ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Шпаківського Віталія Станіславовича

"Моногенні функції в асоціативних алгебрах",

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.01 – математичний аналіз, 111 – математика

Добре відомо, що розвиток теорії аналітичних функцій комплексної змінної та конформних відображень дав можливість створити ефективні методи розв'язання багатьох актуальних проблем, тісно пов'язаних з потенціалами *плоских векторних полів*, що виникають в гідро- та аеромеханіці, електростатиці, теорії магнітних і теплових полів, теорії пружності та в інших прикладних напрямках природознавства. У зв'язку з цим є природним бажання перейти до дослідження *просторових векторних полів* за аналогічною схемою. Проте, на цьому шляху виникають значні проблеми. По-перше, згідно з класичною теоремою Ліувілля, множина конформних відображень в просторі $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ є надзвичайно бідною і зводиться лише до мебіусових відображень. З іншого боку, пошуки в просторі належної алгебри так званих "гіперкомплексних чисел" з метою побудови відповідної теорії "аналітичних" функцій виявились обмеженими внаслідок відомої теореми Фробеніуса. У зв'язку з цим, в двадцятому столітті центр уваги змістився в бік бурхливого розвитку теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в $\mathbb{R}^n$, а в галузі сучасної теорії функцій – до розвитку теорії квазіконформних і більш загальних відображень. Незважаючи на видатні досягнення в області PDE, питання розвитку комутативного і некомутативного гіперкомплексного аналізу продовжує знаходитись в центрі уваги крупних математичних шкіл США, Японії, Фінляндії, Німеччини, Італії, України, Росії та інших країн. Важливі результати в різних напрямках некомутативного гіперкомплексного аналізу отримали Ф. Хаусдорф, Г.Мойсіл, Н.Теодореско, Р. Фуетер, Г. Льойтвілер, В. Кравченко, М. Шапіро, К. Гюрлебек, В.Шпрьоссіг, Дж. Раян, С. Бернштейн, Ф. Коломбо, І. Сабадіні, Д. Струппа та інші. Разом з некомутативним аналізом у багатовимірних просторах розроблялися також методи, що базуються на відображеннях в комутативних алгебрах. Так, наприклад, в роботах П.Кетчума, Ф. Рінглеба, Д. Вагнера, Дж. Ворда, Е. Лорха, Е. Блюма, М. Рошкулєца, К.Кунца, І.П. Мельниченка, В.Ф. Ковальова, С.А. Плакси та інших розвинено теорію аналітичних функцій в таких алгебрах і застосовано такі функції для побудови розв'язків деяких диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Дисертаційна робота Шпаківського Віталія Станіславовича "Моногенні функції в асоціативних алгебрах", відноситься до відзначеного вище напрямку і її **актуальність** не викликає сумнівів як з точки зору досліджених у роботі фундаментальних проблем сучасної теорії функцій і відображень, так і з точки зору можливих застосувань. Відзначу також, що дисертація виконана в рамках наукових тем № 0116U003060 і № 0117U004077, які розробляються в Інституті математики НАН України.

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку цитованої літератури та додатка і написана на 357 сторінках.

Основна мета роботи: Дисертаційна робота присвячена конструктивному опису неперервних і диференційовних за Гато функцій, заданих в спеціальних підпросторах скінченновимірних асоціативних (комутативних чи не комутативних) алгебр та в нескінченновимірних просторах з комутативним множенням, в термінах голоморфних функцій комплексної змінної та розвитку на цій основі теорії функцій гіперкомплексні змінної. Більш точно, незалежно від визначеного класу моногенних функцій і незалежно від алгебри, в якій розглядаються функції, досліджено такі важливі проблеми: дано опис в явному вигляді всіх визначених класів моногенних функцій; доведено аналоги класичних інтегральних теорем комплексного аналізу для визначеного класу моногенних функцій; дано застосування визначених класів моногенних функцій, зокрема, до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Перейдемо до стислої характеристики основних результатів дисертації.

В розділі 2, маючи на меті доведення для гіперкомплексних диференційовних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем комплексних чисел аналогів класичних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної, знайдено просту характеризацію вказаних підпросторів E_k в термінах мультиплікативних функціоналів: $f(E_k)=\mathbb{C}$ для всіх неперервних мультиплікативних функціоналів, визначених на алгебрі. Основний результат розділу 2 – теорема 2.1.3, в якій отримано представлення моногенних (тобто неперервних і диференційованих за Гато) функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем комплексних чисел за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної:

$$\Phi(\varsigma)=\sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\varsigma)^{-1}dt+\sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\varsigma)^{-1}dt\,, \qquad (1)$$

де ідемпотенти $I_u, u=1,2,...,m,$ і нільпотенти $I_s, s=m+1, m+2,...,n,$ утворюють базис Картана алгебри, F_u і G_s – голоморфні у відповідних областях функції, контури інтегрування Γ_u і Γ_{u_s} вибрано належним чином. Ця теорема підсумовує дослідження багатьох авторів (G. Scorza Dragoni (1934), J. Vignaux, Y. Duranona, A. Vedia (1935), J.Riley (1953), І.М. Яглом (1963), В.Ф. Ковальов (1986), С.А. Плакса, С.В. Грищук, В.С.Шпаківський, Р.П. Пухтаєвич (2009 – 2014) та ін.), що беруть початок від результату F.Ringleb (1933) для аналітичних функцій бікомплексної змінної, і узагальнює усі попередні результати про представлення гіперкомплексних аналітичних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних алгебрах над полем комплексних чисел. Спираючись на теорему 2.1.3, дисертант доводить нескінченну диференційовність за Гато моногенних функцій, тобто похідні Гато усіх порядків є також моногенними функціями (теорема 2.1.5), аналог інтегральної формули Коші для моногенних функцій (теорема 2.2.4) і теорему 2.2.11 про еквівалентні означення моногенної функції, яка є цілком відповідною до класичної теореми теорії функцій комплексної змінної. Варто відзначити застосування представлення (1) у випадку модельної тривимірної комутативної алгебри до обчислення логарифмічного лишку моногенної функції в теоремі 2.1.6 (перший крок до розв'язання крайової задачі Рімана для моногенних функцій), та до встановлення в теоремі 2.4.3 ізоморфізму між алгебрами моногенних функцій в підпросторах, побудованих на різних базисах (що є певним аналогом ізоморфізму алгебр аналітичних функцій в конформно еквівалентних областях комплексної площини).

З використанням представлення (1) і моногенних функцій зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу, в підрозділі 2.6 дисертантом розроблено повністю оригінальний підхід до побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Наведено приклади побудови таких розв'язків для одного рівняння гідродинаміки, для тривимірного рівняння Лапласа, для рівняння поперечних коливань пружного стержня, для узагальненого бігармонічного рівняння, для двовимірного рівняння Гельмгольца і деяких інших рівнянь.

Доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла (теорема 2.3.2):

$$\int_{\partial\Omega} \Psi(\varsigma)(dydze_1 + dzdxe_2 + dxdye_3) = 0, \qquad \varsigma = xe_1 + ye_2 + ze_3, \tag{2}$$

де $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис підпростору E_3 скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри, в замиканні області Ω якого задана неперервна функція Ψ, гіперголоморфна в Ω, тобто Ψ задовольняє рівняння Дірака

$$\frac{\partial\Psi(\varsigma)}{\partial x}e_1 + \frac{\partial\Psi(\varsigma)}{\partial y}e_2 + \frac{\partial\Psi(\varsigma)}{\partial z}e_3 = 0, \qquad \varsigma = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega.$$

Слід відзначити, що зазвичай у гіперкомплексному аналізі рівність вигляду (2) доводять, спираючись на узагальнення теореми Остроградського–Гауса, за додаткової умови про неперервність частинних похідних функції Ψ, яка, як це добре відомо, є зайвим припущенням для аналітичних функцій комплексної змінної. В дисертаційній роботі для гіперголомофних функцій це зайве припущення знято і описано широкий клас поверхонь $\partial\Omega$ (що містить не кусково-гладкі поверхні), для яких виконується рівність (2). Показано, що цьому класу належать поверхні, які розглядаються в ряді суміжних задач математичного аналізу. Зауважу, що у випадку

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,, \tag{3}$$

коли моногенні функції задовольняють тривимірне рівняння Лапласа, множина моногенних функцій є підмножиною множини гіперголоморфних функцій, а в загальному випадку ці множини мають непорожній перетин.

У розділі 3 встановлюються основні властивості моногенних функцій зі значеннями в конкретних нескінченновимірних топологічних векторних просторах та нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах, в яких виконується умова (3). Мотивацією такого дослідження є той факт, що в скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій.

Варто відзначити, що при доведенні інтегральної формули Коші не вдається знайти належних контурів інтегрування в лінійному просторі E_3, побудованому на векторах e_1, e_2, e_3. Для подолання цієї перешкоди в теоремі 3.2.8 показано, що кожна моногенна функція, визначена в області простору E_3, може бути продовжена до моногенної функції в деякій області цілком певного чотиривимірного підпростору E_4 заданої алгебри. В результаті для моногенних функцій, заданих в областях простору E_4, зі значеннями в нескінченновимірній комутативній асоціативній банаховій алгебрі (чи топологічному векторному просторі, що містить цю алгебру) доведено інтегральну формулу Коші в теоремі 3.2.5 (відповідно, теоремі 3.2.13) та теорему 3.2.6 (відповідно, теорему 3.2.7) про еквівалентні означення моногенної функції, яка є аналогом відповідної класичної теореми теорії функцій комплексної змінної.

У розділі 4 вивчаються алгебраїчно-аналітичні властивості спеціальних класів відображень зі значеннями в некомутативних алгебрах. Отримано конструктивний опис класа кватерніонних *G*-моногенних відображень та доведено аналоги інтегральних теорем для таких відображень. Підсумковим результатом є теорема 4.3.5. Теорія *G*-моногенних відображень виявилась узагальненням відомої і дуже актуальної сьогодні теорії голоморфних функцій бікомплексної змінної. За останні 10–20 років з'явилось дуже багато робіт з даної тематики. Можна згадати монографію M.E. Luna-Elizarraras, M.Shapiro, D.C. Struppa, A.Vajiac (2015, Birkhauser), а також роботи інших сучасників: F.Colombo, I. Sabadini, M. Vajiac, J. Kumar, R. Srivastava, D. Rochon, S. Tremblay та ін.

Пропозиції.

Хотілося б звернути увагу на поглиблений розвиток в подальшому: теорії ізольованих особливостей і її застосувань; теорії відображень і крайових задач; теорії наближень на основі належної апроксимації ядер Коші.

Зауваження.

Я виявив в дисертації одне, на мій погляд, суттєве зауваження. Воно стосується формулювання Теореми 2.2.11, точніше, її першого пункту. Це твердження повинно бути сформульовано, мабуть, в наступному вигляді: Якщо $f_u(E_3)=\mathbb{C}$ при всіх $u=1,2,...,m,$ то функція $\Phi:\Omega_\varsigma \to A_n^m$ є моногенною тоді і тільки тоді, коли компоненти $U_k:\Omega\to\mathbb{C}$ розкладу (8) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови (4) в кожній точці області Ω_ς.

Зазначу також кілька зауважень з оформлення дисертації:

1) стор. 29: після формули в шостому рядку замість крапки потрібна кома;

2) стор. 40, 12-й рядок зверху: замість формули $e_1^2+e_2^2+e_3^=0$ має бути $e_1^2+e_2^2+e_3^2=0$;

3) стор. 95, перший рядок зверху: замість $\lambda_1,\lambda_2:\mathbb{R}$ має бути $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$;

4) на стор. 98 і в інших місцях через u позначаються натуральні числа і функція. Хоча з контексту зрозуміло, що мається на увазі, але було б доречно уникати однакових позначень;

5) стор. 106, 4-й рядок зверху: не вказано номер пункту, а написано лише "(див. п.)";

6) стор. 106, 6-й рядок зверху: залишок англійського тексту – "and";

7) стор. 122, третій рядок зверху: знак "+" не перенесено на новий рядок;

8) стор. 159, 9-й рядок знизу: замість посилання на теорему **A** має бути посилання на теорему 2.1.4;

9) стор. 176, 14-й рядок зверху: залишок російського тексту – "где";

10) на стор. 204 і 205 використовуються різні позначення для відрізка: s і S ;

11) стор. 268: після формули (4.105) треба ";" ;

12) стор. 281, 8-й рядок знизу: перед переносом формули не поставлено "=" ;

13) стор. 282, 283: після формул (4.125) та (4.126) не потрібні коми;

14) стор. 294, перший рядок знизу: пропущено посилання на літературу [**?**];

15) стор. 312, перший рядок знизу: вказувати, що $t \geq 1$, зайве, оскільки t – натуральне.

Переходячи до загальної оцінки, відзначу, що дисертаційна робота В.С. Шпаківського є завершеною науковою працею, присвяченою дослідженню актуальної наукової проблеми – побудові теорії функцій гіперкомплексної змінної в довільній асоціативній алгебрі скінченної чи нескінченної розмірності. При цьому пропонуються важливі і змістовні застосування отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи є новими, а їх обґрунтованість базується на строгих та повних доведеннях.

Основні результати дисертації своєчасно і достатньо детально висвітлені в 21-й науковій публікації автора у виданнях, включених до "Переліку наукових фахових видань України". Серед публікацій 10 статей опубліковано у виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus. Результати роботи пройшли широку апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях, а також на провідних наукових семінарах. Особливо хочу відзначити всебічний аналіз результатів дисертації на семінарах при ІМ НАН України по спектральним і крайовим задачам під керівництвом професора В.А. Михайлеця і з функціонального аналізу під керівництвом академіка НАН України Ю.С. Самойленко та члена-кореспондента НАН України А.Н. Кочубея, конструктивна критика і зауваження на яких привели до істотного посилення змісту дисертації. Автореферат правильно і достатньо повно відображає зміст дисертації. Наведені вище зауваження не є принциповими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Вважаю, що дисертаційна робота "Моногенні функції в асоціативних алгебрах", відповідає усім вимогам пп. 9, 11 – 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 щодо докторських дисертацій, а її автор – Шпаківський Віталій Станіславович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України,
радник при дирекції Інституту прикладної
математики і механіки НАН України В.Я. Гутлянський

Підпис Гутлянського В.Я. засвідчую:

Ст. інспектор з кадрів Дубовик Р.А.