Національна академія наук України
Інститут математики

Маркітан Віта Петрівна

УДК 517.51

Стохастичні та двічі стохастичні матриці в задачах фрактального аналізу функцій

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, декан фізико-математичного факультету; Інститут математики НАН України, в.о. завідувача відділу динамічних систем та фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
Радченко Вадим Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету.

Захист відбудеться «15» вересня 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «10» серпня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних функцій, визначених у термінах різних систем кодування дійсних чисел із використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць.

Актуальність теми. Інтерес до локально складних неперервних функцій (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних тощо) має довготривалу і яскраву історію, яка пов'язана з іменами видатних науковців: К. Вейєрштрасс, Г. Мінковський, Е. Гелінґер, Г. Кантор, В. Серпінський, Р. Салем, С. Банах, С. Мазуркевич та ін. Сьогодні такі функції – це об'єкт підвищеної наукової уваги завдяки різним обставинам. Крім внутрішньої логіки розвитку математики увагу до них привертає те, що віднедавна вони все частіше з'являються в моделях реальних процесів і явищ. Але головним у ланцюзі аргументації є те, що з'явились нові потужні засоби для їхнього теоретичного аналізу. Це різні системи кодування дійсних чисел, зокрема такі, що ґрунтуються на використанні стохастичних та двічі стохастичних матриць, а також теорія фракталів (фрактальна геометрія і фрактальний аналіз) із ідеями самоафінності та автомодельності. Додатковим аргументом інтересу до певних класів локально складних функцій є фундаментальні результати щодо їхньої масивності у метричних і топологічних просторах. До таких належать: теорема Банаха-Мазуркевича (1931), яка твердить, що множина ніде не диференційовних функцій у просторі $C_{[0,1]}$ є множиною другої категорії Бера; теорема Замфіреску (1981), яка твердить, що сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій із супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера та ін.

Велика група київських математиків (Барановський О.М., Василенко Н.М., Гетьман Б.І., Гончаренко Я.В., Жихарєва Ю.І., Ісаєва Т.М., Кюрчев Д.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В., Торбін Г.М., Фещенко О.Ю., Хворостіна Ю.В. та ін.) розробляє нові систем кодування (зображення) дійсних чисел, які ґрунтуються на розкладах чисел у ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо. Такі системи використовують скінченносимвольний, зокрема двосимвольний, або нескінченний алфавіти, мають одну або кілька основ, мають нульову або ненульову надлишковість. У даній роботі ми використовуємо системи зображення дійсних чисел, які вони розробили: Q_∞^*-зображення, марковське зображення тощо.

Окремий клас локально складних функцій утворюють ті, множини значень яких є фракталами. Зокрема, до таких належать функції, множини значень яких збігаються зі множинами неповних сум абсолютно збіжних числових рядів. Тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів є відображенням відповідних властивостей функцій. Це один з основних аспектів у цьому дослідженні. Варто зазначити, що множина неповних сум ряду як об'єкт метричного простору $\mathbb{R}^1$ потенційно є лінійним фракталом або множиною зі фрактальними локальними властивостями. Це робить її об'єктом самостійного наукового розгляду. Множини неповних сум із погляду теорії ймовірностей (теорії розподілів випадкових величин і теорії випадкових процесів) виступають у ролі спектрів і носіїв розподілів (сингулярних, нетривіальних сумішей сингулярних і абсолютно неперервних). Множини неповних сум рядів у теорії нескінченних згорток Бернуллі (симетричних і несиметричних) також відіграють важливе значення. Впродовж майже сторічної історії розвитку теорії наразі відкритими є ряд складних ймовірнісних проблем, пов'язаних із їхньою лебегівською структурою, тополого-метричними і фрактальними властивостями носіїв (зокрема, суттєвих носіїв щільності) тощо. Вони не піддаються нині розв'язанню в загальній постановці, тому науковці їх розв'язують для окремих рядів або класів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводяться у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України й на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

— фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053);

— фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583);

— фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (№ державної реєстрації 0118U002059).

Об'єктом дослідження є локально складні функції зі фрактальними властивостями, визначені з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць.

Предметом дослідження є структурні, автомодельні, тополого-метричні та інші властивості функцій.

Мета дослідження полягає у моделюванні й дослідженні функцій і розподілів випадкових величин із неоднорідною локальною структурою і фрактальними властивостями з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць і різних систем кодування дійсних чисел, а також у здійсненні тополого-метричного аналізу множин, суттєвих для функцій і розподілів.

Основними *завданнями* дисертаційного *дослідження* є:

— сконструювати сім'ю W додатних нескінченних двічі стохастичних матриць, залежних від одного параметра;

— для Q^*_∞-зображень, що ґрунтуються на матрицях із W, дослідити тополого-метричні властивості спектра (множини точок росту) функції розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ із незалежними однаковими розподіленими символами τ_n її Q^*_∞-зображення за умови, що одна з координат стохастичного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, що задає розподіл, дорівнює 0;

— для двосимвольного марковського зображення дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею, вивчити фрактальні властивості множин із заборонами вживання деяких комбінацій цифр;

— вивчити властивості функцій, що є проекторами цифр:
а) двосимвольного марковського зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею, у класичне двійкове зображення;
б) нега-двійкового зображення в марковське зображення;

— для двох класів збіжних додатних рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з певними умовами однорідності вивчити властивості функції $f(x = \Delta^{Q^*_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k$ і розподілу випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k$;

— вивчити поведінку модуля характеристичної функції нескінченної згортки Бернуллі, керованої рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ з одного зі класів.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, метричної теорії чисел, фрактального аналізу і фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист.

— Сконструйовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і описано тополого-метричні властивості спектра функції розподілу неперервної випадкової величини, заданої Q^*_∞-зображенням чисел, яке визначається нескінченною двічі стохастичною матрицею.

— Досліджено фрактальні властивості множин чисел із заборонами вживання комбінацій символів у їхньому марковському зображенні, визначеному двічі стохастичною матрицею.

— Знайдено необхідні й достатні умови сингулярності функції, яка проектує цифри:

– марковського зображення у цифри класичного двійкового зображення;

– нега-двійкового зображення у цифри марковського зображення.

Для зазначеної щойно вище функції знайдено систему функціональних рівнянь, яка її однозначно визначає.

— Вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні і фрактальні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом із суперфрактальною множиною підсум; поведінку модуля її характеристичної функції на нескінченності; доведено критерій дискретності; вивчено фрактальні властивості автозгорток цієї нескінченної згортки Бернуллі.

— Описано тополого-метричні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої нормованим додатним рядом, визначеним двома зростаючими послідовностями натуральних чисел. Доведено, що її спектром є канторвал, міра Лебега якого в залежності від вибору параметрів може бути як завгодно близькою до 1.

Одержані результати є новими, строго і цілком обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати – це певний внесок у теорію функцій дійсної змінної, фрактального аналізу та фрактальної геометрії, теорії розподілів випадкових величин. Запропоновані у дисертації прийоми й методи можуть бути використані при дослідженні інших локально складних математичних об'єктів (множин, функцій, мір) зі фрактальними властивостями.

Особистий внесок здобувачки. Усі положення і результати, які виносяться на захист, належать авторці й отримані самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, Працьовитому М. В. належить загальна постановка задач, редагування і перевірка одержаних результатів. У роботі [2] Савченку І.О. й Виннишину Я.Ф. належать ідеї доведення лем 3.2 і 3.3. У роботі [3] Савченку І.О. належить ідея доведення теореми 4.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів і наукових семінарах, а саме:

— Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2016);
— XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз” (Одеса, 2016);
— Міжнародна конференція “Геометрія і топологія в Одесі-2016” (Одеса, 2016);
— International Conference “Modern Advances in Geometry and Topology” (Kharkiv, 2016);
— The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, 2016);
— Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2017);
— Міжнародна конференція “Геометрія і топологія в Одесі-2017” (Одеса, 2017)
— Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю народження академіка НАН України Ю.О. Митропольского (1917-2008) (Київ, 2017);
— XII Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз” (Колочава, 2017);
— International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of STEFAN BANACH (Lviv, 2017);
— Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2018);
— International scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis” (Odesa, 2018);
— The 13th Summer School “Analysis, Topology and Applications” (Vyzhnytsya, 2018);
— The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (Kyiv, 2018);
— Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2019);
— International scientific conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis” (Odesa, 2019);
— The 14th Summer School “Analysis, Topology, Algebra and Applications” (Pidzakharychi, 2019);
— семінар з фрактального аналізу, Інститут математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);
— семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ імені

Ігоря Сікорського (керівники: д-р фіз.-мат. наук, проф. О.І. Клесов, д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В. Іванов).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у чотирьох [1 – 4] статтях наукових видань, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук. Статті 2 і 3 опубліковані у виданнях, які входять до міжнародної наукометричної бази Scopus. Стаття 2 опублікована у виданні квартилю Q3. Додатково результати дослідження відображено в матеріалах конференцій [5 – 22].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел (102 найменування) і додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації – 144 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційного дослідження, вивчено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні наукові результати.

Розділ 1 «Концептуальні основи дослідження й огляд літератури» носить вступний характер. У ньому сформульовано означення стохастичних та двічі стохастичних матриць як центрального об'єкта дослідження.

Означення 1.1. *Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається стохастичною, якщо*

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ та } \sum_i p_{ij} = 1 \text{ або } \sum_j p_{ij} = 1,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2. *Матриця $P = ||p_{ij}||$ розміром $n \times n$ називається двічі стохастичною, якщо*

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_i p_{ij} = 1, \quad \sum_j p_{ij} = 1,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

У цьому розділі описано відоме нескінченносимвольне Q^*_∞-зображення дійсних чисел із $[0; 1)$, що є узагальненням Q_∞-зображення, яке є системою кодування чисел із нульовою надлишковістю (кожне число має єдине зображення). Описано його властивості, необхідні для подальшого конструювання й дослідження функцій. Тут також проведено огляд окремих двосимвольних систем числення.

Нехай $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – алфавіт системи числення, $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей; $Q_\infty^* = ||q_{ik}||$ – задана нескінченна додатна матриця, яка має властивості: 1) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik} = 1$; 2) для довільної послідовності чисел $(\alpha_n) \in L$: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_{\alpha_n n} = 0$.

Означення 1.3. *Розклад числа* $x \in [0; 1)$ *у ряд*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] \equiv \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk},\ \ i \in N, k \in N$ *називається* Q_∞^*-представленням*, а скорочений його запис* $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ *–* Q_∞^**-зображенням числа* x*, визначеного матрицею* Q_∞^**.* При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення.

У розділі описано ключові факти стосовно сингулярних функцій розподілу ймовірностей, випадкових величин окремих типів, а також висвітлено актуальні результати дослідження множин неповних сум числових рядів, яке продовжуватиметься в подальших розділах.

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... - \tag{2}$$

деякий числовий ряд, а M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (2), а кожен ряд виду $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n$ називається *підрядом* ряду (2).

Множину всіх неповних сум ряду (2) позначаємо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x : \ x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\} =$$

$$= \left\{ x: \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\},$$

і називаємо *множиною неповних сум (множиною підсум)* ряду (2).

У другому розділі «**Q^*_∞-зображення дійсних чисел, визначене двічі стохастичними матрицями, й функції, з ними пов'язані**» у підрозділі 2.1 означуються нескінченні двічі стохастичні матриці й доводиться континуальність сім'ї нескінченних двічі стохастичних матриць.

Означення 2.1. *Нескінченною двічі стохастичною* матрицею називають матрицю $||q_{ik}||$, елементи якої є невід'ємними, а сума елементів кожного рядка і кожного стовпця дорівнює 1, тобто водночас виконуються умови: $q_{ik} \geqslant 0$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik} = 1 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik}$.

Лема 2.2. *Якщо для матриці $||q_{ik}||$ виконуються умови:*

1. $q_{01} = b \in (0;1)$*;*
2. $b + q = 1$*;*
3. $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ *для всіх* $i \neq k-1$, $k \in N$*;*
4. $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ *для всіх* $i = k-1$, $k \in N$, *то вона є двічі стохастичною.*

У підрозділах 2.3 і 2.4 уточнюються результати для Q^*_∞-зображення дійсних чисел, які здобув Працьовитим М.В., для випадку, коли матриця є двічі стохастичною і визначається одним параметром.

У підрозділі 2.5. розглядається випадкова величина $\tau = \Delta^{Q^*_\infty}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$, задана своїм Q^*_∞-зображенням, визначеним нескінченною двічі стохастичною матрицею, залежною від одного параметра, де τ_n–незалежні однаково розподілені випадкові величини

$$P\{\tau_i = i\} = p_i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Теорема 2.1. *Якщо $p_c = 0$ і $p_j \neq 0$ при $j \neq c$, то спектром (множиною точок росту) функції розподілу $F_\tau(x) = P\{\tau < x\}$ є множина*

$$D_c \equiv [Q^*_\infty; \bar{c}] = \left\{ x : x = \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \quad \text{де} \quad \alpha_k \neq c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\},$$

яка є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Наслідок 2.1. *Для міри Лебега множини D_c $(c \neq 0)$ справедливо*

$$q^{2c+1} - (1 - q^c + q^{c+1})^2 q^{3c+1} < \lambda(D_c) < 1 + \frac{q^{3c+2} - q^c}{1+q} - \frac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}.$$

Розділ 3 «Фрактальні властивості множин і функцій, пов'язаних зі двійковими зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею» присвячений дослідженню марковського двосимвольного зображення дробової частини дійсного числа, визначеного двічі стохастичною матрицею; сингулярних функцій, пов'язаних із цим зображенням тощо. Нехай $A = \{0, 1\}$ – алфавіт системи числення; $q = (q_0, q_1)$ – упорядкований набір додатних чисел, причому $q_0 + q_1 = 1$; $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей алфавіту; $Q = ||q_{ik}||$ – додатна стохастична матриця. Формальний (скорочений) запис $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} \right) \equiv \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$$\text{де} \quad \beta_{\alpha_1} = \alpha_1 q_{1-\alpha_1}, \quad \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = (\alpha_{k+1}) q_{\alpha_k, 1-\alpha_{k+1}},$$

і його суми x називають *марковським зображенням* числа x, яке є його кодуванням засобами двосимвольного алфавіту A.

У підрозділі 3.1 для множин чисел із заборонами вживання символів у їхньому марковському зображенні, визначеному додатною двічі стохастичною матрицею $Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, доведено факти.

Теорема 3.1. *Множина*

$$C = \left\{ x : \quad x = \Delta^M_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}, \ c_{2k-1} c_{2k} \in \{00, 11\} \ \forall k \in \mathbb{N} \right\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $a^x(a^x + (1-a)^x) = 1$.

Теорема 3.2. *Множина*

$$D = \{ x : \quad x = \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}, \ c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1 \ \forall k \in \mathbb{N} \} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $(a(1-a)^2)^x + a^x = 1$.

У підрозділі 3.2. вводиться до розгляду функція G й досліджуються її властивості.

Означення 3.2. *Функція G означується рівністю:*

$$G(x) = G(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) := \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Вона числу $x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ із відрізка $[0; 1]$ (заданого своїм марковським зображенням) ставить у відповідність число з відрізка $[0; 1]$, двійкове *зображення якого записане тими самими символами* ($\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}$).

Теорема 3.4. *Функція $G(x)$ є неперервною, строго зростаючою;*

1. *кусково-лінійною, якщо* $q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$, *причому лінійною, якщо* $q_0 = q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$;
2. *сингулярною, в решті випадків.*

У підрозділі 3.3 вивчається сингулярна монотонна функція (проектор цифр нега-двійкового зображення дробової частини дійсного числа в марковське), яка визначається збіжним додатним рядом $1 = \frac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ і додатною двічі стохастичною матрицею $\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$:

$$F(x) = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{i=1}^{k-1}p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}), \qquad (3)$$

$$\text{де } \beta_{\alpha_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n-1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \beta^{(1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) \neq \alpha_{2n}(x) = 1, \\ p_{10}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) = \alpha_{2n}(x) = 1, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \beta^{(0)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n+1}(x) = 1, \\ p_{01}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = \alpha_{2n+1}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) \neq \alpha_{2n+1}(x) = 0, \end{cases}$$

і $\alpha_k(x)$ – це k-а нега-двійкова цифра зображення числа x.

Лема 3.2. *Для функції $F(x)$, означеної рівністю* (3), *образом циліндра $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ нега-двійкового зображення є відрізок $[a;b]$, де*

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right), \qquad b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Теорема 3.5. *Образи різних циліндрів одного рангу при відображенні F не перекриваються і в об'єднанні дають увесь відрізок* $[0, 1]$.

Теорема 3.6. *Функція $F(x)$, означена рівністю* (3), *є:*

1) *коректно означеною,*
2) *неперервною,*
3) *строго зростаючою,*
4) *причому лінійною при $p_{00} = 0,5$ і сингулярною при $p_{00} \neq 0,5$ (має похідну, яка дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Теорема 3.7. *Функція $y = F(x)$, означена рівністю (3), є функцією розподілу випадкової величини ξ, цифри ξ_k нега-двійкового зображення $\overline{\Delta}^2_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots\xi_n\ldots}$ якої є випадковими величинами, які набувають значень 0 й 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $\frac{1}{2}$ й $\frac{1}{2}$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.*

Теорема 3.8. *Функція $F(x)$, означена рівністю (3), задовольняє систему функціональних рівнянь:*

$$F(\delta_{ij}(x)) = \begin{cases} F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}p_{01}^2 - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{00}^2 + p_{00}^2F_0(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{01}^2 + p_{01}^2F_0(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00}^2 - \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + p_{00}p_{01}F_0(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x) = p_{01}^2F_1(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + p_{00}^2F_1(x), \\ \qquad \text{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}. \end{cases}$$

Розділ 4 «Множина неповних сум збіжного ряду як множина значень функції й носій розподілу випадкової величини» присвячений функціям і розподілам випадкових величин, пов'язаних із заданим збіжним додатним рядом $d_1 + d_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$ і визначеними нескінченними стохастичними матрицями, а саме:

1) множинам значень функції f, визначеної на відрізку $[0; 1]$ і означеної рівністю

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k, \tag{4}$$

2) спектрові розподілу випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k, \tag{5}$$

де (ξ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, причому ξ_k набуває значень 0 і 1 зі ймовірностями p_{0k} і p_{1k} відповідно.

Лема 4.1. Множиною значень функції (4) є множина неповних сум $E\{d_k\}$ ряду $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$.

Розглядається ряд:

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = \underbrace{c_1 + ... + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + ... + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1, \tag{6}$$

для якого виконується умова

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} \equiv b_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \,,$$

$$\text{де} \quad \widetilde{r}_n = \underbrace{c_{n+1} + ... + c_{n+1}}_{a_{n+1}} + \underbrace{c_{n+2} + ... + c_{n+2}}_{a_{n+2}} + ...,$$

причому (a_n) та (b_n) – неспадні послідовності натуральних чисел.

Теорема 4.1. *Загальний член ряду* (6) *має вигляд:* $c_n = b_n \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}$.

Наслідок 4.1. *Для членів і залишків ряду (6) справедливі співвідношення:*

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}; \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n(a_{n+1}+1)}, \quad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1} + 1}.$$

Теорема 4.3. *Множина неповних сум ряду*

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + ... + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{2^{n-1}} + \widetilde{r}_n, \tag{7}$$

для якого виконується умова $\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} = n+1 = \frac{d_m}{r_m}$, $m = 2^k - 1$, $k = 1, 2, 3, ...$, *є суперфрактальною множиною.*

У підрозділі 4.2 досліджено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної й сингулярної компонент) і властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої рядом (7).

Теорема 4.4. *Розподіл випадкової величини* (5), *визначеної рядом* (7), *є чистим, причому чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли* $M = \prod_{k=1}^{\infty} max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.

У випадку дискретності розподілу випадкової величини (5) *його точковий спектр складається з точки*

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* k_n, \quad \text{де} \quad p_{\alpha_k^* k} \geqslant p_{[1-\alpha_k^*]k},$$

і всіх таких точок x, *що*

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k d_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k^* d_k,$$

де $\alpha_k \in \{0,1\}$, $p_{\alpha_k k} \neq 0$ *при* $k \leqslant m$.

Лема 4.2. *Якщо* $p_{ik} > 0$ *для всіх* $i \in \{0,1\}$ *і всіх* $k \in \mathbb{N}$, *то спектром* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є множина* $E\{d_k\}$ *всіх неповних сум ряду* (7), *тобто* $S_\xi = E\{d_k\} \equiv \left\{x : x = \sum_{k \in M} d_k, \quad M \in 2^{\mathbb{N}}\right\}$.

Наслідок 4.2. *Для спектра* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *справедливе включення* $S_\xi \subset E\{d_k\}$.

Наслідок 4.3. *Спектр* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є суперфрактальною множиною.*

Теорема 4.5. *У випадку неперервності* ($M = 0$) *розподіл випадкової величини* ξ *є сингулярним розподілом канторівського типу із суперфрактальним спектром.*

У підрозділі 4.3 досліджено асимптотичні властивості характеристичної функції розподілу.

Теорема 4.6. *Для випадкової величини* ξ, *визначеної рядом* (7), *справедлива рівність* $L_\xi = \lim_{|t| \to \infty} \sup |f_\xi(t)| = 1$.

Підрозділ 4.4 присвячено дослідженню автозгорток нескінченної згортки Бернуллі.

Автозгорткою розподілу випадкової величини ξ називають розподіл випадкової величини $\psi_2 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, а *$s$–кратною згорткою розподілу випадкової величини* ξ — розподіл випадкової величини

$$\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)},$$

де $\xi^{(j)}$ — незалежні й однаково розподілені випадкові величини, розподіл кожної з яких збігається з розподілом ξ.

Лема 4.4. *Спектр S_{ψ_s} розподілу випадкової величини ψ_s є підмножиною відрізка $[0,s]$ і належить об'єднанню $\prod\limits_{k=0}^{n}(s\cdot 2^k+1)$ ізометричних відрізків довжини $s\widetilde{r}_n$, $n=1,2,3,\ \ldots$.*

Теорема 4.7. *У випадку неперервності ($M=0$) випадкової величини ξ розподіл випадкової величини ψ_s, для будь-якого натурального $s\geqslant 2$ є сингулярним розподілом канторівського типу з суперфрактальним спектром.*

Розділ 5 «Нескінченні згортки Бернуллі, спектри яких є канторвалами» присвячений дослідженню множини неповних сум, а саме: з'ясовується, якої найбільшої масивності (у розумінні міри Лебега) може досягати множина неповних сум додатного монотонного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, для якого виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_n}{r_n}=+\infty$. Основним результатом цього розділу є теорема

Теорема 5.4. Для довільного $\varepsilon>0$ існують послідовності (s_n), (m_n), і (a_n), такі, що виконуються наступні умови:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n=1$;
2. $\widetilde{r}_n=\dfrac{2a_n}{m_n}$ *для кожного* $n\in\mathbb{N}$, *де* $\widetilde{r}_n=\sum\limits_{k>n}(s_k+m_k)a_k$;
3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{d_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}d_{n+k}}=\infty$;
4. *множина $E\{d_n\}$ – це канторвал, міра Лебега якого більша, ніж $1-\varepsilon$.*

У цьому розділі вивчаються нескінченні згортки Бернуллі, керовані рядами, множинами неповних сум яких є канторвали.

ВИСНОВКИ

1. Сконструйовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і описано тополого-метричні властивості спектра функції розподілу однієї неперервної випадкової величини, заданої Q_∞^*-зображенням, визначеним матрицею із цієї сім'ї.
2. Досліджено фрактальні властивості множин чисел із заборонами вживання комбінацій символів у їхньому марковському зображенні, визначеному двічі стохастичною матрицею.
3. Знайдено необхідні й достатні умови сингулярності функції, яка проектує цифри:

– марковського зображення у цифри класичного двійкового зображення;

– нега-двійкового зображення у цифри марковського зображення.

Для зазначеної щойно вище функції знайдено систему функціональних рівнянь, яка її однозначно визначає.

4. Вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні і фрактальні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом із суперфрактальною множиною підсум; поведінку модуля її характеристичної функції на нескінченності; доведено критерій дискретності; вивчено фрактальні властивості автозгорток цієї нескінченної згортки Бернуллі.
5. Описано тополого-метричні властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої нормованим додатним рядом, визначеним двома зростаючими послідовностями натуральних чисел; доведено, що її спектром є канторвал, міра Лебега якого в залежності від вибору параметрів може бути як завгодно близькою до 1.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Маркітан В.П.* Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, №. 4. – С. 34 – 49.

[2] *Виннишин Я., Маркітан В., Працьовитий М., Савченко І.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – Вип. 12, № 2. – С. 26 – 42.

[3] *Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду // Укр. мат. журн. – 2018. – 70, № 10. – С. 1403 – 1416.

[4] *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним рядом і двічі стохастичною матрицею // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2019. – Т.16, №. 2. – С. 101 – 120.

[5] *Маркітан В.П.* Q^*_∞ - зображення, визначені двічі стохастичними матрицями, і їх застосування // П'ята Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і методики їх навчання": тези доповідей / НПУ імені М.П. Драгоманова. – Київ, 2016. – С. 35.

[6] *Markitan V.* Q^*_∞ - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them // Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі": матеріали конф. – Київ, 2016. – С. 53.

[7] *Markitan V.* Infinite double stochastic matrices and Q^*_∞-representation of real numbers generated by them // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1-14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2016. – С. 93.

[8] *Маркітан В.П.* Множина чисел з обмеженням на вживання символа у Q^*_∞-зображенні числа, визначеного двічі стохастичною матрицею// Міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі-2016", 2 - 8 червня 2016 р.: Тези доповідей. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд "Наука", 2016. – С. 45.

[9] *Markitan V.P.* Geometry of one infinitely symbolic representation of real numbers and metric problems associated with it // International Conference "Modern Advances in Geometry and Topology": Book of abstracts. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. — P. 32.

[10] *Markitan V.P.* Q^*_∞ - representation of real numbers determined by an infinite double stochastic matrices and sets associated with them // The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski 27 September - 1 October. – Lviv: Ivan Franko National University, 2016, — P. 33.

[11] *Маркітан В.П.* Фрактальні множини, пов'язані з марковським зображенням чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ: НаУКМА, 2017. – С. 44.

[12] *Markitan V.* Fractal properties of sets associated with Markov representation of real numbers difened by the double stochastic matrix // Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія і топологія в Одесі-2017" 2 - 8 червня 2017 р. – Одеса: ОНАХТ, Благодійний фонд "Наука", 2017. – С. 78.

[13] *Маркітан В., Савченко І.,* Суперфрактальність однієї множини, визначеної $\tilde{Q}$-зображенням чисел // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю народження академіка НАН України Ю.О. Митропольского (1917-2008). 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 43.

[14] *Markitan V.P., Savchenko I.O.* The distributions of random incomplete sums of a series with essential overlaps of cylindrical intervals // XII Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 10-23 липня 2017 р., с.Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл.: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 41 – 42.

[15] *Markitan V., Savchenko I.* Positive series whose partial sumsets are Cantorvals // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of STEFAN BANACH, 18-23 September 2017. Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University, 2017.– P. 66 – 67.

[16] *Маркітан В.П.* Сингулярна функція, пов'язана з марковським та двійковим зображенням дійсного числа // Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. – К.: Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2018.– С. 48.

[17] *Маркітан В.П., Працьовитий М.В.* Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis" May 30 – June 4, 2018. Book of Abstracts. – Odesa: ONAHT, 2018. – P. 77 – 79.

[18] *Markitan V., Savchenko I.* Superfractality of an incomplete sums set of a certain positive series // The 13th Summer School "Analysis, Topology and Applications", July 29 – August 11, 2018, Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 32 – 34.

[19] *Markitan V., Savchenko I.* Cantorvals & incomplete sums of positive series // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28, 2018, Kyiv, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 28.

[20] *Markitan V.* Singular monotonic functions defined by a convergent positive series and a double stochastic matrix // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis" May 28 – June 3, 2019. Book of Abstracts. – Odesa: ONAHT, 2019. – P. 36 – 37.

[21] *Маркітан В.П.* Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним додатним рядом і двічі стохастичною матрицею // Міжнародна конференція молодих математиків. 6-8 червня 2019 р., Київ, Україна. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2019. – С. 110.

[22] *Markitan V.* Self-similar singular function defined by double stochasctic matrices // The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications", August 10 – August 20, 2019, Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine. Book Of Abstracts. – P. 23 – 25.

АНОТАЦІЇ

Маркітан В.П. Стохастичні та двічі стохастичні матриці в задачах фрактального аналізу функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота виконана в галузі конструктивної теорії функцій та присвячена функціям і розподілам випадкових величин із неоднорідною локальною структурою і фрактальними властивостями з використанням стохастичних та двічі стохастичних матриць і різних систем кодування дійсних чисел, а також множинам, суттєвим для функцій і розподілів.

У роботі сконструйовано сім'ю додатних нескінченних двічі стохастичних матриць і описано тополого-метричні властивості спектра функції розподілу однієї неперервної випадкової величини, заданої Q^*_∞-зображенням, визначеним нескінченною двічі стохастичною матрицею. Досліджено фрактальні властивості множин чисел із заборонами вживання комбінацій символів у їхньому марковському зображенні, визначеному двічі стохастичною матрицею. Описано властивості функцій, які проектують цифри: марковського зображення у цифри класичного двійкового зображення; нега-двійкового зображення у цифри марковського зображення. Зокрема, знайдено необхідні і достатні умови їхньої сингулярності. Для останньої функції знайдено систему функціональних рівнянь, яка її однозначно визначає. Для класів збіжних додатних рядів із певними умовами однорідності вивчено властивості множин неповних сум і функцій розподілу на них; досліджено властивості нескінченних згорток Бернуллі, керованих рядами з вивчених класів, та їхніх характеристичних функцій.

Ключові слова: стохастичні матриці, скінченні й нескінченні двічі стохастичні матриці, Q^*_∞-зображення дійсного числа, марковське зображення дійсного числа, сингулярна функція, канторвал, множина неповних сум, фрактальні множини.

Маркитан В.П. Стохастические и дважды стохастические матрицы в задачах фрактального анализа функций. — Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ (111

— математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

В работе сконструировано семью положительных бесконечных дважды стохастических матриц и описано тополого-метрические свойства спектра функции распределения одной случайной величины, заданной Q_∞^* - изображением, определённым бесконечной дважды стохастической матрицей. Исследовано фрактальные свойства множеств чисел с запретами на употребление комбинаций символов в их марковском изображении, определённом дважды стохастической матрицей. Для функций, которые проектируют цифры: 1) марковского изображения в цифры классического двоичного изображения; 2) нега-двоичного изображения в цифры марковского изображения, найдены необходимые и достаточные условия их сингулярности. Для последней функции найдено систему функциональных уравнений, которая её однозначно определяет. Для классов сходящихся положительных рядов с определёнными условиями однородности изучены свойства множеств неполных сумм и функций распределения на них; исследованы свойства бесконечных свёрток Бернулли, управляемых рядами из изученных классов, в том числе их характеристических функций.

Ключевые слова: стохастические матрицы, конечные и бесконечные дважды стохастические матрицы, Q_∞^*-изображение действительного числа, марковское изображение действительного числа, сингулярная функция, канторвал, множество неполных сумм, фрактальные множества.

Markitan V.P. Stochastic and doubly stochastic matrices in the problems of fractal analysis of functions. — Manuscript.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is carried out in the field of constructive theory of functions. It is devoted to the study of functions and distributions of random variables with inhomogeneous local structure and fractal properties using stochastic and double stochastic matrices and different systems of encoding of real numbers, as well as sets which are essential for functions and distributions. Constructed in the work is a family of infinite positive doubly stochastic matrices. Described here are the topological and metric properties of the distribution function spectrum of one continuous random variable given by its Q_∞^*-representation defined by an infinite doubly stochastic matrix. Studied in the work are two functions that establish a relationship between the numbers of the segment $[0;1]$. The first function is given by the direct projection of the digits of the Markov representation determined by the doubly stochastic matrix into the digits of the classical binary representation. The second function is defined in a similar way as a projection of digits of a non-binary representation into the Markov one. Obtained here are the conditions of their continuity, monotony, and singularity. The system of functional equations, whose solution is the second function, is found. Established in the work is a zero-dimensionality (in the sense of Lebesgue measure) of Cantor-type sets defined by prohibitions of usage of certain symbols in the binary Markov representation of a fractional part of a real number determined by a doubly stochastic matrix. The Hausdorf-Bezikovych dimension of the mentioned sets is computed. Investigated here are functions having the form

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k$$

and the distribution of a random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k$$

defined for two classes of convergent positive series $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ with some homogeneity conditions; the behavior of the module of the characteristic function of the infinite Bernoulli convolution managed by the series $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ from one of the classes. Autoconvolutions of the specified infinite Bernoulli convolutions are considered. The properties of their distribution spectrum and the conditions for singularity of the distribution are studied. It is proved that one of the above classes consists of series whose sets of incomplete sums are cantorvals, and the Lebesgue measures of those cantorvals can be arbitrary close to 1.

Key words: stochastic matrices, finite and infinite doubly stochastic matrices, Q^*_∞-representation of a real number, Markov representation of a real number, singular function, cantorval, set of incomplete sums, fractal sets.

Підписано до друку 16.07.2020. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,25. Умовн. друк. арк. 1,16.
Тираж 100 пр. Зам. №29.

Інститут математики НАН України
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3