

Розглянемо другу частину твердження. Оскільки $M = 0$, то розподіл ξ є неперервним. Нехай $p_{i_k 2k} = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, тоді множиною можливих значень в.в. ξ є множина

$$V_2 = \left\{ x \mid x = \frac{3\varepsilon_1}{4} + \frac{1 - i_1}{4} + \frac{3\varepsilon_3}{4^2} + \frac{1 - i_2}{4^2} + \ldots \right\} = C \oplus V_2^*,$$

де $V_2^* = \left\{ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3\varepsilon_{2k-1}}{4^k} \right\}$, $\varepsilon_{2k-1} \in \{0, 1\}$. Оскільки множина V_2^* континуальна, досконала ніде не щільна множина нульової міри Лебега, то розподіл в.в. ξ зосереджений на множині V_2, отриманої зсувом множини V_2^* на число C, – це сингулярний розподіл канторівського типу. Аналогічна ситуація у решті двох випадках. □

Висновки до розділу 5

У цьому розділі:

— описано тополого-метричні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої нормованим додатним рядом, визначеним двома зростаючими послідовностями натуральних чисел;

— доведено, що її спектром є канторвал, міра Лебега якого в залежності від вибору параметрів може бути як завгодно близькою до 1.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботі [3^a] і доповідалися на семінарі зі фрактального аналізу й на наукових конференціях [$16^a, 18^a, 20^a$].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Наразі зростає інтерес до функцій зі складною локальною поведінкою. Потужним інструментом розвитку теорії неперервних функцій із неоднорідною локальною поведінкою, зі всюди розривними й усюди щільними множинами особливостей різного роду є різні зображення дійсних чисел у тій чи іншій системі кодування їх засобами як скінченного, так і нескінченного, як сталого, так і змінного алфавітів. Використання стохастичних та двічі стохастичних матриць як одного з об'єктів, що визначають зображення дійсного числа, певним чином "породжує" певні симетрії, спрощує розв'язання окремих задач, породжує нові цікаві об'єкти для дослідження. Сингулярно неперервні функції, пов'язані з ланцюгами Маркова, є актуальним об'єктом дослідження в теорії розподілів випадкових величин (зокрема нескінченних згорток Бернуллі), теорії функцій, а також фрактального аналізу функцій і ймовірнісних мір.

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. сконструйовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і описано тополого-метричні властивості спектра функції розподілу однієї неперервної випадкової величини, заданої Q^*_∞-зображенням, визначеним нескінченною двічі стохастичною матрицею;
2. досліджено фрактальні властивості множин чисел із заборонами вживання комбінацій символів у їхньому марковському зображенні, визначеному двічі стохастичною матрицею;
3. знайдено необхідні й достатні умови сингулярності функції, яка проектує цифри:

   – марковського зображення у цифри класичного двійкового зображення;

   – нега-двійкового зображення у цифри марковського зображення.

Для останньої функції знайдено систему функціональних рівнянь, яка її однозначно визначає;

4. вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні і фрактальні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом із суперфрактальною множиною підсум; поведінку модуля її характеристичної функції на нескінченності; доведено критерій дискретності; вивчено фрактальні властивості автозгорток цієї нескінченної згортки Бернуллі;
5. описано тополого-метричні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої нормованим додатним рядом, визначеним двома зростаючими послідовностями натуральних чисел; доведено, що її спектром є канторвал, міра Лебега якого в залежності від вибору параметрів може бути як завгодно близькою до 1.

У геометрії числових рядів, у теорії нескінченних згорток Бернуллі, теорії неперервних локально складних функцій існує чимало проблем, які безпосередньо пов'язані з об'єктами цього дисертаційного дослідження. Окремі задачі, напевно, можна розв'язати з використанням ідей, прийомів і методів, які використовувалися в цій роботі. У цьому, зокрема, ми вбачаємо теоретичну і практичну значущість цього дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. *The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it* // Rev. Roum. Math. Pures. Appl. – 2009. – Vol. **54**, №2. — P. 85 – 115.
2. Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions* // Mathematische Nachrichten – 2006. – Vol. **279**, №15. — P. 1619 – 1633.
3. Albeverio S., Torbin G. *On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions* // Bull. Sci. Math. — 2008. — **132**, № 8. — P. 711 – 727.
4. Ando T. *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues* // Linear Algebra Appl. – 1989. – Vol. **118**. — P. 162 – 248. – https://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90580-6
5. Banakh T., Bartoszewitcz A., Głąb S., Szymonik E. *Algebraic and topological properties of some sets in* ℓ_1 // Colloq. Math. — 2012. — **129**. — P. 75 – 85.
6. Bapat, R. B. and Raghavan, T. E. S. *Nonnegative matrices and applications.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 1997. – Vol. **64**. — XIV+336 p. — https://doi.org/10.1017/CBO9780511529979
7. Banach, S. *Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen.* // Studia Mathematica. – 1931. – №3. — P. 174-179.
8. Beckenbach, Edwin F. Richard Bellman. *Inequalities* // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Band 30. – Springer-Verlag, New York, Inc. – 1965. — XI+198 p.
9. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis.* — Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. — 430 p.

10. Berge C. *Topological spaces including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity.* – New York: Macmillan. – 1963. — 270 p.
11. Birkhoff, Garrett. *Three observations on linear algebra* // Univ. Nac. Tucumán. Revista A. – 1946. – Vol. **5**. — P. 147 – 151.
12. Bielas W., Plewik S., Walczyńska M. *On the center of distances* // European Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. **4**, Is. **2**. — P. 687 – 698. — https://doi.org/10.1007/s40879-017-0199-4
13. Cantor G. *De la puissance des ensembles parfaits de points* // Acta Math. — 1884. Vol. **4**.— P. 381 – 392.
14. Chailice D. R. *A characterization of the Cantor function* // Amer. Math. Monthly. — 1991. Vol. **98**, №3.— P. 255 – 258.
15. Cooper M. *Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions* // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1998. — **124**. — P. 135 – 149.
16. Dovgoshey O., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. *The Cantor function* // Expo. Math. — 2006. — **24**. — P. 1 – 37.
17. Eggleston H. G. *Sets of fractional dimensions which occur is some problems of number theory* // Proc. Lond. Math. Soc. – 1952. – Vol. **54**. — P. 42 – 93.
18. Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* — Chichester: Wiley, 1990. — 290 p.
19. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications.* – New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc. – 1950. – Vol. **I**. — XII+419 p.
20. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications.* –New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc. – 1968. – Vol. **I**. — P. XVIII+509 p.
21. Ferens C. *On the range of purely atomic probability measures* // Studia Math. — 1984. — **77**. — P. 261 – 263.
22. Guthrie J. A., Nymann J. E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series* // Studia Math. — 1988. — **55**, no. 2. —

P. 323 – 327.

23. Grunwald V. *Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)* // Giornale di matematiche di Battaglini. — 1885. Vol. **23**.— P. 203 – 221.
24. Hornich H. *Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen* // Studia Math. Phys. — 1941. — **49**. — P. 316 – 320.
25. Jessen B., Wintner A. *Distribution function and the Riemann zeta function* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — **38**, № 1. — P. 48 – 88.
26. Jones R. *Achievement Sets of Sequences* // Amer. Math. Monthly — 2011. — **118**. — P. 508 – 521.
27. Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series* // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — Vol. **3**, №4. — P. 159 – 163.
28. Lévi P. *Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes* // Studia Math. — 1931. — **3**. — P. 119 – 155.
29. Marshall Albert W. and Olkin Ingram and Arnold Barry C. *Inequalities* // Inequalities: theory of majorization and its applications. – New York: Springer. – 2011. — XXVIII+909 p. – https://doi.org/10.1007/978-0-387-68276-1
30. Mazurkiewicz, S. *Sur les functions non derivables.* // Studia Mathematica. – 1931. – №3. — P. 92 – 94.
31. Minkowski H. G*esammelte Abhandlungen* / H. Minkowski. — Berlin, 1911. — Vol. 2. — Pp. 50 – 51.
32. Mendes P., Oliveira F. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets* // Nonlinearity. — 1994. — **7**. — P. 329 – 343.
33. Menon P. K. *On a class of perfect sets* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**. — P. 706 – 711.
34. Nymann J. E., Sáenz R. A. *On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series* // Colloq. Math. — 2000. — **83**. — P. 323–327.

35. Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Y. *Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series* // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — Vol. **13 (29)**, №1-2. — P. 205 – 224.
36. Peres Y., Schlag W., Solomyak B. *Sixty year of Bernoulli convolutions* // Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probobility.— 2000. — Vol. **46**. — P. 39 – 65.
37. Peres Y., Solomyak B. *Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof* // Math. Res. Lett.— 1996. — 3, № 2. — P. 231 – 239.
38. Prus-Wiśniowski F. *Beyond the sets of subsums,* www.atom.math.uni.lodz.pl/download.php?f=media/ repository/preprinty/2013/2013_04.pdf&fc= 2013_04.pdf
39. Romanovsky V. *Sur les zèros des matrices stocastiques* // EComp. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1931. – Vol. **192**. — P. 266 – 269.
40. Romanovsky V. *Recherches sur les chaînes de Markoff* // Acta Mathematica. – 1936. – Vol. **66**, №1. — P. 147 – 251.
41. Salem R. *On some singular monotonic functions which are stricly increasing* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. Vol. **53**, №3.— P. 427 – 439.
42. Šalát T. *Absolut konvergente Reihen und Hausdorffsche Mass* // Czechoslovak Mathematical Journal — 1959. — Vol. **9**, №3. — P. 372 – 389.
43. Schwartz L. *Sur le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilites* // C. R. Acad. Sci. — 1941. — №212. — P. 418 – 421.
44. Schwarz Štefan. *A note on the structure of the semigroup of doubly-stochastic matrices* // Matematicky Časopis Slovenskej Akadémie Vied. – 1967. – Vol. **17**, №1. — P. 308 – 316.
45. Sinkhorn Richard. *A Relationship Between Arbitrary Positive Matrices and Doubly Stochastic Matrices* // Ann. Math. Statist. — 1964. — Vol. **35**, №2. — P. 876 – 879.
46. Solomyak B. *On the random series* $\sum \pm\lambda^n$ *(an Erdös problem)* // Annals of Mathematics.— 1995. — Vol. **142**, №3. — P. 611 – 625.

47. Varjú Péter. *Recent progress on Bernoulli convolutions* // European Congress of Mathematics.— 2018.— P. 847 – 867.

48. Wiener N., Wintner A. *A Fourier-Stieltjes transforms and singular infinite convolutions* // Amer. J. Math. — 1938. — Vol. **60**, №3. — P. 512 – 522.

49. Zamfirescu T. *Most monotone functions are singular* // The American Mathematical Monthly. — 1981. — Vol. **88**. — P. 47 – 49.

50. Барановський О. М. *Метрична та ймовірнісна теорія чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.01 – математичний аналіз / О. М. Барановський. — Київ, 2007. — 20 с.

51. Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. *Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування.* — К.: Наукова думка, 2013. — 286 с.

52. Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З. *О строении множества $\overline{\alpha}$-представимых чисел* // Изв. вузов. Матем. — № 5, 1980. — С. 8 – 11.

53. Василенко Н. М.*Використання фібоначчієвої системи числення для дослідження фрактальних властивостей математичних об'єктів зі складною локальною будовою:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / Н. М. Василенко. — Київ, 2010. — 20 с.

54. Виннишин Я. Ф. *О свертках сингулярных функций распределения* // Стохастический анализ и его приложения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 14 – 17.

55. Виннишин Я. Ф. *Згортки сингулярних функцій розподілу* // Укр. мат. журнал — 2004. — Т. **56**, №1.— С. 33 – 44.

56. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1964. — 576 с.

57. Гетьман Б. І. *Тополого-метрична і фрактальна теорія зображень чисел рядами Енгеля*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / Б. І. Гетьман. — Київ, 2012. — 20 с.

58. Гончаренко Я. В. *Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел* / Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 100 – 118.

59. Гончаренко Я. В. *Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду* // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2003. — №4. — С. 216 – 232.

60. Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. *Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005. — №6. — С. 210 – 224.

61. Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. *Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі* // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2008. — Вип. **79**. — С. 34 – 49.

62. Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. *Фрактальні властивості множин точок недиференційованості абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу* // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2001. — №65. — С. 25 – 32.

63. Жихарєва Ю. І. *Сингулярні розподіли ймовірностей, пов'язані з представленнями чисел знакододатними рядами Люрота:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика / Ю. І. Жихарєва. — Донецьк, 2014. — 20 с.

64. Ісаєва Т. М. *Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і його застосування:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / Т. М. Ісаєва. — Київ, 2017. — 20 с.

65. *Калашніков А. В.* Еквівалентне означення та властивості сингулярної

функції Мінковського / А. В. Калашніков // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 50 – 56.

66. Корсунь Н. О., Працьовитий М. В. *Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — 10. — С. 28 – 39.
67. Кюрчев Д. В. *Розподіли випадкових ланцюгових дробів та їх фрактальні властивості:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика / Д. В. Кюрчев. — Київ, 2010. — 22 с.
68. Лебег А. *Интегрирование и отыскание примитивных функций.* — М.: Гостехтеоретиздат, 1934. — 324 с.
69. Лукач Е. *Характеристические функции.* — М.: Наука, 1979. — 424 с.
70. Луцак В. *Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — 15. — С. 188 – 194.
71. Марков А.А. *Исследование замечательного случая зависимых испытаний* // Известия Императорской академии наук. Серия 6. — СПб., 1907. — Т. 1, Вып. 6. — С. 61 – 80.
72. Марков А.А. *Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь* // Известия Императорской академии наук. — СПб, 1908. — 29 с.
73. Постников А. Г., Пятецкий И. И., *Нормальная по Маркову последовательность знаков и нормалная цепная дробь*, // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1957. — Т. 21, Вып. 6. — с. 729 – 746.
74. Працьовита І. М. *Зображення дійсних чисел рядами Остроградського 2-го виду та їх застосування:* автореф. дис. на здобуття наук. сту-

пеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.06 – алгебра та теорія чисел / І. М. Працьовита. — Київ, 2010. — 21 с.

75. Працьовита І.М. *Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум* // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — №7. — С. 174 – 189.
76. Працьовитий М. В. *Згортки сингулярних розподілів* // Доп. НАН України. — 1997. — №9. — С. 36 – 43.
77. Працьовитий М. В. *Нега-канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських* // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, №. 4. – С. 167 – 177.
78. Працьовитий М. В. *Ніде не монотонні сингулярні функції* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — 12. — С. 24 – 36.
79. Працьовитий М. В. *Розподіли сум випадкових степеневих рядів* // Доп. НАН України. — 1996. — №5. — С. 32 – 37.
80. Працьовитий М. В. *Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції.* — Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2002. — №3. — С. 351 – 362.
81. Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
82. Працьовитий М. В., Калашніков А. В. *Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні*// Труды ИПММ НАН Украины. — Т.23. — 2011. — С. 180 – 191.
83. Працьовитий М. В. *Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського* / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, В. К. Безбородов // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2010. — № 11. — С. 207 – 213.

84. Працьовитий М. В., Косопльоткіна О. В. *Фрактальні властивості, суперпозиції сингулярних функцій розподілу*// Теор. ймовірност. матем. статист. — 2002. — **67**. — С. 61–69.

85. Працьовитий М. В, Свинчук О. В. *Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями.* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — №16 (2). — С. 81 – 93.

86. Працьовитий М. В, Свинчук О. В. *Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2015. — №17 (2). — С. 17 – 28.

87. Працьовитий М. В., Торбін Г. М. *Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера* // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48 – 54.

88. Працьовитий М. В., Замрій І. В. *Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості*// Нелінійні коливання. — 2013. — Т. **18**, №1. — С. 55 – 70.

89. Працьовитий М. В., Савченко І. О. *Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності* // Буковинський математичний журнал. — 2014. — **2**, №2–3. — С. 196 – 202.

90. Працьовитий М. В., Савченко І. О. *Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності* // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133 – 142.

91. Працьовитий М. В., Скрипник С. В. *Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — 15. — С. 134 – 145.

92. Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. *Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній* // Наук.

час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14 – 28.

93. Савченко І. О. *Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу*// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2012. — 13 (2). — С. 188 – 196.

94. Савченко І. О. *Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — 15. — С. 119 – 133.

95. Торбин Г.М., Працевитый Н.В. *Случайные величины с независимыми Q^*-знаками* // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев: Институт математики АН Украины, 1992. —С. 95 – 104.

96. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

97. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* — М.: Мир, 1984. — Т.2. — 752 с.

98. Фещенко О. Ю. *Застосування f-кодів дійсних чисел до дослідження фрактальних властивостей ймовірнісних мір*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика / О. Ю. Фещенко. — Київ, 2008. — 20 с.

99. Хворостина Ю. В. *Розподіли випадкових величин з фрактальними властивостями, пов'язані зі знакозмінними рядами Люрота:* автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика / Ю. В. Хворостина. — Київ, 2015. — 20 с.

100. Хеннекен П.Л., Тортра А. *Теория вероятностей и некоторые её приложения.* — М.: Наука, 1974. — 472 с.

101. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* Пер. с англ. — М: Мир, 1989. — 655 с.

102. Шалат Т. *О мере Хаусдорфа линейных множеств* // Чехословацкий математический журнал, Прага. — 1961. — **11 (86)**, — С. 24 – 56.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувачки на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертаційної роботи.

Наукові праці, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1[a]. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В* Q_{∞}^{*}-зображення дійсних чисел, визначені двічі стохастичними матрицями і множини з ними пов'язані // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. – №17. – С. 35 – 43.

2[a]. *Маркітан В.П.* Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, № 4. – С. 34 – 49.

3[a]. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, №10. – С. 1403 – 1416.

4[a]. *Виннишин Я., Маркітан В., Працьовитий М., Савченко І.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – Вип. 12, №2. – С. 26 – 42.

5[a]. *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним рядом і двічі стохастичною матрицею // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2019. – Т.16, №. 2. – С. 101 – 120.

Тези доповідей на конференціях, які засвідчують апробацію результатів дисертації:

6[a]. *Маркітан В.П.* Q_{∞}^{*} - зображення, визначені двічі стохастичними матрицями, і їх застосування // П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики “Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і методики їх навчання”: тези доповідей / НПУ імені М.П. Драгоманова. – Київ, 2016. – С. 35.

7[a]. *Markitan V.* Q^*_∞ - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them // Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі”: матеріали конф. – Київ, 2016. – С. 53.

8[a]. *Markitan V.* Infinite double stochastic matrices and Q^*_∞-representation of real numbers generated by them // XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1-14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2016. – С. 93.

9[a]. *Маркітан В.П.* Множина чисел з обмеженням на вживання символа у Q^*_∞-зображенні числа, визначеного двічі стохастичною матрицею// Міжнародна конференція “Геометрія і топологія в Одесі-2016”, 2 - 8 червня 2016 р.: Тези доповідей. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд “Наука”, 2016. – С. 45.

10[a]. *Markitan V.P.* Geometry of one infinitely symbolic representation of real numbers and metric problems associated with it // International Conference “Modern Advances in Geometry and Topology”: Book of abstracts. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. — P. 32.

11[a]. *Markitan V.P.* Q^*_∞ - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them // The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski 27 September - 1 October. – Lviv: Ivan Franko National University, 2016, — P. 33.

12[a]. *Маркітан В.П.* Фрактальні множини, пов'язані з марковським зображенням чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ: НаУКМА, 2017. – С. 44.

13[a]. *Markitan V.* Fractal properties of sets associated with Markov representation of real numbers difened by the double stochastic matrix // Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія і топологія в Одесі-2017" 2 - 8 червня 2017 р. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд "Наука", 2017. – С. 78.

14[a]. *Маркітан В., Савченко І.,* Суперфрактальність однієї множини, визначеної $\tilde{Q}$-зображенням чисел // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю народження академіка НАН України Ю.О. Митропольского (1917-2008). 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 43.

15[a]. *Markitan V.P., Savchenko I.O.* The distributions of random incomplete sums of a series with essential overlaps of cylindrical intervals // XII Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 10-23 липня 2017 р., с.Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл.: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 41 – 42.

16[a]. *Markitan V., Savchenko I.* Positive series whose partial sumsets are Cantorvals // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of STEFAN BANACH, 18-23 September 2017. Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University, 2017.– P. 66 – 67.

17[a]. *Маркітан В.П.* Сингулярна функція, пов'язана з марковським та двійковим зображенням дійсного числа // Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – К.: Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2018.– С. 48.

18[a]. *Маркітан В.П., Працьовитий М.В.* Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis" May 30 – June 4, 2018. Book of Abstracts. – Odesa: ONAHT, 2018. – P. 77 – 79.

19[a]. *Markitan V., Savchenko I.* Superfractality of an incomplete sums set of a certain positive series // The 13th Summer School "Analysis, Topology and Applications", July 29 – August 11, 2018, Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 32 – 34.

20[a]. *Markitan V., Savchenko I.* Cantorvals & incomplete sums of positive series // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28, 2018, Kyiv, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 28.

21[a]. *Markitan V.* Singular monotonic functions defined by a convergent positive series and a double stochastic matrix // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis" May 28 – June 3, 2019. Book of Abstracts. – Odesa: ONAHT, 2019. – P. 36 – 37.

22[a]. *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним додатним рядом і двічі стохастичною матрицею // Міжнародна конференція молодих математиків. 6-8 червня 2019 р., Київ, Україна. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2019. – С. 110.

23[a]. *Markitan V.* Self-similar singular function defined by double stochasctic matrices // The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications", August 10 – August 20, 2019, Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 23 – 25.