Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Шпаківського Віталія Станіславовича

"Моногенні функції в асоціативних алгебрах",

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико–математичних наук за спеціальністю

01.01.01 — математичний аналіз, 111 — математика

Актуальність теми дисертації. Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії функцій гіперкомплексної змінної в скінченновимірних алгебрах (комутативних і некомутативних) та в нескінченновимірних просторах з комутативним множенням.

Ця тематика бере свій початок з робіт видатних математиків: У. Гамільтона, А. Келі, В. Кліффорда, К. Вейєрштрасса, А. Пуанкаре, Р. Дедекінда. Ряд важливих задач, що стосуються будови та класифікації алгебр були розв'язані в кінці XIX ст. в роботах Ф. Моліна, Г. Шефферса, Е. Штуді, Е. Картана.

Наступним природнім етапом, до якого перейшли математики в XX ст., стало бажання побудувати узагальнення теорії функцій комплексної змінної на багатовимірні гіперкомплексні простори. Але дуже швидко стало зрозуміло, що класи в певному сенсі аналітичних функцій в алгебрах у значній мірі залежать від структури алгебр. Тому, починаючи з 30-х років XX ст., комутативний і некомутативний гіперкомплексний аналіз розвивалися практично неперетинними шляхами. Важливі результати в некомутативному гіперкомплексному аналізі отримали Ф. Хаусдорф, Г. Мойсіл і Н. Теодореско, Р. Фуетер, К. Гюрлебек і В. Шпрьоссіг, А. Садбері, В. Кравченко і М. Шапіро, Г. Льойтвілер, Д. Струппа, Ф. Коломбо і І. Сабадіні та ін. Істотне просування в комутативному гіперкомплексному аналізі пов'язано з роботами П. Кетчума, Ф. Рінглеба, Дж. Ворда, Е. Лорха, Е. Блюма, М. Рошкулєца, І.П. Мельниченка, В.Ф. Ковальова, С.А. Плакси та ін.

Сьогодні гіперкомплексний аналіз є самостійним, потужним напрямком в математиці, який має свої спеціалізовані журнали, власні наукові товариства та регулярні міжнародні наукові конференції. Спектр сучасних задач надзвичайно широкий: від суто теоретичних проблем гіперкомплексного аналізу до його застосувань у прикладних дослідженнях. Розглядаються конкретні алгебри (переважно некомутативні) різної розмірності, визначаються різні класи диференційовних функцій, для яких доводяться аналоги деяких класичних теорем комплексного аналізу.

В дисертації розв'язується природньо важлива задача — побудувати теорію диференційовних функцій, заданих в підпросторах довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри (це зроблено дисертантом у розділі 2). З огляду на застосування вибір таких підпросторів обумовлюється тим, що компоненти вказаних диференційовних функцій мають задовольняти відповідні рівняння з частинними похідними. У наступних розділах методи, розвинені у розділі 2, використовуються до дослідження диференційовних функцій у нескінченновимірних просторах з комутативним множенням, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа, та в некомутативних алгебрах. Отже, тематика роботи є **актуальною**. Робота виконана в Інституті математики НАН України в рамках наукових тем № 0116U003060 і № 0117U004077.

Основні результати дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 214 найменувань, та додатку. Повний обсяг роботи становить 357 сторінок друкованого тексту.

У **розділі 1** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Зупинимось детальніше на основних результатах дисертації.

У **розділі 2** дисертації розглядається довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, яка позначається $\mathbb{A}_n^m$, тут $2 \leq n < \infty$, m – кількість ідемпотентів в базисі Картана цієї алгебри. Вивчаються моногенні (тобто неперервні і диференційовні за Гато) функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$. Основним результатом розділу є представлення моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної (теорема 2.1.3). Таке представлення названо конструктивним описом моногенних функцій. Відзначу, що раніше подібні описи були відомі переважно в алгебрах розмірності 2, причому доводилися багаторазово різними авторами, починаючи з 30-х років минулого століття. В останнє десятиріччя в роботах С.А. Плакси і його учнів В.С. Шпаківського та Р.П. Пухтаєвича отримано опис моногенних функцій зі значеннями у тривимірних гармонічних (тобто асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа) алгебрах і двох n-вимірних алгебрах. Дисертант узагальнив ці результати на випадок довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, причому отриманий в теоремі 2.1.3 конструктивний опис моногенних функцій є нетривіальним як за формою, так і за методом доведення.

З отриманого конструктивного опису випливає кілька принципових результатів. Насамперед, похідна Гато довільного порядку від моногенної функції знову є моногенною функцією (теорема 2.1.5); моногенна функція має сильну похідну, зокрема, похідну Лорха (зауваження 2.1.2). Крім того, для моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла (теорема 2.2.2), теореми Морера (теорема 2.2.3), інтегральної формули Коші (теорема 2.2.4). Наслідком цих результатів є теорема про еквівалентні означення моногенної функції (теорема 2.2.11).

Доведено також аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла від гіперголоморфних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ (теорема 2.3.2). Функція $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ називається гіперголоморфною в області Ω, якщо її дійснозначні компоненти є диференційовними в Ω і Ψ задовольняє рівняння Дірака $\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0$ в області Ω, де e_1, e_2, e_3 — лінійно незалежні елементи алгебри $\mathbb{A}_n^m$. Теорему 2.3.2 доведено у випадку замкненої (тобто без краю) поверхні, яка має скінченну площу Лебега та скінченну верхню площу Мінковського. В дисертації наведено приклади відомих класів поверхонь, які мають скінченні площу Лебега та верхню площу Мінковського. Слід зазначити, що переважна більшість відомих аналогів теореми Коші для поверхневого інтеграла доведена у конкретних алгебрах за додаткової умови про неперервність частинних похідних першого порядку у функції Ψ (досить згадати роботи М. Рошкулеця, В. Кравченка і М. Шапіро, Р. Абреу Блайя і Х. Борі Рейєса). У такому випадку аналоги теореми Коші є простими наслідками аналогів умов Коші–Рімана і теореми Остроградського–Гауса.

У підрозділі 2.6, спираючись на конструктивний опис моногенних функцій і властивості розширень спеціального класу комутативних алгебр (теореми 2.5.5 та 2.5.6), запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків для довільного лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Наведено ряд прикладів таких сімей розв'язків для рівнянь математичної фізики.

У **розділі 3** дисертації розглядаються моногенні функції, які пов'язані з тривимірним рівнянням Лапласа. Для цього розглядаються топологічний векторний простір $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, який містить нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, що є ізоморфною алгебрі комплекснозначних тригонометричних рядів Фур'є. Раніше С. А. Плакса показав, що кожна гармонічна функція є першою компонентою деякої моногенної функції у просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$. Відзначу, що апарат рядів Фур'є використовується як "робочий інструмент" для отримання розкладів моногенних функцій за базисом алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, що дозволило в теоремі 3.2.1 дисертації побудувати просторові гармонічні функції в явному вигляді у формі головних продовжень голоморфних функцій комплексної змінної в алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Основною заслугою дисертанта є встановлення аналогів основних інтегральних теорем комплексного аналізу (теорема і формула Коші, теорема Морера, розклад в ряди тощо). Це зроблено в теоремах 3.2.2 – 3.2.6 для функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, в теоремах 3.2.7, 3.2.12, 3.2.13 для функцій зі значеннями в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$.

У **розділі 4** дисертаційної роботи введено класи право-G-моногенних відображень і ліво-G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Встановлено конструктивні описи таких відображень за допомогою чотирьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної (теореми 4.1.9 та 4.1.10). Для вказаних відображень доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів, а також аналоги інтегральної формули Коші (теореми 4.2.2, 4.2.6 та 4.2.10), аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана та здійснено класифікацію особливостей цих відображень (теореми 4.2.8, 4.2.12 та 4.2.15). Результати підрозділів 4.1 — 4.3 є узагальненнями відомих робіт М. Шапіро, Ф. Коломбо, І. Сабадіні, А. Ваяц і М. Ваяц, Дж. Кумара, Д. Рохона та багатьох інших.

У підрозділі 4.4 В.С. Шпаківським введено клас кватерніонних функцій, аналітичних в сенсі Хаусдорфа. Показано, що на класі кватерніонних неперервно диференційовних функцій множина аналітичних за Хаусдорфом функцій містить в собі як підмножини чотири відомі класи кватерніонних диференційовних функцій (теореми 4.4.6 — 4.4.8).

У підрозділі 4.5 вивчаються ліво-A_t-гіперголоморфні (такі, що належать ядру оператора Дірака) функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона. Основним результатом для таких функцій є алгоритм їх конструювання (теорема 4.5.9). Для доведення цього результату спочатку оригінально з використанням алгоритму Бейлса була розв'язана важлива алгебраїчна задача — описати правила множення певних базисних векторів у довільній узагальненій алгебрі Келі–Діксона. Теорема 4.5.9 є узагальненням на алгебри більших розмірностей результатів Р. Фуетера, Ксінг Лі, Жао Каі, Лі Пенга, Су Лі, Кванг Шо. Розроблені при цьому методи застосовано до розв'язання алгебраїчних рівнянь в алгебрах узагальнених кватерніонів та октоніонів (теореми 4.6.2 та 4.6.5).

Наукова новизна і ступінь обгрунтованості результатів. Дисертація В. С. Шпаківського "Моногенні функції в асоціативних алгебрах" є завершеною науковою працею, яка містить важливі результати теоретичного характеру. Одержані результати й розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, у комплексному та гіперкомплексному аналізі, а також у прикладних дисциплінах, в яких застосовуються методи комплексного аналізу. Результати дисертаційної роботи є новими і строго математично обгрунтованими.

Повнота викладу результатів в опублікованих працях та апробація. Результати дисертації представлені в 21-й науковій публікації автора у виданнях, включених до "Переліку наукових фахових видань України". З них 11 опубліковано у співавторстві, а 10 — одноосібні, також 10 робіт індексуються в наукометричній базі Scopus.

Дисертація пройшла гарну апробацію. Результати, включені в дисертаційну роботу, доповідались на багатьох престижних міжнародних конференціях, зокрема, в Польщі, Німеччині, Росії, Швеції, Португалії, Румунії тощо, а також на багатьох семінарах у провідних наукових центрах України. Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Зауваження.

1. Перше речення в теоремі 2.2.11 містить неточність. Відповідне твердження є вірним за додаткової умови, що $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, що ця неточність зумовлена неуважністю автора, оскільки доведення цього твердження дано у тексті дисертації раніше у Зауваженні 2.1.1.

2. При доведенні леми 2.1.4 було б доцільно зробити рисунок.

3. Посилання на формулу (1) відсутні в тесті дисертації.

4. На с. 127 замість посилання на формулу (2.215) треба послатися на формулу (2.109).

5. Для ілюстрації теорем 4.6.4 і 4.6.5 було б добре навести приклади відповідних поліноміальних рівнянь.

6. Робота містить ряд граматичних помилок. Наприклад:

а) на с. 35 у 11-у рядку замість "виконуються наступні умови" має бути "виконується наступна умова";

б) на с. 37 у першому рядку замість "моногенних функцій" має бути "моногенними функціями";

в) на с. 109 у третьому рядку доведення теореми 2.2.7 пропущено "так," після слова "доводиться";

г) на с. 116 у останньому рядку замість "належать" має бути "належить";

д) на с. 135 у 10-у рядку знизу замість "у всьому" має бути "в усьому";

е) на с. 177 після формули (2.221) замість "Позначаючи ..., очевидно ..." має бути "Після позначення ... стає очевидно ...";

є) на с. 204 у формулюванні теореми 3.2.4 замість "тоді" має бути "то";

ж) на с. 281 у рядку після формули (4.123) кома є зайвою.

Висновки. Вказані зауваження не впливають на обґрунтованість і достовірність результатів і не зменшують загальної високої оцінки дисертаційної роботи.

Вважаю, що дисертаційна робота *"Моногенні функції в асоціативних алгебрах"* відповідає усім вимогам пп. 9, 11 – 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 щодо докторських дисертацій, а її автор, *Шпаківський Віталій Станіславович*, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського" П.В. Задерей

Вчений секретар Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського",
кандидат технічних наук, доцент В.В. Холявко