Відгук

офіційного опонента на дисертацію **Шпаківського Віталія Станіславовича**
“Моногенні функції в асоціативних алгебрах”, подану до захисту на здобуття
наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми дисертації. Нехай U – відкрита множина в $\mathbb{C}$. Похідна (комплексна) функції $f : U \to \mathbb{C}$ в точці z визначається як границя (якщо вона існує) $f'(z) := \lim\limits_{h\to 0, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Функція f називається голоморфною на відкритій множині, якщо похідна існує і неперервна в кожній точці множини, і добре відомо, що якщо означити так званий оператор Коші-Рімана $\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$, то неперервно диференційовна в дійсному сенсі функція f голоморфна тоді і тільки тоді, коли $\frac{\partial}{\partial\bar{z}} f(z) = 0$. У кватерніонному випадку подібно можна визначити похідну кватерніонної функції в точці q, як границю (якщо вона існує) $f'(q) := \lim\limits_{h\to 0, h\in\mathbb{H}} \frac{f(z+q)-f(z)}{q}$. Проте, при такому підході до означення голоморфності, це найбільш природне узагальнення голоморфності на кватерніонну область імплікує, що така голоморфність є можливою лише у випадку $f(q) = aq + b$, для деяких $a, b \in \mathbb{H}$, і тому, при такому на перший погляд природному узагальненні голоморфності отримуємо тривіальну “теорію” у кватерніонних областях. Однак Фуетер (1934, 1939) показав, що теорія аналітичних функцій від однієї комплексної змінної допускає поширення з певними застереженнями на кватерніонний випадок, якщо узагальнити оператор Коші-Рімана на кватерніонний випадок. Власне, ідея виявилася доволі продуктивною. З’ясувалося, що можна ввести два таких узагальнення, відомі як лівий та правий оператори Коші-Фуетера

$$\frac{\partial_l}{\partial\bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + I\frac{\partial}{\partial x_1} + J\frac{\partial}{\partial x_2} + K\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial_r}{\partial\bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}I + \frac{\partial}{\partial x_2}J + \frac{\partial}{\partial x_3}K,$$

де I, J, K – уявні “кватерніонні” одиниці у тому сенсі, що $I^2 = -1, J^2 = -1, K^2 = -1$, $q = x_0 + x_1 I + x_2 J + x_3 K$, і голоморфні функції на відкритих областях з $\mathbb{H}$ тоді визначаються як розв’язки операторних рівнянь $\frac{\partial_l f}{\partial\bar{q}} = 0$ (чи $\frac{\partial_r f}{\partial\bar{q}} = 0$). Це породжує дві цілком подібні теорії (лівих та правих регулярних функцій Коші-Фуетера). Теорія регулярних функцій Коші-Фуетера справді виявляється вже дуже багатою, але цілковитої відповідності з теорією аналітичних функцій нема. Наприклад, навіть прості поліноми не є регулярними у значенні Коші-Фуетера, або той факт, що в загальному нема звичайного розвинення в степеневі ряди в класі регулярних функцій в сенсі Коші-Фуетера, а, отже, є неможливою та частина теорії, яка, зокрема, базується на дослідженні властивостей регулярних функцій через дослідження властивостей степеневих рядів. І, отже, постає проблема побудови методів, які би допомогли (працювали) у цій ситуації. З іншого боку, саме тому робилися як давні, так і порiняно недавні (2006-2007) численні спроби усунути такі моменти через нові підходи до означення поняття голоморфності в $\mathbb{H}$. Зрештою, в другій половині XIX ст. у випадку комплексної площини і функцій від однієї змінної все відбувалося цілком подібно: досліджувалися різні визначення аналітичності, голоморфності, регулярності, - які були плідними при дослідженні тих чи інших внутрішніх проблем теорії. При цьому на початковому етапі швидше за все навіть не ставилося загальне питання про пошук ефективних зовнішніх застосувань теорії. Проте все завершилося, тепер загально визнаним, успіхом всієї цієї побудови. Спочатку, поява напрочуд сильних застосувань в гідродинаміці і поява в результаті цього дуже стрункої і потужної теорії потенціалу (плоских потенціальних полів), а потім (а чи можливо навіть всього кількома роками пізніше) до доведення того факту (через теореми Коші, Веєрштраса, Морери і Гурса), що в областях ці поняття виявляються рівносильними. При цьому у випадках порушення відкритості множини, на якій існує комплексна похідна виникає дуже актуальна, як для розвитку теорії, так і для застосувань, проблема опису в такому випадку класів функцій і множин, в яких є ця властивість (загальна проблема моногенності). Тому дослідження проблеми моногенності, яке проведене у дисертації в просторах функцій різної природи, є надзвичайно важливою і актуальною. З іншого боку, кватерніони є найбільш відомим ще зі середини XIX ст. прикладом некомутативної асоціативної алгебри. Тому природно постає актуальність розглянутих у дисертації подібних питань у загальному випадку не тільки некомутативних асоціативних алгебр, але й навіть у випадку функцій зі значеннями в загальних комутативних алгебрах. Хотілося би, звичайно, щоби було побудовано теорію гооформності в найбільш широкому класі відображень і просторів з максимальним збереженням переваг класичної теорії аналітичних функцій, або навіть повністю описати можливості, коли такі побудови є можливими, адже в алгебрі давно досліджуються структури, які породжують формальні абстрактні означення диференціювання, як таких відображень, що формально задовольняють основні правила диференціювання. Одначе у випадку голоморфності ця мета є дуже далекою. Тому, безумовно актуальною є задача пошуку у випадку відображень різних просторів адекватних підходів до цього питання. Справедливість вимагає відзначити, що ідея Фуетера є розвитком ідеї Колосова (1908), дуже глибоко просунутої у комплексному випадку в подальші роки його учнем Мусхелішвілі, про те, що при моделюванні проблем еластичності слід розглядати функції від однієї комплексної змінної (n-аналітичні), які є розв'язками операторного рівняння $\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0$ з n-тою ітерацією оператора Коші -Рімана. В результативності цих досліджень, одне з ключових місць є те, що нескладно вдається отримати зображення n-аналітичної функції f у вигляді суми $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)\overline{z}^k$, де $f_k(z)$ – аналітичні функції на $\mathbb{C}$, які визначаються однозначно. У цьому зв'язку розуміємо значну вагомість і актуальність отриманих у дисертації зображень моногенних функцій зі значеннями в асоціативних алгебрах, що в не останню чергу стало запорукою успішного дослідження у дисертації таких складних і загальних об'єктів.

Отже, теорія функцій в асоціативних алгебрах (як комутативних так і некомутативних), може дати ефективні методи дослідження задач математичної фізики, подібних до методів теорії аналітичних функцій від однієї комплексної змінної, за умови побудови адекватних кеонструкцій голоморфності. Тому, безумовно актуальною проблемою також є проблема побудови теорії функцій гіперкомплексної змінної в довільній комутативній асоціативній алгебрі, дослідження зв'язків цієї теорії з рівняннями з частинними похідними. В некомутативному гіперкомплексну аналізі актуальною є також проблема розробки методів конструктивної побудови ”диференційовних” функцій. У зв'язку з написаним вище, актуальність, проведених у дисертації В.С. Шпаківського досліджень складно заперечити.

Ступінь обґрунтованості наукових результатів, їх достовірність і новизна. Виклад матеріалу дисертації є добре структурованим, наявний логічний взаємозв'язок між окремими розділами роботи. Обраний стиль подачі матеріалу дав можливість автору розкрити суть проблеми, отримати відповідні результати, зробити висновки. Основні результати дослідження отримані за допомогою методів і ідей з комплексного аналізу, а також гіперкомплексного та функціонального аналізів. Результати дисертації науково обґрунтовані та достовірні, що засвідчується наявністю правильних доведень представлених у роботі тверджень. Висновки до дисертаційної роботи відповідним чином обґрунтовані та відображають авторське бачення вирішення наукових проблем, описаних мною вище в актуальності, на основі встановлених у дисертації зображень диференційовних функцій в асоціативних алгебрах через голоморфні функції від комплексних змінних. Основним науковим результатом дисертації є розвитом методів дослідження при побудові аналогів теорії аналітичних функцій в просторах функцій зі значеннями в комутативних і некомутативних алгебрах, в межах яких отримано наступні найбільш важливі результати.

У *другому розділі* дисертації розглядається довільна n-вимірна $(2 \leq n < \infty)$ комутативна асоціативна алгебра з одиницею, $\mathbb{A}_n^m$, над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Нехай $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \leq k \leq 2n$, — елементи алгебри $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Вивчаються моногенні (тобто, неперервні і диференційовні за Гато) функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta = \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, де $x_r \in \mathbb{R}$. Основним результатом цього розділу є конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ за допомогою голоморфних функцій від комплексної змінної. З отриманого конструктивного опису випливає, що похідна Гато довільного порядку від моногенної функції знову моногенна функція; в областях певного вигляду моногенна функція має сильну похідну (похідну Лорха). Для таких моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морери, інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла. Наслідком цього є теорема про еквівалентні означення моногенної функції. Доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла по негладкій поверхні для гіперголоморфних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$. Функція $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ називається гіперголоморфною в області Ω, якщо її дійснозначні компоненти є диференційовними в Ω і в кожній точці області Ω виконується умова: $\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0$. Аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла встановлено для замкнених (тобто, без краю) поверхонь, які мають скінченну площу Лебега та скінченну верхню площу Мінковського. Скінченну площу Лебега мають, наприклад, спрямлювані поверхні (тобто, які є ліпшицевими образами квадрата). Вони ж є прикладами поверхонь, які мають скінченну верхню площу Мінковського. У цьому розділі також для n-вимірної $(2 \leq n < \infty)$ комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}_n$ введено поняття розширення як сім'ї $(n+1)$-вимірних комутативних асоціативних алгебр з певними правилами множення та встановлено зв'язок між моногенними функціями в алгебрі $\mathbb{A}_n$ і моногенними функціями, визначеними на розширеннях алгебри $\mathbb{A}_n$. Далі цю техніку розширень застосовано до побудови розв'язків диференціального рівняння з частинними похідних. Зокрема, для довільного лінійного диференціального рівняння з частинними похідних зі сталими коефіцієнтами запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків. Зокрема, все це проілюстровано виписуванням таких сімей розв'язків для одного рівняння гідродинаміки, для тривимірного рівняння Лапласа, для рівняння поперечних коливань пружного стержня, для узагальненого бігармонічного рівняння та для двовимірного рівняння Гельмгольца.

У *третьому розділі* дисертації розглядаються моногенні функції зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, який є продовженням деякої нескінченновимірної комутативної асоціативної банахової алгебри $\mathbb{F}$, асоційованої з тривимірним рівнянням Лапласа.

Мотивацією для цього на думку автора є те, що в скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій, а якщо розглянути нескінченновимірні простори, то виявляється, що кожна гармонічна функція є деякою компонентою згаданих моногенних функцій. Далі розглядаються моногенні функції зі значеннями у комплексифікаціях $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ відповідно алгебри $\mathbb{F}$ та ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$.

У *четвертому розділі* дисертаційної роботи введено нові класи моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, так звані, право-G-моногенні відображення і ліво-G-моногенні відображення. Встановлено конструктивні описи усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого інтеграла і для криволінійного інтеграла від G-моногенного відображення, а також аналоги інтегральної формули Коші для цих відображень. Доведено також аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію особливостей цих відображень. Досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, встановлено їх зв'язок з G-моногенними відображеннями та доведено теорему про еквівалентність різних означень право-G-моногенних і ліво-G-моногенних відображень. Також вводиться новий клас кватерніонних функцій — функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Встановлюється співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Доведено, що на класі кватерніонних неперервно диференційовних в області Ω функцій $\mathcal{C}^1(\Omega)$ наступні множини функцій є підмножиною множини H–аналітичних в Ω функцій: множина ліво-диференційовних функцій (функцій вигляду $f(x) = a + xb$, $a, b \in \mathbb{C}$), множина F–гіперголоморфних функцій (гіперголоморфних функцій за Фуетером, множина гіперголоморфних функцій за Мойсіла–Теодореско, множина s–регулярних функцій (функцій, що подаються у вигляді збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$).

Теоретична цінність і практична значущість наукових результатів. Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням і її результати можуть знайти застосування в тих розділах математики (насамперед математичного аналізу і диференціальних рівнянь), в яких традиційно знаходять застосування результати теорії функцій. Результати дисертаційної роботи становлять вагомий внесок в розвиток аналогів теорії голоморфних функцій в асоціативних алгебрах. Отримані теоретичні результати можуть знайти застосування, як у подальших дослідженнях в зазначеному колі питань, так і з огляду на відому аналогію з теорією аналітичних функцій можуть виявитися дуже корисними при побудові нових моделей реальних явищ в макро- і мікросвіті. Класи диференційних рівнянь, які при цьому можна аналізувати за допомогою методів теорії, що будується, можуть надати досліднику нові додаткові ефективні інструменти при такому моделюванні. Результати дисертаційної роботи можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а також у наукових дослідженнях в наступних наукових і навчальних закладах, в яких проводяться дослідження з математичного аналізу в широкому розумінні цього слова: Київському, Харківському, Одеському, Дніпропетровському, Чернівецькому та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Фізико-технічному інституті низьких температур (м.Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м.Слов'янськ), НПУ ім.М.П.Драгоманова, Дрогобицькому ДПУ ім. І.Франка та ДВНЗ "Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника".

Повнота викладення наукових результатів дисертації в опублікованих працях. Наукові результати і висновки, які виносяться на захист, отримано автором особисто та з достатньою повнотою викладено в наукових публікаціях. Результати дисертації опубліковано у 30 друкованих наукових працях, з яких: 21 стаття статей у наукових фахових виданнях, з них 10 - у зарубіжних виданнях і виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection, 9 публікацій - за матеріалами конференцій. Обсяг наукових праць та їхня кількість відповідають вимогам щодо публікацій основного змісту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора наук. Наведені в авторефераті публікації відображають основний зміст дисертації та отримані автором наукові результати.

Відповідність дисертації встановленим вимогам. Дисертація містить вступ, чотири розділи, висновки, список використаних джерел і додатки. Робота виконана в науковому стилі, її зміст викладено в чіткій логічній послідовності. Текст автореферату адекватно відображає і в повній мірі розкриває зміст дисертації і забезпечує ідентичність основних результатів і висновків роботи.

4. Зауваження. Відзначаючи загальний високий рівень обґрунтованості результатів дисертаційної роботи, її цілісність та логіку викладу матеріалів, разом з тим можна зробити декілька зауважень і звернути увагу на окремі дискусійні положення дисертаційної роботи.

1) Доведення у багатьох місцях є занадто конспективними, що зважаючи на велику кількість отриманих в дисертації результатів і не дивно – інакше важко їх помістити в розумний за величиною текст. В цілому це створює при прочитанні відчуття перевантаженості і перенасиченості. З іншого боку, це вказує на відому грунтоовність і фундаментальність проведеного дослідження.

2) Потребує уточнення формулювання першого твердження теореми 2.2.11, а саме: $\mathbb{R}$-диференційовність компонент U_k розкладу (2.34) і виконання аналогів умов Коші–Рімана (2.6) є необхідними і достатніми умовами моногенності функції Φ за додаткового припущення, що $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Принаймні, необхідність $\mathbb{R}$-диференційовності компонент U_k доведено в дисертації на с. 89–90 з використанням зображення (2.25) саме за такого додаткового припущення.

3) Дисертація перевантажена окремими дослідженнями різноманітних (хоча і дуже важливих, але на сторонній погляд відокремлених одне від одного), як понять голоморфності, так і просторів, на яких вони вводяться. А дослідження подібності властивостей цих об'єктів до властивостей просторів аналітичних функцій завершується з доведенням на думку автора аналогів основних теорем цієї теорії: різних теорем Коші та Морери. Разом з цим багатовимірна теорія лишків у випадку аналітичних функцій багатьох комплексних змінних, є справжньою перлиною досліджень природи аналітичності у цьому випадку і, звичайно ж є тісно зв'язана зі згаданими теоремами, але не тотожна до них. Тому напрошується запитання, чому ж автор дисертації зупиняв свої дослідження на початку великої дороги? Мені видається, що поглиблення досліджень введених понять голоморфності хоча би в одному з розглянутих у дисертації випадків, могли би привести до поліпшення розуміння природи голоморфності як в цих доволі абстрактних випадках, так і в цілому. Наприклад, у випадку нескінченновимірної голоморфності в банахових просторах в сенсі похідної Гато протягом другої половини XX ст і вже у цьому ст. проведено надзвичайно багаті за результатами і дуже глибокі дослідження, зокрема, однорідних поліномів.

4) В авторефераті на початку його підрозділу "Основний зміст роботи" автор відгуку в

означенні алгебри $\mathbb{A}_n^m$ не знайшов, звідки і як саме виникає стала $m \in \mathbb{N}$.

5) На с.46 в Означенні 4.3.6 пропущено слово "формальний".

6) Перший і другий абзац на с. 64 написано незрозуміло, бо акуратно не сказано, що ж у цьому випадку розуміємо під диференціалом.

7) У дисертації дуже мало уваги (практично майже нічого) приділено уваги голоморфності в скінченновимірних комплексних векторних просторах (в $\mathbb{C}^n$). Хоча перші спроби побудови теорії голоморфності, як в $\mathbb{C}^n$, так і на кватерніонах та гіперкомплексних числах робилися у другій половині XIX ст. практично одночасно з просуванням і поглибленням теорії аналітичних функцій від однієї комплексної змінної. Щоправда навіть в $\mathbb{C}^n$ зі значно меншою результативністю. В цьому останньому випадку істотні здобутки теорії починаються з 20-их років вже XX ст. І аналіз історичного шляху появи різноманітних, зокрема, тополого-алгебраїчних методів дослідження, могли би виявитися корисними у дисертаційному дослідженні.

8) Описки. У дисертаційній роботі є ряд стилістичних і граматичних помилок, зустрічається неправильне вживання відмінків та граматичних форм. Проте з контексту завжди зрозуміло про що йдеться і зміст при цьому не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей. Вкажемо лише на те, що "... належить до множини ...", а не "... належить множині ..." (як у дисертації). Власне, прийняте у дисертації написання, звучить настільки ж дивно, як і звучала би фраза: дисертація належить до "пера" п. В.Шпаківського, замість належить "перу" п. В.Шпаківського! Замість "... має місце..." слід писати, наприклад, "... виконується ..." і т.п.

Проте зазначені зауваження не носять принципового характеру та не знижують загальної цінності результатів, винесених здобувачем на захист і загальної високої оцінки дисертаційної роботи.

Загальний висновок. Дисертаційна робота Шпаківського В.С. "Моногенні функції в асоціативних алгебрах" є завершеною кваліфікаційною науковою працею, яка присвячена дослідженню актуальної наукової проблеми розвитку теорії функцій гіперкомплексної змінної у скінченновимірних асоціативних алгебраха, яка є глибоким узагальненням теорії аналітичних функцій від комплексної змінної, у контексті дослідження моногенних функцій у просторах вказаних типів, а також аналогів класичних теорем. Подана до захисту дисертація задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями), а її автор, **Шпаківський Віталій Станіславович**, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теорії функцій
і функціонального аналізу Львівського
національного університету
імені Івана Франка О. Б. Скасків

31. 08. 2020 р.

Підпис Скасків О.Б.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ЄДРПОУ 02070987

Надійшов 3 вересня 2020р.