Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Шпаківський Віталій Станіславович

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

Моногенні функції в асоціативних алгебрах

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_________________ В. С. Шпаківський

Науковий консультант
Плакса Сергій Анатолійович
доктор фізико–математичних наук,
професор

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ

Шпаківський В. С. Моногенні функції в асоціативних алгебрах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії функцій гіперкомплексної змінної в скінченновимірних алгебрах (комутативних і некомутативних) та в нескінченновимірних просторах з комутативним множенням.

Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У *першому розділі* дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

У *другому розділі* дисертації розглядається довільна n-вимірна ($2 \leq n < \infty$) комутативна асоціативна алгебра з одиницею, $\mathbb{A}_n^m$, над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Нехай $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \leq k \leq 2n$, — елементи алгебри $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Вивчаються моногенні (тобто, неперервні і диференційовні за Гато) функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta = \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, де $x_r \in \mathbb{R}$. Зокрема, основним результатом цього розділу є представлення моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Таке представлення будемо називати конструктивним описом моногенної функції. З отриманого конструктивного опису випливають кілька принципових результатів. А саме, похідна Гато довільного порядку від моногенної функції знову є моногенною функцією; в областях певного виду моногенна функція має сильну похідну, зокрема, похідну Лорха.

Крім того, для згаданих моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морера, інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла. Наслідком цих результатів є теорема про еквівалентні означення моногенної функції.

Доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла по негладкій поверхні для гіперголоморфних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$. Зупинимось детальніше на цьому результаті. Функція $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ називається гіперголоморфною в області Ω, якщо її дійснозначні компоненти є диференційовними в Ω і виконуються наступні умови в кожній точці області Ω: $\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0$. Аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла встановлено для замкнених (тобто, без краю) поверхонь, які мають скінченну площу Лебега та скінченну верхню площу Мінковського. Під площею Лебега поверхні Σ розуміється величина $\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n)$, де інфімум береться по усіх послідовностях многогранників Λ_n, рівномірно збіжних (в сенсі Фреше) до Σ. Скінченну площу Лебега мають наступні поверхні: 1. спрямлювані поверхні (тобто, які є ліпшицевими образами квадрата); 2. якщо компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення, яке визначає поверхню Σ є абсолютно неперервними за Тонеллі і, крім того, в кожному з добутків $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ одна частинна похідна належать класу інтегровних функцій $L_p[0,1]$, а інші частинні похідні належать $L_q[0,1]$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 3. якщо дві компоненти відображення $f(u,v)$ є функціями Ліпшиця, а третя компонентна абсолютно неперервна за Тонеллі. Верхньою площею Мінковського поверхні Σ називається величина $\mathcal{M}^*(\Sigma) := \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{V(\Sigma^\varepsilon)}{2\varepsilon}$, де через $V(\Sigma^\varepsilon)$ позначено об'єм ε-околу поверхні Σ. Прикладами поверхонь, які мають скінченну верхню площу Мінковського є наступні поверхні: 1. спрямлювані; 2. регулярні (тобто такі, що двовимірна міра Хаусдорфа частини поверхні Σ, що міститься в кулі радіуса ε співрозмірна з ε^2).

У цьому розділі також встановлено відповідність між моногенною функцією в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній асоціативній алгебрі. Далі для n-вимірної $(2 \leq n < \infty)$

комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}_n$ введено поняття розширення як сімейства $(n+1)$-вимірних комутативних асоціативних алгебр з певними правилами множення. Встановлено зв'язок між моногенними функціями в алгебрі $\mathbb{A}_n$ і моногенними функціями, визначеними на розширеннях алгебри $\mathbb{A}_n$. Техніку розширень застосовано до побудови розв'язків диференціального рівняння з частинними похідних. Зокрема, для довільного лінійного диференціального рівняння з частинними похідних зі сталими коефіцієнтами запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків. Як приклади, отримані сім'ї розв'язків виписано для одного рівняння гідродинаміки, для тривимірного рівняння Лапласа, для рівняння поперечних коливань пружного стержня, для узагальненого бігармонічного рівняння, для двовимірного рівняння Гельмгольца.

У *третьому розділі* дисертації розглядаються моногенні функції зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, який є продовженням деякої нескінченновимірної комутативної асоціативної банахової алгебри $\mathbb{F}$, асоційованої з тривимірним рівнянням Лапласа. Мотивацією для цього слугує той факт, що в скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій. Для цього потрібно розглядати нескінченновимірні простори. Показано, що кожна гармонічна функція є деякою компонентою згаданих моногенних функцій.

Далі розглядаються моногенні функції зі значеннями у комплексифікаціях $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ відповідно алгебри $\mathbb{F}$ та ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$. Причому досліджуються моногенні функції, визначені в областях певного чотиривимірного дійсного підпростору $E_4 \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Це дає змогу довести для таких моногенних функцій основні результати цього розділу — це аналоги основних інтегральних теорем комплексного аналізу (теорема і формула Коші, теорема Морера). Більше того, встановлюючи зв'язок між моногенними функціями, визначеними в областях просторів E_3 та E_4 показано, що кожна моногенна функція $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ з області $\Omega_\zeta \subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q_\xi \subset E_4$.

Після цього побудовано просторові гармонічні функції у вигляді головного продовження голоморфних функцій комплексної змінної в комплексифікації $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ алгебри $\mathbb{F}$. Розглянуто також продовження диференційовних за Гато функцій зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, яка є продовженням алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, та досліжено їх зв'язок з просторовими потенціалами.

У *четвертому розділі* дисертаційної роботи введено нові класи моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, так звані, право-G-моногенні відображення і ліво-G-моногенні відображення. Встановлено конструктивні описи усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого інтеграла і для криволінійного інтеграла від G-моногенного відображення, а також аналоги інтегральної формули Коші для цих відображень. Доведено також аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію особливостей цих відображень. Досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, встановлено їх зв'язок з G-моногенними відображеннями та доведено теорему про еквівалентність різних означень право-G-моногенних і ліво-G-моногенних відображень. Також вводиться новий клас кватерніонних функцій — функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Встановлюється співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Доведено, що на класі кватерніонних неперервно диференційовних в області Ω функцій $\mathcal{C}^1(\Omega)$ наступні множини функцій є підмножиною множини H–аналітичних в Ω функцій: множина ліво-диференційовних функцій (функцій вигляду $f(x) = a + xb$, $a, b \in \mathbb{C}$), множина F–гіперголоморфних функцій (функцій, з ядра оператора Фуетера $\sum\limits_{r=1}^{4} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$), множина MT–гіперголоморфних функцій (функцій, з ядра оператора Мойсіла–Теодореско $\sum\limits_{k=2}^{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$), множина

s–регулярних функцій (функцій, що подаються у вигляді збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$). При цьому показано, що H–похідна співпадає з відомими похідними для відповідних класів функцій.

Вивчаються ліво-A_t-гіперголоморфні (належать ядру оператора Дірака) функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона. Основним результатом для таких функцій є алгоритм їх конструювання. Для доведення цього результату спочатку було розв'язати алгебраїчну задачу, яка полягала в наступному: описати правила множення певних базисних векторів у довільній узагальненій алгебрі Келі–Діксона.

Доведено, що для вивчення ліво-A_t-голоморфних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона $A_t = \left(\frac{\gamma_1,\ldots,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ достатньо обмежитись вивченням ліво-A_t-голоморфних функцій в алгебрах $\left(\frac{sign(\gamma_1),\ldots,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$.

Ключові слова: скінченновимірна комутативна асоціативна алгебра, алгебра комплексних кватерніонів, G-моногенні відображення, умови Коші–Рімана, теорема Коші, інтегральна формула Коші, теорема Морера, H–моногенні відображення, H–аналітичні функції, алгебри Келі–Діксона, нескінченновимірний векторний топологічний простір.

Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in associative algebras. — The Manuscript.

Doctor of Sciences Thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to development of the functions theory of the hypercomplex variable in finite-dimensional algebras (commutative and non-commutative) and in infinite-dimensional spaces with commutative multiplication develops in the thesis.

The main part of the thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions, list of references and appendix.

In the *first chapter* of dissertation work the review of the literature on the subject of research is outlined and indicated on the place obtained by the applicant results in the general theory.

In the *second chapter* of thesis, an arbitrary n-dimensional ($2 \le n < \infty$) commutative associative algebra with the unit $\mathbb{A}_n^m$ over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ is considered in the thesis. Let $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \le k \le 2n$ be the elements of the algebra $\mathbb{A}_n^m$, which are linearly independent over the field of real numbers $\mathbb{R}$. We study monogenic (that is, continuous and differentiable in the sense of Gateaux) functions with values in the algebra $\mathbb{A}_n^m$ of the variable $\zeta = \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, where $x_r \in \mathbb{R}$. In particular, the main result of this chapter is the representation of monogenic functions with values in the algebra $\mathbb{A}_n^m$ by means of holomorphic functions of a complex variable. This presentation will be called constructive description of monogenic functions. From the constructive description obtained several principal results. Namely, the Gateaux derivative of an arbitrary order of a monogenic function is again a monogenic function; in domains of certain type, the monogenic function has a strong derivative, in particular, the Lorch derivative.

Furthermore, for the mentioned monogenic functions, analogues of the Cauchy integral theorem for a curvilinear integral, Morera theorem, an analog of the Cauchy integral formula for a curvilinear integral are proved. The consequence of these results is a theorem on equivalent definitions of monogenic functions.

An analog of the integral Cauchy theorem for a surface integral over a non-smooth surface for functions with values in the algebra $\mathbb{A}_n^m$ is proved.

Let us dwell on this result in more detail. The function $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ is called hyperholomorphic in a domain Ω if its real–valued components are differentiable in Ω and the following conditions are satisfied at each point of the domain Ω: $\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0$. An analogue of the Cauchy integral theorem for a surface integral is obtained for closed (i.e., without edge) surfaces that have finite Lebesgue area and finite upper Minkowski area. The Lebesgue area of a surface Σ we mean as the value $\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n)$, where the infimum is taken over all sequences of polyhedra Λ_n, which are uniformly convergent (in the Fréchet sense) to Σ. The finite Lebesgue area has the following surfaces: 1. rectifiable surfaces (with are Lipschitz images of a square); 2. if a components $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ of mapping that defined the surface Σ are absolutely continuous in the sense of Tonelli, and furthermore, in each of the products $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ one partial derivative belongs to the class of integral functions $L_p[0,1]$, and the other partial derivatives belong to $L_q[0,1]$, where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; 3. if two components of the mapping $f(u,v)$ are Lipschitz functions, and the third component is absolutely continuous in the sense of Tonelli. The upper Minkowski area of the surface Σ is the value $\mathcal{M}^*(\Sigma):=\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{V(\Sigma^\varepsilon)}{2\varepsilon}$, where $V(\Sigma^\varepsilon)$ is the volume of ε-neighborhood of the surface Σ. Examples of surfaces that have a finite upper Minkowski square are the following surfaces: 1. rectifiable; 2. regular (such that a two-dimensional Hausdorff measure of the part of surface Σ contained in a sphere of radius ε is commensurate to ε^2).

A correspondence between a monogenic function in the algebra $\mathbb{A}_n^m$ and a finite set of monogenic functions in a special commutative associative algebra is established. Further, for the n-dimensional $(2\le n<\infty)$ commutative associative algebra $\mathbb{A}_n$ we introduce the notion of extension as a family of $(n+1)$-dimensional commutative associative algebras with certain multiplication rules. The relation between monogenic functions in the algebra $\mathbb{A}_n$ and the monogenic functions defined on the extensions of algebra $\mathbb{A}_n$ is established. Extension technique is applied to construct solutions of partial differential equations. In particular, for an arbitrary linear partial differential equation with constant coefficients offer the procedure for constructing an infinite-dimensional family of solutions. As examples, the obtained families of solutions are written for one equation of hydrodynamics, for the three-dimensional Laplace equation, for the equation of transverse oscillations of an elastic rod, for a generalized biharmonic equation, for a two-dimensional Helmholtz equation.

In the *third chapter* of thesis, monogenic functions with values in the topological vector space (TVS) $\widetilde{\mathbb{F}}$ are considered, which is a continuation of some infinite-dimensional commutative associative Banach algebra $\mathbb{F}$ associated with the three-dimensional Laplace equation. The motivation for this is the fact that in finite-dimensional algebras it is not possible to describe all spatial harmonic functions as components of monogenic functions. To do this, one must consider infinite-dimensional spaces. It is shown that each harmonic function is a component of the mentioned monogenic functions.

Next we consider monogenic function with values complexifications $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ and $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ of algebras $\mathbb{F}$ and TVS $\widetilde{\mathbb{F}}$, respectively. Moreover, we study the monogenic functions defined in the domain of a certain four-dimensional real subspace $E_4 \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. This makes it possible to prove the main results of this section for such monogenic functions these are analogues of the basic integral theorems of complex analysis (Cauchy theorem and formula, Morera theorem). Moreover, establishing a connection between monogenic functions defined in the domain of spaces E_3 and E_4 shown that every monogenic function $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ from a domain $\Omega_\zeta \subset E_3$ can be extended to monogenic function in some domain $Q_\xi \subset E_4$.

After that, a spatial harmonic functions are constructed in the form of a principal extension of the analytic functions of a complex variable in the complexification $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ of the algebra $\mathbb{F}$. We also consider the extension of differentiable by Gateaux functions with values in the topological vector space $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, which is a continuation of the algebra $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, and the connection with the spatial potentials is investigated.

New classes of monogenic mappings in the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, so-called right-G-monogenic mappings and left-G-monogenic mappings are introduced in the *fourth chapter* of the thesis. The constructive descriptions of all G-monogenic mappings are established by means four corresponding holomorphic functions of a complex variable. The analogues of the integral Cauchy theorems for a surface integral and for a curvilinear integral of the G-monogenic mapping, as well as analogs of the Cauchy integral formula for these mappings, are proved. Also analogs of theorems of Morera, Taylor and Laurent for G-monogenic mappings with values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are proved and the classification of the singularities of these mappings is described. The main algebraic–analytic properties of H-monogenic (i.e., continuous and differentiable by Hausdorff) mappings with values in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ and its connection with G-monogenic mappings are investigated.

The theorem on the equivalence of various definitions of right-G-monogenic and left-G-monogenic mappings is proved.

A new class of quaternion functions, that are functions analytical by Hausdorff, are introduced. The relation between the well-known classes of quaternion differential functions and the Hausdorff analytic functions is established. It is proved that on the class of quaternionic continuously differentiable in a domain Ω functions $\mathcal{C}^1(\Omega)$ the following sets of functions are a subset of the set of H–analytic in Ω functions: a set of left-differentiable functions (functions form $f(x) = a + xb$, $a, b \in \mathbb{C}$), a set of F–hyperholomorphic functions (functions of the kernel of Fueter operator $\sum\limits_{r=1}^{4} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$), a set of MT–hyperholomorphic functions (функцій, functions of the kernel of Fueter operator Moisil–Theodoresco $\sum\limits_{k=2}^{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$), a set of s–regular functions (functions that are presented as a convergent series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$). It is shown that the H–derivative coincides with the known derivatives for the corresponding classes of functions.

We study the left-A_t-hyperholomorphic (belonging to the kernel of Dirac operator) functions in the generalized of Cayley–Dickson algebras. The main result for such functions is an algorithm of construction of such functions. To prove this result, we first had to solve an algebraic problem, which is follows: to describe the rules for multiplication of some basis vectors in an arbitrary generalized Cayley–Dickson algebra.

It is proved that for the study of the left-A_t-holomorphic functions in generalized Cayley–Dickson algebras $A_t = \left(\frac{\gamma_1,\ldots,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ enough to restrict the study of left-A_t-holomorphic functions in algebra $\left(\frac{sign(\gamma_1),\ldots,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$.

Key words: finite-dimensional commutative associative algebra, algebra of complex quaternions, G-monogenic mappings, Cauchy–Riemann conditions, Cauchy theorem, Cauchy integral formula, Morera theorem, H-monogenic mappings, H–analytic function, Cayley–Dickson algebra, infinite-dimensional vector topological space.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шпаковский В. С. Об изоморфизме функциональных алгебр в гармонической алгебре с двумерным радикалом // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 384 – 391.

2. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2012. — **62**, № 2. — P. 55 – 65.

3. Flaut C., Shpakivskyi V. Some identities in algebras obtained by the Cayle-Dickson process // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2013. — **23**, № 1. — P. 63 – 76.

4. Плакса С. А., Шпаковский В. С. О логарифмическом вычете моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с двумерным радикалом // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 7. — С. 967 – 973.

   (переклад англійською: Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. On the logarithmic residues of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with two-dimensional radical // Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (7). — P. 1079 – 1086.)

5. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, № 1. — P. 110 – 119.

6. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. — 2014. — **1**. — P. 1 – 13.

7. Flaut C., Shpakivskyi V. Holomorphic functions in generalized Cayley-Dickson algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 1. — P. 95 – 112.

8. Flaut C., Shpakivskyi V. An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 2. — P. 337 – 350.

9. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 3. — P. 251 – 268.

10. Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 4. — P. 313 – 328.

11. Shpakivskyi V. S. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. — 2016. — **7**, № 1. — P. 63 – 75.

12. Shpakivskyi V. S. Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2016. — **26**, № 1. — P. 417 – 434.

13. Шпаковский В. С. Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2016. — **30**. — С. 155 – 164.

14. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. An extension of monogenic functions and spatial potentials // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, № 2. — P. 330 – 337.

15. Шпаковский В. С. Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 262 – 274.

16. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. Quaternionic G-monogenic mappings in E_m // Int. J. Adv. Res. Math. — 2018. — **12**. — P. 1 – 34.

17. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2018. — **68**, № 2. — P. 25 – 36.

18. Шпаківський В. С. Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геом. центру. — 2018. — **11**, № 3. — P. 1 – 18.

19. Шпаківський В. С. Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Труды ИПММ НАН Украины. — 2018. — **32**. — С. 147 – 168.

20. Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M. and Shpakivskyi V. On the Hausdorff analyticity for quaternion-valued functions // Complex Analysis and Operator Theory. — 2019. – **13**, № 6. — P. 2863 – 2880.

21. Шпаківський В. С. Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — P. 272 – 294.

(переклад в англійському виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 92 – 109.)

22. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with a two-dimensional radical // Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 151.

23. Shpakivskyi V. S. On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with the two-dimensional radical // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/$\sim$ complex/conf2013/abstracts.html)

24. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a harmonic algebra // Abstract of Joint events of Colloquium on Differential Geometry and its Applications and IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, Debrecen, Hungary, August 26 – 30, 2013. — P. 33.

25. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra // Abstracts of Workshop "A New Approach in Theoretical and Ap-

plied Methods in Algebra and Analysis", April 4 – 6, 2013, Constanta, Romania (режим доступу: http://amaa-2013.wikispaces.com/file/view/Abstract-Shpakivskyi.pdf/399910248/Abstract-Shpakivskyi.pdf)

26. Shpakivskyi V. S. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Матер. конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-ччя Г. М. Положого, 23 – 24 квітня 2014 р., Київ. — С. 152.

27. Шпаківський В. С. Конструктивний опис моногенних функцій у скінченновимірних комутативних алгебрах // Матер. XIII міжнар. наук.-практич. конф. "Шевченківська весна — 2015", 1 – 3 квітня 2015 р., КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, 2015. — С. 65 – 69.

28. Shpakivskyi V. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 10th ISAAC Congress. — University of Macau, Macau, China, August 3 – 8, 2015. — P. 69.

29. Shpakivskyi V., Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 11th ISAAC Congress, Linnaeus University, Sweden, 2017. — P. 45.

30. Shpakivskyi V. Hypercomplex method for solving linear PDEs // Abstract of 12th ISAAC Congress, Aveiro University, Portugal, 2019. — P. 34 – 35.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Природним і напрочуд ефективним засобом дослідження плоских потенціальних полів є аналітичні функції комплексної змінної. Багатство цієї теорії та ефективність її застосувань в різних галузях науки спонукають математиків до розвитку подібних теорій в багатовимірних просторах.

Побудова алгебр, відмінних від алгебри комплексних чисел, розпочалася ще в першій половині XIX ст. Так, в 1843 році У. Гамільтон побудував некомутативну чотиривимірну алгебру кватерніонів (див., наприклад, [8, с. 223]), а в 1844 році Г. Грассман [87] побудував некомутативну алгебру зовнішніх форм. Напевно, перша комутативна алгебра була побудована незалежно Ч. Гревсом [3, с. 60] (1847) та О. де Морганом [69] (1849). Ця алгебра ізоморфна прямій сумі $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ алгебр дійсних і комплексних чисел. Після цього з'явилися роботи А. Келі, Дж. Гревса, В. Кліффорда [9, 60] та П. Тайта [202]. В 80-х роках XIX ст. виник інтерес до теорії функцій гіперкомплексної змінної, внаслідок чого було опубліковано кілька робіт видатними математиками, зокрема, Б. Пірсом [140] (1881), К. Вейєрштрассом [212] (1883), А. Пуанкаре [156] (1884) та Р. Дедекіндом [66] (1885). Варто відмітити важливі роботи Ф. Моліна [15] (1892), Г. Шефферса [178] (1893), Е. Штуді [198] (1898) та Е. Картана [57] (1898).

Згодом в роботах Ч. Джолі [103], Ф. Хаусдорфа [93], Г. Мойсіла і Н. Теодореско [136], Р. Фуетера [82], К. Кулліна [64], А. Садбері [199], Дж. Раяна [175], К. Гюрлебека і В. Шпрьоссіга [90], В. Кравченка і М. Шапіро [107], Г. Льойтвілера [95, 115], С. Бернштейн [46], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [63] та багатьох інших розроблялися різні напрямки некомутативного гіперкомплексного аналізу як узагальнення результатів теорії функцій комплексної змінної на багатовимірні простори.

Разом з некомутативним аналізом в багатовимірних просторах вивчались також відображеннях в комутативних алгебрах. Так, наприклад, в роботах П. Кетчума [104, 105], Д. Вагнера [209], Дж. Ворда [211], Е. Лорха [117], Е. Блюма [47], М. Рошкулєца [170, 171], К. Кунца [108, 109], І. П. Мельниченка [129,130], І. П. Мельниченка та С. А. Плакси [131], С. А. Плакси [19,143] та інших розвинено теорію аналітичних функцій в комутативних алгебрах і застосовано такі функції для побудови розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Не зважаючи на значну кількість робіт з гіперкомплексного аналізу, залишається чимало важливих відкритих проблем. Зокрема, актуальною проблемою є побудова теорії функцій гіперкомплексної змінної в довільній комутативній асоціативній алгебрі та встановлення зв'язку таких функцій з рівняннями з частинними похідними. Актуальною проблемою гіперкомплексного аналізу є також розробка методів конструктивного опису класів диференційовних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060 та "Розробка аналітичних та чисельно–аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U004077.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є класи диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних (комутативних і некомутативних) алгебрах та в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

Предметом дослідження є алгебраїчно–аналітичні властивості диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних алгебрах та в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

Метою дисертаційної роботи є встановлення конструктивних описів диференційовних функцій в асоціативних алгебрах та розвиток на їх основі теорії функцій гіперкомплексної змінної, подібної до теорії функцій комплексної змінної. Під конструктивним описом розуміємо представлення диференційовних функцій за допомогою голоморфних функцій комплексних змінних.

Завдання дослідження:

- розробити метод встановлення конструктивного опису моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної;

- довести аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі;

- розробити підхід до побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, базуючись на властивостях моногенних функцій зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу;

- дослідити властивості моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах та нескінченновимірних топологічних векторних просторах, асоційованих з просторовими потенціальними полями;

- визначити класи кватерніонних відображень, до яких застосовна методика встановлення їх конструктивних описів, розроблена для комутативних алгебр;

- встановити співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом.

Встановити зв'язок між відомими означеннями похідних та похідною за Хаусдорфом;

- побудувати в явному вигляді гіперголоморфні функції (тобто такі, що належать ядру оператора Дірака) в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи комплексного, гіперкомплексного та функціонального аналізу.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати є новими і полягають в наступному:

- отримано конструктивний опис моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної;

- доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, а також в нескінченновимірній комутативній алгебрі і топологічному векторному просторі з комутативним множення, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа;

- встановлено співвідношення між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу. Вказані моногенні функції застосовано для побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;

- введено клас кватерніонних G-моногенних відображень і отримано їх конструктивний опис за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної; доведено аналоги інтегральних теорем для відображень цього класу;

- встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних та похідною за Хаусдорфом;

- розроблено алгоритм побудови функцій, що належать ядру оператора Дірака в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, в комплексному та гіперкомплексному аналізі, а також при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними і крайових задач математичної фізики, що знаходять застосування у гідродинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статтях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: з робіт [77, 79] до дисертації увійшли результати, які отримано особисто здобувачем; в роботах [123, 191] — здобувачеві належить постановка задач, формулювання основних гіпотез, ідеї доведень, побудова схем доведень, контроль за правильністю викладення матеріалу, співавтори брали участь у перевірці робочих гіпотез; в роботах [21, 147–151] — визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить С. А. Плаксі, а перевірка основних гіпотез і повне доведення всіх тверджень належить здобувачеві; в роботі [78] — К. Флаут належить ідея застосувати алгоритм Бейлса до побудови правил множення базисних векторів узагальненої алгебри Келі–Діксона, решта досліджень виконана здобувачем.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- IX міжнародній науковій конференції "Кліффордові алгебри та їх застосування" (Веймар, Німеччина, 2011);

- XVI міжнародній науковій конференції з аналітичних функцій і суміжних питань (Хелм, Польща, 2011);
- VIII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Москва, РФ, 2011);
- VIII міжнародній науковій конференції "Фінслерові продовження теорії відносності" (Фрязіно, РФ, 2012);
- міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха (Львів, 2012);
- міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Function Theory, Regression, (Crystal) Lattices, Fractals, Chaos, and Physics", присвяченій пам'яті П. М. Тамразова та 20-річній співпраці Лодзь–Київ (Бендлево, Польща, 2012);
- міжнародній науковій конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування" (Київ, 2013);
- спільному колоквіумі з диференціальної геометрії та її застосувань та міжнародної конференції "Фінслерові продовження теорії відносності" (Дебрецен, Угорщина, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Нові підходи в теоретичних та прикладних методах в алгебрі і аналізі" (Констанца, Румунія, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", присвяченній 100-річчю Г. М. Положого (Київ, 2014);
- XIII міжнародній науково-практичній конференції "Шевченківська весна — 2015" (Київ, 2015);
- X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Макао, Китай, 2015);

- X Літній школі ”Алгебра, топологія, аналіз” (Одеса, 2015);
- XI конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Векше, Швеція, 2017);
- міжнародній науковій конференції ”(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications” (Бендлево, Польща, 2018);
- XI конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Авейро, Португалія, 2019);

на Вченій раді Інституту математики НАН України та на семінарах:

- відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса)
- відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);
- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України А. Г. Нікітін);
- Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кор. НАН України А. Н. Кочубей);
- семінарах ”Спектральні і крайові задачі” в Інституті математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор В. А. Михайлець);
- кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А. О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус);
- Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О. Б. Скасків);
- Загальноінститутському семінарі Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов’янськ (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України В. Я. Гутлянський);

- Харківському міському семінарі з теорії функції (керівник: доктори фіз.-мат. наук, професори С. Ю. Фаворов та Л. Б. Голінський).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 21 науковій роботі [1—21] (див. список публікацій здобувача на с. 7—11), внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, 10 з них [3–5,7,8,11,12,14,20,21] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus та Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [22—30].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 214 найменувань) та додатку. Повний обсяг роботи становить 357 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру подяку доктору фізико–математичних наук, професору Плаксі Сергію Анатолійовичу за постійну увагу до роботи, корисні поради та підтримку.

Зміст дисертації. У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовану мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У *першому розділі* дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Виклад *основних результатів* дисертації починається з *розділу 2*, в якому вивчаються моногенні функції в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та їх застосування до побудови точних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Нехай $\mathbb{A}_n^m$ — довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан [57, с. 33] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s$ такі, що виконуються наступні правила множення:

$$1.\quad \forall\, r,s\in[1,m]\cap\mathbb{N}\ :\qquad I_rI_s=\begin{cases}0 \ \ \text{при}\ \ r\neq s,\\ I_r\ \ \text{при}\ \ r=s;\end{cases}$$

$$2.\quad \forall\, r,s\in[m+1,n]\cap\mathbb{N}\ :\qquad I_rI_s=\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n}\Upsilon_{r,k}^{s}I_k\ ;$$

$$3.\quad \forall\, s\in[m+1,n]\cap\mathbb{N}\ \ \exists!\ u_s\in[1,m]\cap\mathbb{N}\ \ \ \forall\, r\in[1,m]\cap\mathbb{N}\ :$$

$$I_rI_s=\begin{cases}0\ \ \text{при}\ \ r\neq u_s\,,\\ I_s\ \ \text{при}\ \ r=u_s\,,\end{cases}$$

де $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. Крім того, ним доведено, що будь-яка комутативна алгебра з правилами множення 1 – 3, для якої структурні константи $\Upsilon_{r,k}^{s}$ в правилі множення є такими, що виконуються умови

(A 1). $\quad (I_rI_s)I_p=I_r(I_sI_p)\quad \forall\, r,s,p\in[m+1,n]\cap\mathbb{N};$

(A 2). $\quad (I_uI_s)I_p=I_u(I_sI_p)\quad \forall\, u\in[1,m]\cap\mathbb{N}\ \ \ \forall\, s,p\in[m+1,n]\cap\mathbb{N}$, буде асоціативною.

Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^{m}$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру S алгебри $\mathbb{A}_n^m$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^{n}$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. Надалі алгебру $\mathbb{A}$ з базисом Картана позначатимемо $\mathbb{A}_n^m$. З правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що $\mathbb{A}_n^m$ є напівпрямою сумою m-вимірної напівпростої підалгебри S і $(n-m)$-вимірної нільпотентної підалгебри N, тобто

$$\mathbb{A}_n^m=S\oplus_s N.$$

Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1=\sum_{u=1}^{m}I_u$.

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u:=\Big\{\sum_{k=1,\,k\neq u}^{n}\lambda_kI_k:\lambda_k\in\mathbb{C}\Big\},\quad u=1,2,\ldots,m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R}:=\Big\{\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_kI_k:\lambda_k\in\mathbb{C}\Big\}.$$

Визначимо m лінійних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0 \ \forall\, \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Оскільки ядрами функціоналів f_u є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_u$, то ці функціонали є також неперервними і мультиплікативними (див. [29, с. 147]).

Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=1}^{n} a_r I_r, \quad e_3 = \sum_{r=1}^{n} b_r I_r \tag{2}$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Норма елемента алгебри $v = \sum\limits_{r=1}^{n} v_r I_r$ визначається рівністю

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{r=1}^{n} |v_r|^2}.$$

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$. Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами e_1, e_2, e_3.

Далі істотним є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, де $f_u(E_3)$ — образ множини E_3 при відображенні f_u. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{3}$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

З означення моногенності функції Φ в області Ω_ζ випливає виконання наступних умов:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3 \tag{4}$$

в кожній точці області Ω_ζ.

Наслідком лем 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 є наступне подання резольвенти:

$$(te_1-\zeta)^{-1}=\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{t-\xi_u}\,I_u+\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=2}^{s-m+1}\frac{Q_{k,s}}{(t-\xi_{u_s})^k}\,I_s \tag{5}$$
$$\forall\, t\in\mathbb{C}:\ t\neq\xi_u,\quad u=1,2,\ldots,m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s}:=T_s\,,\quad Q_{k,s}=\sum_{r=k+m-2}^{s-1}Q_{k-1,r}\,B_{r,\,s}\,,\quad k=3,4,\ldots,s-m+1.$$

при

$$T_s:=ya_s+zb_s\,,\ \ B_{r,s}:=\sum_{k=m+1}^{s-1}T_k\Upsilon_{r,s}^k\,,\quad s=m+2,\ldots,n,$$

а натуральні числа u_s визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Із співвідношень (5) випливає, що точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta\in\mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u:\quad\begin{cases}x+y\,\mathrm{Re}\,a_u+z\,\mathrm{Re}\,b_u=0,\\ \qquad y\,\mathrm{Im}\,a_u+z\,\mathrm{Im}\,b_u=0\end{cases} \tag{6}$$

в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

Принциповою є наступна лема.

Лема 2.1.4. *Нехай область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3)=\mathbb{C}$ для всіх $u=1,2,\ldots,m$. Крім того, нехай функція $\Phi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ. Якщо для деякого $u\in\{1,2,\ldots,m\}$ точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_2-\zeta_1\in\{\zeta=xe_1+ye_2+ze_3:(x,y,z)\in L_u\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2)\in\mathcal{I}_u\,.$$

Нехай область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u, $u=1,2,\ldots,m$. Позначимо через D_u область комплексної площини $\mathbb{C}$, на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_u.

Лема 2.1.4 дає можливість визначити лінійні оператори A_u, $u=1,2,\ldots,m$, які кожній моногенній функції Φ ставлять у відповідність функції комплексної змінної $F_u : D_u \to \mathbb{C}$ за правилом $F_u\big(f_u(\zeta)\big) := f_u(\Phi(\zeta))$. З використанням теореми Ю. Ю. Трохимчука [25, теорема 21] доведено, що функція F_u голоморфна в області D_u, $u = 1, 2, \ldots, m$.

Далі побудовано в явному вигляді оператори $A_u^{(-1)}$, які є узагальнено оберненими до A_u, $u = 1, 2, \ldots, m$ (тобто такі, що $A_u A_u^{(-1)} A_u = A_u$), і які голоморфним функціям комплексної змінної ставлять у відповідність моногенні функції. При цьому різниця $\Phi - A_u^{(-1)} A_u \Phi$ належить максимальному ідеалу $\mathcal{I}_u$.

Нарешті, проінтеговано умови (4) для моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_u$ і описано в явному вигляді усі моногенні функції зі значеннями в максимальному ідеалі $\mathcal{I}_u$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. У такий спосіб отримано основний результат розділу 2 у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.1.3. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt, \qquad (7)$$

де F_u — деяка голоморфна функція в області D_u і G_s — деяка голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\ell \neq q$.

З теореми 2.1.3 випливає, що в розкладі функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\, I_k \qquad (8)$$

компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, тобто для довільної точки $(x, y, z) \in \Omega$ виконуються співвідношення

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x}\, \Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\, \Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\, \Delta z +$$

$$+\, o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \qquad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0\,,$$

З іншого боку, якщо компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними, то умови (4) є не лише необхідними, але й достатніми умовами моногенності функції (8) в області Ω_ζ, тобто рівності (4) є аналогами класичних умов Коші–Рімана.

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівності (7), права частина якої є моногенною функцією в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u,\, u = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{9}$$

Теорема 2.1.4. *Якщо область* Ω *є опуклою в напрямку прямих* L_u *і* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$, *то кожна моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *продовжується до функції, моногенної в області* Π_ζ.

Принциповим наслідком рівності (7) є наступне твердження, яке справедливе для довільної області Ω_ζ.

Теорема 2.1.5. *Нехай* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$. *Тоді для кожної моногенної функції* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *в довільній області* Ω_ζ *похідні Гато* $\Phi^{(r)}$ *є моногенними функціями в* Ω_ζ *для всіх* r.

Встановлено також аналог теореми 2.1.3 для моногенних функцій змінної вигляду $\sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, де $2 \le k \le 2n$.

У пункті 2.1.6 досліджується зв'язок моногенних функцій з рівняннями з частинними похідними.

Розглянемо наступне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_N U(x,y,z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Зауважимо, що кожна N разів диференційовна за Гато в Ω_ζ функція Φ задовольняє рівняння $\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = 0$ скрізь в Ω_ζ, якщо

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = 0\,. \tag{11}$$

Відповідно, при виконанні умови (11) дійснозначні компоненти $\operatorname{Re} U_k(x,y,z)$ і $\operatorname{Im} U_k(x,y,z)$ розкладу (8) є розв'язками рівняння (10).

Отже, для побудови розв'язків рівняння (10) у вигляді компонент моногенної функції необхідно знайти трійку лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (2), які задовольняють характеристичне рівняння (11), і перевірити умову: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$.

В наступній теоремі вказано спеціальний клас рівнянь вигляду (10), для яких $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Введемо в розгляд поліном

$$P(a,b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}\,.$$

Теорема 2.1.7. *Нехай існують лінійно незалежні над $\mathbb{R}$ вектори e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{A}_n^m$ вигляду (2), які задовольняють рівність (11). Якщо $P(a,b) \neq 0$ при всіх дійсних a і b, то $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$.*

Очевидно, що рівняння вигляду (10), які є рівняннями еліптичного типу завжди задовольняють умову $P(a,b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$. У той же час існують рівняння (10), для яких $P(a,b) > 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$, але які не є еліптичними. Наприклад, такими є рівняння

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} = 0$$

у просторі $\mathbb{R}^3$.

У підрозділі 2.2 для моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морера та аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла.

Наступна теорема є аналогом інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла і є основним результатом пункту 2.2.1.

Теорема 2.2.2. *Нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої γ, яка гомотопна точці з Ω, справедлива рівність*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta) d\zeta = 0.$$

Далі в теоремі 2.2.3 за звичною схемою доводиться аналог теореми Морера.

У пункті 2.2.3 встановлено аналог інтегральної формули Коші.

Нехай $\zeta_0 := x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3$ — довільна точка в області $\Omega_\zeta \subset E_3$. В околі точки ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ радіуса ε з центром в ζ_0. Через $C_u(\xi_u^{(0)}, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ позначимо образ $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ при відображенні f_u, $u = 1, 2, \ldots, m$. Припустимо, що коло $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ *охоплює множину* $\{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$. Це означає, що крива $C_u(\xi_u^{(0)}, \varepsilon)$ обмежує деяку область D'_u таку, що $f_u(\zeta_0) = \xi_u^{(0)} \in D'_u$, $\quad u = 1, 2, \ldots, m$.

Скажемо, що крива $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *один раз охоплює множину* $\{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, якщо існує коло $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне γ_ζ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$.

Теорема 2.2.4. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\Phi(\zeta_0) = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta - \zeta_0)^{-1}\,d\zeta,$$

де γ_ζ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка один раз охоплює множину $\{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, а λ — деяка стала.

В теоремах 2.2.5 – 2.2.10 встановлено достатні умови, коли стала $\lambda = 2\pi i$.

Наступна теорема містить критерії моногенності функції в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ і доводиться з використанням теорем 2.1.3, 2.1.5, 2.2.3, 2.2.2 та 2.2.4.

Теорема 2.2.11. *Функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (8) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови (4) в кожній точці області Ω_ζ.*

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, то функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є також моногенною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

1) *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл в якому функція* Φ *розкладається у степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - \zeta_0)^k;$$

2) *функція* Φ *неперервна в області* Ω_ζ *і задовольняє умову* $\int_{\partial\triangle_\zeta} \Phi(\zeta)d\zeta = 0$ *для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$ *такого, що його замикання* $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$*.*

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$ *і, крім того, область* Ω *є опуклою в напрямку прямих* L_u*, то функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною тоді і тільки тоді, коли існує єдиний набір з* m *голоморфних в області* D_u *функцій* F_u*,* $u = 1, 2, \ldots, m$ *і єдиний набір з* $n-m$ *голоморфних в області* D_{u_s} *функцій* G_s*,* $s = m+1, \ldots, n$ *таких, що в області* Ω_ζ *функція* Φ *подається у вигляді (7).*

У підрозділі 2.3 доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла.

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину $\Sigma^\varepsilon := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \leq \varepsilon, \ (x_1, y_1, z_1) \in \Sigma\}$.

Відстанню Фреше $d(\Sigma, \Lambda)$ між поверхнями Σ і Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma \subset \Lambda^\varepsilon$, $\Lambda \subset \Sigma^\varepsilon$ (див., наприклад, [81]). Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n, \Sigma) \to 0$ при $n \to \infty$ (див., наприклад, [162, с. 121]).

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf_{n \to \infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ, а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ — площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега, тобто $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$. Тоді за теоремою Л. Чезарі [59, с. 544] існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \big\{ f(u, v) := \big(x(u, v), \ y(u, v), \ z(u, v)\big) : (u, v) \in G \big\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

існують м.в. на квадраті G і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int\limits_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv. \tag{12}$$

У випадку, коли $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$ і рівність (12) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ будемо називати *квадровною.* Далі *замкнену поверхню* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ будемо розуміти як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрямлювану криву.*

Будемо казати, що функція вигляду (8) є *гіперголоморфною* в області Ω_ζ, якщо її комплекснозначні компоненти U_k є $\mathbb{R}$-диференційовними в Ω і виконуються наступні умови в кожній точці області Ω_ζ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, e_3 = 0.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ (див., наприклад, [127, с. 79]) називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon}\,,$$

де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм $\partial\Omega^\varepsilon$.

Теорема 2.3.2. *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є замкнена квадровна поверхня для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, і Ω має квадровні перетини з площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ гіперголоморфна в області Ω_ζ і неперервна в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

У підрозділі 2.4 встановлено відповідність між моногенною функцією в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ та скінченним набором моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Для диференціального рівняння (10) алгебраїчне рівняння (11) називається *характеристичним.*

На вектори вигляду

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_1(u) &= 1, \\ \widetilde{e}_2(u) &:= a_u + I_u \,\mathrm{Rad}\, e_2\,, \\ \widetilde{e}_3(u) &:= b_u + I_u \,\mathrm{Rad}\, e_3 \end{aligned} \tag{13}$$

алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ натягнемо лінійний простір $\widetilde{E}_3(u) := \{\widetilde{\zeta}(u) = x + y\widetilde{e}_2(u) + z\widetilde{e}_3(u) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Трійка векторів (13) визначає одну пряму $\widetilde{L}(u)$ вигляду (6), яка відповідає множині необоротних елементів $\widetilde{\zeta}(u)$ простору $\widetilde{E}_3(u)$. Нехай $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}$ — деякий нескінченний циліндр в $\widetilde{E}_3(u)$, твірні якого паралельні прямій $\widetilde{L}(u)$.

Теорема 2.4.2. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (11) і нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ є моногенною в області $\Pi_\zeta \subset E_3$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$) для кожного $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ існує трійка векторів (13), яка задовольняє характеристичне рівняння $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$, і існує функція $\widetilde{\Phi}_u : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} \to \mathbb{A}_{n-m+1}^1$ змінної $\widetilde{\zeta}(u)$, яка моногенна в циліндрі*

$$\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} = \Big\{ \widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u)\ :\ f_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = f_u(\zeta)\,,\ \zeta \in \Pi_\zeta(u) \Big\}$$

і така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u\, \widetilde{\Phi}_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big).$$

З теореми 2.4.2 випливає, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (10) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — нільпотенти.

Теорема 2.4.2 залишається справедливою для випадку, коли розглядаються функції $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta := \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, $2 \le k \le 2n$, які є моногенними в області $\Pi_\zeta \subset E_k$.

У підрозділі 2.5 показано, що для побудови розв'язків рівняння (10) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду.

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}^1$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, \widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n\}$, для елементів якого справедливі правила множення Картана:

$$\widetilde{I}_r\, \widetilde{I}_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \widetilde{\Upsilon}_{r,k}^s\, \widetilde{I}_k \qquad \forall\, r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{14}$$

Як і раніше, $\mathbb{A}_n^1$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}\}$ і таблицею множення вигляду (14).

Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}^1$ називається *розширенням алгебри* $\mathbb{A}_n^1$, якщо справедливі рівності

$$\widetilde{\Upsilon}_{r,k}^s = \Upsilon_{r,k}^s$$

$$\forall\, k \in \{2, \ldots, n-1\} \quad \forall\, r, s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n^1$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$.

В теоремі 2.5.1 доведено, що в кожній алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ характеристичне рівняння (11) має розв'язки.

На алгебрі $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ визначимо лінійний оператор $\widetilde{P} : \mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1) \mapsto \mathbb{A}_n^1$ рівностями

$$\widetilde{P}(1) = 1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_k) = I_k \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_n) = 0.$$

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ і моногенними функціями в її довільному розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ задовольняють характеристичне рівняння (11). На ці вектори натягнемо лінійний простір

$$\widetilde{E}_3 := \{\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

В алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ будемо розглядати трійку $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ і лінійний простір

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) := \{\zeta = x + y\widetilde{P}(\tilde{e}_2) + z\widetilde{P}(\tilde{e}_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 2.5.6. *Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють характеристичне рівняння (11) і нехай хоча б одне з чисел a_0 чи b_0 належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Крім того, нехай функція $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \to \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ змінної $\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3$ моногенна в деякому циліндрі $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \subset \widetilde{E}_3$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_n$ трійка векторів $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ також задовольняє характеристичне рівняння (11) і функція $\Phi(\zeta) := \widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ є моногенною в циліндрі $\Pi_\zeta := \{\zeta \in \widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) : \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$ алгебри $\mathbb{A}_n$.*

З теореми 2.5.6 випливає, що клас розв'язків рівняння (10), які подаються у вигляді компонент моногенних функцій, принаймні, не звужуються при переході до розширення алгебри.

У підрозділі 2.6 застосовано результати попередніх підрозділів розділу 2 до побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків заданих рівнянь з частинними похідними, при якій використовуються моногенні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр.

Розглянемо загальне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{15}$$

де

$$E_k(u) := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \in \mathbb{R}.$$

Будемо розглядати також частинний вигляд рівняння (15), а саме, рівняння

$$E_p(u) = 0. \tag{16}$$

У пункті 2.6.2 отримано нескінченновимірну сім'ю розв'язків рівняння (16):

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t) A_k \, dt \right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{17}$$

де F_k — довільні голоморфні функції комплексної змінної, а A_k визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0 := \frac{1}{t-\xi}\,, \quad A_1 := \frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,, \;\; \xi_1 := x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_d a_{d1},$$

$$A_s = \frac{\xi_s}{(t-\xi)^2} + \frac{1}{t-\xi} \sum_{r=1}^{s-1} A_r \, B_{r,s}$$

при

$$\xi_s := x_1 a_{1s} + x_2 a_{2s} + \cdots + x_d a_{ds}\,, \;\; B_{r,s} := \sum_{k=1}^{s-1} \xi_k \Upsilon_{r,s}^{k}\,, \quad s = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Для рівняння (15) отримано таку нескінченновимірну сім'ю розв'язків:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^t A_k \, dt \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{18}$$

У пункті 2.6.3 сім'ї розв'язків (17) та (18) виписані на конкретній послідовності розширень. Як приклад, у пункті 2.6.4 розв'язки виглядів (17) та (18) виписані для одного рівняння гідродинаміки, для тривимірного рівняння Лапласа, для рівняння поперечних коливань пружного стержня, для узагальненого бігармонічного рівняння, для двовимірного рівняння Гельмгольца.

У *розділі 3* досліджуються моногенні функції зі значеннями в нескінченновимірних топологічних векторних просторах (ТВП) та нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах. Мотивацією для цього слугує той факт, що в скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій. Для цього потрібно розглядати нескінченновимірні простори.

Розглянемо нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру

$$\mathbb{F} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \right\} \tag{19}$$

над полем $\mathbb{R}$ з нормою $\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення для елементів базису має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \frac{1}{2}\, e_{4n} \quad \forall\, n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2} \Big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m} \Big) \quad \forall\, n > m \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2} \Big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n} \Big) \quad \forall\, m > n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m+1} = \frac{1}{2} \Big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1} \Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,,$$

$$e_{2n} e_{2m} = \frac{1}{2} \Big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1} \Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,.$$

Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів, тобто таку, що задовольняє умову $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$.

Помістимо алгебру $\mathbb{F}$ в ТВП

$$\widetilde{\mathbb{F}} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності. Моногенні функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}$ та ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$ досліджувались С. А. Плаксою. Зокрема, для моногенних функцій в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$ ним встановлено критерій моногенності, зв'язок з гармонічними векторами та просторовими гармонічними функціями.

У пункті 3.1.2 нами встановлено аналогічні результати в іншому ТВП, а саме: в топологічному векторному просторі

$$\widetilde{\mathbb{G}} := \left\{ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності і базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для якого таблиця множення має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_{2n+1} e_m = e_{2n+m}, \quad e_{2n} e_{2m} = -e_{2n+2m-3} - e_{2n+2m+1}$$

для всіх цілих n і m. Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів.

Нехай Ω і Ω_ζ позначають ті ж області, що і раніше. Розглядаємо функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(x, y, z)\ e_k\,, \tag{20}$$

де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ є диференційовними в Ω. Тоді функція Φ називається моногенною в Ω_ζ, якщо $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ в рівності (3). Для моногенних функцій зі значеннями в $\widetilde{\mathbb{G}}$ встановлено критерій моногенності (теорема 3.1.1) та показано, що кожна просторова гармонічна в однозв'язні області функція є першою компонентою деякої моногенної функції зі значеннями в $\widetilde{\mathbb{G}}$ (теорема 3.1.3).

Означення 3.1.1. *Вектор-функція* $\mathbf{V}$ *називається гармонічним ветором, якщо* $\mathbf{V}$ *задовольняє систему рівнянь* $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0.$

Теорема 3.1.6. *Кожна моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *породжує гармонічні вектори* $\mathbf{V} := (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ *в області* Ω *для всіх цілих чисел* m.

У підрозділі 3.2 розглядаються моногенні функції зі значеннями у комплексифікаціях $\mathbb{F}_\mathbb{C}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ відповідно алгебри $\mathbb{F}$ та ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$. Причому досліджуються моногенні функції, визначені в областях певного чотиривимірного дійсного підпростору $E_4 \subset \mathbb{F}_\mathbb{C}$. Це дає змогу довести для таких моногенних функцій аналоги основних інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера). Більше того, встановлюючи зв'язок між моногенними функціями, визначеними в областях просторів E_3 та E_4, в теоремі 3.2.8 показано, що кожна моногенна функція $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ з області $\Omega_\zeta \subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q_\xi \subset E_4$.

Розглянемо комплексифікацію $\mathbb{F}_\mathbb{C} := \mathbb{F} \oplus i\mathbb{F} \equiv \{a + ib : a, b \in \mathbb{F}\}$ алгебри $\mathbb{F}$ таку, що норма в $\mathbb{F}_\mathbb{C}$ визначається рівністю $\|c\| := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, де $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, $c_k \in \mathbb{C}$.

Вивчаються моногенні функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_\mathbb{C}$ (або в ТВП

$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$), задані на підмножині лінійного многовиду $E_4 := \{\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3 : x,s,y,z \in \mathbb{R}\}$. Області $Q \subset \mathbb{R}^4$ поставимо у відповідність область $Q_\xi := \{\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3 : (x,s,y,z) \in Q\}$ в E_4. Під *моногенними* розуміються неперервні функції $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$), які задовольняють рівність (3) при $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або, відповідно, $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$) і всіх $h \in E_4$.

В теоремі 3.2.1 отримано явний вигляд розкладу за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ головного продовження голоморфної функції комплексної змінної в алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Основні результати розділу 3 отримано в пунктах 3.2.2 та 3.2.4. Зокрема, в теоремі 3.2.3 встановлено аналог інтегральної теореми Коші для моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Нехай $\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3$, де $w \in \mathbb{C}$ і $\hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що для кожного $\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3$, де $x,s,y,z \in \mathbb{R}$, елемент $\big(\tau - \xi\big)^{-1}$ існує при всіх

$$\tau \notin S(\xi) := \Big\{\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3 :$$
$$\operatorname{Re} w = x,\ |\operatorname{Im} w - s| \le \sqrt{(y-\hat{y})^2 + (z-\hat{z})^2}\,\Big\}.$$

Теорема 3.2.5. *Нехай область $Q \subset \mathbb{R}^4$ є опуклою в напрямку осей Oy, Oz. Крім того, нехай функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ є моногенною в області Q_ξ і функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ з розкладу*

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,s,y,z)\ e_k \tag{21}$$

мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді для кожної точки $\xi \in Q_\xi$ справедлива рівність:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\xi} \Phi(\tau)\big(\tau - \xi\big)^{-1}\,d\tau\,,$$

де Γ_ξ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Q_ξ, яка один раз охоплює множину $S(\xi)$ і гомотопна колу $\{\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3 : |w - x - is| = R,\ \hat{y} = y, \hat{z} = z\}$, яке повністю міститься в Ω_ξ.

Підсумком пункту 3.2.2 є наступна теорема.

Теорема 3.2.6. *Нехай функція* $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ *неперервна в області* Q_ξ *і функції* $U_k : Q \to \mathbb{C}$ *з розкладу (21) мають неперервні частинні похідні в* Q *. Тоді функція* Φ *моногенна в* Q_ξ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *виконуються умови*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, i\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, e_2\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, e_3$$

в Q_ξ *і в* Q *виконуються співвідношення:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\right| < \infty, \tag{22}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| U_k(x+\varepsilon h_1, s+\varepsilon h_2, y+\varepsilon h_3, r+\varepsilon h_4) - U_k(x,s,y,r) -$$
$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial s}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial y}\,\varepsilon h_3 -$$
$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial r}\,\varepsilon h_4 \Bigg|\, \varepsilon^{-1} = 0 \qquad \forall\, h_1\,, h_2\,, h_3\,, h_4 \in \mathbb{R}\,; \tag{23}$$

(II) *функція* Φ *задовольняє рівність* $\int_{\partial\triangle_\xi} \Phi(\xi)d\xi = 0$ *для кожного трикутника* $\triangle_\xi$ *такого, що* $\overline{\triangle_\xi} \subset Q_\xi$ *;*

(III) *в околі кожної точки з* Q_ξ *функція* Φ *подається у вигляді збіжного степеневого ряду.*

Відзначимо, що умови (22) і (23) зумовлені нормою абсолютної збіжності в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. У той же час аналогічне твердження для функцій $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, доведене в теоремі 3.2.7, не містить цих умов.

У пункті 3.2.3 досліджено зв'язок між моногенними функціями зі значеннями в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ та просторовими потенціальними полями, а в пункті 3.2.4 для моногенних функцій $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ доведено аналоги інтегральної теореми Коші та інтегральної формули Коші.

Слід відзначити, що питання про поширення більшості тверджень, доведених для моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ чи в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, на моногенні функції, що приймають значення в комплексифікації розглянутого вище ТВП $\widetilde{\mathbb{G}}$, залишається відкритою проблемою.

У *розділі 4* вивчаються алгебраїчно–аналітичні властивості спеціальних класів відображень зі значеннями в некомутативних алгебрах.

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів $I, J, K,$ для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду (див. [57])

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

, (24)

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$.

Зазначимо, що комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре.

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2 = 1\,, \quad i_u = a_u e_1 + b_u e_2\,, \quad a_u, b_u \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

де $u = 2, 3, \ldots, m$ при $m \in \{2, 3, 4\}$, — лінійно незалежні вектори над полем $\mathbb{R}$. Зауважимо, що скрізь в підрозділах 4.1 — 4.3 $m \in \{2, 3, 4\}$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку

$$E_m := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : \; x_u \in \mathbb{R}\Big\}$$

над полем $\mathbb{R}$, породжену векторами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Множині $S \subset \mathbb{R}^m$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S\Big\} \subset E_m.$$

Позначимо

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} a_u\, x_u,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} b_u\, x_u.$$

Тоді елемент $\zeta \in E_m$ подається у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. Позначимо через $f_1(E_m)$, $f_2(E_m)$ образи простору E_m при відображенні функціоналами f_1, f_2. Далі істотним є припущення: $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар $(a_1, b_1), ..., (a_m, b_m)$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Означення 4.1.3. *Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ будемо називати право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_m.$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо правою похідною Гато відображення Φ в точці ζ.

Означення 4.1.4. *Неперервне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *будемо називати ліво-*G*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$*, якщо для кожного* $\zeta \in \Omega_\zeta$ *існує елемент* $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ *алгебри* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon} = \widehat{\Phi}'(\zeta) h \quad \forall\, h \in E_m.$$

При цьому $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ *назвемо лівою похідною Гато відображення* $\widehat{\Phi}$ *в точці* ζ*.*

Означення 4.3.5. *Неперервне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{q=1}^{4} U_q(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, e_q\,. \tag{26}$$

будемо називати H*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$*, якщо* Φ *диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці* $\zeta \in \Omega_\zeta$*, тобто якщо компоненти відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними* $x_1, x_2, ..., x_m$*, і формальний диференціал відображення*

$$d\Phi := \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial U_q}{\partial x_u}\, dx_u e_q$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} dx_u i_u$*, тобто*

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s\, d\zeta\, B_s\,,$$

де A_s, B_s *— деякі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$*–значні функції.*

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ називається *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ в точці ζ.

Означення 4.3.6. H*-моногенне відображення* Φ*, диференціал якого подається у вигляді*

$$d\Phi = d\zeta\, \Phi'_H(\zeta),$$

будемо називати право-H*-моногенним в області* Ω_ζ*.*

Точки $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u \in E_m$, утворюють дві множини

$$M^1 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Re}\, a_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Im}\, a_u = 0, \end{cases} \qquad M^2 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Re}\, b_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Im}\, b_u = 0 \end{cases}$$

в m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$.

Декілька основних результатів підрозділів 4.1 — 4.3 можна сформулювати у вигляді наступного твердження, яке сформулюємо тут для право-G-моногенних відображень.

Теорема 4.3.5. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(1) *компоненти $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (26) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_u} = i_u \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad u = 1, 2, ..., m$$

в кожній точці області Ω_ζ;

(2) *компоненти $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (26) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і відображення Φ є право-H-моногенним в області Ω_ζ.*

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, то відображення Φ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

(3) *для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ знайдеться окіл, в якому відображення Φ розкладається у степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n\,;$$

(4) *відображення* Φ *неперервне і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$.

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$ *і, крім того, область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *є опуклою в напрямку множин* M_ζ^1, M_ζ^2, *то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним тоді і тільки тоді, коли*

(5) *існують єдина пара голоморфних в області* $D_1 := f_1(\Omega_\zeta)$ *функцій* F_1, F_3 *і єдина пара голоморфних в області* $D_2 := f_2(\Omega_\zeta)$ *функцій* F_2, F_4 *таких, що в області* Ω_ζ *відображення* Φ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4\,.$$

Крім цього, у пункті 4.2.1 доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла для G-моногенного відображення, а в пункті 4.2.2 — аналог інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла. У пункті 4.2.4 доведено аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла.

У підрозділі 4.4 вивчаються кватерніонні функції, аналітичні в сенсі Хаусдорфа (H–аналітичні) та встановлюються співвідношення між H–аналітичними функціями та іншими відомими класами кватерніонних функцій. Позначимо через $e_1 = 1$, e_2, e_3, e_4 вектори канонічного базису дійсних кватерніонів $\mathbb{H}$, тобто $e_1 = 1, e_2 = i, e_3 = j, e_4 = k$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{H}$. Розглядаємо функцію $f : \Omega \to \mathbb{H}$ змінної $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ наступного вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} f_k(x)\, e_k\,. \tag{27}$$

Означення 4.4.2. *Функція* $f : \Omega \to \mathbb{H}$ *вигляду (27) називається* H*–аналітичною в області* Ω, *якщо* f *є аналітичною за Хаусдорфом в кожній точці* $x \in \Omega$, *тобто, якщо дійснозначні компоненти* f_k *є диференційовними* *функціями чотирьох дійсних змінних* x_1, x_2, x_3, x_4 *і якщо диференціал* $df_x = \sum_{k=1}^{4} df_k(x_1, x_2, x_3, x_4) e_k$ *є лінійним однорідним поліномом диференціала* $dx := dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3 + dx_4 e_4$ *, тобто,*

$$df_x = \sum_{s=1}^{16} A_s(x)\, dx\, B_s(x)\,,$$

де A_s *і* B_s *— деякі* $\mathbb{H}$*–значні функції змінної* x *.*

У цьому випадку, для кожного $x \in \Omega$ кватерніон

$$f'_H(x) := \sum_{s=1}^{16} A_s(x)\, B_s(x) \tag{28}$$

називається *похідною Хаусдорфа* (або коротко H–похідною) функції f в точці x .

Теорема 4.4.1. *Кожна кватерніонна функція з диференційовними дійснозначними компонентами є* H *–аналітичною, причому* $f'_H(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$.

У пунктах 4.4.2 — 4.4.6 встановлено, що на класі $\mathcal{C}^1(\Omega)$ наступні множини функцій є підмножиною множини H–аналітичних в Ω функцій: множина ліво-диференційовних функцій (функцій вигляду $f(x) = a + xb$, $a, b \in \mathbb{C}$), множина F–гіперголоморфних функцій (функцій, з ядра оператора Фуетера $\sum\limits_{r=1}^{4} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$), множина MT–гіперголоморфних функцій (функцій, з ядра оператора Мойсіла–Теодореско $\sum\limits_{k=2}^{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$), множина s–регулярних функцій (функцій, що подаються у вигляді збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$). При цьому показано, що H–похідна співпадає з відомими похідними для відповідних класів функцій.

У підрозділі 4.5 вивчаються класи диференційовних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Нехай $A_t = \left(\frac{-1,\ldots,-1}{\mathbb{R}}\right)$ — алгебра Келі-Діксона і задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^{2^t}$. Позначимо через $\Omega_\zeta := \{\zeta = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1} : (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega\}$ область в A_t.

Розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to A_t$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) e_k, \tag{29}$$

де $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$ і $\Phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Означення 4.5.3. *Функцію вигляду (29) будемо називати ліво-A_t-гіперголоморфною в області Ω_ζ, якщо частинні похідні першого порядку $\partial\Phi_k/\partial x_k$ існують в Ω і в кожній точці області Ω_ζ виконуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{2^t-1} e_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0.$$

Введемо позначення

$$\phi_1 = x_0 + e_1 x_1, \quad \phi_2 = \frac{1}{e_1}(x_0 + e_1 x_1),$$

$$\rho_{2s-1} = x_{2s} - e_1 x_{2s+1}, \quad \rho_{2s} = -\frac{1}{e_1}(x_{2s} - e_1 x_{2s+1}), \;\; s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}.$$

Позначимо через $\mathbb{C}_{2s}$ площини $\{x_{2s} + e_1 x_{2s+1} \,:\, x_{2s}, x_{2s+1} \in \mathbb{R}\}$ і через $D_{2s} := \{(x_{2s},\, x_{2s+1}) : x_{2s} + e_1 x_{2s+1} \in \mathbb{C}_{2s}\}$, $s \in \{0, 1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$ евклідові площини. Нехай G_{2s} — області в $\mathbb{C}_{2s}$ і $\widetilde{G}_{2s}$ — відповідні області в D_{2s}.

Теорема 4.5.9. *Нехай $v\,(\phi_1, \phi_2)$ і $v\,(\rho_{2s-1}, \rho_{2s})$ — раціональні функції, визначені у відповідних областях $G_0 \subset \mathbb{C}_0$ і $G_{2s} \subset \mathbb{C}_{2s}$, $s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$. Тоді відображення*

$$F_t\,(\zeta) = v\,(\phi_1, \phi_2) +$$

$$+\sum_{i=1}^{t-1} \Big(\sum_{k=1}^{i} \Big(\sum_{r=1}^{k-1} v\,(\rho_{M_{rki}-1}, \rho_{M_{rki}})\, e_{2^r}) e_{2^{r+1}} \ldots) e_{2^k}\Big) e_{2^i}\Big) + \sum_{i=1}^{t-1} \left(v\,(\rho_{2^i-1}, \rho_{2^i})\, e_{2^i}\right),$$

де $M_{rki} = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i$ буде ліво-A_t-гіперголоморфною функцією в області $\Theta \subset A_t$, яка конгруентна області $\widetilde{G}_0 \times \widetilde{G}_2 \times \widetilde{G}_4 \times ... \times \widetilde{G}_{2^{t-1}-1} \subset \mathbb{R}^{2^t}$ при $t \geq 1$.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

До початку XX ст. різними вченими розвивалась теорія функцій гіперкомплексної змінної в асоціативних алгебрах, не відокремлюючи алгебри комутативні і некомутативні. Але, починаючи з 30-х років XX ст., почали з'являтись нові напрямки в некомутативному аналізі, які базувалися на специфіці некомутативних алгебр. Тому з цього часу комутативний і некомутативний гіперкомплексний аналіз розвивалися в різних, практично неперетинних, напрямках. Причому подальший розвиток теорії гіперкомплексних функцій все більше грунтувався на специфіці комутативних і некомутативних алгебр. Виходячи з цього, огляд літератури розділено на два підрозділи. В підрозділі 1.1 наведено огляд основних напрямків, ідей та результатів з теорії функцій в некомутативних асоціативних алгебрах, а в підрозділі 1.2 — в комутативних асоціативних алгебрах, а також в нескінченновимірних комутативних алгебрах та нескінченновимірних просторах з комутативним множенням.

1.1. Гіперкомплексний аналіз в некомутативних алгебрах

Розвиток некомутативного гіперкомплексного аналізу почався разом з відкриттям кватерніонів. В 1843 році У. Гамільтон [92] побудував некомутативну чотиривимірну алгебру кватерніонів з базисом $\{1, i, j, k\}$, для елементів якого виконуються наступні правила множення:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j.$$

При цьому за допомогою так званого набла-оператора

$$\nabla := i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

У. Гамільтон записав основні поняття векторного аналізу у кватерніонній формі. Так, формальний вектор

$$\nabla u(x,y,z) = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}$$

є градієнтом дійснозначної функції $u(x,y,z)$, а дія оператора ∇ на вектор-функцію $W(x,y,z) := iu(x,y,z) + jv(x,y,z) + kw(x,y,z)$ пов'язана з дивергенцією і ротором:

$$\nabla W(x,y,z) = -\mathrm{div}\, W + \mathrm{rot}\, W,$$

де

$$\mathrm{div}\, W := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

$$\mathrm{rot}\, W := i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Тривимірний оператор Лапласа, який діє на дійснозначну функцію $u(x,y,z)$, також виражається за допомогою оператора ∇:

$$\Delta_3 u(x,y,z) = -\nabla^2 u(x,y,z)\,.$$

Проте при розвитку теорії функцій $W(q)$ кватерніонної змінної $q := xi + yj + zk$, що задовольняють систему рівнянь

$$\mathrm{div}\, W = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\, W = 0 \tag{1.1}$$

з'явилися істотні труднощі, пов'язані з обмеженістю ефективних можливостей конструювання таких функцій.

Зараз кватерніонний аналіз активно розвивається як окремий напрямок в математиці завдяки його численним застосуванням в різних галузях науки, переважно в математичній фізиці та теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [90, 107]). Реалізація такого зв'язку вимагає введення спеціальних класів кватерніонних "диференційовних" функцій, компоненти яких задовольняють певні системи диференціальних рівнянь типу системи Коші – Рімана.

Початком кватерніонного аналізу у дійсному тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ була робота Г. Мойсіла і Н. Теодореско [136], у якій вперше запропоновано тривимірний аналог системи рівнянь Коші – Рімана:

$$\begin{cases} 0 & + & \dfrac{\partial u}{\partial x} & + & \dfrac{\partial v}{\partial y} & + & \dfrac{\partial w}{\partial z} & = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & + & 0 & - & \dfrac{\partial v}{\partial z} & + & \dfrac{\partial w}{\partial y} & = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} & + & \dfrac{\partial u}{\partial z} & + & 0 & - & \dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial z} & - & \dfrac{\partial u}{\partial y} & + & \dfrac{\partial v}{\partial x} & + & 0 & = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Розглядаючи кватерніоннозначну функцію

$$f(xi + yj + zk) = s(x, y, z) + i\,u(x, y, z) + j\,v(x, y, z) + k\,w(x, y, z),$$

де i, j, k — кватерніонні базисні одиниці, а x, y, z — дійсні числа, зауважимо, що система (1.2) може бути записана у вигляді рівності

$$\mathcal{D}[f] := \frac{\partial f}{\partial x}\,i + \frac{\partial f}{\partial y}\,j + \frac{\partial f}{\partial z}\,k = 0. \tag{1.3}$$

При цьому внаслідок факторизації оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right) \circ \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) =: -\mathcal{D} \circ \mathcal{D}'$$

кожен розв'язок рівняння (1.3) задовольняє рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Функції, які задовольняють умови, аналогічні до умов Коші – Рімана, в науковій літературі називають по-різному. Наприклад, в роботах Ф. Брекса і

Р. Деланге [51], С. Бернштейн [46], Дж. Раяна [175] такі функції називають моногенними, в роботах А. Садбері [199], Ф. Коломбо, І. Сабадіні та Д. Струппи [63] вони називаються регулярними, а в монографії В. Кравченка і М. Шапіро [107] і в роботі В. Шпрьоссіга [197] — гіперголоморфними.

В роботі [136] введено поняття *голоморфного вектора* як кватерніоннозначної вектор-функції, компоненти якої неперервно диференційовні і задовольняють систему (1.2), що дістала назву системи Мойсіла – Теодореско. В тій же роботі [136] автори довели аналог теореми Морера, аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші. Започатковані в [136] дослідження були продовжені в роботі [4], де введено поняття інтеграла типу Коші та досліджено існування його граничних значень, а також знайдено його застосування до систем сингулярних інтегральних рівнянь.

Ряд математиків, зокрема, Дж. Раян [175] розглядають оператор Дірака

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \sum_{r=1}^{n} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$$

в n-вимірній кліффордовій алгебрі Cl_n з базисом $\{e_r\}_{r=1}^{n}$. В роботі [175] для граничних значень деякого аналога інтеграла типу Коші, який належить ядру оператора $\widetilde{\mathcal{D}}$ в областях з ляпуновською межею, встановлено аналоги формул Сохоцького. В роботі Х. Борі–Рейєса та Р. Абреу–Блая [40] цей результат узагальнено на більш загальний клас областей.

В роботі [68] Р. Деланге, Р. Краусхар та Г. Мальонек отримали зв'язок між різними типами диференційовності в алгебрі кватерніонів та в кліффордових алгебрах [52].

Р. Фуетер [82] запропонував чотиривимірне узагальнення системи Мойсіла

– Теодореско:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

і назвав функції, які задовольняють систему (1.4), — *регулярними*. Система (1.4) рівносильна рівнянню

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k = 0. \tag{1.5}$$

Для функцій, регулярних в областях спеціального вигляду, в роботі А. Садбері [199] доведено аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші, а також розглянуто *ліво-диференційовні* функції змінної $q = t + xi + yj + zk$, для яких існує границя

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h \to 0} \Big(h^{-1} \big(f(q+h) - f(q) \big) \Big) \qquad \forall h \in \mathbb{H}$$

і доведено, що ліво-диференційовними функціями є лише лінійні функції $f(q) = a + qb$ при всіх $a, b \in \mathbb{H}$. Такий же результат раніше був встановлений в роботі А. Мейлихзона [13].

В статті А. Перотті [141] вивчаються властивості розв'язків рівняння (1.5), при цьому встановлено деякі критерії регулярності функцій у вигляді операторних рівностей і для регулярних функцій розв'язано задачу Неймана.

Згадані дослідження разом із застосуваннями у деяких моделях математичної фізики відображені в монографії В. Кравченка і М. Шапіро [107]. Слід також відмітити, що так звані α*-голоморфні* функції f, які визначаються в [107] рівністю

$$\alpha f + \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k = 0,$$

де α — кватерніон, задовольняють тривимірне рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \alpha^2 f = 0.$$

В монографії [107] для α-голоморфних функцій отримано результати, подібні до класичних результатів теорії аналітичних функцій комплексної змінної: інтегральну теорему та інтегральну формулу Коші, встановлено аналоги формул Сохоцького та розв'язано деякі крайові задачі для α-голоморфних функцій.

Останні дослідження у цьому напрямку (див., наприклад, [96, 179]) полягають в різного роду узагальненнях результатів роботи [107].

Ф. Хаусдорф [93] запропонував інше означення аналітичної функції в довільній асоціативній (комутативній або некомутативній) алгебрі $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{C}$ з одиницею, яке може бути сформульовано у наступному вигляді. Функція

$$f(\eta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k \,, \tag{1.6}$$

де e_k — базисні елементи алгебри $\mathbb{A}$, називається H*–аналітичною* функцією змінної $\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, якщо компоненти f_k розкладу (1.6) є аналітичними функціями комплексних змінних $\eta_1, \ldots, \eta_n$ і диференціал

$$df := \sum_{k=1}^{n} df_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j} \, d\eta_j \, e_k$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} d\eta_k \, e_k$, тобто

$$df = \sum_{s=1}^{n^2} A_s \, d\eta \, B_s \,,$$

де A_s і B_s — деякі $\mathbb{A}$–значні функції.

При цьому значення $f'(\eta) := \sum\limits_{s=1}^{n^2} A_s \, B_s$ називають похідною Хаусдорфа функції $f(\eta)$.

Розвиваючи ідеї Хаусдорфа, Ф. Рінглеб [166] і С. Воловельська [207, 208] розвинули теорію функцій в асоціативних некомутативних алгебрах з одиницею над полем дійсних або комплексних чисел. Зокрема, Ф. Рінглеб [166] розвиває теорію H–аналітичних функцій в довільній скінченновимірній напівпростій (тобто такій, що є прямою сумою простих алгебр) алгебрі над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. При цьому він розглядає функції, які визначені і приймають значення у всій алгебрі. Звідси, зокрема, випливає, що в алгебрі кватерніонів Сегре довільну H–аналітичну функцію $F(\zeta)$ бікомплексної змінної $\zeta = z_1 I_1 + z_2 I_2$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, можна подати за допомогою двох аналітичних функцій F_1, F_2 комплексної змінної у вигляді $F(\zeta) = F_1(z_1)I_1 + F_2(z_2)I_2$. В підрозділі 2.1 даної дисертації подібне представлення отримано в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі.

В роботі [208] С. Воловельська поглибила ідею Хаусдорфа на випадок тривимірної ненапівпростої алгебри над полем $\mathbb{R}$. Зокрема, вона вимагала не лише щоб диференціал функції df був лінійним однорідним поліномом диференціала аргумента $d\eta$, а й щоб усі диференціали до k-го порядку $d^k f$ були лінійними відповідного степеня однорідними поліномами диференціала $d\eta$. Натуральне число k визначається структурою алгебри. Такі функції f за умови k разів неперервної диференційовності компонент названо моногенними. Воловельська отримала опис моногенних функцій в спеціальній тривимірній некомутативній алгебрі над полем $\mathbb{R}$. Результати роботи [208] узагальнені в роботі [207], де авторка отримала конструктивний опис моногенних функцій в ненапівпростих асоціативних алгебрах першої категорії над полем $\mathbb{R}$.

В роботі М. Дегтерьової [67] показано, що в комутативній алгебрі над $\mathbb{R}$ диференційовність за Хаусдорфом співпадає із диференційовністю за Шефферсом (див. [178]).

В. Портман [159] визначає похідну від H–аналітичної функції в асоціативних алгебрах над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і досліджує питання про її співвідношення з деякими іншими означеннями похідної.

В роботі Р. Рінехарта і Дж. Вілсона [165] вводиться клас диференційовних в деякому сенсі функцій в довільній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, і вивчається питання про співвідношення між цими функціями і H–

аналітичними функціями на різних класах алгебр.

У підрозділі 4.4 дисертаційної роботи ідею Хаусдорфа розвинуто в алгебрі кватерніонів. Вводиться новий клас кватерніонних функцій — функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Встановлюється співвідношення між відомими класами кватерніонних "диференційовних" функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Також досліджується питання про співвідношення між відомими означеннями кватерніонних похідних та похідною за Хаусдорфом.

Іншим, порівняно новим, напрямком кватерніонного аналізу в $\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^4$ є так званий модифікований кватерніонний аналіз, започаткований Г. Льойтвілером на початку 90-х років XX ст. (див., наприклад, [75, 95, 115]). Він вивчає розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{\partial s}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + v = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Двічі неперервно диференційовний розв'язок

$$f(t + xi + yj) = s(t, x, y) + iu(t, x, y) + jv(t, x, y) \tag{1.8}$$

цієї системи називається *гіперголоморфною* функцією.

У системі Г. Льойтвілера в $\mathbb{R}^3$ перші дві компоненти s, u гіперголоморфної функції (1.8), де i, j — базисні кватерніонні одиниці, задовольняють рівняння Лапласа – Бельтрамі

$$y\Delta_3 s - \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_3 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а третя компонента v — рівняння

$$y^2\Delta_3 v - y\frac{\partial v}{\partial y} + v = 0.$$

На відміну від робіт [82, 107, 136, 199], в підході Г. Льойтвілера гіперголоморфною є степенева функція, а частинні похідні гіперголоморфної функції також гіперголоморфні. В той же час між описаними вище напрямками існує певний зв'язок (див. [75]).

В роботі [95] розвинуто аналогічний підхід в просторі $\mathbb{R}^4$. Основною метою робіт Г. Льойтвілера та його наступників є побудова розв'язків системи (1.7) (або аналогічної системи в $\mathbb{R}^4$) у вигляді поліномів та функціональних рядів. При цьому згадані ряди будуються за певною системою базисних кватерніонних поліномів. Такі результати є в роботах [75, 95, 115, 116].

Ще однією сучасною теорією в кватерніонному аналізі є теорія s-*регулярних* функцій, які введені Г. Джентілі та Д. Струппою в роботах [84, 85] в результаті розвитку ідеї К. Кулліна [64], суть якої полягає в наступному.

Нехай $q = t + xi + yj + zk =: t + \mathrm{Im}\ q$, де t, x, y, z — дійсні числа, а i, j, k — базисні кватерніонні одиниці. Кожен кватерніон $q = t + \mathrm{Im}\ q$ при $q \neq t$ можна подати у вигляді "комплексного числа" з новою уявною одиницею I, а саме: $q = t + I\,|\mathrm{Im}\ q|$, де $I := \frac{\mathrm{Im}\ q}{|\mathrm{Im}\ q|}$, а $|\cdot|$ — модуль кватерніона. Очевидно, що $I^2 = -1$. Тоді функція f називається s-*регулярною* (див. [84]), якщо її звуження в кожну "комплексну" площину $\mathbb{R} + I\mathbb{R}$ є "аналітичною" функцією. Очевидно, що s-регулярними є всі кватерніонні поліноми. Зараз теорія s-регулярних функцій продовжує інтенсивно розвиватися (див. монографії [63, 86]).

Вартий уваги також підхід О. Дзагнідзе [70] (див. також оглядову статтю [71]). Він використовує подання кватерніона $z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ у вигляді $z = (x_0 + x_2 j) + (x_3 + x_1 j)k =: z_1 + z_2 k$, $z = (z_1, z_2)$. У такому ж вигляді подаємо функцію $f(z) = (f_0 + f_2 j) + (f_3 + f_1 j)k$. Функція $f(z)$ називається $\mathbb{C}^2$-голоморфною в точці $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, якщо комплексні функції $f_0(z) + f_2(z)j$, $f_3 + f_1 j$ є $\mathbb{C}^2$-диференційовними в точці $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ і виконуються певні аналоги умов Коші–Рімана. Використовуючи зв'язок $\mathbb{C}^2$-голоморфних функцій з голоморфними функціями двох комплексних змінних, Дзагнідзе доводить аналог інтегральної формули Коші, розклад $\mathbb{C}^2$-голоморфної функції в степеневий ряд і т. д.

В підрозділах 4.1 — 4.3 дисертаційної роботи введено нові класи моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, так звані, право-G-моногенні відображення і ліво-G-моногенні відображення. Встановлено конструктивні описи усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші, аналоги інтегральної формули Коші, аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень. Досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, встановлено їх зв'язок з G-моногенними відображеннями та доведено теорему про еквівалентність різних означень право-G-моногенних і ліво-G-моногенних відображень.

Узагальнення умов Коші–Рімана в алгебрах Келі–Діксона (див., наприклад, [177]) здійснено в роботі [118], де визначені диференційовні функції від змінних, що належать алгебрам Келі–Діксона. Для таких функцій встановлено аналоги основних результатів комплексного аналізу, які можуть бути використані для подальшого вивчення спеціальних функцій зі значеннями в алгебрах Келі–Діксона. При цьому відкритим питанням залишається можливість конструктивної побудови заданого класу функцій.

В підрозділі 4.5 даної дисертаційної роботи вивчаються ліво-A_t-гіперголоморфні (належать ядру оператора Дірака) функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона. Запропоновано алгоритм конструктивної побудови таких функцій. Доведено, що для вивчення ліво-A_t-голоморфних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона $A_t = \left(\frac{\gamma_1,\ldots,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ достатньо обмежитись вивченням ліво-A_t-голоморфних функцій в алгебрах $\left(\frac{sign(\gamma_1),\ldots,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$.

1.2. Моногенні функції в комутативних асоціативних алгебрах

Побудова теорії функцій в асоціативних алгебрах передбачає, перш за все, визначення класу диференційовних функцій, на якому буде будуватися аналіз. Визначення такого класу функцій, очевидно, повинно базуватися на узагальненнях поняття аналітичності з теорії функцій комплексної змінної. Але специфіка асоціативних алгебр призводить до того, що узагальнення різних означень комплексної аналітичності породжує не еквівалентні класи аналітичних функцій в алгебрах. Далі розглянемо різні підходи до визначення класів аналітичних функцій в асоціативних алгебрах та проаналізуємо основні результати.

Спершу відмітимо роботу 1892 року К. Сегре [181], де побудовано чотиривимірну комутативну алгебру кватерніонів (які ще називаються бікомплексними числами) з таблицею множення:

$$i^2 = -1, \;\; j^2 = -1, \;\; k^2 = 1,$$

$$kj = jk = -i, \;\; ji = ij = k, \;\; ik = ki = -j.$$

Кожне бікомплексне число $\zeta = a + bi + cj + dk$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, подається у вигляді

$$\zeta = (a + bi) + (c + di)j =: z_1 + z_2 j,$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ і $j^2 = -1$. Тобто алгебра бікомплексних чисел є, так би мовити, алгеброю комплексних чисел з базисом $\{1, j\}$ над полем $\mathbb{C}$. З використанням вказаного зв'язку цієї алгебри з алгеброю комплексних чисел встановлено деякі аналоги результатів теорії аналітичних функцій комплексної змінної (див., наприклад, роботи М. Футагава [83], Дж. Скорца – Драгоні [180], У. Моріна [137], Д. Боккалетті та ін. [48], Ф. Катоні [58], С. Рьонна [168], Д. Пінотсіса [142], Дж. Райлі [164], А. Явтокаса [102], Д. Рохона та М. Шапіро [167], Е. М. Луни-Елізаррарас та ін. [124]).

В роботі [178] 1893 року Г. Шефферс розглядає алгебри, в яких множення лише дистрибутивне відносно додавання. Розглядаючи змінну $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, де e_k — базисні вектори алгебри, Шефферс називає функцію $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_1, x_2, ..., x_n) e_k$ диференційовною, якщо існує дві функції $f'(x)$ та $'f(x)$, незалежні від dx_k, такі, що $df = f' \cdot dx = dx \cdot' f$. Якщо задана алгебра з одиницею, то ним доведено, що остання умова виконується тоді і тільки тоді, коли в алгебра комутативна і асоціативна. При цьому $f'dx = dx'f$ і похідна єдина $f' =' f$. Тобто означення Шефферса змістовне лише для комутативних асоціативних алгебр. У цьому випадку отримано аналоги умов Коші – Рімана, а також доведено, що похідна від аналітичної функції знову є аналітичною функцією.

Намагаючись означити аналітичні функції в некомутативних алгебрах, Шефферс переходить до розгляду рядів. Зокрема, функцію f називає аналітичною в точці x_0, якщо в околі цієї точки вона подається у вигляді абсолютно збіжного степеневого ряду $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Він доводить: якщо компоненти $f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ розкладаються в ряд за степенями $(x_1 - x_1^0) ... (x_n - x_n^0)$, то й функція f розкладається в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ з гіперкомплексними коефіцієнтами a_k.

Інший клас аналітичних функцій був запропонований В. Федоровим в роботах [26,27]. За В. Федоровим гіперкомплексна функція $f(w)$ аналітична по гіперкомплексній функції $\xi(w)$ в області D, якщо існує така гіперкомплексна функція $Y(w)$ така, що в кожній точці цієї області виконується співвідношення $df(w) = Y(w) d\xi(w)$. Функція $Y(w)$ називається похідною функції $f(w)$ по функції $\xi(w)$. В згаданих роботах автором довів аналоги основних теорем комплексного аналізу (теорема Коші, формула Коші, теорема єдиності, розклади в ряд тощо). Ця тематика була продовжена в роботах І. Морева (див., наприклад, [16]). А в роботі В. Гусева [6] підхід Федорова застосовано до алгебри кватерніонів.

Дж. Ворд [210] описав матричний метод побудови умов Коші – Рімана в довільній скінченновимірній асоціативній алгебрі з одиницею. Уточнення результатів роботи [210] для випадку комутативної алгебри було зроблено Д. Вагнером в роботі [209]. Використовуючи результати роботи [209], Дж. Ворд [211] розробив метод знаходження розв'язків диференціальних рівнянь типу Коші – Рімана в довільній скінченновимірній комутативній алгебрі з одиницею за допомогою рядів з цієї алгебри.

Е. Трампус [205] запропонував використовувати в комутативних алгебрах диференційовність в сенсі Фреше, а в роботі Дж. Боні [54] встановлено співвідношення між функціями, диференційовними в сенсі Фреше та в сенсі Е. Хілле [29].

Інше означення диференційовності запропоноване Е. Лорхом (див. [117]). Нехай $\mathbb{A}$ — комутативна асоціативна алгебра, E_3 — тривимірний дійсний підпростір в $\mathbb{A}$ і Ω — область в E_3. Функція $f : \Omega \to \mathbb{A}$ називається диференційовною за Лорхом в точці $\zeta \in \Omega$, якщо існує елемент $f'_L(\zeta)$ алгебри такий, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для усіх $h \in E_3$, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\|f(\zeta + h) - f(\zeta) - hf'_L(\zeta)\| \leq \|h\|\varepsilon.$$

Очевидно, що похідна Лорха $f'_L(\zeta)$ є функцією змінної ζ, тобто $f'_L : \Omega \to \mathbb{A}$.

Разом з тим, відображення $B_\zeta : E_3 \to \mathbb{A}$, яке визначене рівністю $B_\zeta h := hf'_L(\zeta)$, є лінійним обмеженим оператором. Тому, якщо функція f диференційовна за Лорхом в точці ζ, то в цій точці f має похідну Фреше B_ζ (див. [29, с. 129]). Обернене твердження не правильне. Контрприклад можна знайти в монографії [29, с. 129].

Для диференційовних у такому сенсі функцій, заданих в опуклих областях комутативної асоціативної банахової алгебри, Е. Лорхом встановлено ряд властивостей, аналогічних до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної (зокрема, інтегральна теорема і формула Коші, розклад в степеневий ряд та теорема Морера). В роботі [47] Е. Блюм поширив результати Лорха на функції, які задані в довільних областях (не опуклих) комутативної асоціативної банахової алгебри, а також встановив результати про розклад таких функцій в ряд Лорана та про їх аналітичне продовження.

З іншого боку, І. Мельниченко (див. [129, 130]) запропонував розглядати гіперкомплексні функції, диференційовні за Гато, а похідну Гато розглядав як функцію $\Phi_G : \Omega \to \mathbb{A}$.

Функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ називається диференційовною за Гато в точці $\zeta \in \Omega$, якщо існує елемент $\Phi'_G(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{1.9}$$

Очевидно, що похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ є функцією змінної ζ і узагальнює класичне поняття похідної за напрямком.

Ліва частина рівності (1.9) називається диференціалом Гато. Відомо, що в загальному випадку диференціал Гато не є лінійною функцією від h. Однак, якщо похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ існує, то диференціал Гато (1.9) є лінійним обмеженим оператором від h. В той же час, обернене твердження не правильне (див. приклад в [29, с. 115]).

Зрозуміло, що означення похідної Лорха і похідної Гато враховують існування необоротних елементів h в алгебрі $\mathbb{A}$. Крім того, очевидним є твердження: якщо функція Φ диференційовна за Лорхом в точці ζ, то вона диференційовна й за Гато, причому $\Phi'_L(\zeta) = \Phi'_G(\zeta)$. Обернене твердження не правильне, оскільки з існування похідної навіть по всіх напрямках не випливає сильної диференційовності функції.

Проте в підрозділі 2.1 дисертаційної роботи буде показано, що з диференційовності за Гато функції Φ за умови неперервності Φ та при певних додаткових умовах випливає диференційовність функції Φ за Лорхом.

В наведених вище роботах (крім робіт І. Мельниченка) функції гіперкомплексної змінної розглядаються виключно з точки зору теорії функцій, без дослідження можливостей будь-яких застосувань. Такі дослідження починаються з робіт П. Кетчума. Так, в роботі П. Кетчума [105] було вперше використано аналітичні функції, що приймають значення в комутативній алгебрі, для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа. Він показав, що кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє рівняння

$$\Delta_3\Phi(\zeta) \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.10}$$

у випадку, коли елементи e_1, e_2, e_3 комутативної алгебри задовольняють умови

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,, \tag{1.11}$$

оскільки

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0\,, \tag{1.12}$$

де $\Phi'' := (\Phi')'$ і $\Phi'(\zeta)$ визначена рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$.

Трійку векторів e_1, e_2, e_3, що задовольняють умову (1.11) П. Кетчум назвав гармонічною і алгебру з такою трійкою — гармонічною алгеброю. Також як приклад гармонічної алгебри він розглянув наведену вище алгебру бікомплексних чисел Сегре.

Пізніше М. Рошкулець встановив зв'язок між моногенними функціями в комутативних алгебрах і рівняннями з частинними похідними. Він визначав моногенні функції f змінної w рівністю $df(w)\,dw = 0$. Так в роботі [169] М. Рошкулець запропонував процедуру побудови нескінченновимірного топологічного простору з комутативним множенням такого, що моногенні функції в ньому є усіма аналітичними розв'язками рівняння

$$\sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_p=N} C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\,\frac{\partial^N\Phi}{\partial x_0^{\alpha_0}\,\partial x_1^{\alpha_1}\,\ldots\partial x_p^{\alpha_p}} = 0, \qquad C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Зокрема, такий нескінченновимірний топологічний простір побудовано для рівняння Лапласа (1.10). В роботі [170] Рошкулець знайшов зв'язок між моногенними функціями в комутативних алгебрах і системами диференціальних рівнянь в частинних похідних.

В роботах К. Кунца [108, 109] запропоновано метод формальної побудови розв'язків рівняння Лапласа (1.10) за допомогою функцій, що приймають значення в комутативній асоціативній (скінченновимірній чи нескінченновимірній) алгебрі з одиницею, в якій існують елементи β_1, β_2, що задовольняють співвідношення $\beta_1^2 + \beta_2^2 + 1 = 0$. Нехай $w := \beta_1 x + \beta_2 y + z$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Використовуючи рівність $\beta_2^2 = -1 - \beta_1^2$, К. Кунц [109] записав функцію w^n у вигляді

$$w^n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x,y,z)\beta_1^k + \beta_2 \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x,y,z)\beta_1^k$$

і показав, що функції $f_k(x,y,z)$, $k = 0,1,\ldots,n$, і $g_k(x,y,z)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, утворюють набір $2n-1$ лінійно незалежних розв'язків рівняння (1.10). Крім того, він показав, що лінійними комбінаціями цих функцій виражаються усі сферичні функції степеня n.

І. П. Мельниченко для опису розв'язків рівняння (1.13) використовував функції, диференційовні за Гато (див. [129, 130]). Він почав реалізовувати такий підхід для тривимірного рівняння Лапласа (1.10) (див. [130]). Послідовно вибираючи замість вектора h в рівностях вигляду (1.9), які визначають похідні Гато $\Phi'(\zeta)$ і $\Phi''(\zeta)$, базисні елементи e_1, e_2, e_3, одержуємо рівності

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = e_1^2\,\Phi''(\zeta), \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = e_2^2\,\Phi''(\zeta), \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = e_3^2\,\Phi''(\zeta),$$

наслідком яких і співвідношення (1.11) є рівності вигляду (1.12) для функції Φ.

В роботі [129] знайдено усі тривимірні гармонічні алгебри і розроблено метод для знаходження усіх гармонічних базисів (тобто таких, що задовольняють умову (1.11)) в них. При цьому встановлено, що з існуючих чотирьох тривимірних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ тільки три є гармонічними (тобто, містять гармонічні базиси) (див. також [131]).

Пізніше, в роботах [145, 152, 161] було описано усі моногенні (тобто, неперервні і диференційовні за Гато) функції в усіх трьох тривимірних гармонічних алгебрах. Так, в роботі [152] розглядається тривимірна гармонічна алгебра $\mathbb{A}_3$ з базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ і наступними правилами множення для базисних векторів: $\rho_1^2 = \rho_2$, $\rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0$. Там показано, що кожна моногенна функція Φ змінної $\zeta = \xi_1 + \xi_2\,\rho_1 + \xi_3\,\rho_2$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$, подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F(\xi_1) + \Big[\xi_2 F'(\xi) + F_1(\xi_1)\Big]\rho_1 +$$

$$+\Big[\xi_3 F'(\xi_1)+\frac{\xi_1^2}{2}F''(\xi_1)+\xi_2 F_1'(\xi_1)+F_2(\xi_1)\Big]\rho_2, \qquad (1.14)$$

де F, F_1, F_2 — деякі голоморфні функції комплексної змінної.

Іншою тривимірною гармонічною алгеброю є алгебра $\mathbb{A}_2$ з базисом $\{I_1, I_2, \rho\}$ і з такими правилами множення для базисних векторів: $I_1^2 = I_1$, $I_2^2 = I_2$, $I_1 I_2 = 0$, $I_2\rho = \rho$, $I_1\rho = 0$. Як показано в роботі С. А. Плакси та Р. П. Пухтаєвича [145], кожна моногенна функція Φ змінної $\zeta = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3\rho$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$, подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \Big[\xi_3 F_2'(\xi_2) + F_0(\xi_2)\Big]\rho, \qquad (1.15)$$

де F_1, F_2, F_0 — деякі голоморфні функції комплексної змінної. І нарешті третьою тривимірною гармонічною алгеброю є напівпроста алгебра $\mathbb{A}_1$ з базисом $\{I_1, I_2, I_3\}$ і такими правилами множення для базисних векторів: $I_1^2 = I_1$, $I_2^2 = I_2$, $I_3^2 = I_3$, $I_1 I_2 = I_1 I_3 = I_2 I_3 = 0$. У статті [161] доведено, що кожна моногенна функція Φ змінної $\zeta = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$, подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + F_3(\xi_3)I_3, \qquad (1.16)$$

де F_1, F_2, F_3 — деякі голоморфні функції комплексної змінної.

Використовуючи зображення моногенних функцій (1.14) – (1.16), в роботах [143, 146, 192] доведено нескінченну диференційовність за Гато моногенних функцій, а також інтегральні теореми для цих функцій, які є аналогами класичних теорем комплексного аналізу (теорема і формула Коші, теорема Морера, теореми Тейлора і Лорана тощо). Зауважимо, що в статті [146] отримано узагальнення зображення (1.16) для випадку n-вимірної напівпростої алгебри.

Варто зазначити, що до наведених вище трьох робіт результат про опис усіх аналітичних (в сенсі розкладу в абсолютно збіжний степеневий ряд) функцій був отриманий лише у двовимірних алгебрах — це алгебри подвійних і дуальних чисел та їх комплексифікації. Наведемо ці результати. Зокрема, в алгебрі подвійних (або гіперболічних) чисел $\mathbb{P} := \{z = xI_1 + yI_2 \,:\, I_1^2 = I_1, I_2^2 =$

$I_2, I_1I_2 = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ кожна аналітична функція $\Phi(z) = u(x,y)I_1 + v(x,y)I_2$ з аналітичними компонентами u, v подається у вигляді $\Phi(z) = F_1(x)I_1 + F_2(y)I_2$, де F_1, F_2 — аналітичні функції дійсної змінної. Цей результат багато разів передоводився, починаючи з роботи [206]. В алгебрі дуальних чисел $\mathbb{D} := \{z := x + \delta y : \delta^2 := 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ відомий наступний результат (див., наприклад, [39]): кожна аналітична функція $\Phi(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ з аналітичними компонентами u, v подається у вигляді $\Phi(z) = u(x) + \big(yu'(x) + k(x)\big)\delta$, де $u(x)$ і $k(x)$ — аналітичні функції дійсної змінної.

Конструктивний опис аналітичних функцій в алгебрі комплексифікованих подвійних чисел, який отримано Ф. Рінглебом [166], наведено вище при цитуванні відповідної роботи. А конструктивний опис усіх моногенних функцій в алгебрі комплексифікованих дуальних чисел $\mathbb{B} := \{\zeta = \xi_1 + \xi_2\rho : \rho^2 := 0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}\}$ отримано С. В. Грищуком та С. А. Плаксою в роботі [88]: кожна моногенна функція Φ подається у вигляді $\Phi(\zeta) = F(\xi_1) + \Big[\xi_2 F'(\xi_1) + F_0(\xi_1)\Big]\rho$, де F, F_0 — деякі голоморфні функції комплексної змінної. Раніше цей результат був отриманий В. Ф. Ковальовим [10] при додатковій умові на геометрію області визначення функції.

У розділі 2 даної дисертації отримано узагальнення наведених вище конструктивних описів, а саме: отримано конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Для згаданих моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла, теореми Морера, аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла. Доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла по негладкій поверхні для функцій зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі.

У підрозділах 2.4 – 2.6 конструктивний опис моногенних функцій застосовано до побудови нескінченновимірних сімей розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

До цього часу накопичилось багато фактів, які характеризують розв'язки рівняння

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.17}$$

де P — поліном. Майже всі результати можна віднести до двох напрямків. Перший напрямок — це питання, пов'язані з теоремами існування. Другий напрямок — це опис розв'язків і вивчення їх властивостей.

У теоремах існування стверджується, що в певному класі функцій рівняння (1.17) має розв'язки. Перші загальні теореми існування були встановлені Б. Мальгранжем [125] та Л. Еренпрайсом [74] в 1953—1955 рр. Як зазначає М. С. Агранович у статті [2], теореми цих авторів є „чистими“ теоремами існування: в них не вказувався спосіб побудови розв'язків. Нагадаємо ці результати.

Експоненціальним поліномом називається добуток поліномів в $\mathbb{R}^n$ (з комплексними коефіцієнтами) на експоненту $\exp\langle x, \xi\rangle$, де $\xi \in \mathbb{C}^n$. Нехай для рівняння (1.17) відкрита множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є P-повною (зокрема, опуклою). Звертаємо увагу, що поняття P-повної області залежить від диференціального полінома P. Нехай також $\mathcal{K}$ — один з таких функціональних топологічних просторів: $\mathcal{E}(\Omega)$ — простір нескінченно диференційовних в області Ω функцій, $L^p_{loc}(\Omega)$, де $1 \leq p < \infty$, — простір локально сумовних в степені p функцій або $\mathcal{D}'(\Omega)$ — простір узагальнених функцій. Тоді кожен розв'язок диференціального рівняння (1.17) є границею скінченних лінійних комбінацій експоненціальних поліномів, які є розв'язками цього рівняння у топології простору $\mathcal{K}$ (див., наприклад, монографії [17] і [24]). Пізніше у 60-х роках цей результат було узагальнено В. П. Паламодовим на неоднорідні лінійні диференціальні рівняння та інші функціональні простори (див. [17]). Таким чином, теорема Паламодова–Еренпрайса про апроксимацію експоненціальними поліномами розв'язків рівняння (1.17) справедлива лише для P-повних областей.

В п. 2.6.3 дисертації для довільного рівняння (1.17) розв'язки будуються у „циліндричних“ областях. Крім того, п. 2.6.3 дисертації наведено приклади диференціальних рівнянь і нескінченновимірних сімей розв'язків в областях, які не є для них P-повними (див. зауваження 2.6.24).

До якісних за термінологією М. С. Аграновича [2] результатів відносяться теореми про опис розв'язків рівняння (1.17) в певних класах функцій. Вагомий внесок в опис розв'язків рівняння (1.17) у різних класах функцій зробив М. С. Агранович у роботах [1, 2].

Зупинимось на розв'язках в класі аналітичних функцій. Нехай аналітичний розв'язок рівняння (1.17) в околі початку координат подається у вигляді свого ряду Тейлора:

$$u(x) = \sum_{m \geq 0} c_m x^m, \tag{1.18}$$

де m — мультиіндекс. М. С. Аграновіч довів (див. [1] і [2, теорема 8]), що кожен розв'язок (1.18) подається у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k Q_k(x), \tag{1.19}$$

де коефіцієнти d_k визначаються коефіцієнтами c_m ряду (1.18), а експоненціальні поліноми $Q_k(x)$ подані у вигляді деяких інтегралів по контурах в $\mathbb{C}^n$, які називаються „драбинами Хермандера". При цьому, для кожного номера k підінтегральна функція і контур інтегрування, взагалі кажучи, різні. Таким чином, конструювання аналітичних розв'язків у явному вигляді (1.19) носить локальний характер, тобто в околі кожної точки $x \in \Omega$ буде своє представлення (1.19) зі своїми експоненціальними поліноми $Q_k(x)$.

Натомість у підрозділі 2.6 дисертації запропоновано новий (алгебраїчний) підхід до побудови у явному вигляді „глобальних" розв'язків рівняння (1.17). Більше того, пропонується рекурентна алгебраїчна процедура побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків.

В роботі [11] В. Ф. Ковальовим та І. П. Мельниченком в комутативній асоціативній алгебрі $\mathbb{B}$ знайдено базис $\{e_1, e_2\}$, елементи якого задовольняють співвідношення

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0. \tag{1.20}$$

Такий базис названо бігармонічним, а алгебру $\mathbb{B}$ — бігармонічною. В роботі І. П. Мельниченка [14] описано усі бігармонічні базиси цієї алгебри. Також очевидно, що кожна моногенна в алгебрі $\mathbb{B}$ функція Φ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2$, де $x, y \in \mathbb{R}$, задовольняє двовимірне бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0.$$

Обернений результат доведений С. В. Грищуком та С. А. Плаксою в роботі [88]: кожна бігармонічна функція є першою компонентою деякої моногенної функції в алгебрі $\mathbb{B}$.

В роботах [153, 154] розвивається ідея І. П. Мельниченка для рівняння (1.13). Зокрема, будуються деякі розв'язки спеціальних рівнянь вигляду (1.13) за допомогою моногенних функцій зі значеннями в конкретних алгебрах.

Варто відзначити роботи М. В. Синькова та його послідовників Я. О. Каліновського та Ю. Є. Бояринової [7, 22], в яких значну увагу приділено питанням алгебраїчного характеру теорії асоціативних алгебр та їх застосуванням в синтезі цифрових фільтрів і в захисті інформації. Крім того, в цитованих роботах наведено багату бібліографію та грунтовний аналіз попередніх результатів.

На відміну від бігармонічної алгебри, у тривимірних гармонічних алгебрах неможливо описати всі розв'язки рівняння Лапласа (1.10) у формі компонент моногенних функцій, визначених в цих алгебрах (див., наприклад, [131, с. 43]). Для цього потрібно розглядати нескінченновимірні простори. На цьому шляху в роботі І. П. Мельниченка та С. А. Плакси [131] показано, що при виконанні певних природних припущень потенціал просторового потенціального поля і функція течії Стокса подаються у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в деякій нескінченновимірній комутативній банаховій алгебрі. Доведено також, що сферичні функції — це перші компоненти розкладу відповідних моногенних функцій за базисом нескінченновимірної комутативної банахової алгебри $\mathbb{F}$, яка розглядається в роботах [131, 143]. Відмітимо, що алгебру $\mathbb{F}$ можна помістити у топологічний векторний простір, який фактично розглядав П. Кетчум [104]. Хоча цей векторний простір не є алгеброю, П. Кетчум довів, що множина компонент функцій зі значеннями у вище згаданому просторі містить усі аналітичні розв'язки рівняння (1.10). М. Рошкулець [169] розглядав інший нескінченновимірний векторний простір і функції, які породжують розв'язки рівняння (1.10).

У розділі 3 розглядається топологічний векторний простір, який фактично розглядався М. Рошкулецем у роботі [169]. При цьому доведено, що усі гармонічні функції є компонентами моногенних функцій зі значеннями в цьому просторі. Вивчається також спеціальні продовження диференційовних за Гато функцій зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, який є розширенням комплексифікованої алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} = \mathbb{F} \oplus i\mathbb{F}$, та досліджується їх зв'язок з просторовими потенціалами. Крім того, для моногенних функцій, що приймають значення у нескінченновимірній алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ або у топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, доведено аналоги класичних інтегральних теорем комплексного аналізу.

Висновки

Отже, теорія функцій в асоціативних алгебрах (як комутативних так і некомутативних), дає ефективні методи дослідження задач математичної фізики, що є аналогічними до методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Зокрема, актуальною проблемою є побудова теорії функцій гіперкомплексної змінної в довільній комутативній асоціативній алгебрі; вивчення зв'язку цієї теорії з рівняннями із частинними похідними. В некомутативному гіперкомплексну аналізі актуальним є розробка методів конструктивної побудови "диференційовних" функцій. Крім того, важливим є запровадження і вивчення такого класу кватерніонних "диференційовних" функцій, який містить в собі інші відомі класи кватерніонних функцій.

РОЗДІЛ 2

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ В СКІНЧЕННОВИМІРНИХ КОМУТАТИВНИХ АСОЦІАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

У цьому розділі вивчаються моногенні функції в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та їх застосування до побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

2.1. Конструктивний опис моногенних функцій в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

У цьому підрозділі встановлено конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі з одиницею над полем комплексних чисел за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [21, 151, 183].

2.1.1. Алгебра $\mathbb{A}_n^m$

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел і $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що $m \leq n$. Нехай $\mathbb{A}_n^m$ — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан [57, с. 33] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s$ такі, що виконуються наступні правила множення:

1. $\forall\, r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N}\ :\qquad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$

2. $\forall\, r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}\ :\qquad I_r I_s = \displaystyle\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon^s_{r,k} I_k\,;$ (2.1)

3. $\forall\, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}\ \ \exists!\ u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N}\ \ \forall\, r \in [1, m] \cap \mathbb{N}\ :$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq u_s\,, \\ I_s & \text{при} \quad r = u_s\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Крім того, ним доведено, що будь-яка комутативна алгебра з правилами множення 1 – 3, для якої структурні константи $\Upsilon^s_{r,k}$ в правилі множення є такими, що виконуються умови

(A 1). $\quad (I_r I_s) I_p = I_r (I_s I_p) \quad \forall\, r, s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}\,;$

(A 2). $\quad (I_u I_s) I_p = I_u (I_s I_p) \quad \forall\, u \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall\, s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}$, буде асоціативною.

Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру S алгебри $\mathbb{A}_n^m$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. З правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що $\mathbb{A}_n^m$ є напівпрямою сумою m-вимірної напівпростої підалгебри S і $(n-m)$-вимірної нільпотентної підалгебри N, тобто

$$\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N.$$

Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1 = \sum_{u=1}^m I_u$.

Якщо алгебра $\mathbb{A}_n^m$ має спеціальні властивості, то справедливі наступні твердження.

Теорема 2.1.1. *Якщо в довільній комутативній алгебрі з правилами множення 1 – 3 існує єдине* $u_0 \in [1, m] \cap \mathbb{N}$ *таке, що* $I_{u_0} I_s = I_s$ *для всіх* $s = m+1, \ldots, n$, *то умови асоціативності* (A 2) *виконуються.*

Доведення. В умовах асоціативності (A 2) можливі два випадки:

$$1) \qquad I_u \neq I_{u_0}\,, \;\; \text{тоді} \;\; I_u I_s = 0 \quad \forall\, s = m+1, \ldots, n;$$

$$2) \qquad I_u = I_{u_0}\,, \;\; \text{тоді} \;\; I_u I_s = I_s \quad \forall\, s = m+1, \ldots, n.$$

У першому випадку, умова (A 2) набуває вигляду

$$0 \cdot I_p = I_u \sum_{k=\max\{s,p\}+1}^{n} \Upsilon_{s,k}^{p}\, I_k = 0,$$

оскільки $I_u I_k = 0$ для всіх $k = \max\{s,p\}+1, \ldots, n$.

У другому випадку, умова (A 2) має вигляд

$$I_s I_p = I_u \sum_{k=\max\{s,p\}+1}^{n} \Upsilon_{s,k}^{p}\, I_k\,.$$

Це рівносильно рівності

$$\sum_{k=\max\{s,p\}+1}^{n} \Upsilon_{s,k}^{p}\, I_k = \sum_{k=\max\{s,p\}+1}^{n} \Upsilon_{s,k}^{p}\, I_k,$$

оскільки $I_u I_k = I_k$ для всіх $k = \max\{s,p\}+1, \ldots, n$. Теорему доведено.

Таким чином, при умовах теореми 2.1.1 має виконуватися лише умова асоціативності (A 1). Це означає, що нільпотентною підалгеброю алгебри $\mathbb{A}_n^m$ з базисом $\{I_r\}_{r=m+1}^{n}$ може бути довільна комутативна асоціативна нільпотентна алгебра розмірності $n-m$. Відмітимо, що такі нільпотентні алгебри повністю описані при розмірностях $1, 2, 3, 4$ в роботі [55].

Теорема 2.1.2. *Якщо у правилі множення* 3 *алгебри* $\mathbb{A}_n^m$ *всі* u_r *є різними, то* $I_s I_p = 0$ *для всіх* $s, p = m+1, \ldots, n$.

Доведення. Нехай $s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}$. Виберемо I_u таке, що $I_u I_s = I_s$. Тоді з умови асоціативності (A 2) маємо рівність

$$I_s I_p = I_u \sum_{k=\max\{s,p\}+1}^{n} \Upsilon_{s,k}^{p}\, I_k = 0,$$

оскільки за припущенням теореми $I_u I_k = 0$ для всіх $k = \max\{s, p\} + 1, \ldots, n$. Теорему доведено.

Отже, за умов теореми 2.1.2, таблиця множення нільпотентної підалгебри алгебри $\mathbb{A}_n^m$ з базисом $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ складається лише з нулів. При цьому всі умови асоціативності виконуються.

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1,\, k\neq u}^{n} \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}. \tag{2.3}$$

Визначимо m лінійних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0 \;\; \forall\, \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Оскільки ядрами функціоналів f_u є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_u$, то ці функціонали є також неперервними і мультиплікативними (див. [29, с. 147]).

2.1.2. Моногені функції

Нехай

$$e_1 = \sum_{r=1}^{m} I_r = 1\,, \quad e_2 = \sum_{r=1}^{n} a_r I_r\,, \quad e_3 = \sum_{r=1}^{n} b_r I_r\,, \tag{2.4}$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Норма елемента алгебри $v = \sum\limits_{r=1}^{n} v_r I_r$ визначається рівністю

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{r=1}^{n} |v_r|^2}.$$

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$. Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами e_1, e_2, e_3.

Далі істотним є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, де $f_u(E_3)$ — образ множини E_3 при відображенні f_u. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Множині S тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $S_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in S\}$ в E_3.

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{2.5}$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

В науковій літературі поняття моногенної функції використовується також для функцій, які задовольняють деякі аналоги умов Коші – Рімана (див., наприклад, [51, 175]). Такі функції також називають регулярними (див. [199]) або гіперголоморфними (див., наприклад, [107, 197]).

З означення моногенності функції Φ в області Ω_ζ випливає виконання наступних умов:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3 \tag{2.6}$$

в кожній точці області Ω_ζ.

2.1.3. Розклад резольвенти

Лема 2.1.1. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{r=1}^{n} A_r I_r \qquad \forall\, t \in \mathbb{C} : \ t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

де коефіцієнти A_r визначаються наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_u = \frac{1}{t-\xi_u}\,, \quad u = 1, 2, \ldots, m, \quad A_{m+1} = \frac{T_{m+1}}{\big(t-\xi_{u_{m+1}}\big)^2}\,,$$
$$A_p = \frac{T_p}{(t-\xi_{u_p})^2} + \frac{1}{t-\xi_{u_p}} \sum_{r=m+1}^{p-1} A_r B_{r,p}\,, \quad p = m+2, m+3, \ldots, n, \tag{2.7}$$

де

$$T_p := y a_p + z b_p\,, \quad p = m+1, m+2, \ldots, n, \tag{2.8}$$

$$B_{r,p} := \sum_{s=m+1}^{p-1} T_s \Upsilon_{r,p}^s\,, \quad p = m+2, m+3, \ldots, n, \tag{2.9}$$

а натуральні числа u_p визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Доведення. Знайдемо усі $t \in \mathbb{C}$ для яких існує елемент $(te_1 - \zeta)^{-1}$ в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ і знайдемо коефіцієнти A_r розкладу цього елемента в базисі $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{r=1}^{n} A_r I_r\,.$$

Беручи до уваги розклади (2.4) і правила множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$, маємо

$$\sum_{u=1}^{m} I_u = 1 = (te_1 - \zeta)^{-1}(te_1 - \zeta) =$$

$$= \Big(\sum_{u=1}^{m} A_u I_u + \sum_{r=m+1}^{n} A_r I_r\Big)\Big(\sum_{u=1}^{m}(t-\xi_u) I_u - \sum_{r=m+1}^{n} (y a_r + z b_r) I_r\Big) =$$

$$= \sum_{u=1}^{m} A_u (t-\xi_u) I_u + \Big(A_{m+1}(t-\xi_{u_{m+1}}) + A_{u_{m+1}}(-y a_{m+1} - z b_{m+1})\Big) I_{m+1} +$$

$$+ \sum_{p=m+2}^{n} \Big(A_{u_p}(-y a_p - z b_p) + A_p (t-\xi_{u_p}) + \sum_{r=m+1}^{p-1} A_r \sum_{s=m+1}^{p-1} (-y a_s - z b_s) \Upsilon_{r,p}^s\Big) I_p\,.$$

Тепер для визначення коефіцієнтів A_r маємо систему рівнянь:

$$A_u (t-\xi_u) = 1, \;\; u = 1, 2, \ldots, m, \;\; A_{m+1}(t-\xi_{u_{m+1}}) - A_{u_{m+1}} T_{m+1} = 0,$$

$$-A_{u_p}T_p + A_p(t-\xi_{u_p}) - \sum_{r=m+1}^{p-1} A_r B_{r,p} = 0, \quad p = m+2, m+3, \ldots, n,$$

де використані позначення (2.8), (2.9). З цієї ситеми відразу випливають рівності (2.7). Лему доведено.

З леми 2.1.1 випливає, що точки $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоронтим елементам $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ утворюють прямі

$$L_u: \quad \begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\,a_u + z\,\mathrm{Re}\,b_u = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\,a_u + z\,\mathrm{Im}\,b_u = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

у просторі $\mathbb{R}^3$.

Лема 2.1.2. *Якщо існують $p \in [m+2, n] \cap \mathbb{N}$ і $r \in [m+1, p-1] \cap \mathbb{N}$ такі, що $B_{r,p} \neq 0$, то $u_p = u_r$.*

Доведення. Оскільки $B_{r,p} \neq 0$, то хоча б одне зчисел $\Upsilon^r_{m+1,p}$, $\Upsilon^r_{m+2,p}, \ldots, \Upsilon^r_{p-1,p}$ відмінне від нуля. Нехай $\Upsilon^r_{k,p} \neq 0$, де k — одне з чисел $m+1, m+2, \ldots, p-1$. З умови асоціативності алгебри випливає рівність

$$(I_{u_r} I_r) I_k = I_{u_r}(I_r I_k),$$

яка рівносильна рівності

$$\sum_{\ell=\max\{k,r\}+1}^{n} \Upsilon^r_{k,\ell} I_\ell = \sum_{\ell=\max\{k,r\}+1}^{n} \Upsilon^r_{k,\ell} I_{u_r} I_\ell\,. \tag{2.11}$$

Зауважимо, що за привилом множення (2.2) для кожного $\ell = m+1, m+2, \ldots, n$ добуток $I_{u_r} I_\ell$ рівний або нулю або I_ℓ. Тому, оскільки $\Upsilon^r_{k,p} \neq 0$, то з рівності (2.11) випливає рівність $\Upsilon^r_{k,p} I_p = \Upsilon^r_{k,p} I_{u_r} I_p$, тобто $I_p = I_{u_r} I_p$, а це й означає, що $u_r = u_p$. Лему доведено.

Лема 2.1.3. *Для кожного $s = m+1, m+2, \ldots, n$ коефіцієнти A_s подаються у вигляді*

$$A_s = \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t-\xi_{u_s})^k}\,, \tag{2.12}$$

де $Q_{k,s}$ *визначаються наступними рекурентними співвідношеннями:*

$$Q_{2,s} := T_s\,, \qquad Q_{k,s} = \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r}\, B_{r,\,s}\,, \quad k = 3, 4, \ldots, s-m+1. \tag{2.13}$$

Доведення. Доведемо подання (2.12) методом математичної індукції. По-перше, вираз (2.12) співпадає з рівністю (2.7) при $s = m+1$.

Припустимо справедливість формули (2.12) для всіх A_{m+1}, $A_{m+2}, \ldots, A_{s-1}$ і доведемо, що A_s також виражається формулою (2.12). Для цього використаємо формулу (2.7) при $p = s$. Підставляючи вирази (2.12) для A_r в рівність (2.7), отримуємо :

$$A_s = \frac{T_s}{(t-\xi_{u_s})^2} + \sum_{r=m+1}^{s-1} \frac{A_r\, B_{r,\,s}}{t-\xi_{u_s}} =$$

$$= \frac{T_s}{(t-\xi_{u_s})^2} + \sum_{r=m+1}^{s-1} \sum_{k=2}^{r-m+1} \frac{Q_{k,r}\, B_{r,\,s}}{(t-\xi_{u_s})(t-\xi_{u_r})^k}\,. \tag{2.14}$$

Якщо всі $B_{r,\,s} = 0$ для $r = m+1, m+2, \ldots, s-1$, тоді фомула (2.14) набуває вигляду (2.12) при $Q_{2,m+2} = T_{m+2}$ і $Q_{k,s} = 0$. Більше того, для кожного $r = m+1, m+2, \ldots, s-1$ для якого $B_{r,\,s} \neq 0$, за лемою 2.1.2 $u_r = u_s$, і ми знову отримуємо формулу (2.12), де $Q_{k,s}$ визначається рівностями (2.13). Лему доведено.

Наслідком лем 2.1.1 і 2.1.3 є наступне подання резольвенти:

$$(te_1-\zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t-\xi_u}\, I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t-\xi_{u_s})^k}\, I_s\,. \tag{2.15}$$

2.1.4. Конструктивний опис моногенних функцій

Позначимо $f_u(E_3) := \{f_u(\zeta) : \zeta \in E_3\}$. У подальшому важливим є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, воно має місце тоді і тільки тоді, коли для кожного фіксованого $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u або b_u належить $\{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, t \neq 0\}$.

Доведення наступної леми подібне до доведення леми 1 з роботи [152].

Лема 2.1.4. *Нехай область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *опукла в напрямку прямих* L_u *і* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *для всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$. *Крім того, нехай функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *моногенна в області* Ω_ζ. *Якщо для деякого* $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *точки* $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_2 - \zeta_1 \in \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in L_u\}$, *то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_u. \tag{2.16}$$

Доведення. Нехай (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) — точки області Ω такі, що відрізок, який їх з'єднує, паралельний прямій L_u.

В області Ω побудуємо дві поверхні зі спільним краєм: поверхню Q, яка містить точку (x_1, y_1, z_1), і поверхню Σ, яка містить точку (x_2, y_2, z_2), такі, що звуження функціонала f_u на відповідні їм підмножини Q_ζ, Σ_ζ області Ω_ζ є взаємно однозначними відображеннями цих підмножин на одну й ту ж область G комплексної площини і, крім того, в кожній точці $\zeta_0 \in Q_\zeta$ (а також $\zeta_0 \in \Sigma_\zeta$) виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0)) - \Phi(\zeta_0)\right) \varepsilon^{-1} = \Phi'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) \tag{2.17}$$

при всіх $\zeta \in Q_\zeta$ таких, що $\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) \in Q_\zeta$ для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ (або, відповідно, при всіх $\zeta \in \Sigma_\zeta$ таких, що $\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) \in \Sigma_\zeta$ для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$).

В ролі поверхні Q розглянемо в області Ω фіксований рівносторонній трикутник з вершинами A_1, A_2, A_3 і центром в точці (x_1, y_1, z_1), площина якого перпендикулярна прямій L_u, і продовжимо побудову поверхні Σ.

Розглянемо трикутник з вершинами A_1', A_2', A_3' і центром в точці (x_2, y_2, z_2), який лежить в області Ω, такий, що його сторони $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ паралельні відповідно відрізкам A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A_1A_2A_3$. Оскільки область Ω опукла в напрямку прямої L_u, то призма з вершинами $A_1', A_2', A_3', A_1'', A_2'', A_3''$, для якої точки A_1'', A_2'', A_3'' лежать в площині трикутника $A_1A_2A_3$ і її ребра $A_m'A_m''$ при $m = \overline{1, 3}$ паралельні прямій L_u, повністю міститься в Ω.

Зафіксуємо тепер трикутник з вершинами B_1, B_2, B_3 такий, що точка B_m лежить на відрізку $A'_m A''_m$ при $m = \overline{1,3}$ і зрізана піраміда з вершинами $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ і боковими ребрами $A_m B_m$, $m = \overline{1,3}$, повністю міститься в області Ω.

Нарешті, в площині трикутника $A'_1 A'_2 A'_3$ зафіксуємо трикутник T з вершинами C_1, C_2, C_3 такий, що його сторони $C_1 C_2$, $C_2 C_3$, $C_1 C_3$ паралельні відповідно відрізкам $A'_1 A'_2$, $A'_2 A'_3$, $A'_1 A'_3$ і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A'_1 A'_2 A'_3$. За побудовою зрізана піраміда з вершинами $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ і боковими ребрами $B_m C_m$, $m = \overline{1,3}$, повністю міститься в області Ω.

Позначимо через Σ поверхню, утворену трикутником T і боковими поверхнями зрізаних пірамід $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$ і $B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3$.

Оскільки поверхні Q і Σ мають спільний край, то множини Q_ζ і Σ_ζ відображаються функціоналом f_u на одну й ту ж область G комплексної площини. В області G визначимо дві комплекснозначні функції H_1 і H_2 так, що при кожному $\xi \in G$

$$H_1(\xi_u) := f_u(\Phi(\zeta)), \text{ де } \xi_u = f_u(\zeta) \text{ і } \zeta \in Q_\zeta,$$

$$H_2(\xi_u) := f_u(\Phi(\zeta)), \text{ де } \xi_u = f_u(\zeta) \text{ і } \zeta \in \Sigma_\zeta.$$

Покажемо, що H_1 і H_2 — моногенні в G функції комплексної змінної ξ_u. Для цього зауважимо, що діючи на рівність (2.17) функціоналом f_u з урахуванням його лінійності, неперервності і мультиплікативності отримуємо рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(f_u(\Phi(\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0))) - f_u(\Phi(\zeta))\right) \varepsilon^{-1} = f_u(\Phi'(\zeta_0))(f_u(\zeta) - f_u(\zeta_0)),$$

з якої для функцій H_1, H_2 випливає існування похідних в точці $f_u(\zeta_0) \in G$ по всіх напрямках, причому для кожної із функцій H_1, H_2 вказані похідні рівні. Тоді за теоремою 21 з монографії [25] функції H_1, H_2 є моногенними в області G.

Оскільки із визначення функцій H_1 і H_2 випливає, що $H_1(\xi_u) \equiv$ $\equiv H_2(\xi_u)$ на межі області G, то в силу моногенності функцій H_1 і H_2 в області G тотожність $H_1(\xi_u) \equiv H_{2_u}(\xi)$ виконується скрізь в G. Тобто при $\zeta_1 := x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$ і $\zeta_2 := x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$ справедливі рівності

$$f_u(\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1)) = f_u(\Phi(\zeta_2)) - f_u(\Phi(\zeta_1)) = 0.$$

Отже, $\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1)$ належить ядру $\mathcal{I}_u$ функціонала f_u. Лему доведено.

Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_u, $u = 1, 2, \ldots, m$. Через D_u позначимо ту область в $\mathbb{C}$ на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_u.

Введемо лінійні оператори A_u, $u = 1, 2, \ldots, m$, які моногенній функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ ставлять у відповідність голоморфну функцію комплексної змінної $F_u : D_u \to \mathbb{C}$ за формулою

$$F_u(\xi_u) = f_u(\Phi(\zeta)), \tag{2.18}$$

де $\xi_u = f_u(\zeta) \equiv x + ya_u + zb_u$ і $\zeta \in \Omega_\zeta$. З леми 2.1.4 випливає, що значення $F_u(\xi_u)$ не залежить від вибору точки ζ для якої $f_u(\zeta) = \xi_u$.

Лема 2.1.5. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай для кожного фіксованого $u = 1, 2, \ldots, m$ функція $F_u : D_u \to \mathbb{C}$ є голоморфною в області D_u і Γ_u є замкненою жордановою спрямлюваною кривою в D_u, яка охоплює точку ξ_u і не містить точок ξ_q, $q = 1, 2, \ldots, m$, $q \neq u$. Тоді функція*

$$\Psi_u(\zeta) := I_u \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt \tag{2.19}$$

є моногенною в області Ω_ζ.

Доведення. Нехай $\zeta \in \Omega_\zeta$. Тоді для довільного $h \in E_3$ і кожного $\varepsilon > 0$ з рівності (2.15) випливає співвідношення

$$I_u(te_1 - \zeta - \varepsilon h)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t - \xi_u - \varepsilon f_u(h)}\, I_u +$$

$$+ \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{\left(t - \xi_{u_s} - \varepsilon f_{u_s}(h)\right)^k}\, I_s\, I_u\,. \tag{2.20}$$

Зауважимо, що для кожного натурального k комплекснозначна функція $1/\left(t-\xi_u-\varepsilon f_u(h)\right)^k$ прямує до функції $1/(t-\xi_u)^k$ рівномірно для всіх $t\in\Gamma_u$ при $\varepsilon\to 0$. Тому при кожному $h\in E_3$ функція $I_u(te_1-\zeta-\varepsilon h)^{-1}$ прямує до функції $I_u(te_1-\zeta)^{-1}$ рівномірно для всіх $t\in\Gamma_u$ при $\varepsilon\to 0$.

Більше того, доведемо існування похідної Гато $\Psi_u'(\zeta)$ за означенням (2.5). Беручи до уваги тотожність Гільберта (див., наприклад, теорему 4.8.2 [29, с. 140])

$$(te_1-a)^{-1}-(te_1-b)^{-1}=(te_1-a)^{-1}(te_1-b)^{-1}(a-b)\qquad \forall\, a,b\in E_3\,,$$

маємо

$$\Lambda:=I_u\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)\big(te_1-(\zeta+\varepsilon h)\big)^{-1}dt-\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)(te_1-\zeta)^{-1}dt\right)=$$

$$=I_uh\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)\big(te_1-(\zeta+\varepsilon h)\big)^{-1}(te_1-\zeta)^{-1}dt.$$

Тепер, оскільки функція $I_u(te_1-\zeta-\varepsilon h)^{-1}$ збігається рівномірно до функції $I_u(te_1-\zeta)^{-1}$ при $\varepsilon\to 0$, ми отримуємо рівність

$$\Lambda=I_uh\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)\big((te_1-\zeta)^{-1}\big)^2dt,$$

яка означає існування похідної Гато

$$\Psi_u'(\zeta):=I_u\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)\big((te_1-\zeta)^{-1}\big)^2dt.$$

Нарешті, завдяки рівності (2.15), компоненти розкладу функції $\Psi_u(\zeta)$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$ є неперервними функціями. Тому функція $\Psi_u'(\zeta)$ неперервна, а значить за доведеним вище $\Psi_u'(\zeta)$ моногенна в Ω_ζ. Лему доведено.

Лема 2.1.6. *Нехай область* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *опукла в напрямку прямих* L_u *і* $f_u(E_3)=\mathbb{C}$ *для всіх* $u=1,2,\ldots,m$. *Нехай також неперервна функція* $V:\Omega\to\mathbb{C}$ *при деяких* $u\in\{1,2,\ldots,m\}$ *задовольняє рівності*

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}\,a_u\,,\qquad \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial x}\,b_u \tag{2.21}$$

в Ω*. Тоді* V *є голоморфною функцією комплексної змінної* $\xi_u = f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$ *в області* D_u*.*

Доведення. Спочатку виділимо дійсну і уявну частини виразу

$$\xi_u = x + y\,\mathrm{Re}\,a_u + z\,\mathrm{Re}\,b_u + i(y\,\mathrm{Im}\,a_u + z\,\mathrm{Im}\,b_u) =: \tau_u + i\eta_u \tag{2.22}$$

і зауважимо, що наслідком рівностей (2.21) є рівності

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_u}\,\mathrm{Im}\,a_u = i\,\frac{\partial V}{\partial \tau_u}\,\mathrm{Im}\,a_u\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta_u}\,\mathrm{Im}\,b_u = i\,\frac{\partial V}{\partial \tau_u}\,\mathrm{Im}\,b_u. \tag{2.23}$$

З умови $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ випливає, що хоча б одне з чисел $\mathrm{Im}\,a_u$ або $\mathrm{Im}\,b_u$ відмінне від нуля. Тому, використовуючи (2.23), маємо

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_u} = i\,\frac{\partial V}{\partial \tau_u}\,. \tag{2.24}$$

Доведемо рівність $V(x_1, y_1, z_1) = V(x_2, y_2, z_2)$ для точок $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ таких, що відрізок, який з'єднує ці точки, паралельний прямій L_u. Для цього, в області Ω побудуємо дві поверхні зі спільним краєм: поверхню Q, яка містить точку (x_1, y_1, z_1) і поверхню Σ, яка містить точку (x_2, y_2, z_2), такі, що звуження функціонала f_u на відповідні підмножини $Q_\zeta := \{\zeta \in E_3 : (x, y, z) \in Q\}$ і $\Sigma_\zeta := \{\zeta \in E_3 : (x, y, z) \in \Sigma\}$ області Ω_ζ є взаємно однозначними відображеннями цих підмножин на одну й ту ж область D_u комплексної площини.

В якості поверхні Q розглянемо в області Ω фіксований рівносторонній трикутник з вершинами $A_{u,1}, A_{u,2}\,, A_{u,3}$ з центром в точці (x_1, y_1, z_1), площина якого перпендикулярна прямій L_u і продовжимо побудову поверхні Σ.

Розглянемо трикутник з вершинами $A'_{u,1}$, $A'_{u,2}$ і $A'_{u,3}$ і центром в точці (x_2, y_2, z_2), який лежить в області Ω такий, що його сторони $A'_{u,1}A'_{u,2}$, $A'_{u,2}A'_{u,3}$ і $A'_{u,1}A'_{u,3}$ паралельні відрізкам $A_{u,1}A_{u,2}$, $A_{u,2}A_{u,3}$ і $A_{u,1}A_{u,3}$, відповідно, і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A_{u,1}A_{u,2}A_{u,3}$. Оскільки область Ω опукла в напрямку прямої L_u, то призма з вершинами $A'_{u,1}$, $A'_{u,2}$, $A'_{u,3}$, $A''_{u,1}$, $A''_{u,2}$ і $A''_{u,3}$ для якої точки $A''_{u,1}$, $A''_{u,2}$ і $A''_{u,3}$ лежать в площині трикутника $A_{u,1}A_{u,2}A_{u,3}$ лежать в площині трикутника $A'_{u,m}A''_{u,m}$, $m = \overline{1,3}$, паралельні прямій L_u, повністю міститься в Ω.

Зафіксуємо тепер трикутник з вершинами $B_{u,1}$, $B_{u,2}$ і $B_{u,3}$ такий, що точка $B_{u,m}$ належить відрізку $A'_{u,m}A''_{u,m}$ при $m = \overline{1,3}$ і зрізана піраміда з вершинами $A_{u,1}$, $A_{u,2}$, $A_{u,3}$, $B_{u,1}$, $B_{u,2}$ і $B_{u,3}$ і бічними ребрами $A_{u,m}B_{u,m}$, $m = \overline{1,3}$, повністю міститься в області Ω.

Нарешті, в площині трикутника $A'_{u,1}A'_{u,2}A'_{u,3}$ зафіксуємо трикутни T з вершинами $C_{u,1}$, $C_{u,2}$ і $C_{u,3}$ такий, що його сторони $C_{u,1}C_{u,2}$, $C_{u,2}C_{u,3}$, $C_{u,1}C_{u,3}$ паралельні відрізкам $A'_{u,1}A'_{u,2}$, $A'_{u,2}A'_{u,3}$, $A'_{u,1}A'_{u,3}$, відповідно і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A'_{u,1}A'_{u,2}A'_{u,3}$. За побудовою зрізана піраміда з вершинами $B_{u,1}$, $B_{u,2}$, $B_{u,3}$, $C_{u,1}$, $C_{u,2}$, $C_{u,3}$ і бічними ребрами $B_{u,m}C_{u,m}$, $m = \overline{1,3}$, повністю міститься в області Ω.

Позначимо через Σ поверхню, утворену трикутником T і бічними поверхнями зрізаних пірамід $A_{u,1}A_{u,2}A_{u,3}B_{u,1}B_{u,2}B_{u,3}$ і $B_{u,1}B_{u,2}B_{u,3}C_{u,1}C_{u,2}C_{u,3}$.

Оскільки поверхні Q і Σ мають спільний край, то функціонал f_u відображає множини Q_ζ і Σ_ζ на одну й ту ж область D_u комплексної площини. В області D_u визначимо дві комплекснозначні функції H_u і W_u рівностями:

$$H_u(\xi_u) = V(x,y,z) \quad \text{для} \quad (x,y,z) \in Q,$$

$$W_u(\xi_u) = V(x,y,z) \quad \text{для} \quad (x,y,z) \in \Sigma,$$

де відповідність між точками (x,y,z) і $\xi_u \in D_u$ описується співвідношеннями (2.22).

Приймаючи до уваги рівності (2.24) і теорему 6 з [204], функції H_u і W_u голоморфні в області D_u. Відповідно до означення функцій H_u та W_u, маємо $H_u(\xi_u) \equiv W_u(\xi_u)$ на межі області D_u. Тоді в силу голоморфності функцій H_u та W_u в області D_u, тотожність $H_u(\xi_u) \equiv W_u(\xi_u)$ виконується скрізь в D_u. Тому доведено рівність $V(x_1,y_1,z_1) = V(x_2,y_2,z_2)$.

Таким чином, функція $V : \Omega \to \mathbb{C}$ вигляду $V(x,y,z) := F(\xi_u)$, де $F(\xi_u)$ — довільна голоморфна функція в області D_u, є загальним розв'язком системи (2.21). Лему доведено.

Теорема 2.1.3. *Нехай область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *є опуклою в напрямку прямих*

L_u *і* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$. *Тоді кожна моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt, \quad (2.25)$$

де F_u *— деяка голоморфна функція в області* D_u *і* G_s *— деяка голоморфна функція в області* D_{u_s}, *а* Γ_q *— замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області* D_q, *охоплює точку* ξ_q *і не містить точок* ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\ell \neq q$.

Доведення. Покладемо

$$F_u := A_u \Phi, \quad u = 1, 2, \ldots, m. \quad (2.26)$$

Покажемо, що значення моногенної функції

$$\Phi_0(\zeta) := \Phi(\zeta) - \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt \quad (2.27)$$

надежить радикалу $\mathcal{R}$, тобто $\Phi_0(\zeta) \in \mathcal{R}$ для всіх $\zeta \in \Omega_\zeta$. Наслідком рівності (2.15), є рівність

$$I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt = I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} \frac{F_u(t)}{t - \xi_u}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \int\limits_{\Gamma_u} \frac{F_u(t) Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k}\, dt\, I_s\, I_u\,,$$

з якої отримуємо

$$f_u\left(\sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt \right) = F_u(\xi_u). \quad (2.28)$$

Діючи на рівність (2.27) функціоналом f_u і беручи до уваги співвідношення (2.18), (2.26), (2.28), отримуємо ріність

$$f_u(\Phi_0(\zeta)) = F_u(\xi_u) - F_u(\xi_u) = 0$$

для всіх $u=1,2,\ldots,m$, тобто $\Phi_0(\zeta)\in\mathcal{R}$.

Тому функція Φ_0 має вигляд

$$\Phi_0(\zeta)=\sum_{s=m+1}^{n}V_s(x,y,z)\,I_s\,, \tag{2.29}$$

де $V_s:\Omega\to\mathbb{C}$, і задовольняє умови Коші – Рімана (2.6) при $\Phi=\Phi_0$. Підставляючи вирази (2.4), (2.29) в умови (2.6), маємо

$$\begin{aligned}\sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial V_s}{\partial y}\,I_s&=\sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial V_s}{\partial x}\,I_s\sum_{r=1}^{n}a_r\,I_r\,,\\ \sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial V_s}{\partial z}\,I_s&=\sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial V_s}{\partial x}\,I_s\sum_{r=1}^{n}b_r\,I_r\,.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Прирівнюючи в цих рівностях коефіцієнти при I_{m+1}, отримуємо наступну систему рівнянь для визначення фунції $V_{m+1}(x,y,z)$:

$$\frac{\partial V_{m+1}}{\partial y}=\frac{\partial V_{m+1}}{\partial x}\,a_{u_{m+1}}\,,\qquad \frac{\partial V_{m+1}}{\partial z}=\frac{\partial V_{m+1}}{\partial x}\,b_{u_{m+1}}\,.$$

З леми 2.1.6 випливає, що $V_{m+1}(x,y,z)\equiv G_{m+1}(\xi_{u_{m+1}})$, де G_{m+1} — функція, голоморфна в області $D_{u_{m+1}}$. Таким чином,

$$\Phi_0(\zeta)=G_{m+1}(\xi_{u_{m+1}})\,I_{m+1}+\sum_{s=m+2}^{n}V_s(x,y,z)\,I_s. \tag{2.31}$$

З подання (2.15) маємо представлення

$$I_{m+1}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_{m+1}}}G_{m+1}(t)(te_1-\zeta)^{-1}\,dt=G_{m+1}(\xi_{u_{m+1}})\,I_{m+1}+\Psi(\zeta), \tag{2.32}$$

де $\Psi(\zeta)$ — функція зі значеннями на множині $\left\{\sum_{k=m+2}^{n}\alpha_k\,I_k:\alpha_k\in\mathbb{C}\right\}$.

Тепер розглянемо функцію

$$\Phi_1(\zeta):=\Phi_0(\zeta)-I_{m+1}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_{m+1}}}G_{m+1}(t)(te_1-\zeta)^{-1}\,dt.$$

Внаслідок співвідношень (2.31), (2.32), функція Φ_1 може бути подана у вигляді

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{s=m+2}^{n}\widetilde{V}_s(x,y,z)\,I_s,$$

де $\widetilde{V}_s : \Omega \to \mathbb{C}$.

Оскільки функція Φ_1 моногенна в Ω_ζ , то функції $\widetilde{V}_{m+2}, \widetilde{V}_{m+3}, \ldots, \widetilde{V}_n$ задовольняють систему (2.30), де $V_{m+1} \equiv 0$, $V_s = \widetilde{V}_s$ при $s = m+2, m+3, \ldots, n$. Тому, подібно до функції $V_{m+1}(x,y,z) \equiv G_{m+1}(\xi_{u_{m+1}})$, функція $\widetilde{V}_{m+2}$ задовольняє умови

$$\frac{\partial \widetilde{V}_{m+2}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{V}_{m+2}}{\partial x}\, a_{u_{m+2}}\,, \qquad \frac{\partial \widetilde{V}_{m+2}}{\partial z} = \frac{\partial \widetilde{V}_{m+2}}{\partial x}\, b_{u_{m+2}}$$

і має вигляд $\widetilde{V}_{m+2}(x,y,z) \equiv G_{m+2}(\xi_{u_{m+2}})$, де G_{m+2} — функція, голоморфна в області $D_{u_{m+2}}$.

За такою процедурою, крок за кроком, розглядаючи функцію

$$\Phi_j(\zeta) := \Phi_{j-1}(\zeta) - I_{m+j}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_{m+j}}} G_{m+j}(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt$$

при $j = 2, 3, \ldots, n-m-1$, отримуємо представлення (2.25) функції Φ . Теорему доведено.

Беручи до уваги подання (2.15), перепишемо рівність (2.25) в наступному вигляді:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} F_u(\xi_u) I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{1}{(k-1)!} Q_{k,s} F_{u_s}^{(k-1)}(\xi_{u_s})\, I_s +$$

$$+ \sum_{q=m+1}^{n} G_q(\xi_{u_q}) I_q + \sum_{q=m+1}^{n} \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{1}{(k-1)!} Q_{k,s} G_q^{(k-1)}(\xi_{u_q})\, I_q\, I_s\,. \tag{2.33}$$

Таким чином, рівності (2.25) і (2.33) вказують на метод побудови будь-якої моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ використовуючи n відповідних голоморфних функцій комплексної змінної.

Зауваження 2.1.1. З теореми 2.1.3 випливає, що в розкладі моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x,y,z)\, I_k \tag{2.34}$$

компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, тобто для довільної точки $(x, y, z) \in \Omega$ виконуються співвідношення

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\Delta z +$$

$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \qquad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0\,.$$

З іншого боку, якщо компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними, то умови (2.6) є не лише необхідними, але й достатніми умовами моногенності функції (2.34) в області Ω_ζ, тобто рівності (2.6) є аналогами класичних умов Коші–Рімана.

Зауваження 2.1.2. З представлення (2.25) (або (2.33)) випливає, що за умов теореми 2.1.3 кожна моногенна в області Ω_ζ функція Φ є диференційовною за Лорхом в Ω_ζ.

Зауваження 2.1.3. Моногенна функція Φ подається у вигляді (2.33) (або, що те саме, у вигляді (2.25)) єдиним чином. Справді, припустимо, що існує два зображення функції Φ у вигляді (2.33) через набори голоморфних функцій F_u, G_s та $\widetilde{F}_u$, $\widetilde{G}_s$. Тоді, прирівнюючи ці два зображення і враховуючи єдиність розкладу елемента алгебри за базисом, отримуємо рівності $F_u = \widetilde{F}_u$ при всіх $u = 1, 2, ..., m$. Прирівнюючи коефіцієнти при базисних одиницях I_s, $s = m+1, ..., n$, отримуємо рівності $G_{m+1} = \widetilde{G}_{m+1}$,

$$G_s + f_s(G_{m+1}, ..., G_{s-1}) = \widetilde{G}_s + f_s(\widetilde{G}_{m+1}, ..., \widetilde{G}_{s-1}), \qquad s = m+2, ..., n,$$

де f_s — лінійна функція своїх аргументів. Звідси випливає, що $G_s = \widetilde{G}_s$ при всіх $s = m+1, ..., n$.

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівності (2.33), права частина якої є моногенною функцією в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u,\, u = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.35}$$

Теорема 2.1.4. *Якщо область Ω опукла в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, то кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ продовжується до функції, моногенної в області Π_ζ.*

Принциповим наслідком рівності (2.25) є наступне твердження, яке справедливе для довільної області Ω_ζ.

Теорема 2.1.5. *Нехай* $f_u(E_3)=\mathbb{C}$ *при всіх* $u=1,2,\ldots,m$. *Тоді для кожної моногенної функції* $\Phi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ *в довільній області* Ω_ζ *похідні Гато* $\Phi^{(r)}$ *є моногенними функціями в* Ω_ζ *для всіх* r.

Доведення повністю аналогічне до доведення теореми 4 з [152].

Якщо область Ω опукла в напрямку прямих L_u, $u=1,2,\ldots,m$, то наслідком представлення (2.25) є наступна формула для похідної Гато $\Phi^{(r)}$:

$$\Phi^{(r)}(\zeta)=\sum_{u=1}^{m}I_u\,\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)\Big((te_1-\zeta)^{-1}\Big)^{r+1}dt+$$

$$+\sum_{s=m+1}^{n}I_s\,\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_s}}G_s(t)\Big((te_1-\zeta)^{-1}\Big)^{r+1}dt\qquad\forall\zeta\in\Omega_\zeta\,.$$

Зауваження 2.1.4. Аналог теореми 2.1.3 для моногенних функцій змінної вигляду $\sum\limits_{r=1}^{k}x_re_r$, де $2\leq k\leq 2n$ встановлено в роботі [189]. Зазначимо також, що моногенні функції змінної $\sum\limits_{r=1}^{k}x_re_r$ пов'язані з лінійними диференціальними рівняннями вигляду (1.13).

2.1.5. Частинні випадки

Зауважимо, що у випадку, коли алгебра $\mathbb{A}_n^m$ має спеціальні властивості (наприклад ті, що описані у теоремах 2.1.1, 2.1.2), вигляд представлення (2.33) спрощується.

1. У випадку, що розглядається в теоремі 2.1.1, справедлива рівність:

$$u_{m+1}=u_{m+2}=\ldots=u_n=:\eta\,.\tag{2.36}$$

У цьому випадку, представлення (2.33) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta)=\sum_{u=1}^{m}F_u(\xi_u)I_u+\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=2}^{s-m+1}\frac{1}{(k-1)!}Q_{k,s}F_\eta^{(k-1)}(\xi_\eta)\,I_s+$$

$$+\sum_{s=m+1}^{n} G_s(\xi_\eta) I_s + \sum_{q=m+1}^{n} \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{1}{(k-1)!} Q_{k,s} G_q^{(k-1)}(\xi_\eta)\, I_s\, I_q\,. \qquad (2.37)$$

Формула (2.37) узагальнює представлення моногенних функцій в обох тривимірних гармонічних алгебрах (див. [145, 152, 161]) і в спеціальних n-вимірних алгебрах (див. [146, 151]) на випадок алгебри більш загального вигляду. Також зауважимо, що рівність (2.36) задовольняють наступні чотиривимірні алгебри: $\widetilde{A}_{3,1}$, $\widetilde{A}_{3,2}$, $\widetilde{A}_{3,3}$ та $\widetilde{A}_{3,4}$ (див. таблицю 9 в [55]).

2. У випадку, що розглядається в теоремі 2.1.1, всі функції $B_{r,p}$ з рівностей (2.9) є тотожними нулями. У цьому випадку подання (2.15) має вигляд

$$(te_1-\zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t-\xi_u}\, I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{T_s}{(t-\xi_{u_s})^2}\, I_s\,, \qquad (2.38)$$

і, внаслідок рівностей (2.25), (2.38), отримуємо наступне представлення моногенної функції:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} F_u(\xi_u) I_u + \sum_{s=m+1}^{n} G_s(\xi_{u_s}) I_s + \sum_{s=m+1}^{n} T_s F_{u_s}^{'}(\xi_{u_s}) I_s\,. \qquad (2.39)$$

Формула (2.39) узагальнює подання моногенної функції в тривимірній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом (див. [145]) і напівпростій алгебрі (див. [146, 161]) на випадок алгебри більш загального вигляду. Зауважимо також, що умову $B_{r,p}=0$ задовольняють наступні чотиривимірні алгебри: $\widetilde{A}_{3,1}$, $2\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_{2,1}$ та $2\widetilde{A}_1$ (див. таблицю 9 в [55]).

3. У випадку $n=m$ алгебра $\mathbb{A}_n^n$ є напівпростою і не містить нільпотентної підалгебри. Тоді формули (2.37), (2.39) набувають вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{n} F_u(\xi_u) I_u\,,$$

оскільки не містять векторів $\{I_k\}_{k=m+1}^{n}$. Ця формула була отримана в роботі [146].

2.1.6. Застосування опису моногенних функцій до обчислення логарифмічного лишку

У роботі [21] запропоновано застосування представлення (2.25) (або (2.33)) до обчислення логарифмічного лишку моногенних функцій в тривимірній гармонічній алгебрі. Наведемо цей результат.

Нехай $\mathbb{A}_3$ — тривимірна комутативна асоціативна алгебра над полем $\mathbb{C}$ з базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$, для якого справедливі наступні правила множення: $\rho_1^2 = \rho_2, \quad \rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0$. Нехай $\{e_1, e_2, e_3\}$ — гармонічний (тобто такий, що задовольняє умову $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$) базис вигляду

$$e_1 = 1, \;\; e_2 = i + \rho_2, \;\; e_3 = (1-i)\rho_1.$$

Будемо розглядати моногенні функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_3$, що визначені в областях тривимірного підпростору $E_3 := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Елемент алгебри $a = a_0 + a_1\rho_1 + a_2\rho_2$, де $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, оборотний тоді і тільки тоді, коли $a_0 \neq 0$, при цьому обернений елемент a^{-1} подається у вигляді

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\rho_1 - \left(\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{a_1^2}{a_0^3}\right)\rho_2\,,$$

а розклад за базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ логарифмічної функції, яка визначена в роботі [117], має вигляд

$$\ln a := \ln a_0 + \frac{a_1}{a_0}\rho_1 + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{2a_0^2}\right)\rho_2, \tag{2.40}$$

де $\ln a_0$ — головна вітка логарифмічної функції комплексної змінної a_0.

Відповідно до визначення (2.10) із прямих L_u у просторі $E_3 \subset \mathbb{A}_3$ буде лише одна пряма, яка співпадає з віссю Oz. Для алгебри $\mathbb{A}_3$ теорема 2.1.3 набуває наступного вигляду: якщо область Ω є опуклою в напрямку осі Oz, то кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F(\xi) + \Big((1-i)zF'(\xi) + F_1(\xi)\Big)\rho_1 +$$

$$+\Big(yF'(\xi) - iz^2F''(\xi) + (1-i)zF_1'(\xi) + F_2(\xi)\Big)\rho_2 \qquad \forall\, \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta, \tag{2.41}$$

де F, F_1, F_2 — голоморфні функції комплексної змінної $\xi = x + iy \in D$. Зауважимо, що для цієї алгебри представлення (2.41) може бути отримане з представлення (2.37). Формула (2.41) дає конструктивний опис усіх моногенних функцій $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Крім того, формулою (2.41) задається моногенне продовження функції Φ в циліндричну область $\Pi_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in D\}$. Тому надалі розглядатимемо моногенні функції, що визначені в необмежених областях виду Π_ζ.

Тепер визначимо логарифмічний лишок моногенної функції. Нехай $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3 \in E_3$ і функція $\Phi : \mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R) \to \mathbb{A}_3$ моногенна в кільцевій циліндричній області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R) := \{\zeta = x+ye_2+ze_3 : \ 0 < (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < R^2, \ z \in \mathbb{R}\}$.

Якщо при цьому логарифмічна похідна $\Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}$ також є моногенною функцією в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$, то *логарифмічним лишком* функції Φ в точці ζ_0 назвемо інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1} d\zeta, \tag{2.42}$$

де $\Gamma_{\zeta_0}(r) := \{\zeta = x + ye_2 + z_0e_3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ і $r < R$.

Із теореми 3 работи [20] випливає, що величина логарифмічного лишку не залежить від r при $0 < r < R$ і, крім того, справедлива рівність

$$\int\limits_{\Gamma_{\zeta_1}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1} d\zeta = \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1} d\zeta \qquad \forall\, \zeta_1 = \zeta_0 + z_1e_3\,,$$

тобто логарифмічні лишки функції Φ у всіх точках прямої $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ рівні.

Введемо допоміжні означення. Нехай $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$ і в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ моногенна функція Φ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{n_0} \varphi_0(\zeta) + \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2, \tag{2.43}$$

де n_0 — деяке ціле число, φ_0 — моногенна в циліндричній області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R) := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2, \ z \in \mathbb{R}\}$ функція, яка не приймає в цій області значень в радикалі $\mathcal{I} := \{\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 : \lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}\}$, а ψ і ϕ — моногенні в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ функції. У випадку, коли функція Φ моногенна в області $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ і не приймає в цій області значень в радикалі $\mathcal{I}$, назвемо пряму $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ *сингулярністю логарифмічної похідної* функції Φ, якщо точка ζ_0 є неусувною особливою точкою функції Φ або ж $\Phi(\zeta_0) \in \mathcal{I}$. Якщо при цьому функція Φ подається у вигляді (2.43), то показник степеня n_0 в розкладі (2.43) назвемо *показником сингулярності* логарифмічної похідної функції Φ в точці ζ_0.

Теорема 2.1.6. *Нехай D — область в комплексній площині і функція Φ моногенна скрізь в області $\Pi_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in D\}$ за винятком, можливо, деякої множини особливих точок. Нехай область G, яка компактно належить області D, обмежена замкненою жордановою спрямлюваною кривою γ і така, що в області $G_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in G\}$ міститься лише скінченна множина $\{L_k\}_{k=1}^m$ сингулярностей $L_k := \{\zeta_k + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ логарифмічної похідної функції Φ, при цьому показник сингулярності n_k логарифмичної похідної функції Φ в точці ζ_k скінченний при всіх $k = 1, 2, \ldots, m$, а межа ∂G_ζ області G_ζ не містить вказаних сингулярностей. Тоді справедлива рівність*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = N_F - P_F, \tag{2.44}$$

де Γ_ζ — замкнута жорданова спрямлювана крива лежить на поверхні ∂G_ζ і гомотопна кривій $\{x + ye_2 : x + iy \in \gamma\}$, а N_F і P_F — відповідно число нулів і полюсів функції F в області $\{\xi = x + iy : \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in G_\zeta\}$ з урахуванням їх кратності.

Доведення. Оскільки крива Γ_ζ не містить сингулярностей логарифмічної похідної функції Φ, то справедлива рівність

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_{\Gamma_\zeta}\ln\Phi(\zeta), \tag{2.45}$$

де через $\Delta_{\Gamma_\zeta}\ln\Phi(\zeta)$ позначено приріст функції $\ln\Phi(\zeta)$ при обході ζ кривої Γ_ζ.

Наслідком рівностей (2.40), (2.41) є рівність

$$\ln\Phi(\zeta)=\ln F(\xi)+\frac{(1-i)zF'(\xi)+F_1(\xi)}{F(\xi)}\,\rho_1+$$

$$+\left(\frac{yF'(\xi)-iz^2F''(\xi)+(1-i)zF_1'(\xi)+F_2(\xi)}{F(\xi)}-\frac{\big((1-i)zF'(\xi)+F_1(\xi)\big)^2}{2\big(F(\xi)\big)^2}\right)\rho_2=:$$

$$=:\ln F(\xi)+B_1(\zeta)\rho_1+B_2(\zeta)\rho_2$$

при всіх $\zeta=x+ye_2+ze_3\in\Gamma_\zeta$, де $\xi=x+iy$.

Оскільки функція Φ приймає на контурі Γ_ζ значення, які не належать радикалу $\mathcal{I}$, то, враховуючи рівність (2.41), приходимо до висновку, що функція $F(\xi)$ не перетворюється в нуль на кривій γ в комплексній площині. Тому функції B_1, B_2 неперервні на кривій Γ_ζ, і відповідно, їх прирости при обході цієї кривої равні нулю.

Таким чином, $\Delta_{\Gamma_\zeta}\ln\Phi(\zeta)=\Delta_\gamma\ln F(\xi)$ і з урахуванням принципу аргументу голоморфних функцій комплексної змінної (див., наприклад, [30, с. 206]) рівність (2.45) набуває вигляду (2.5.6). Теорему доведено.

2.1.7. Зв'язок моногенних функцій з рівняннями в частинних похідних

Розглянемо наступне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_N U(x,y,z):=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}=0,\quad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{2.46}$$

Якщо функція $\Phi(\zeta)$ N разів диференційовна за Гато у кожній точці області Ω_ζ, то

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}=e_1^\alpha\,e_2^\beta\,e_3^\gamma\,\Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)=e_2^\beta\,e_3^\gamma\,\Phi^{(N)}(\zeta).$$

Тому, внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_N\Phi(\zeta)=\Phi^{(N)}(\zeta)\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,e_2^\beta\,e_3^\gamma\,, \tag{2.47}$$

кожна N разів диференційовна за Гато в Ω_ζ функція Φ задовольняє рівняння $\mathcal{L}_N\Phi(\zeta) = 0$ скрізь в Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = 0\,. \tag{2.48}$$

Відповідно, при виконанні умови (2.48) дійснозначні компоненти $\mathrm{Re}\, U_k(x,y,z)$ і $\mathrm{Im}\, U_k(x,y,z)$ розкладу (2.34) є розв'язками рівняння (2.46).

У випадку, якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, то з теореми 2.1.5 випливає, що рівність (2.47) справедлива для довільної моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$.

Таким чином, для побудови розв'язків рівняння (2.46) у вигляді компонент моногенної функції, необхідно знайти трійку лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (2.4), які задовольняють *характеристичне* рівняння (2.48) і перевірити умову: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді формула (2.25) дає конструктивний опис усіх згаданих моногенних функцій.

В наступній теоремі ми вказуємо спеціальний клас рівнянь виду (2.46) для яких $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Введемо в розгляд поліном

$$P(a, b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^\beta\, b^\gamma\,. \tag{2.49}$$

Теорема 2.1.7. *Нехай існують лінійно незалежні над* $\mathbb{R}$ *вектори* e_1, e_2, e_3 *в* $\mathbb{A}_n^m$ *вигляду (2.4), які задовольняють рівність (2.48). Якщо* $P(a, b) \neq 0$ *при всіх дійсних* a *і* b, *то* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$.

Доведення. Використовуючи таблицю множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$, отримуємо рівності

$$e_2^\beta = \sum_{u=1}^m a_u^\beta\, I_u + \Psi_{\mathcal{R}}\,, \quad e_3^\gamma = \sum_{u=1}^m b_u^\gamma\, I_u + \Theta_{\mathcal{R}}\,,$$

де $\Psi_{\mathcal{R}}\,, \Theta_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$. Тепер рівність (2.48) набуває вигляду

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \Big(\sum_{u=1}^m a_u^\beta\, b_u^\gamma\, I_u + \widetilde{\Psi}_{\mathcal{R}} \Big) = 0, \tag{2.50}$$

де $\widetilde{\Psi}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$. Крім того, за припущенням вектори e_1, e_2, e_3 вигляду (2.4) задовольняють рівність (2.48). Це означає, що існують комплексні коефіцієнти a_k, b_k при $k = 1, 2, \ldots, n$, які задовольняють рівність (2.50).

Наслідком рівності (2.50) є рівність

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_u^{\beta}\, b_u^{\gamma} = 0, \qquad u = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.51}$$

Оскільки $P(a,b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$, то рівності (2.51) можуть виконуватися лише якщо для кожного $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t \neq 0\}$, звідки випливає співвідношення $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Теорему доведено.

Відмітимо, що якщо $P(a,b) \neq 0$ для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, то $C_{N,0,0} \neq 0$ оскільки в іншому випадку $P(a,b) = 0$ при $a = b = 0$.

Оскільки функція $P(a,b)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, то умова $P(a,b) \neq 0$ означає одне з двох $P(a,b) > 0$ або $P(a,b) < 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$. Тому очевидно, що рівняння вигляду (2.46), які є еліптичного типу завжди задовольняють умову $P(a,b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$. В той же час існують рівняння (2.46) для яких $P(a,b) > 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$, але які не є еліптичними. Наприклад, такими є рівняння

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} = 0$$

у просторі $\mathbb{R}^3$.

2.2. Контурні інтегральні теореми для моногенних функцій в комутативних алгебрах

У цьому підрозділі для моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морера та інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [184, 186].

2.2.1. Аналог інтегральної теореми Коші

Нехай γ — спрямлювана жорданова крива в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ вигляду

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x,y,z)\, I_k + i \sum_{k=1}^{n} V_k(x,y,z)\, I_k, \tag{2.52}$$

де $(x,y,z) \in \gamma$ і $U_k : \gamma \to \mathbb{R}$, $V_k : \gamma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл вздовж жорданової спрямлюваної кривої γ_ζ рівністю:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta) d\zeta := \sum_{k=1}^{n} I_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dx + \sum_{k=1}^{n} e_2 I_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} e_3 I_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dz + i \sum_{k=1}^{n} I_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dx +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{n} e_2 I_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dy + i \sum_{k=1}^{n} e_3 I_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dz,$$

where $d\zeta := dx + e_2 dy + e_3 dz$.

Також визначимо поверхневий інтеграл. Нехай Σ — кусково-гладка поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \Sigma_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ вигляду (2.52), де $(x,y,z) \in \Sigma$ і $U_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, $V_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл по поверхні Σ_ζ з диференціальною формою $dxdy$ рівністю

$$\int\limits_{\Sigma_\zeta} \Psi(\zeta) dxdy := \sum_{k=1}^{n} I_k \int\limits_{\Sigma} U_k(x,y,z)dxdy + i \sum_{k=1}^{n} I_k \int\limits_{\Sigma} V_k(x,y,z)dxdy.$$

Подібним чином визначаються інтеграли з диференціальними формами $dydz$ та $dzdx$.

Зауваження 2.2.5. Означення криволінійного і поверхневого інтегралів від функції гіперкомплексної змінної коректні в тому сенсі, що їх значення не залежать від вибору допустимих параметризацій, відповідно, кривої або поверхні. Справді, гіперкомплексні інтеграли визначаються через відповідні дійсні інтеграли, а питання про незалежність дійсних інтегралів від способу параметризації добре вивчене в літературі (див., наприклад, [28, п. 609]).

Якщо функція $\Phi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку в області Ω_ζ і Σ — кусково-гладка поверхня в Ω, і край γ поверхні Σ є спрямлюваною жордановою кривою, тоді справедливий наступний аналог формули Стокса:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}\Psi(\zeta)d\zeta=\int\limits_{\Sigma_\zeta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}e_2-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}e_3-\frac{\partial\Psi}{\partial z}e_2\right)dydz+$$
$$+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}e_3\right)dzdx. \tag{2.53}$$

Тепер наступна теорема є наслідком формули (2.53) та умов (2.6).

Теорема 2.2.1. *Нехай функція $\Phi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ моногенна в області Ω_ζ, Σ — кусково-гладка поверхня в Ω і край поверхні Σ є спрямлюваною жордановою кривою γ. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}\Phi(\zeta)d\zeta=0. \tag{2.54}$$

У випадку, якщо область Ω опукла, то рівність (2.54) доводиться за звичною схемою (див., наприклад, [160]) для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої γ_ζ.

У випадку, коли область Ω довільна, подібно до доведення теореми 3.2 [47] доводиться наступне твердження

Теорема 2.2.2. *Нехай функція $\Phi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ моногенна в області Ω_ζ. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої γ, яка гомотопна точці з Ω, справедлива рівність (2.54).*

Зауваження 2.2.6. Аналог теореми 2.2.2 для моногенних функцій змінної $\sum\limits_{r=1}^{k}x_re_r$, де $2\leq k\leq 2n$, встановлено в роботі [186].

2.2.2. Аналог теореми Морера

Для доведення аналога теореми Морера в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ введемо деякі позначення і доведемо допоміжні твердження.

Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_n^m(\mathbb{R})$ з базисом $\{I_k, iI_k\}_{k=1}^n$ над полем $\mathbb{R}$, яка ізоморфна алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ над полем $\mathbb{C}$. В алгебрі $\mathbb{A}_n^m(\mathbb{R})$ існує інший базис $\{e_k\}_{k=1}^{2n}$, де вектори e_1, e_2, e_3 такі ж самі як і в пункті 2.1.2.

Для елемента $a := \sum\limits_{k=1}^{2n} a_k e_k$, $a_k \in \mathbb{R}$ визначимо евклідову норму

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{2n} a_k^2}\,.$$

Відповідно, $\|\zeta\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ and $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$.

Використовуючи теорему про еквівалентність норм, для елемента $b := \sum\limits_{k=1}^{n} (b_{1k} + ib_{2k}) I_k$, $b_{1k}, b_{2k} \in \mathbb{R}$ маємо наступні нерівності

$$|b_{1k} + ib_{2k}| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{2n} \left(b_{1k}^2 + b_{2k}^2\right)} \leq c\|b\|, \tag{2.55}$$

де c — додатна стала, яка не залежить від b.

Лема 2.2.1. *Якщо γ — замкнена жорданова спрямлювана крива в $\mathbb{R}^3$ і функція $\Psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна, то*

$$\left\| \int_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta)\, d\zeta \right\| \leq c \int_{\gamma_\zeta} \|\Psi(\zeta)\| \|d\zeta\|, \tag{2.56}$$

де c — додатна абсолютна стала.

Доведення. Використовуючи подання моногенної функції Ψ у вигляді (2.52) при $(x, y, z) \in \gamma$, отримуємо

$$\left\| \int_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta) d\zeta \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|I_k\| \int_{\gamma} \left| U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z) \right| dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \|e_2 I_k\| \int_{\gamma} \left| U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z) \right| dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\|e_3I_k\|\int_{\gamma}\Big|U_k(x,y,z)+iV_k(x,y,z)\Big|\,dz.$$

Тепер використовуючи нерівність (2.55) при $b=\Psi(\zeta)$ і нерівності $\|e_sI_k\|\le c_s$, $s=1,2,3$, де c_s — додатна абсолютна стала, отримуємо співвідношення (2.56).

Використовуючи лему 2.2.1, для функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ за звичною схемою доводиться наступний аналог теореми Морера.

Теорема 2.2.3. *Якщо функція* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_n^m$ *неперервна в області* Ω_ζ *і задовольняє умову*

$$\int_{\partial\triangle_\zeta}\Phi(\zeta)d\zeta=0 \tag{2.57}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що його замикання* $\overline{\triangle_\zeta}\subset\Omega_\zeta$, *тоді функція* Φ *моногенна в області* Ω_ζ.

Зауваження 2.2.7. Аналог теореми 2.2.3, але для моногенних функцій змінної $\sum\limits_{r=1}^{k}x_re_r$, де $2\le k\le 2n$, встановлено в роботі [186].

2.2.3. Аналог інтегральної формули Коші

Нехай $\zeta_0:=x_0e_1+y_0e_2+z_0e_3$ — довільна точка в області $\Omega_\zeta\subset E_3$. В околі ζ_0, що міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$ радіуса ε з центром в точці ζ_0. Через $C_u(\xi_u^{(0)},\varepsilon)\subset\mathbb{C}$ позначимо образ $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$ при відображенні f_u, $u=1,2,\ldots,m$. Припустимо, що коло $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$ *охоплює множину* $\{\zeta-\zeta_0:(x,y,z)\in\bigcup\limits_{u=1}^{m}L_u\}$. Це означає, що крива $C_u(\xi_u^{(0)},\varepsilon)$ обмежує деяку область D'_u таку, що $f_u(\zeta_0)=\xi_u^{(0)}\in D'_u$, $\quad u=1,2,\ldots,m$.

Скажемо, що крива $\gamma_\zeta\subset\Omega_\zeta$ *один раз охоплює множину* $\{\zeta-\zeta_0:(x,y,z)\in\bigcup\limits_{u=1}^{m}L_u\}$, якщо існує коло $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне γ_ζ в області $\Omega_\zeta\setminus\{\zeta-\zeta_0:(x,y,z)\in\bigcup\limits_{u=1}^{m}L_u\}$.

Оскільки функція ζ^{-1} неперервна на кривій $C_\zeta(0,\varepsilon)$, то існує інтеграл

$$\lambda := \int\limits_{C_\zeta(0,\varepsilon)} \zeta^{-1} d\zeta. \tag{2.58}$$

Наступна теорема є аналогом інтегральної формули Коші для моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$.

Теорема 2.2.4. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ моногенна в Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\lambda\, \Phi(\zeta_0) = \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta, \tag{2.59}$$

де γ_ζ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка один раз охоплює множину $\{\zeta - \zeta_0 : (x,y,z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$.

Доведення. Оскільки γ_ζ гомотопна $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta - \zeta_0 : (x,y,z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, то з теореми 2.2.2 випливає рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta = \int\limits_{C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta. \tag{2.60}$$

Подамо інтеграл у правій частині рівності (2.60) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta = \int\limits_{C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta +$$

$$+\Phi(\zeta_0) \int\limits_{C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)} (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta =: J_1 + J_2.$$

Зауважимо, що із співвідношення (2.60) випливає, що якщо існує інтеграл в рівності (2.58), то він не залежить від ε. Наслідком рівностей (2.58), (2.60) є наступна рівність

$$J_2 = \Phi(\zeta_0) \int\limits_{C_\zeta(0,\varepsilon)} \tau^{-1} d\tau = \lambda\, \Phi(\zeta_0), \tag{2.61}$$

де $\tau := \zeta - \zeta_0$.

Підінтегральна функція в J_1 обмежена сталою, що не залежить від ε: коли $\varepsilon \to 0$ підінтегральна функція прямує до $\Phi'(\zeta_0)$ (див. лему 2.1.5). Тому, використовуючи лему 2.2.1, інтеграл J_1 прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Теорему доведено.

Далі покажемо, що стала λ завжди є оборотним елементом алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

В деяких алгебрах (див. [146, 151, 192]) інтегральна формула Коші (2.59) має виляд

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta - \zeta_0)^{-1}\,d\zeta, \tag{2.62}$$

тобто

$$\lambda = 2\pi i. \tag{2.63}$$

Зараз ми вкажемо множену алгебр виду $\mathbb{A}_n^m$ для яких справедлива рівність (2.63). Для цього розглянемо наступні допоміжні результати.

Наслідком розкладу (2.15) є рівність

$$\zeta^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k\, I_k \tag{2.64}$$

де коефіцієнти $\widetilde{A}_k$ визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{gathered} \widetilde{A}_u = \frac{1}{\xi_u}\,, \quad u = 1, 2, \ldots, m, \\ \widetilde{A}_s = \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{\widetilde{Q}_{k,s}}{\xi_{u_s}^k}\,, \quad s = m+1, m+2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{2.65}$$

де $\widetilde{Q}_{k,s}$ визначені такими рекурентними співвідношеннями:

$$\widetilde{Q}_{2,s} := -T_s\,, \quad \widetilde{Q}_{k,s} = -\sum_{r=k+m-2}^{s-1} \widetilde{Q}_{k-1,r}\, B_{r,s}\,, \quad k = 3, 4, \ldots, s-m+1. \tag{2.66}$$

де T_s і $B_{r,s}$ такі ж самі як і в рівностях (2.8), (2.9), а натуральні числа u_s визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Беручи до уваги рівність (2.64) і співвідношення

$$d\zeta = dxe_1 + dye_2 + dze_3 = \sum_{u=1}^{m} \Big(dx + dy\, a_u + dz\, b_u\Big) I_u +$$

$$+ \sum_{r=m+1}^{n} \Big(dy\, a_r + dz\, b_r\Big) I_r = \sum_{u=1}^{m} d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} dT_r\, I_r\,,$$

отримуємо наступну рівність

$$\zeta^{-1} d\zeta = \sum_{u=1}^{m} \widetilde{A}_u\, d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_{u_r}\, dT_r\, I_r +$$

$$+ \sum_{s=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, d\xi_{u_s}\, I_s + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, dT_r\, I_s I_r =: \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\, I_k\,. \qquad (2.67)$$

Тепер, приймаючи до уваги позначення (2.67) і рівність (2.65), обчислюємо:

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sum_{u=1}^{m} \sigma_u\, I_u = \sum_{u=1}^{m} I_u \int\limits_{C_u(\xi_u,R)} \frac{d\xi_u}{\xi_u} = 2\pi i \sum_{u=1}^{m} I_u = 2\pi i.$$

Тому,

$$\lambda = 2\pi i + \sum_{k=m+1}^{n} I_k \int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_k\,. \qquad (2.68)$$

Зауважимо, що із співвідношень (2.68), (2.64) і (2.65) випливає, що λ є оборотним елементом.

Таким чином, рівність (2.63) справедлива тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_k = 0 \qquad \forall\, k = m+1, \ldots, n. \qquad (2.69)$$

Але, для виконання рівності (2.69) диференціальна форма σ_k має бути повним диференціалом деякої функції. Зауважимо, що властивість бути повним диференціалом є інваріантною відносно допустимих перетворень координат [30, теорема 2, с. 328]. У нашому випадку, якщо ми покажемо, що σ_k є повним диференціалом деякої функції від змінної $\frac{T_{m+1}}{\xi}, \ldots, \frac{T_k}{\xi}$, то це означатиме, що σ_k є повним диференціалом деякої функції від змінних x, y, z.

Тепер вкажемо множину алгебр для яких вектори (2.4) вибрані довільним чином і при цьому справедлива рівність (2.63). Нагадаємо, що алгебра $\mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$, де S — m-вимірна напівпроста підалгебра і N — $(n-m)$-вимірна нільпотентна підалгебра (див. п.).

Теорема 2.2.5. *Якщо* $\mathbb{A}_n^m \equiv S$, *то справедлива рівність (2.63).*

Доведення миттєво випливає з умови $\sigma_k \equiv 0$ при $k = m+1, \ldots, n$ and (2.68). Цю теорему доведено в роботі [146].

Теорема 2.2.6. *Якщо* $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ *і* N *— нульова нільпотентна підалгебра, то справедлива рівність (2.63).*

Доведення. З умов теореми випливає, що у співвідношеннях (2.65) всі $B_{k,p} = 0$. Тому, (2.65) набувають вигляду

$$\widetilde{A}_k = -\frac{T_k}{\xi_{u_k}^2}, \qquad k = m+1, \ldots, n. \tag{2.70}$$

Оскільки $I_s I_r = 0$ при $r, s = m+1, \ldots, n$, то з позначення (2.67) і рівності (2.70), отримуємо

$$\sigma_k = \frac{dT_k}{\xi_{u_k}} + \widetilde{A}_k \, d\xi_{u_k} = \frac{dT_k}{\xi_{u_k}} - \frac{T_k}{\xi_{u_k}^2} \, d\xi_{u_k} = d\left(\frac{T_k}{\xi_{u_k}}\right) =: d\tau_k \,, \quad k = m+1, \ldots, n.$$

При відображенні $(x, y, z) \to \tau_k$ коло $C_\zeta(0, R)$ відображається на замкнену гладку криву $\widetilde{C}$ (жорданову аба ні) і особливість $\xi_{u_k} = 0$ відображається в $\tau_k = \infty$. Як наслідок, у внутрішності кривої $\widetilde{C}$ не існує особливих точок. Тоді за теоремою Коші в комплексній площині [30, с. 90], маємо:

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_k = \int\limits_{\widetilde{C}} d\tau_k = 0.$$

Тому рівність (2.63) є наслідком останнього співвідношення і (2.68). Теорему доведено.

Зокрема, з теореми 2.2.6 випливає формула (2.62) для моногенних функцій в тривимірній алгебрі $\mathbb{A}_2$, яка вивчалась в роботі [145].

Далі розглянемо випадок коли N є не нульовою нільпотентною підалгеброю. Для цього встановимо точний вигляд $\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3}$ і σ_{m+4}.

Із співвідношення (2.67) випливають рівності

$$\sigma_{m+1} = \frac{dT_{m+1}}{\xi_{u_{m+1}}} + \widetilde{A}_{m+1}\, d\xi_{u_{m+1}}\,,$$
$$\sigma_k = \frac{dT_k}{\xi_{u_k}} + \widetilde{A}_k\, d\xi_{u_k} + \sum_{r,s=m+1}^{k-1} \widetilde{A}_r\, dT_s \Upsilon^s_{r,k}\,, \quad k = m+2, \ldots, n. \tag{2.71}$$

Тепер, наслідком рівностей (2.65) і (2.66) є наступні рівності:

$$\widetilde{A}_{m+1} = -\frac{T_{m+1}}{\xi^2_{u_{m+1}}}\,, \quad \widetilde{A}_{m+2} = -\frac{T_{m+2}}{\xi^2_{u_{m+2}}} + \frac{T^2_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+2}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\,,$$

$$\widetilde{A}_{m+3} = -\frac{T_{m+3}}{\xi^2_{u_{m+3}}} + \frac{T^2_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+3}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3} + 2\frac{T_{m+1}T_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+3}}}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3} -$$
$$-\frac{T^3_{m+1}}{\xi^4_{u_{m+3}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3} + \frac{T^2_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+3}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3} -$$
$$-\frac{T^2_{m+1}T_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+3}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\,,$$

$$\widetilde{A}_{m+4} = -\frac{T_{m+4}}{\xi^2_{u_{m+4}}} + \frac{T^2_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+4} + 2\frac{T_{m+1}T_{m+3}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} +$$
$$+2\frac{T_{m+1}T_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+4} + 2\frac{T_{m+2}T_{m+3}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} + \frac{T^2_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+4} -$$
$$-\frac{T^3_{m+1}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+4} - \frac{T^2_{m+1}T_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+4} -$$
$$-\frac{T^2_{m+1}T_{m+3}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} + \frac{T^2_{m+3}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} -$$
$$-\frac{T^3_{m+1}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} - \frac{T^2_{m+1}T_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} -$$
$$-\frac{T^2_{m+1}T_{m+3}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} - 2\frac{T^2_{m+1}T_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} -$$
$$-2\frac{T_{m+1}T^2_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} - 2\frac{T_{m+1}T_{m+2}T_{m+3}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} +$$
$$+\frac{T^4_{m+1}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} + \frac{T^3_{m+1}T_{m+2}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\times$$
$$\times\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} + \frac{T^3_{m+1}T_{m+3}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} - \frac{T_{m+1}T^2_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\times$$
$$\times\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} - \frac{T^3_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} - \frac{T^2_{m+2}T_{m+3}}{\xi^4_{u_{m+4}}}\times$$

$$\times\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}+\tfrac{T^3_{m+1}T_{m+2}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}+$$
$$+\tfrac{T^2_{m+1}T^2_{m+2}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}+$$
$$+\tfrac{T^3_{m+1}T_{m+2}T_{m+3}}{\xi^5_{u_{m+4}}}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\,.$$

Нарешті, наслідком попередніх рівностей і співвідношення (2.71) є наступні диференціальні представлення для $\sigma_{m+1},\sigma_{m+2},\sigma_{m+3}$ та σ_{m+4}:

$$\sigma_{m+1}=d\left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+1}}}\right),\quad \sigma_{m+2}=d\left(\frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+2}}}-\frac{1}{2}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\frac{T^2_{m+1}}{\xi^2_{u_{m+2}}}\right),\tag{2.72}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{m+3}=d\Bigg(\tfrac{T_{m+3}}{\xi_{u_{m+3}}}-\tfrac{1}{2}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\tfrac{T^2_{m+1}}{\xi^2_{u_{m+3}}}-\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\tfrac{T_{m+1}T_{m+2}}{\xi^2_{u_{m+3}}}-\\ -\tfrac{1}{2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\tfrac{T^2_{m+2}}{\xi^2_{u_{m+3}}}+\tfrac{1}{3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\tfrac{T^3_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+3}}}\Bigg)+\\ +\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\,\sigma^{(1)}_{m+3}\,,\end{gathered}\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{m+4}=d\Bigg(&\tfrac{T_{m+4}}{\xi_{u_{m+4}}}-\tfrac{1}{2}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+4}\tfrac{T^2_{m+1}}{\xi^2_{u_{m+4}}}-\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\tfrac{T_{m+1}T_{m+3}}{\xi^2_{u_{m+4}}}-\\ &-\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+4}\tfrac{T_{m+1}T_{m+2}}{\xi^2_{u_{m+4}}}-\tfrac{1}{2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+4}\tfrac{T^2_{m+2}}{\xi^2_{u_{m+4}}}-\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\tfrac{T_{m+2}T_{m+3}}{\xi^2_{u_{m+3}}}+\\ &+\tfrac{1}{3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+4}\tfrac{T^3_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+4}}}-\tfrac{1}{2}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\tfrac{T^2_{m+3}}{\xi^2_{u_{m+4}}}+\\ &+\tfrac{1}{3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\tfrac{T^3_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+4}}}-\tfrac{1}{4}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\tfrac{T^4_{m+1}}{\xi^4_{u_{m+4}}}+\\ &+\tfrac{1}{3}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\tfrac{T^3_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+4}}}\Bigg)+\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+4}\,\sigma^{(1,2)}_{m+4}+\\ &+\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(2,2)}_{m+4}+\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(3,2)}_{m+4}+\\ &+\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\,\sigma^{(4,3)}_{m+4}+\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(5,1)}_{m+4}+\\ &+\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(6,2)}_{m+4}+\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(7,3)}_{m+4}-\\ &-\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(8,2)}_{m+4}-\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\times\\ &\times\sigma^{(9,3)}_{m+4}+\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(10,1)}_{m+4}+\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(11,3)}_{m+4}-\\ &-\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(12,1)}_{m+4}-\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\times\\ &\times\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(13,2)}_{m+4}-\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\,\sigma^{(14,3)}_{m+4}\,,\end{aligned}\tag{2.74}$$

де
$$\sigma^{(1)}_{m+3} := \frac{T^2_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+3}}} \left(dT_{m+2} - \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+3}}} \, d\xi_{u_{m+3}} \right), \tag{2.75}$$

і $\sigma^{(\ell,r)}_{m+4}$, $\ell = 1, 2, \ldots, 14$ визначаються наступними рівностями:

$$\sigma^{(\ell,r)}_{m+4} := \begin{cases} \frac{T^2_{m+1}}{\xi^3_{u_{m+4}}} \, g(r) & \text{при} \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{2\,T_{m+1}T_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+4}}} \, g(r) & \text{при} \quad \ell = 5, 6, 7, \\ \frac{T^3_{m+1}}{\xi^4_{u_{m+4}}} \, g(r) & \text{при} \quad \ell = 8, 9, \\ \frac{T^2_{m+2}}{\xi^3_{u_{m+4}}} \, g(r) & \text{при} \quad \ell = 10, 11, \\ \frac{T^2_{m+1}T_{m+2}}{\xi^4_{u_{m+4}}} \, g(r) & \text{при} \quad \ell = 12, 13, 14, \end{cases} \tag{2.76}$$

де $g(r) := dT_{m+r} - \frac{T_{m+r}}{\xi_{u_{m+4}}} \, d\xi_{u_{m+4}}$.

Теорема 2.2.7. *Якщо* $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$ *і* $\dim_{\mathbb{C}} N \leq 3$, *тоді справедлива рівність (2.63).*

Доведення. З рівності (2.72) для σ_{m+1}, маємо

$$\sigma_{m+1} = d\left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+1}}}\right) =: d\tau_{m+1}.$$

Тепер, рівність $\int_{C_\zeta(0,R)} \sigma_{m+1} = 0$ доводиться як і в теоремі 2.2.6.

Розглянемо σ_{m+2} з рівності (2.72), яке є повним диференціалом деякої функції від змінних $\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+2}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+2}}}$. При відображенні $(x, y, z) \to \left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+2}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+2}}}\right)$ коло $C_\zeta(0, R)$ відображається в замкнену гладку криву $\widetilde{\widetilde{C}}$ (жорданову або ні) і особливість $\xi_{u_{m+2}} = 0$ відображається в ∞. Як наслідок, внутрішність кривої $\widetilde{\widetilde{C}}$ не містить особливих точок. Тоді за теоремою Коші у просторі $\mathbb{C}^2$ [30, p. 334], маємо:

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_{m+2}(x, y, z) = \int\limits_{\widetilde{\widetilde{C}}} \sigma_{m+2}\left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+2}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+2}}}\right) = 0.$$

Нарешті, доведемо рівність (2.69) для $k = m + 3$. В роботі [55] описано всі комутативні асоціативні нільпотентні алгебри наж полем $\mathbb{C}$ розмірностей

$1, 2, 3$. З результатів роботи [55] (Таблиця 1) випливає, що всі згадані алгебри завжди задовольняють співвідношення $\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3} = 0$. Тому з рівності (2.73) випливає, що при умовах теореми σ_{m+3} зажди є повним диференціалом деякої функції від змінних $\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+3}}{\xi_{u_{m+3}}}$.

Тепер, як і раніше, при відображенні $(x, y, z) \to \left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+3}}{\xi_{u_{m+3}}}\right)$ коло $C_\zeta(0, R)$ відображається на гладку криву $\widehat{C}$ (жорданову чи ні) і особливість $\xi_{u_{m+3}} = 0$ відображається в ∞. Тому внутрішність кривої $\widehat{C}$ не містить особливих точок. Тоді за теоремою Коші у просторі $\mathbb{C}^3$ [30, с. 334], маємо:

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_{m+3}(x, y, z) = \int\limits_{\widehat{C}} \sigma_{m+3}\left(\frac{T_{m+1}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+2}}{\xi_{u_{m+3}}}, \frac{T_{m+3}}{\xi_{u_{m+3}}}\right) = 0.$$

Таким чином, рівність (2.63) є наслідком останньої рівності і рівності (2.68). Теорему доведено.

Зауважимо, що з теореми 2.2.7 випливає формула (2.62) для моногенних функцій в тривимірній алгебрі $\mathbb{A}_3$ (див. [192]) і в тривимірній алгебрі $\mathbb{A}_2$, яка вивчалась в роботі [145].

Теорема 2.2.8. *Нехай $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ і $\dim_\mathbb{C} N = 4$. Тоді рівність (2.63) справедлива, якщо виконуються наступні умови:*

$$\begin{aligned}
&\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3} = \Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+2,m+4} = \Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} = \\
&= \Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+3} = \Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} = \Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} = \\
&= \Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} = \Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} = \\
&= \Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} = \Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} = \\
&= \Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} = \Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+1}_{m+3,m+4} = \\
&= \Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+2}_{m+3,m+4} = \Upsilon^{m+2}_{m+2,m+3}\Upsilon^{m+1}_{m+1,m+2}\Upsilon^{m+3}_{m+3,m+4} = 0.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Доведення. З рівностей (2.73) і (2.74) очевидно, що при умовах (2.77) вирази для σ_{m+3} і σ_{m+4} є повними диференціалами. Далі доведення завершується подібно до доведення теореми 2.2.7. Теорему доведено.

Далі розглянемо приклади алгебр, які задовольняють співвідношення (2.77).

Приклади.

- Розглянемо алгебру з базисом $\{I_1 := 1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ і правилами множення:
$$I_2^2 = I_3\,,\ \ I_2\, I_4 = I_5,$$
а решта добутків нулі (для нільпотентної підалгебри див. [126], таблиця 21, алгебра $\mathcal{J}_{69}$ і [56], с. 590, алгебра $A_{1,4}$).

- Розглянемо алгебру з базисом $\{I_1 := 1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ і правилами множення:
$$I_2^2 = I_3,$$
а решта добутків нулі (для нільпотентної підалгебри див. [56], с. 590, алгебра $A_{1,2} \oplus A_{0,1}^2$).

- Алгебра з базисом $\{I_1 := 1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ і правилами множення:
$$I_2^2 = I_3\,,\ \ I_4^2 = I_5,$$
а решта добутків нулі (для нільпотентної підалгебри див. [56], с. 590, алгебра $A_{1,2} \oplus A_{1,2}$).

- Алгебра з базисом $\{I_1 := 1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ і правилами множення:
$$I_2^2 = I_3\,,\ \ I_2\, I_3 = I_4,$$
а решта добутків нулі (для нільпотентної підалгебри див. [126], таблиця 21, алгебра $\mathcal{J}_{71}$).

Тепер розглянемо приклад алгебри, яка не задовольняє умови (2.77). Більше того, виберемо вектори e_1, e_2, e_3 вигляду (2.4) такі, що рівність (2.63) не виконується.

Приклад 2.2.1.

Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_5$ з базисом $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$, де $\rho^5 = 0$ (див. [151] і [171], параграф 11). Тут $n = 5$, $m = 1$. Очевидно, що $\Upsilon_{2,3}^2 \Upsilon_{3,4}^3 = 1$ і співвідношення (2.77) не виконуються. Розглянемо вектори:
$$e_1 = 1, \quad e_2 = i + \rho^2 + \rho^4, \quad e_3 = (1 - i)\rho + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\, i\right) \rho^3,$$

які лінійно незалежні над $\mathbb{R}$ і задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0.$$

Нехай $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$. В алгебрі $\mathbb{A}_5$ для заданого ζ, маємо

$$\xi_{u_2} = \xi_{u_3} = \xi_{u_4} = \xi_{u_5} = x + iy =: \xi\,.$$

Обернений елемент ζ^{-1} має вигляд (2.64), де

$$\widetilde{A}_0 = \frac{1}{\xi}\,, \quad \widetilde{A}_1 = \frac{z(i-1)}{\xi^2}\,, \quad \widetilde{A}_2 = -\frac{y}{\xi^2} + \frac{z^2(1-i)^2}{\xi^3}\,,$$

$$\widetilde{A}_3 = \frac{1}{4}\frac{z(3i-1)}{\xi^2} + \frac{2yz(1-i)}{\xi^3} - \frac{z^3(1-i)^3}{\xi^4}\,,$$

$$\widetilde{A}_4 = -\frac{y}{\xi^2} + \frac{y^2 + \frac{1}{2}z^2(1-i)(1-3i)}{\xi^3} - \frac{3yz^2(1-i)^2}{\xi^4} + \frac{z^4(1-i)^4}{\xi^5}\,.$$

Покладемо

$$C_\zeta(0,R) := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \in E_3 : x^2 + y^2 = R^2\}. \tag{2.78}$$

На колі інтерування (2.78) маємо:

$$\widetilde{A}_0 = \frac{1}{\xi}\,, \quad \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_3 = 0, \quad \widetilde{A}_2 = -\frac{y}{\xi^2}\,, \quad \widetilde{A}_4 = -\frac{y}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^3}\,. \tag{2.79}$$

Наслідком рівностей (2.71), (2.79) на колі (2.78) маємо наступний вираз

$$\sigma_5 = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{y}{\xi^2}\right) dy + \left(-\frac{y}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^3}\right) d\xi.$$

Легко обчислити, що

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_5 = \frac{\pi i}{2}$$

і

$$\int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_1 = \int\limits_{|\xi|=R} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i, \qquad \int\limits_{C_\zeta(0,R)} \sigma_k = 0, \qquad k = 2,3,4.$$

Тому

$$\lambda = \int\limits_{C_\zeta(0,R)} \zeta^{-1} d\zeta = 2\pi i + \frac{\pi i}{2}\rho^4.$$

Тепер вкажемо достатні умови на вибір векторів (2.4), для яких справедлива рівність (2.63). Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$. Зауважимо, що умова $\zeta \in E_3 \subset S$ означає, що в розкладі (2.4) $a_k = b_k = 0$ при всіх $k = m+1, \ldots, n$.

Теорема 2.2.9. *Якщо* $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ *і* $\zeta \in E_3 \subset S$, *то справедлива рівність (2.63).*

Доведення. Оскільки $\zeta \in S$, то $T_k = 0$ при $k = m+1, \ldots, n$. Із (2.66) і (2.65) випливає, що $\widetilde{A}_k = 0$, і тепер (2.71) випливає з $\sigma_k = 0$ при $k = m+1, \ldots, n$. Рівність (2.63) є наслідком рівності $\sigma_k = 0$ і співвідношення (2.68).

Зауважимо, що по суті теорема 2.2.9 узагальнює теорему 3 з роботи [190].

Тепер розглянемо випадок $\zeta \notin S$. Якщо $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ і $\dim_{\mathbb{C}} N \leq 3$, тоді за теоремою 2.2.7 рівність (2.63) справедлива для довільного $\zeta \in E_3$.

Теорема 2.2.10. *Нехай* $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ *і* $\dim_{\mathbb{C}} N = 4$. *Тоді рівність (2.63) справедлива, якщо виконуються наступні дві умови:*

1. $a_{m+1} = b_{m+1} = 0$*;*
2. *виконується хоча б одне із співвідношень* $a_{m+2} = b_{m+2} = 0$ *або* $a_{m+3} = b_{m+3} = 0$.

Доведення. Із умов теореми випливає, що $T_{m+1} = 0$ і виконується хоча б одна із рівностей $T_{m+2} = 0$ або $T_{m+3} = 0$. Для доведення (2.63) необхідно довести рівність (2.69) для $k = m+1, \ldots, m+4$. Рівність (2.69) доведена в теоремі 2.2.7 для $k = m+1, m+2$. При умові $T_{m+1} = 0$ з (2.75) маємо $\sigma_{m+3}^{(1)} = 0$. Оскільки тепер σ_{m+3} є повним диференціалом, то подібно до доведення теореми 2.2.7 доводиться рівність (2.69) для $k = m+3$.

Більше того, за умов теореми із рівності (2.76) випливають рівності $\sigma_{m+4}^{(\ell,r)} = 0$ для всіх $\ell = 1, \ldots, 14$. Тому, σ_{m+4} є повним диференціалом і подібно до доведення теореми 2.2.7 доводиться рівність (2.69) для $k = m + 4$. Теорему доведено.

Зауваження 2.2.8. В роботі [186] аналог інтегральної формули Коші 2.2.4 і всі наслідки з неї узагальнено для моногенних функцій змінної $\sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, де $2 \le k \le 2n$.

Наступна теорема містить критерій моногенності функції в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ і є наслідком зауваження 2.1.3 і теорем 2.1.3, 2.1.5, 2.2.2, 2.2.3 та 2.2.4.

Теорема 2.2.11. *Функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* Ω_ζ *тоді і тільки тоді, коли компоненти* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *розкладу (2.34) є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω *і виконуються умови (2.6) в кожній точці області* Ω_ζ.

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$, *то функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *є також моногенною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл, в якому функція* Φ *розкладається у степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - \zeta_0)^k;$$

2) *функція* Φ *неперервна в області* Ω_ζ *і задовольняє умову (2.57) для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$ *такого, що його замикання* $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$.

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$ *і, крім того, область* Ω *є опуклою в напрямку прямих* L_u, *то функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною тоді і тільки тоді, коли існує єдиний набір з* m *голоморфних в області* D_u *функцій* F_u, $u = 1, 2, \ldots, m$ *і єдиний набір з* $n - m$ *голоморфних в області* D_{u_s} *функцій* G_s, $s = m+1, \ldots, n$ *таких, що в області* Ω_ζ *функція* Φ *подається у вигляді (2.25).*

Доведення. В зауваженні 2.1.1 до теореми 2.1.3 показано, що моногенність функції Φ, розкладеної за базисом алгебри у вигляді (2.34), еквівалентна $\mathbb{R}$-диференційовності компонент U_k та виконанню умов (2.6).

Доведемо еквівалентність умови 1) і моногенності функції Φ за умови $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, ..., m$. Розглянемо звуження функції Φ на окіл точки ζ_0, який повністю міститься в області Ω_ζ і представимо функцію Φ в цьому околі формулою вигляду (2.59). Тепер аналогічно до того, як доводиться розклад голоморфної функції комплексної змінної у степеневий ряд (див., наприклад, [160, с. 196]), з використанням теореми 2.2.4 доводиться розклад моногенної функції у степеневий ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - \zeta_0)^k. \tag{2.80}$$

З іншого боку, ряд (2.80) визначає моногенну функцію в області його збіжності.

Еквівалентність умови 2) і моногенності функції Φ випливає з теорем 2.2.2, 2.2.3.

Нарешті, для доведення еквівалентності моногенності функції Φ, визначеної в області, що є опуклою в напрямку прямих L_u, $u = 1, 2, ..., m$, і її представлення у вигляді (2.25) досить зауважити, що функція (2.25) є моногенною в області Ω_ζ. При цьому єдиність набору голоморфних функцій F_u та G_s з (2.25) доведено в зауваженні 2.1.3. Теорему доведено.

2.3. Аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла в комутативних алгебрах

Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [150].

2.3.1. Поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях

Розглянемо поняття квадровної поверхні в $\mathbb{R}^3$.

Множина Σ називається *поверхнею* у просторі $\mathbb{R}^3$, якщо Σ є гомеоморфним образом квадрата $G := [0,1] \times [0,1]$ (див., наприклад, [162, с. 24]).

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину $\Sigma^\varepsilon := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \leq \varepsilon,\ (x_1, y_1, z_1) \in \Sigma\}$.

Відстанню Фреше $d(\Sigma, \Lambda)$ між поверхнями Σ і Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma \subset \Lambda^\varepsilon$, $\Lambda \subset \Sigma^\varepsilon$ (див., наприклад, [81]). Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n, \Sigma) \to 0$ при $n \to \infty$ (див., наприклад, [162, с. 121]).

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ (див., наприклад, [162, с. 468]), а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ — площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега, тобто $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$. Тоді за теоремою Л. Чезарі [59, с. 544] існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \big\{ f(u,v) := \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big) : (u,v) \in G \big\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{2.81}$$

існують м.в. на квадраті G і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int\limits_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv. \tag{2.82}$$

У випадку, коли $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$ і рівність (2.82) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ будемо називати *квадровною.*

Сформулюємо деякі достатні умови квадровності поверхні Σ.

1. Якщо Σ спрямлювана поверхня (тобто, ліпшицевий образ квадрата), то з [162, IV.4.28, IV.4.1 (e)] випливає, що Σ квадровна.

2. Нехай компоненти $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ відображення f абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [176, с. 169]). Нехай, крім того, в якобіанах A, B, C відображення f в кожному з добутків $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ одна частинна похідна належать класу

інтегровних функцій $L_p(G)$ на G, а інші частинні похідні належать $L_q(G)$, де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тоді Σ квадровна (див. [162, V.2.26]). Відмітимо, що для спрямлюваної поверхні Σ, компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення f абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [176, с. 169]).

3. Якщо дві компоненти відображення $f(u,v)$ є функціями Ліпшиця і третя компонентна абсолютно неперервна за Тонеллі, то Σ квадровна (див. [162, V.2.28]).

Тепер визначимо поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях.

Замкнену поверхню $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ будемо розуміти як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрялювану криву.* Іншими словами, замкнена поверхня Γ є об'єднанням двох поверхонь Γ_1, Γ_2, для яких $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 =: \gamma$ є замкненою жордановою спрямлюваною кривою. Нехай поверхні Γ_1, Γ_2 задані параметрично:

$$\Gamma_1 = \Big\{ f_1(u,v) := \Big(x_1(u,v),\, y_1(u,v),\, z_1(u,v)\Big) : (u,v) \in G \Big\},$$

$$\Gamma_2 = \Big\{ f_2(u,v) := \Big(x_2(u,v),\, y_2(u,v),\, z_2(u,v)\Big) : (u,v) \in G \Big\}.$$

Замкнена поверхня Γ називається *квадровною*, якщо поверхні Γ_1 і Γ_2 квадровні.

Для замкненої квадровної поверхні Γ і неперервної функції $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ визначимо інтеграли по Γ рівностями

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\, dydz := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big) A_1\, dudv -$$

$$- \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big) A_2\, dudv, \tag{2.83}$$

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\, dzdx := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big) B_1\, dudv -$$

$$- \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big) B_2\, dudv, \tag{2.84}$$

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dxdy := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v)\Big)C_1\,dudv -$$

$$-\int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v)\Big)C_2\,dudv \qquad (2.85)$$

з якобіанами A_k, B_k, C_k відображення f_k вигляду (2.81) при $k = 1, 2$.

Легко переконатися у коректності означень (2.83) — (2.85). Справді, значення правих частин інтегралів в рівностях (2.83) — (2.85) однакові для усіх параметризацій f_1, f_2, для яких площі $\mathfrak{L}(\Gamma_1)$, $\mathfrak{L}(\Gamma_2)$ подаються рівностями вигляду (2.82), і значення правих частин інтегралів в рівностях (2.83) — (2.85) не залежать від вибору спрямлюваної кривої γ, яка розбиває Γ на дві частини.

Лема 2.3.1. *Якщо* Γ *замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{\Gamma} dzdx = \int\limits_{\Gamma} dxdy = 0. \qquad (2.86)$$

Доведення. За означенням

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{G} A_1\,dudv - \int\limits_{G} A_2\,dudv. \qquad (2.87)$$

З результатів Радо [162, V.2.64 (iii), IV.4.21 (iii_3)] випливає, що для поверхонь Γ_1, Γ_2 справедливі наступні рівності:

$$\int\limits_{G} A_k\,dudv = \int\limits_{\partial G} ydz, \qquad k = 1, 2, \qquad (2.88)$$

де праву частину інтеграла розуміємо як інтеграл Лебега–Стілтьєса, який беремо по межі ∂G поверхні G в додатному напрямку. Тепер з рівностей (2.87), (2.88) маємо, що перший інтеграл в (2.86) дорівнює нулю. Інші рівності (2.86) доводяться аналогічно. Лему доведено.

2.3.2. Гіперголоморфні функції в комутативній банаховій алгебрі і допоміжні результати

Будемо казати, що функція вигляду (2.52) є *гіперголоморфною* в області Ω_ζ, якщо її дійснозначні компоненти U_k, V_k є диференційовними в Ω і виконуються наступні умови в кожній точці області Ω_ζ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,e_1+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,e_2+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,e_3=0. \tag{2.89}$$

В науковій літературі використовуються різні назви для функцій, які задовольняють рівняння вигляду (2.89). Наприклад, в роботах [62, 196, 199] такі функції називають регулярними, а в роботах [46, 52, 175] — моногенними функціями. Ми будемо використовувати термінологію робіт [96, 107, 197].

Нехай Ω — обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi:\Omega_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ вигляду (2.52) означимо об'ємний інтеграл рівністю

$$\int\limits_{\Omega_\zeta}\Psi(\zeta)dxdydz:=\sum_{k=1}^{n}I_k\int\limits_{\Omega}U_k(x,y,z)dxdydz+i\sum_{k=1}^{n}I_k\int\limits_{\Omega}V_k(x,y,z)dxdydz.$$

Нехай Γ — замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi:\Gamma_\zeta\rightarrow\mathbb{A}_n^m$ вигляду (2.52), де $(x,y,z)\in\Gamma$ і $U_k:\Gamma\rightarrow\mathbb{R}$, $V_k:\Gamma\rightarrow\mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ_ζ з диференціальною формою $\sigma:=dydze_1+dzdxe_2+dxdye_3$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma_\zeta}\Psi(\zeta)\sigma:=\sum_{k=1}^{n}e_1I_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,y,z)dydz+\sum_{k=1}^{n}e_2I_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,y,z)dzdx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}e_3I_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,y,z)dxdy+i\sum_{k=1}^{n}e_1I_k\int\limits_{\Gamma}V_k(x,y,z)dydz+$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}e_2I_k\int\limits_{\Gamma}V_k(x,y,z)dzdx+i\sum_{k=1}^{n}e_3I_k\int\limits_{\Gamma}V_k(x,y,z)dxdy,$$

де інтеграли в правій частині рівності визначені рівностями (2.83) — (2.85).

Наступна лема є наслідком леми 2.3.1 і означення σ.

Лема 2.3.2. *Якщо* Γ *— замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma_\zeta}\sigma=0. \tag{2.90}$$

Введемо евклідову норму $\|a\| := \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2\Big)^{1/2}$ в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, де $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_k$ і $a_k \in \mathbb{C}$ при $k = \overline{1,n}$.

Нехай Γ — замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $U : \Gamma_\zeta \to \mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ_ζ з диференціальною формою $\|\sigma\|$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma_\zeta} U(xe_1 + ye_2 + ze_3)\|\sigma\| :=$$

$$= \int\limits_{G} U\Big(x_1(u,v)e_1 + y_1(u,v)e_2 + z_1(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, dudv -$$

$$- \int\limits_{G} U\Big(x_2(u,v)e_1 + y_2(u,v)e_2 + z_2(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\, dudv.$$

Лема 2.3.3. *Якщо Γ — замкнена квадровна поверхня і функція $\Psi : \Gamma_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна, то*

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \leq 3nM \int\limits_{\Gamma_\zeta} \|\Psi(\zeta)\|\|\sigma\|,$$

де $M := \max\limits_{1\leq s\leq n}\{\|e_1 I_s\|, \|e_2 I_s\|, \|e_3 I_s\|\}$.

Доведення. Користуючись представленням (2.52), де $(x,y,z) \in \Gamma$, отримаємо

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|e_1 e_k\| \int\limits_{\Gamma} \Big|U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)\Big|\, dydz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \|e_2 e_k\| \int\limits_{\Gamma} \Big|U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)\Big|\, dzdx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \|e_3 e_k\| \int\limits_{\Gamma} \Big|U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)\Big|\, dxdy \leq 3nM \int\limits_{\Gamma_\zeta} \|\Psi(\zeta)\|\|\sigma\|.$$

Лему доведено.

Якщо однозв'язна область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ має замкнену кусково-гладку межу $\partial\Omega$ і функція $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку аж до межі $\partial\Omega_\zeta$, то наступна рівність випливає з класичної формули Остроградського–Гауса:

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\, e_3 \right) dxdydz\,. \tag{2.91}$$

Доведемо наступну теорему аналогічно до доведення теореми 9 [199] і теореми 1 [96], де розглядаються функції зі значеннями в алгебрі кватерніонів.

Теорема 2.3.1. *Нехай ∂P — межа замкненого куба P, який міститься в області Ω і функція $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ гіперголоморфна в області Ω_ζ. Тоді виконується наступна рівність:*

$$\int\limits_{\partial P_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Доведення. Припустимо, що $\left\| \int_{\partial P_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| = K$.

Позначимо через S площу поверхні ∂P. Поділимо P на 8 рівних кубів і позначимо через P^1 такий куб, для якого $\left\| \int_{\partial P^1_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \geq K/8$. Очевидно, що поверхня ∂P^1 має площу $S/4$.

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених кубів P^s із площами $S/4^s$ поверхонь ∂P^s, які задовольняють нерівності

$$\left\| \int\limits_{\partial P^s_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \geq K/8^s. \tag{2.92}$$

За принципом Кантора існує єдина, спільна для всіх кубів P^s, точка $\zeta_0 := x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3$. Оскільки функція Ψ вигляду (2.52) і дійснозначні компоненти U_k, V_k диференційовні в Ω, то в околі точки ζ_0 маємо розклад

$$\Psi(\zeta) = \Psi(\zeta_0) + \Delta x \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial z} + \delta(\zeta, \zeta_0)\rho,$$

де $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$, $\Delta z := z - z_0$, і $\delta(\zeta, \zeta_0)$ — нескінченно мала функція при $\rho := \|\zeta - \zeta_0\| \to 0$.

Тому для всіх достатньо малих кубів, маємо

$$\int\limits_{\partial P_\zeta^s} \Psi(\zeta)\sigma = \Psi(\zeta_0) \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \sigma + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial x} \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \Delta x \sigma + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial y} \int\limits_{P_\zeta^s} \Delta y \sigma +$$

$$\frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial z} \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \Delta z \sigma + \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \delta(\zeta, \zeta_0) \rho\, \sigma = \sum_{r=1}^{5} J_r.$$

Згідно формули (2.91), $J_1 = 0$. Користуючись (2.91) і беручи до уваги рівність (2.89), отримаємо

$$J_2 + J_3 + J_4 = \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial x}\, e_1 V_s + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial y}\, e_2 V_s + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial z}\, e_3 V_s = 0,$$

де через V_s позначено об'єм кубу P^s.

Відмітимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує число s_0 таке, що нерівність $\|\delta(\zeta, \zeta_0)\| < \varepsilon$ виконується для всіх кубів P^s при $s > s_0$. Відмітимо також, що ρ не більше, ніж діагональ P^s, тобто $\rho \leq \frac{\sqrt{S}}{2^s \sqrt{2}}$. Тому, користуючись лемою 2.3.3 і згаданими вище нерівностями для $\delta(\zeta, \zeta_0)$ і ρ, отримаємо

$$\left\| \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \Psi(\zeta)\sigma \right\| = \|J_5\| \leq 3nM \int\limits_{\partial P_\zeta^s} \rho\, \|\delta(\zeta, \zeta_0)\|\, \|\sigma\| \leq 3nM \frac{\sqrt{S}}{2^s \sqrt{2}}\, \frac{S}{4^s}\, \varepsilon\,. \tag{2.93}$$

Із співвідношень (2.92) і (2.93) випливає, що $K \leq c\varepsilon$, де константа c не залежить від ε. Перейшовши до границі в останній рівності при $\varepsilon \to 0$, отримаємо рівність $K = 0$. Теорему доведено.

2.3.3. Аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла

Встановимо аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла по межі $\partial\Omega_\zeta$ у випадку, коли функція $\Psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ гіперголоморфна в області Ω_ζ і неперервна в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ цієї області.

Для таких функцій розглянемо модуль неперервності

$$\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi, \delta) := \sup_{\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Omega}_\zeta, \|\zeta_1 - \zeta_2\| \leq \delta} \|\Psi(\zeta_1) - \Psi(\zeta_2)\|.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ (див., наприклад, [127, с. 79]) називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon}\,,$$

де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм $\partial\Omega^\varepsilon$.

Теорема 2.3.2. *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ є замкнена квадровна поверхня для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega)<\infty$, і Ω має квадровні перетини з площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi:\overline{\Omega}_\zeta\to\mathbb{A}_n^m$ гіперголоморфна в області Ω_ζ і неперервна в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\Psi(\zeta)\sigma=0. \tag{2.94}$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{M}^*(\partial\Omega)<\infty$, то існує $\varepsilon_0>0$ таке, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ виконується нерівність

$$V(\partial\Omega^\varepsilon)\le c\,\varepsilon, \tag{2.95}$$

де стала c не залежить від ε.

Візьмемо $\varepsilon<\varepsilon_0/\sqrt{3}$. Розіб'ємо простір $\mathbb{R}^3$ на куби площинами, перпендикулярними до координатних осей, з ребром ε. Тоді маємо рівність

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\Psi(\zeta)\,\sigma=\sum_j\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}\Psi(\zeta)\,\sigma+\sum_k\int\limits_{\partial K_\zeta^k}\Psi(\zeta)\,\sigma, \tag{2.96}$$

де перша сума застосовується до кубів K^j, для яких $\overline{K^j}\cap\partial\Omega\neq\varnothing$, а друга сума застосовується до кубів K^k, для яких $\overline{K^k}\subset\Omega$. За теоремою 2.3.1 друга сума дорівнює нулю.

Для оцінки інтеграла першої суми візьмемо точку $\zeta_j\in\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j$. Відмітимо, що діаметр множини $\Omega\cap K^j$ не перевищує $\varepsilon\sqrt{3}$. Оскільки Ω має квадровні перетини з площинами, перпендикулярними до осей координат, то міра Лебега меж згаданих вище перетинів дорівнює 0, і відповідно, множина $\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)$

складається з квадровних поверхонь. Тому, беручи до уваги рівність (2.90), і користуючись лемою 2.3.3, отримаємо

$$\left\|\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}\Psi(\zeta)\sigma\right\|=\left\|\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}(\Psi(\zeta)-\Psi(\zeta_j))\sigma\right\|\le$$

$$\le 3nM\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}\|\Psi(\zeta)-\Psi(\zeta_j)\|\|\sigma\|\le 3nM\,\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi,\varepsilon\sqrt{3})\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}\|\sigma\|. \qquad (2.97)$$

Таким чином, наступна оцінка є результатом рівності (2.96) і нерівності (2.97):

$$\left\|\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\Psi(\zeta)\,\sigma\right\|\le 3nM\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi,\varepsilon\sqrt{3})\sum_j\int\limits_{\partial(\Omega_\zeta\cap K_\zeta^j)}\|\sigma\|\le$$

$$\le 3nM\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi,\varepsilon\sqrt{3})\Bigg(\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\|\sigma\|+6\sum_j\varepsilon^2\Bigg). \qquad (2.98)$$

Оскільки $\bigcup_j K^j\subset\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}$, то враховуючи нерівність (2.95), отримаємо оцінку

$$\sum_j\varepsilon^3\le V\Big(\partial\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}\Big)\le c\varepsilon\sqrt{3}\,,$$

з якої випливає

$$\sum_j\varepsilon^2\le c\sqrt{3}. \qquad (2.99)$$

Нарешті, наступна нерівність є результатом оцінок (2.98) і (2.99):

$$\left\|\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\Psi(\zeta)\sigma\right\|\le c_1\,\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi,\varepsilon\sqrt{3}), \qquad (2.100)$$

де стала c_1 не залежить від ε.

Для завершення доведення відмітимо, що $\omega_{\overline{\Omega}_\zeta}(\Psi,\varepsilon\sqrt{3})\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ з урахуванням рівномірної неперервності функції Ψ на $\overline{\Omega}_\zeta$.

Теорема 2.3.2 є узагальненням теореми 1 [192], яку доведено в тривимірній комутативній алгебрі для функцій, які породжують розв'язки тривимірного рівняння Лапласа.

Відмітимо також, що в роботі [97] доведено аналог теореми 2.3.2 для гіперголоморфних функцій зі значеннями в алгебрі кватерніонів.

Зауваження 2.3.9.

1. Відмітимо, що для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$ існують додатні сталі c_1 і c_2 такі, що

$$c_1\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon) \le V(\Sigma^\varepsilon) \le c_2\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon)\,, \tag{2.101}$$

де $N_\Sigma(\varepsilon)$ найменша кількість ε-куль, що покривають Σ (див. [49]).

Із співвідношення (2.101) випливає, що нерівність (2.95) еквівалентна нерівності вигляду

$$N_\Sigma(\varepsilon)\,\varepsilon^2 \le c, \tag{2.102}$$

де стала c не залежить від ε.

2. Враховуючи, що спрямлювана поверхня Σ є ліпшицевим образом квадрата G і нерівність вигляду (2.102) справедлива для G, легко довести нерівність (2.102) для Σ.

3. Поверхня Σ називається *регулярною*, якщо існує додатна стала c така, що

$$c\varepsilon^2 \le \mathcal{H}^2\big(\Sigma\cap B(x,\varepsilon)\big) \quad \forall\, x\in\Sigma \ \ \forall\,\varepsilon\in(0;\operatorname{diam}\Sigma]\,, \tag{2.103}$$

де $\operatorname{diam}\Sigma$ — діаметр Σ, а через $B(x,\varepsilon)$ позначено відкриту кулю з центром x і радіусом ε. Для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$, яка має скінченну двовимірну міру Хаусдорфа $\mathcal{H}^2(\Sigma)$, виконуються нерівності $P_\Sigma(\varepsilon)\varepsilon^2 \le c_1\mathcal{H}^2(\Sigma) < \infty$, де $P_\Sigma(\varepsilon)$ — найбільша кількість неперетинних ε-куль з центрорм в Σ і стала c_1 не залежить від ε (див. [41, с. 309]). Враховуючи нерівність $N_\Sigma(2\varepsilon) \le P_\Sigma(\varepsilon)$ (див. [127, с. 78]), отримаємо нерівність (2.102) для поверхні Σ, яка задовольняє умову (2.103).

2.4. Про моногенні функції, що визначені в різних комутативних алгебрах

У цьому підрозділі встановимо відповідність між моногенною функцією в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній асоціативній алгебрі. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [32, 37].

2.4.1. Характеристичне рівняння в різних комутативних алгебрах

Означення 2.4.1. *Для диференціального рівняння*

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}=0,\quad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{2.104}$$

наступне алгебраїчне рівняння називається характеристичним:

$$\mathcal{X}(1,e_2,e_3):=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,e_2^\beta\,e_3^\gamma=0\,. \tag{2.105}$$

Означення 2.4.2. *Скажемо, що система поліноміальних над полем* $\mathbb{C}$ *рівнянь* Q_1 *редукується до системи поліноміальних рівнянь* Q_2 *, якщо система* Q_2 *отримується з системи* Q_1 *шляхом відкидання деякої кількості рівнянь. В свою чергу, система* Q_2 *є редукцією системи* Q_1 *.*

Відмітимо, що для заданої системи поліноміальних рівнянь Q_1 редукована система Q_2 не єдина. Очевидним є наступне твердження.

Лема 2.4.1. *Нехай система поліноміальних рівнянь* Q_1 *з комплексними невідомими* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *має розв'язки і* Q_2 *— будь-яка її редукована система з невідомими* $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ *, де* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *,* $k \le n$ *, — попарно різні елементи множини* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *. Тоді усі* $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ *, які задовольняють систему* Q_1 *є розв'язками системи* Q_2 *.*

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{aligned} &1+a_1^2+b_1^2=0,\\ &1+a_2^2+b_2^2=0,\\ &a_2a_3+b_2b_3=0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

редукується до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &1 + a_2^2 + b_2^2 = 0, \\ &a_2 a_3 + b_2 b_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Твердження 2.4.1 означає, що всі значення a_2, b_2, a_3, b_3, які задовольняють систему (2.106) є розв'язками системи (2.107).

Встановимо допоміжні твердження.

Лема 2.4.2. *Нехай в алгебрі* $\mathbb{A}_n^m$ *існує трійка лінійно незалежних над* $\mathbb{R}$ *векторів* $1, e_2, e_3$, *які задовольняють характеристичне рівняння (2.105). Тоді для кожного* $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *характеристична система, породжена рівнянням* $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ *є редукцією характеристичної системи, породженої рівнянням (2.105).*

Доведення. Нехай ліва частина рівняння (2.105) в базисі алгебри має вигляд

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^{\beta}\, e_3^{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} V_k\, I_k = 0.$$

Відповідно, характеристична система, породжена рівнянням (2.105), має вигляд

$$\begin{aligned} &V_1 = 0, \\ &\ldots\ldots \\ &V_n = 0. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Тепер розглянемо характеристичну систему, породжену рівнянням $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$. Маємо

$$\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, I_u\, (e_2 I_u)^{\beta}\, (e_3 I_u)^{\gamma} =$$

$$= I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^{\beta}\, e_3^{\gamma} = I_u \sum_{k=1}^{n} V_k\, I_k = V_u + I_u \sum_{k=m+1}^{n} V_k I_k = 0. \tag{2.109}$$

Відповідно до правила 3 таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ добуток $I_u \sum\limits_{k=m+1}^{n} V_k I_k$ належить радикалу $\mathcal{R}$. Таким чином, рівняння (2.215) рівносильне такій характеристичній системі:

$$\begin{aligned} &V_u = 0, \\ &\ldots\ldots \\ &V_k = 0 \quad \forall\, k \in \{m+1, \ldots, n\} \,:\, I_u I_k = I_k \,. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Очевидно, що система (2.110) є редукцією системи (2.108). Лему доведено.

Позначимо через $\operatorname{Rad} e_2$ частину вектора e_2 з розкладу (2.4), яка міститься в його радикалі, тобто $\operatorname{Rad} e_2 := \sum\limits_{r=m+1}^{n} a_r I_r$. Аналогічно, $\operatorname{Rad} e_3 := \sum\limits_{r=m+1}^{n} b_r I_r$.

Лема 2.4.3. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (2.105). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$) для кожного $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ існує трійка векторів*

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}_1(u) = 1, \\ &\widetilde{e}_2(u) := a_u + I_u \operatorname{Rad} e_2 \,, \\ &\widetilde{e}_3(u) := b_u + I_u \operatorname{Rad} e_3 \end{aligned} \tag{2.111}$$

така, що характеристична система, породжена рівнянням $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ є редукцією характеристичної системи, породженої рівнянням (2.105).

Доведення. Наслідком рівностей (2.111) є рівності

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}_2^{\,\beta}(u) = a_u^\beta + I_u \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_\beta^k \, a_u^{\beta-k} \left(\operatorname{Rad} e_2\right)^k, \\ &\widetilde{e}_3^{\,\gamma}(u) = b_u^\gamma + I_u \sum_{k=1}^{\gamma} \mathcal{C}_\gamma^k \, b_u^{\gamma-k} \left(\operatorname{Rad} e_3\right)^k. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Враховуючи формули (2.112), характеристичний многочлен $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ набуває вигляду

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \, \widetilde{e}_2^{\,\beta}(u) \, \widetilde{e}_3^{\,\gamma}(u) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \Big(a_u^\beta \, b_u^\gamma +$$

$$+I_u\, b_u^{\gamma} \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_{\beta}^{k}\, a_u^{\beta-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_2)^k + I_u\, a_u^{\beta} \sum_{k=1}^{\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}^{k}\, b_u^{\gamma-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_3)^k +$$

$$+I_u \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_{\beta}^{k}\, a_u^{\beta-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}^{p}\, b_u^{\gamma-p}\, (\mathrm{Rad}\, e_3)^p \Bigg) = 0. \qquad (2.113)$$

Далі покажемо, що характеристичні системи, породжені рівняннями $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ і $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ співпадають.

З цією метою зауважимо, що наслідком розкладів (2.4) є подання

$$e_2 = a_1 I_1 + \cdots + a_m I_m + \mathrm{Rad}\, e_2\,, \quad e_3 = b_1 I_1 + \cdots + b_m I_m + \mathrm{Rad}\, e_3\,,$$

з яких випливають співвідношення

$$e_2 I_u = a_u I_u + I_u\, \mathrm{Rad}\, e_2\,, \quad e_3 I_u = b_u I_u + I_u\, \mathrm{Rad}\, e_3\,. \qquad (2.114)$$

Тепер з (2.114) випливають рівності

$$\begin{aligned} e_2^{\beta} I_u &= a_u^{\beta} I_u + I_u \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_{\beta}^{k}\, a_u^{\beta-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_2)^k\,, \\ e_3^{\gamma} I_u &= b_u^{\gamma} I_u + I_u \sum_{k=1}^{\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}^{k}\, b_u^{\gamma-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_3)^k\,. \end{aligned} \qquad (2.115)$$

Беручи до уваги формули (2.115), характеристичне рівняння $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ набуває вигляду

$$I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^{\beta}\, e_3^{\gamma} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \Bigg(a_u^{\beta}\, b_u^{\gamma}\, I_u +$$

$$+I_u\, b_u^{\gamma} \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_{\beta}^{k}\, a_u^{\beta-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_2)^k + I_u\, a_u^{\beta} \sum_{k=1}^{\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}^{k}\, b_u^{\gamma-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_3)^k +$$

$$+I_u \sum_{k=1}^{\beta} \mathcal{C}_{\beta}^{k}\, a_u^{\beta-k}\, (\mathrm{Rad}\, e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}^{p}\, b_u^{\gamma-p}\, (\mathrm{Rad}\, e_3)^p \Bigg) = 0. \qquad (2.116)$$

З рівностей (2.113), (2.116) очевидним чином випливає, що характеристичні системи, породжені рівняннями $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ і $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ співпадають. Тепер доведення леми випливає з леми 2.4.2. Лему доведено.

Зауваження 2.4.10. Відмітимо, що алгебра $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ з базисом $\{1, I_{m+1}, \ldots, I_n\}$ є підалгеброю алгебри $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$. Дійсно, будь-який елемент a алгебри $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$ вигляду

$$a = a_0 I_1 + a_0 I_2 + \cdots + a_0 I_m + a_{m+1} I_{m+1} + \cdots + a_n I_n =$$

$$= a_0(I_1 + \cdots + I_m) + a_{m+1} I_{m+1} + \cdots + a_n I_n = a_0 + a_{m+1} I_{m+1} + \cdots + a_n I_n$$

є представленням довільного елементу алгебри $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$.

З твердження 2.4.1 і леми 2.4.3 випливає така

Теорема 2.4.1. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (2.105). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі $\mathbb{A}^m_n$) для кожного $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ трійка векторів (2.111) задовольняє характеристичне рівняння $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$.*

Приклад 2.4.1. Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ алгебру $\mathbb{A}^2_3$ з таблицею множення (див., наприклад, [131, с. 32], [145])

$\cdot$	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1	0	0
I_2	0	I_2	I_3
I_3	0	I_3	0

. (2.117)

Очевидно, що напівпростою підалгеброю S є підалгебра, породжена ідемпотентами I_1, I_2, а нільпотентною підалгеброю N є підалгебра $\{\alpha I_3 : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Тоді алгебра $\mathbb{A}^1_2 := 1 \oplus_s N$ співпадає з відомою бігармонічною алгеброю $\mathbb{B}$ (див., наприклад, [88]) і має таку таблицю множення:

$\cdot$	1	I_3
1	1	I_3
I_3	I_3	0

. (2.118)

Нехай в алгебрі $\mathbb{A}^2_3$ задане характеристичне рівняння (1.11). Як відомо (див. теорему 1.8 в [131]), умова *гармонічності* (1.11) векторів $e_1 = 1$, $e_2 =$

$a_1I_1+a_2I_2+a_3I_3$, $e_3=b_1I_1+b_2I_2+b_3I_3$ алгебри $\mathbb{A}_3^2$ рівносильна системі рівнянь (2.106).

Оскільки для алгебри $\mathbb{A}_3^2$ $m=2$, то в алгебрі $\mathbb{B}$ ми будуємо дві трійки векторів виду (2.111):

$$\widetilde{e}_1(1)=1,\ \widetilde{e}_2(1)=a_1+I_1(a_3I_3)=a_1\,,\ \widetilde{e}_3(1)=b_1+I_1(b_3I_3)=b_1 \tag{2.119}$$

та

$$\begin{aligned}&\widetilde{e}_1(2)=1,\\&\widetilde{e}_2(2)=a_2+I_2(a_3I_3)=a_2+a_3I_3\,,\\&\widetilde{e}_3(2)=b_2+I_2(b_3I_3)=b_2+b_3I_3\,.\end{aligned} \tag{2.120}$$

За теоремою 2.4.1 трійки (2.119) та (2.120) гармонічні в алгебрі $\mathbb{B}$ (тобто задовольняють умову (1.11)). Справді, гармонічність трійки (2.119) рівносильна першому рівнянню системи (2.106), а гармонічність трійки (2.120) рівносильна системі (2.107).

Приклад 2.4.2. Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ алгебру $\mathbb{A}_5^3$ з такою таблицею множення

$\cdot$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
I_1	I_1	0	0	0	I_5
I_2	0	I_2	0	0	0
I_3	0	0	I_3	I_4	0
I_4	0	0	I_4	0	0
I_5	I_5	0	0	0	0

. (2.121)

Відмітимо, що напівпростою підалгеброю S є підалгебра, породжена ідемпотентами I_1,I_2,I_3, а нільпотентною підалгеброю N є підалгебра з базисом $\{I_4,I_5\}$. Тоді алгебра $\mathbb{A}_3^1:=1\oplus_s N$ співпадає з відомою алгеброю $\mathbb{A}_4$ (див., наприклад, [131, с. 26]) і має таку таблицю множення:

$\cdot$	1	I_4	I_5
1	1	I_4	I_5
I_4	I_4	0	0
I_5	I_5	0	0

. (2.122)

Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_5^3$ задане характеристичне рівняння (1.11). Умова гармонічності (1.11) векторів вигляду (2.4) алгебри $\mathbb{A}_5^3$ рівносильна наступній системі рівнянь

$$\begin{aligned} & 1 + a_u^2 + b_u^2 = 0, \quad u = 1, 2, 3, \\ & a_3 a_4 + b_3 b_4 = 0, \\ & a_1 a_5 + b_1 b_5 = 0. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Оскільки для алгебри $\mathbb{A}_5^3$ $m = 3$, то в алгебрі $\mathbb{A}_4$ ми будуємо три трійки векторів виду (2.111):

$$\begin{aligned} & \widetilde{e}_1(1) = 1, \\ & \widetilde{e}_2(1) = a_1 + I_1(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_1 + a_5 I_5\,, \\ & \widetilde{e}_3(1) = b_1 + I_1(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_1 + b_5 I_5\,, \end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned} & \widetilde{e}_1(2) = 1, \\ & \widetilde{e}_2(2) = a_2 + I_2(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_2\,, \\ & \widetilde{e}_3(2) = b_2 + I_2(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_2\,, \end{aligned} \tag{2.125}$$

та

$$\begin{aligned} & \widetilde{e}_1(3) = 1, \\ & \widetilde{e}_2(3) = a_3 + I_3(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_3 + a_4 I_4\,, \\ & \widetilde{e}_3(3) = b_3 + I_3(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_3 + b_4 I_4\,. \end{aligned} \tag{2.126}$$

За теоремою 2.4.1 трійки (2.124), (2.125) та (2.126) гармонічні в алгебрі $\mathbb{A}_4$ (тобто задовольняють умову (1.11)). Справді, гармонічність трійки (2.124) рівносильна системі з першого і п'ятого рівняння системи (2.120); гармонічність трійки (2.125) рівносильна другому рівнянню системи (2.120), а гармонічність трійки (2.126) рівносильна системі з третього і четвертого рівняння системи (2.120).

Далі вивчимо питання про лінійну незалежність векторів $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$.

З наведених прикладів видно, що вектори $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$ при деяких $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ можуть бути лінійно залежними над полем $\mathbb{R}$. Так, трійки (2.119), (2.125) завжди лінійно залежні над полем $\mathbb{R}$.

Встановимо необхідні і достатні умови лінійної незалежності над полем $\mathbb{R}$ векторів $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$ алгебри $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$.

Лема 2.4.4. *Нехай вектори (2.4) алгебри* $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$ *лінійно незалежні над полем* $\mathbb{R}$ *і нехай* $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *фіксоване. Тоді*

1. *якщо вектори* $I_u \operatorname{Rad} e_2$, $I_u \operatorname{Rad} e_3 \in \mathbb{A}^m_n$ *лінійно незалежні над полем* $\mathbb{R}$, *то вектори* $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$ *алгебри* $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ *також лінійно незалежні над полем* $\mathbb{R}$;

2. *якщо ж вектори* $I_u \operatorname{Rad} e_2$, $I_u \operatorname{Rad} e_3 \in \mathbb{A}^m_n$ *лінійно залежні над полем* $\mathbb{R}$, *то вектори* $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$ *алгебри* $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ *лінійно незалежні над полем* $\mathbb{R}$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $r \in \{m+1, \ldots, n\}$ *таке, що* $I_u I_r = I_r$ *і виконується хоча б одне співвідношення*

$$\operatorname{Im} a_u \operatorname{Re} b_r \neq \operatorname{Im} b_u \operatorname{Re} a_r \quad \textit{або} \quad \operatorname{Im} a_u \operatorname{Im} b_r \neq \operatorname{Im} b_u \operatorname{Im} a_r\,. \tag{2.127}$$

Доведення. Доведемо перше твердження леми. За умовою рівність

$$\beta_2\, I_u \operatorname{Rad} e_2 + \beta_3\, I_u \operatorname{Rad} e_3 = 0, \quad \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \tag{2.128}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

Розглянемо лінійну комбінацію

$$\alpha_1 + \alpha_2\, \widetilde{e}_2(u) + \alpha_3\, \widetilde{e}_3(u) = (\alpha_1 + \alpha_2\, a_u + \alpha_3\, b_u) +$$
$$+ (\alpha_2\, I_u \operatorname{Rad} e_2 + \alpha_3\, I_u \operatorname{Rad} e_3) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \tag{2.129}$$

Оскільки вираз у другій дужці в рівності (2.129) приймає значення в радикалі $\mathcal{R}$ алгебри, а перша дужка комплекснозначна, то умова (2.129) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2\, a_u + \alpha_3\, b_u = 0, \\ &\alpha_2\, I_u \operatorname{Rad} e_2 + \alpha_3\, I_u \operatorname{Rad} e_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.130}$$

З другого рівняння системи (2.130) і умови (2.128) випливає, що $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. А тоді з першого рівняння системи (2.130) отримуємо $\alpha_1 = 0$. Отже, вектори $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$ лінійно незалежні над $\mathbb{R}$.

Доведемо друге твердження леми. Розглянемо рівність

$$\beta_1+\beta_2\,e_2+\beta_3\,e_3=\sum_{s=1}^{m}I_s(\beta_1+\beta_2\,a_s+\beta_3\,b_s)+\sum_{k=m+1}^{n}I_k(\beta_2\,a_k+\beta_3\,b_k)=0,$$

яка рівносильна системі рівнянь

$$\begin{array}{rcll}\beta_1+\beta_2\,\mathrm{Re}\,a_s+\beta_3\,\mathrm{Re}\,b_s&=&0,&\\ \beta_2\,\mathrm{Im}\,a_s+\beta_3\,\mathrm{Im}\,b_s&=&0,&\quad s=1,2,\dots,m,\\ \beta_2\,\mathrm{Re}\,a_k+\beta_3\,\mathrm{Re}\,b_k&=&0,&\\ \beta_2\,\mathrm{Im}\,a_k+\beta_3\,\mathrm{Im}\,b_k&=&0,&\quad k=m+1,\dots,n.\end{array}\tag{2.131}$$

Лінійна незалежність над $\mathbb{R}$ векторів $1,e_2,e_3$ означає, що серед усіх рівнянь системи (2.131), окрім першого, існує хоча б два рівняння, які між собою не пропорційні.

Тепер запишемо умову лінійної незалежності над $\mathbb{R}$ векторів $1,\widetilde{e}_2(u),\widetilde{e}_3(u)$. Для цього систему (2.130) запишемо в розгорнутому вигляді

$$\begin{array}{rcl}\alpha_1+\alpha_2\,\mathrm{Re}\,a_u+\alpha_3\,\mathrm{Re}\,b_u&=&0,\\ \alpha_2\,\mathrm{Im}\,a_u+\alpha_3\,\mathrm{Im}\,b_u&=&0,\\ \alpha_2\,\mathrm{Re}\,a_r+\alpha_3\,\mathrm{Re}\,b_r&=&0,\\ \alpha_2\,\mathrm{Im}\,a_r+\alpha_3\,\mathrm{Im}\,b_r&=&0\\ \forall\,r\in\{m+1,\dots,n\}&:&I_uI_r=I_r\,.\end{array}\tag{2.132}$$

За умовою пункту *2* леми вектори $I_u\,\mathrm{Rad}\,e_2$, $I_u\,\mathrm{Rad}\,e_3$ лінійно залежні над $\mathbb{R}$. Це означає, що в системі (2.132) всі рівності, окрім перших двох, пропорційні між собою. Очевидно, що для лінійної незалежності над $\mathbb{R}$ векторів $1,\widetilde{e}_2(u),\widetilde{e}_3(u)$ необхідно і достатньо, щоб друге рівняння системи (2.132) було не пропорційне хоча б з одним іншим рівнянням (крім першого) системи (2.132). А це рівносильно умовам (2.127).

2.4.2. Моногенні функції, що визначені в різних комутативних алгебрах

В алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в деякій області $\Pi_\zeta \subset E_3$ виду (2.35). Геометрично область $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, яка конгуентна області $\Pi_\zeta \subset E_3$, є перетином m нескінченних циліндрів, кожен з яких паралельний деякій з m прямих L_u, $u = 1, 2, \ldots, m$ вигляду (2.10). Тобто, $\Pi = \cap_{u=1}^m \Pi(u)$, де $\mathbb{R}^3 \supset \Pi(u)$ — нескінченний циліндр, паралельний прямій L_u. І те ж саме маємо для конгруентних областей в E_3:

$$\Pi_\zeta = \bigcap_{u=1}^{m} \Pi_\zeta(u). \tag{2.133}$$

Аналітично циліндр $\Pi_\zeta(u)$ визначається рівністю

$$\Pi_\zeta(u) = \{\zeta_u := I_u \zeta \,:\, \zeta \in \Pi_\zeta\}.$$

Тепер розглянемо моногенну в області Π_ζ функцію $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$. Введемо позначення

$$\Phi_u(\zeta) := I_u \Phi(\zeta), \quad u = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.134}$$

Тоді очевидною є рівність

$$\Phi = (I_1 + \cdots + I_m)\Phi = \sum_{u=1}^{m} \Phi_u\,. \tag{2.135}$$

Крім того, з рівності (2.25) і таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що при кожному $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ функція Φ_u моногенна у всьому нескінченному циліндрі $\Pi_\zeta(u)$.

Таким чином, кожна моногенна в області (2.133) функція $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді суми (2.135), де функція Φ_u моногенна у всьому циліндрі $\Pi_\zeta(u)$.

Тепер перейдемо до розгляду моногенних функцій $\widetilde{\Phi}$ в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Оскільки, відповідно до зауваження 2.4.10, алгебра $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ є підалгеброю алгебри $\mathbb{A}_n^m$, то в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ усі циліндри $\Pi_\zeta(u)$ з рівності (2.133) співпадають між собою. Тобто, в алгебрах вигляду $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ кожна моногенна функція буде моногенною в деякому одному нескінченному циліндрі.

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрах $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ та $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

На вектори вигляду (2.111) алгебри $\mathbb{A}^1_{n-m+1}$ натягнемо лінійний простір $\widetilde{E}_3(u) := \{\widetilde{\zeta}(u) = x + y\widetilde{e}_2(u) + z\widetilde{e}_3(u) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Трійка векторів (2.111) визначає одну пряму $\widetilde{L}(u)$ виду (2.10), яка відповідає множині необоротних елементів $\widetilde{\zeta}(u)$ простору $\widetilde{E}_3(u)$. Нехай $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}$ — деякий нескінченний циліндр в $\widetilde{E}_3(u)$, паралельний прямій $\widetilde{L}(u)$.

Теорема 2.4.2. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}^m_n = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (2.105) і нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}^m_n$ змінної $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ моногенна в області $\Pi_\zeta \subset E_3$ виду (2.133). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі $\mathbb{A}^m_n$) для кожного $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ існує трійка векторів (2.111), яка задовольняє характеристичне рівняння $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ і існує функція $\widetilde{\Phi}_u : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} \to \mathbb{A}^1_{n-m+1}$ змінної $\widetilde{\zeta}(u)$, яка моногенна в циліндрі*

$$\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} = \Big\{\widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u)\ :\ f_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = f_u(\zeta)\,,\ \zeta \in \Pi_\zeta(u)\Big\}$$

така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u\,\widetilde{\Phi}_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big). \tag{2.136}$$

Доведення. Існування трійки (2.111) з властивістю $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ доведено в теоремі 2.4.1. Нехай надалі $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ фіксоване. Доведемо існування і моногенність в області $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}$ функції $\widetilde{\Phi}_u$, яка задовольняє рівність (2.136). З цією метою спочатку доведемо рівність

$$I_u\,\zeta^{-1} = I_u\,\widetilde{\zeta}^{-1}(u) \tag{2.137}$$

$$\forall\,\zeta = x + ye_2 + ze_3\ \ \forall\,\widetilde{\zeta}(u) = x + y\widetilde{e}_2(u) + z\widetilde{e}_3(u),\ \ x \in \mathbb{C}, y, z \in \mathbb{R}.$$

З рівностей (2.115), (2.111) випливають співвідношення

$$I_u\,e_2 = I_u\,\widetilde{e}_2(u)\,, \quad I_u\,e_3 = I_u\,\widetilde{e}_3(u)\,,$$

з яких, в свою чергу, випливає рівність

$$I_u\,\zeta = I_u\,\widetilde{\zeta}(u). \tag{2.138}$$

Розглянемо різницю $I_u\,\zeta^{-1} - I_u\,\widetilde{\zeta}^{-1}(u)$. За формулою Гільберта (див., наприклад, теорему 4.8.2 в [29]), маємо

$$I_u\,\zeta^{-1} - I_u\,\widetilde{\zeta}^{-1}(u) = \big(I_u\,\zeta - I_u\,\widetilde{\zeta}(u)\big)\Big(\zeta\,\widetilde{\zeta}(u)\Big)^{-1} = 0,$$

внаслідок рівності (2.138). Отже, рівність (2.137) доведено. Тепер з (2.137) маємо співвідношення

$$I_u(t-\zeta)^{-1} = I_u\big(t-\widetilde{\zeta}(u)\big)^{-1} \tag{2.139}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} :\ t \neq \xi_u = f_u(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in \Pi_\zeta(u) \quad \forall\, \widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}\,.$$

З таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ і формули (2.201) для моногенної в області $\Pi_\zeta(u)$ функції $\Phi_u(\zeta)$ маємо представлення

$$\Phi_u(\zeta) = I_u\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_u}\Big(F_u(t) + \sum_{s=m+1}^{n} I_s\,G_s(t)\Big)(t-\zeta)^{-1}\,dt, \tag{2.140}$$

де функції $F_u\,, G_s$ визначені в теоремі 2.1.3.

Враховуючи співвідношення (2.139), представлення (2.140) перепишемо у вигляді

$$\Phi_u(\zeta) = I_u\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_u}\Big(F_u(t) + \sum_{s=m+1}^{n} I_s\,G_s(t)\Big)\big(t-\widetilde{\zeta}(u)\big)^{-1}\,dt. \tag{2.141}$$

Оскільки в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ міститься єдиний максимальний ідеал $\mathcal{I}$, який співпадає з радикалом (2.3) цієї алгебри $\mathcal{R}$, то на цій алгебрі визначений єдиний лінійний неперервний мультиплікативний функціонал $f : \mathbb{A}_{n-m+1}^1 \to \mathbb{C}$ ядром якого є радикал $\mathcal{R}$. А це означає, що $f\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = x + a_u\,y + b_u\,z$ для кожного $\widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u)$. Беручи до уваги рівність $f_u(\zeta) = x + a_u\,y + b_u\,z$ для довільного $\zeta \in E_3$, маємо рівність

$$f\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = f_u(\zeta). \tag{2.142}$$

З рівності (2.142) і умови теореми $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ отримуємо співвідношення $f\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = \mathbb{C}$ для довільного $\widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u)$.

Щойно ми показали, що виконуються умови теореми 2.1.3 для моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ формула (2.201) для моногенної в області $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}$ функції $\widetilde{\Phi}_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big)$ має вигляд

$$\widetilde{\Phi}_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Big(\widetilde{F}(t) + \sum_{s=m+1}^{n} I_s\,\widetilde{G}_s(t)\Big)\big(t-\widetilde{\zeta}(u)\big)^{-1}\,dt. \tag{2.143}$$

Потрібна нам формула (2.136) буде прямим наслідком рівностей (2.141) та (2.143), якщо ми покажемо, що можна покласти $\gamma \equiv \Gamma_u$, $F_u \equiv \widetilde{F}$ і $G_s \equiv \widetilde{G}_s$ для таких s, що $I_u\,I_s = I_s$. Покажемо це.

З рівності (2.142) випливає, що циліндри $\Pi_\zeta(u) \subset E_3$ та $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} \subset \widetilde{E}_3(u)$ відповідними функціоналами f_u та f відображаються в одну і ту ж область D комплексної площини $\mathbb{C}$. А це означає, що функції F_u і $\widetilde{F}$, а також функції G_s і $\widetilde{G}_s$ голоморфні в одній і тій самій області D. Отже, ми можемо покласти $F_u \equiv \widetilde{F}$ і $G_s \equiv \widetilde{G}_s$ в D.

Оскільки криві інтегрування γ і Γ_u лежать в області D, то ми можемо взяти $\gamma \equiv \Gamma_u$. Більше того, оскільки за теоремою 2.1.3 крива Γ_u в рівності (2.140) охоплює точку $f_u(\zeta) = x + a_u\,y + b_u\,z$, то внаслідок рівності (2.142) крива $\gamma \equiv \Gamma_u$ охоплює спектр точки $\widetilde{\zeta}(u)$ — точку $f\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = x + a_u\,y + b_u\,z$. А це нам і потрібно. Теорему доведено.

Зауваження 2.4.11. З рівностей (2.135), (2.136) випливає представлення

$$\Phi(\zeta) = I_1\,\widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big) + \cdots + I_m\,\widetilde{\Phi}_m\big(\widetilde{\zeta}(m)\big). \tag{2.144}$$

Зауваження 2.4.12. Теорема 2.4.1 означає, що функції Φ і $I_u\widetilde{\Phi}_u$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$ задовольняють одне й те ж саме диференціальне рівняння виду (2.104).

Зауваження 2.4.13. Теорема 2.4.2 стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (2.104) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — нільпотенти. Тобто кількість таких n-вимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ в яких потрібно вивчати моногенні функції рівна кількості $(n-1)$-вимірних комутативних асоціативних комплексних нільпотентних алгебр.

Зокрема, серед двовимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ (яких існує всього дві) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$. Серед тривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ (яких існує всього чотири) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в двох із них (це алгебри $\mathbb{A}_3$ і $\mathbb{A}_4$ в термінах роботи [131]). А серед чотиривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ (яких існує всього 9, див. [128]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в чотирьох із них (це алгебри $\widetilde{A}_{3,1}$, $\widetilde{A}_{3,2}$, $\widetilde{A}_{3,3}$, $\widetilde{A}_{3,4}$ з таблиці 9 роботи [55], див. також теорему 5.1 в роботі [94]). Серед усіх п'ятивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ (яких існує всього 25, див. [128]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в дев'яти із них (таблиці множення усіх цих 9 нільпотентних чотиривимірних алгебр наведено в теоремі 6.1 з роботи [94]). І нарешті серед усіх шестивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в 25-ти із них (усі ці 25 нільпотентних п'ятивимірних алгебр наведено в таблиці 1 з роботи [158]). Відомо також (див. [23]), що починаючи з розмірності 6 множина усіх попарно неізоморфних нільпотентних комутативних алгебр над $\mathbb{C}$ є нескінченною.

Зауваження 2.4.14. Теорема 2.4.2 залишається справедливою для випадку, коли ми будемо розглядати функції $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta := \sum_{r=1}^{k} x_r e_r$, $2 \le k \le 2n$, яка моногенна в області $\Pi_\zeta \subset E_k$. При цьому замість теореми 2.1.3 необхідно використовувати теорему 1 з роботи [189].

Продемоструємо теорему 2.4.2 на алгебрах, які розглядалися в прикладах 2.5.2 та 4.4.2.

Приклад 2.4.3. Отже, розглядаємо алгебру $\mathbb{A}_3^2$ з таблицею множення (2.117). Для алгебри $\mathbb{A}_3^2$ алгеброю виду $1 \oplus_s N$ є бігармонічні алгебра $\mathbb{B}$ з таблицею множення (2.118).

Відповідно до представлення (2.201), кожна моногенна функція Φ зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_3^2$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \Big((a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\Big)I_3 \qquad (2.145)$$

$$\forall\, \zeta \in \Pi_\zeta\,, \quad \xi_u = x + a_uy + b_uz,\ u = 1, 2,$$

де F_1 — деяка голоморфна функція в області D_1 , а $F_2\,, G_3$ — деякі голоморфні функції в області D_2 . Оскільки в $\mathbb{A}_3^2$ $m = 2$, то геометрично область Π_ζ є перетином двох нескінченних циліндрів: $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2)$.

Зауважимо, що представлення (2.145) раніше було отримано в роботі [145]. Крім того, функція (2.145) задовольняє деяке диференціальне рівняння вигляду (2.104).

Подамо функцію (2.145) у вигляді (2.135):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta), \qquad (2.146)$$

де $\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1$ — моногенна функція в циліндрі $\Pi_\zeta(1)$, а функція

$$\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2 + \Big((a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\Big)I_3$$

моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(2)$.

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{B}$. З представлення (2.25) випливає, що кожна моногенна функція $\widetilde{\Phi}$ зі значеннями в алгебрі $\mathbb{B}$ подається у вигляді

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = \widetilde{F}(\widetilde{\xi}) + \Big((a_3y + b_3z)\widetilde{F}'(\widetilde{\xi}) + \widetilde{G}(\widetilde{\xi})\Big)I_3 \quad \forall\, \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\,,\ \widetilde{\xi} = f(\widetilde{\zeta}), \qquad (2.147)$$

де $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ — деякі голоморфні функції в області D. Область $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}$ є нескінченним циліндром. Рівність (2.147) для спеціального випадку встановлена в роботі [88].

Теорема 2.4.2 стверджує наступне:

1) в алгебрі $\mathbb{B}$ існує трійка векторів $1, \widetilde{e}_2(1)\,, \widetilde{e}_3(1)$, яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$. При цьому, будуть виконуватись співвідношення $\xi_1 \equiv \widetilde{\xi}$, $D_1 \equiv D$ і, крім того, існує моногенна в $\mathbb{B}$ функція $\widetilde{\Phi}$ така, що

$$I_1\, \widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big) = \Phi_1(\zeta)\,. \qquad (2.148)$$

2) в алгебрі $\mathbb{B}$ існує трійка векторів $1, \widetilde{e}_2(2), \widetilde{e}_3(2)$, яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$. При цьому, будуть виконуватись співвідношення $\xi_2 \equiv \widetilde{\xi}$, $D_2 \equiv D$ і, крім того, існує моногенна функція $\widetilde{\Phi}$ така, що

$$I_2\, \widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big) = \Phi_2(\zeta)\,. \tag{2.149}$$

Потрібні трійки векторів $1, \widetilde{e}_2(1), \widetilde{e}_3(1)$ та $1, \widetilde{e}_2(2), \widetilde{e}_3(2)$ були знайдені у прикладі 2.5.2. Розглянемо випадок 1). Дійсно, для трійки (2.119) маємо $\widetilde{\zeta}(1) = x+a_1y+b_1z \equiv \xi_1 \equiv \widetilde{\xi}$, $D_1 \equiv D$. Покладемо $\widetilde{F} \equiv F_1$, $\widetilde{G} \equiv G_3$ в D. Тоді рівність (2.147) перепишеться у вигляді

$$\widetilde{\Phi}_1(\widetilde{\zeta}(1)) = F_1(\xi_1) + \Big((a_3y + b_3z)F_1'(\xi_1) + G_3(\xi_1)\Big)I_3\,. \tag{2.150}$$

Помноживши рівність (2.150) на I_1, переконуємось у справедливості рівності (2.148).

Розглянемо випадок 2). Дійсно, для трійки (2.120) маємо

$$\widetilde{\zeta}(2) = x + y\widetilde{e}_2(2) + z\widetilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z + a_3xI_3 + b_3yI_3\,.$$

Очевидно, що $f(\widetilde{\zeta}(2)) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \widetilde{\xi}$, $D_2 \equiv D$. Покладемо $\widetilde{F} \equiv F_2$, $\widetilde{G} \equiv G_3$ в D. Тоді рівність (2.147) перепишеться у вигляді

$$\widetilde{\Phi}_2(\widetilde{\zeta}(2)) = F_2(\xi_2) + \Big((a_3y + b_3z)F_1'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\Big)I_3\,. \tag{2.151}$$

Помноживши рівність (2.151) на I_2, переконуємось у справедливості рівності (2.149).

Таким чином, справедлива рівність (2.144):

$$\Phi(\zeta) = I_1\, \widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big) + I_2\, \widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big),$$

де Φ приймає значення в алгебрі $\mathbb{A}_3^2$, а $\widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big), \widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big)$ приймають значення в $\mathbb{B}$.

Приклад 2.4.4. Отже, розглядаємо алгебру $\mathbb{A}_5^3$ з таблицею множення (2.121). Для алгебри $\mathbb{A}_5^3$ алгеброю виду $1 \oplus_s N$ є алгебра $\mathbb{A}_4$ з таблицею множення (2.122).

Відповідно до представлення (2.25), кожна моногенна функція Φ зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_5^3$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + F_3(\xi_3)I_3 + \Big((a_4y + b_4z)F_3'(\xi_3) + G_3(\xi_3)\Big)I_4 +$$

$$+\Big((a_5y + b_5z)F_1'(\xi_1) + G_5(\xi_1)\Big)I_5 \tag{2.152}$$

$$\forall\, \zeta \in \Pi_\zeta\,, \quad \xi_u = x + a_uy + b_uz,\ u = 1, 2, 3,$$

де $F_1\,, G_5$ — деякі голоморфні функції в області D_1 , F_2 — деяка голоморфна функція в області D_2 , а $F_3\,, G_3$ — деякі голоморфні функції в області D_3 . Оскільки для $\mathbb{A}_5^3$ $m = 3$, то геометрично область Π_ζ є перетином трьох нескінченних циліндрів: $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2) \cap \Pi_\zeta(3)$.

Подамо функцію (2.152) у вигляді (2.135):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 + \Phi(\zeta)I_3 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta) + \Phi_3(\zeta), \tag{2.153}$$

де

$$\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + \Big((a_5y + b_5z)F_1'(\xi_1) + G_5(\xi_1)\Big)I_5$$

— моногенна функція в циліндрі $\Pi_\zeta(1)$, функція $\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2$ моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(2)$, а функція

$$\Phi_3(\zeta) = F_3(\xi_3)I_3 + \Big((a_4y + b_4z)F_3'(\xi_3) + G_3(\xi_3)\Big)I_4$$

моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(3)$.

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_4$. З представлення (2.25) випливає, що кожна моногенна функція $\widetilde{\Phi}$ зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_4$ подається у вигляді

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = \widetilde{F}(\widetilde{\xi}) + \Big((a_4y + b_4z)\widetilde{F}'(\widetilde{\xi}) + \widetilde{G}_3(\widetilde{\xi})\Big)I_4 +$$

$$+\Big((a_5y + b_5z)\widetilde{F}'(\widetilde{\xi}) + \widetilde{G}_5(\widetilde{\xi})\Big)I_5 \quad \forall\, \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\,,\ \widetilde{\xi} = f(\widetilde{\zeta}), \tag{2.154}$$

де $\widetilde{F}, \widetilde{G}_3\,, \widetilde{G}_5$ — деякі голоморфні функції в області $D \subset \mathbb{C}$. Область $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}$ є нескінченним циліндром.

Для трійки (2.124) алгебри $\mathbb{A}_4$ маємо

$$\widetilde{\zeta}(1) = x + y\widetilde{e}_2(1) + z\widetilde{e}_3(1) = x + a_1y + b_1z + a_5xI_5 + b_5yI_5\,.$$

Очевидно, що $f(\widetilde{\zeta}(1)) = x + a_1y + b_1z = \xi_1 \equiv \widetilde{\xi}\,,\ D_1 \equiv D$. Покладемо $\widetilde{F} \equiv F_1$, $\widetilde{G}_3 \equiv G_3$, $\widetilde{G}_5 \equiv G_5$ в D. Тоді рівність (2.154) перепишеться у вигляді

$$\widetilde{\Phi}_1(\widetilde{\zeta}(1)) = F_1(\xi_1) + \Big((a_4y + b_4z)F_1'(\xi_1) + G_3(\xi_1)\Big)I_4+$$
$$+\Big((a_5y + b_5z)F_1'(\xi_1) + G_5(\xi_1)\Big)I_5\,. \tag{2.155}$$

Помноживши рівність (2.155) на I_1, переконуємось у справедливості рівності

$$I_1\,\widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big) = \Phi_1(\zeta)\,.$$

Для трійки (2.125) алгебри $\mathbb{A}_4$ маємо

$$\widetilde{\zeta}(2) = x + y\widetilde{e}_2(2) + z\widetilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z.$$

Очевидно, що $f(\widetilde{\zeta}(2)) = \widetilde{\zeta}(2) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \widetilde{\xi}\,,\ D_2 \equiv D$. Покладемо $\widetilde{F} \equiv F_2$, $\widetilde{G}_3 \equiv G_3$, $\widetilde{G}_5 \equiv G_5$ в D. Тоді рівність (2.154) набуде вигляду

$$\widetilde{\Phi}_2(\widetilde{\zeta}(2)) = F_2(\xi_2) + \Big((a_4y + b_4z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\Big)I_4+$$
$$+\Big((a_5y + b_5z)F_2'(\xi_2) + G_5(\xi_2)\Big)I_5\,. \tag{2.156}$$

Помноживши рівність (2.156) на I_2, переконуємось у справедливості рівності

$$I_2\,\widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big) = \Phi_2(\zeta)\,.$$

Нарешті, для трійки (2.126) отримуємо

$$\widetilde{\zeta}(3) = x + y\widetilde{e}_2(3) + z\widetilde{e}_3(3) = x + a_3y + b_3z + a_4xI_4 + b_4yI_4\,.$$

Очевидно, що $f(\widetilde{\zeta}(3)) = x + a_3y + b_3z = \xi_3 \equiv \widetilde{\xi}\,,\ D_3 \equiv D$. Покладемо $\widetilde{F} \equiv F_3$, $\widetilde{G}_3 \equiv G_3$, $\widetilde{G}_5 \equiv G_5$ в D. Тоді рівність (2.154) перепишеться у вигляді

$$\widetilde{\Phi}_3(\widetilde{\zeta}(3)) = F_3(\xi_3) + \Big((a_4y + b_4z)F_3'(\xi_3) + G_3(\xi_3)\Big)I_4+$$
$$+\Big((a_5y + b_5z)F_3'(\xi_3) + G_5(\xi_3)\Big)I_5\,. \tag{2.157}$$

Помноживши рівність (2.157) на I_3, переконуємось у справедливості рівності

$$I_3\,\widetilde{\Phi}_3\big(\widetilde{\zeta}(3)\big) = \Phi_3(\zeta)\,.$$

Таким чином, справедлива рівність (2.144):

$$\Phi(\zeta) = I_1\,\widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big) + I_2\,\widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big) + I_3\,\widetilde{\Phi}_3\big(\widetilde{\zeta}(3)\big),$$

де Φ приймає значення в алгебрі $\mathbb{A}_5^3$, а $\widetilde{\Phi}_1\big(\widetilde{\zeta}(1)\big)$, $\widetilde{\Phi}_2\big(\widetilde{\zeta}(2)\big)$, $\widetilde{\Phi}_3\big(\widetilde{\zeta}(3)\big)$ приймають значення в $\mathbb{A}_4$.

Зауваження 2.4.15. В роботі [37] встановлено ізоморфізм між алгебрами моногенних функцій, що визначені в тривимірній гармонічній алгебрі на різних гармонічних базисах. Зупинимось детальніше на цьому результаті.

Нехай $\mathbb{A}_3$ — тривимірна комутативна асоціативна банахова алгебра над полем $\mathbb{C}$ з базисом $\{1,\rho_1,\rho_2\}$, для якого справедливі наступні правила множення: $\rho_1^2=\rho_2, \quad \rho_1\rho_2=\rho_2^2=0$. Нехай $\{e_1,e_2,e_3\}$ — гармонічний (тобто такий, що задовольняє умову $e_1^2+e_2^2+e_3^2=0$) базис вигляду

$$e_1=1,\;\; e_2=i+\rho_2,\;\; e_3=(1-i)\rho_1, \tag{2.158}$$

Позначимо через $E_3 := \{\zeta = xe_1+ye_2+ze_3 : x,y,z\in\mathbb{R}\}$ лінійну оболонку, породжену векторами $e_1=1, e_2, e_3$, а через Ω_ζ — область в E_3. Зауважимо, що множина моногенних функцій утворює функціональну алгебру в області визначення. Позначимо через $\mathcal{M}(E_3,\Omega_\zeta)$ алгебру моногенних функцій в області $\Omega_\zeta\subset E_3$ зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_3$.

Разом з фіксованим гармонічним базисом $\{e_1,e_2,e_3\}$ будемо розглядати довільний гармонічний базис $\{\hat e_1,\hat e_2,\hat e_3\}$. Позначимо через $\widehat{E}_3 := \{\widehat{\zeta} = \hat x\hat e_1 + \hat y\hat e_2+\hat z\hat e_3 : \hat x,\hat y,\hat z\in\mathbb{R}\}$ лінійну оболонку, породжену векторами $\hat e_1,\hat e_2,\hat e_3$, а через $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ — область в $\widehat{E}_3$. Через $\mathcal{M}(\widehat{E}_3,\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ позначимо алгебру моногенних функцій в області $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}\subset\widehat{E}_3$. Нехай гармонічні базиси $\{e_1,e_2,e_3\}$ та $\{\hat e_1,\hat e_2,\hat e_3\}$ пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&\hat e_1 = ae_1 = a,\\
&\hat e_2 = a(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+r_{21}\rho_1+r_{22}\rho_2),\\
&\hat e_3 = a(\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3+r_{31}\rho_1+r_{32}\rho_2),
\end{aligned} \tag{2.159}$$

де a — оборотний елемент алгебри $\mathbb{A}_3$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ при $k = 1, 2, 3$, причому $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$ і $r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32} \in \mathbb{C}$.

В наступній теоремі встановлено всі можливі афінні співвідношення між областями Ω_ζ і $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ при яких алгебри моногенних функцій $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ і $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ ізоморфні.

Теорема 2.4.3. *Нехай* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *— гармонічний базис, елементи якого визначені рівностями (2.158), а* $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ *— довільний гармонічний базис в* $\mathbb{A}_3$, *елементи якого подано у вигляді вигляді (2.159). Нехай, крім того,* Ω_ζ *— довільна область в* E_3, *а* $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ *— область в* $\widehat{E}_3$ *така, що координати відповідних точок* $\widehat{\zeta} = \hat{x}\hat{e}_1 + \hat{y}\hat{e}_2 + \hat{z}\hat{e}_3 \in \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ *і* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *пов'язані співвідношеннями*

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} + \alpha_1\hat{y} + \beta_1\hat{z}, \\ y &= \alpha_2\hat{y} + \beta_2\hat{z}, \\ z &= \alpha_3\hat{y} + \beta_3\hat{z}. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Тоді алгебри $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ *ізоморфні, при цьому співвідношення між функціями* $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ *і* $\widehat{\Phi} \in \mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ *встановлюється рівністю*

$$\begin{gathered} \widehat{\Phi}(\widehat{\zeta}) = \Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)\Big((r_{21}\hat{y} + r_{31}\hat{z})\rho_1 + (r_{22}\hat{y} + r_{32}\hat{z})\rho_2\Big) + \\ + \tfrac{1}{2}\Phi''(\zeta)(r_{21}\hat{y} + r_{31}\hat{z})^2\rho_2. \end{gathered} \tag{2.161}$$

Доведення. Визначимо область $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ в $\widehat{E}_3 := \{\widehat{\zeta} = \tilde{x}\hat{e}_1 + \hat{y}\hat{e}_2 + \hat{z}\hat{e}_3 : \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}\}$, координати точок $\widehat{\zeta}$ якої пов'язані з координатами відповідних точок $\zeta \in \Omega_\zeta$ співвідношеннями (2.160), і кожній функції $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ поставимо у відповідність функцію $\widehat{\Phi} \in \mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ за формулою (2.161). Легко показати, що така відповідність між алгебрами $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ є взаємно однозначною. При цьому з рівності

$$\begin{gathered} \widehat{\Phi}_1(\widehat{\zeta})\widehat{\Phi}_2(\widehat{\zeta}) = \Phi_1(\zeta)\Phi_2(\zeta) + \\ + \Big(\Phi_1(\zeta)\Phi_2'(\zeta) + \Phi_2(\zeta)\Phi_1'(\zeta)\Big)\Big((r_{21}\hat{y} + r_{31}\hat{z})\rho_1 + (r_{22}\hat{y} + r_{32}\hat{z})\rho_2)\Big) + \end{gathered}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Phi_1''(\zeta)\Phi_2(\zeta)+2\Phi_1'(\zeta)\Phi_2'(\zeta)+\Phi_1(\zeta)\Phi_2''(\zeta)\right)(r_{21}\hat{y}+r_{31}\hat{z})^2\rho_2$$

випливає, що добуток функцій $\widehat{\Phi}_1(\widehat{\zeta}), \widehat{\Phi}_2(\widehat{\zeta}) \in \mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ відповідає добутку функцій $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, тобто алгебри $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ ізоморфні. Теорему доведено.

З теореми 2.4.3 випливає, що в подальших дослідженнях достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, де лінійна оболонка E_3 породжена гармонічним базисом, елементи якого визначені рівностями (2.158).

2.5. Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри

У підрозділі 2.4 показано, що для побудови розв'язків рівняння (2.104) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись моногенними функціями в алгебрах певного виду.

А саме, з теореми 2.4.2 випливає, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (2.104) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних асоціативних алгебрах, достатньо обмежитись моногенними функціями в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — нільпотенти, тобто в алгебрах виду $\mathbb{A}_n := \mathbb{A}_n^1 = 1 \oplus_s N$. Це означає, що кількість таких n-вимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$ в яких потрібно вивчати моногенні функції рівна кількості $(n-1)$-вимірних комутативних асоціативних нільпотентних алгебр над $\mathbb{C}$. Наведемо таблицю з даними про кількість таких алгебр (з приводу посилань по кількість таких алгебр див. зауваження 2.4.13.

n	кількість алгебр виду $\mathbb{A}_n^m$	кількість алгебр виду $\mathbb{A}_n$
2	2	1
3	4	2
4	9	4
5	25	9
6	53	25
≥ 7	∞	∞

У цьому підрозділі буде втановлено зв'язок між моногенними функціями, що визначені в алгебрах $\mathbb{A}_n$ та в спеціальних алгебрах виду $\mathbb{A}_{n+1}$ (які буде названо *розширеннями*) при всіх натуральних $n \geq 2$. А для рівняння (2.104) це буде означати таке: якщо комплекснозначний розв'язок $U(x,y,z)$ рівняння (2.104) є деякою компонентою моногенної функції в деякій алгебрі $\mathbb{A}_n$ при $n < N$, то серед алгебр виду $\mathbb{A}_N$ існує алгебра $\mathbb{A}$ і існує моногенна функція Φ в $\mathbb{A}$ така, що $U(x,y,z)$ є деякою компонентою функції Φ.

Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [33].

2.5.1. Характеристичне рівняння в алгебрах $\mathbb{A}_n$

Спершу покажемо, що у всіх алгебрах виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння (2.105) завжди має розв'язки.

З правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що таблиця множення алгебри $\mathbb{A}_n$ має вигляд

$$\forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,n-1\} \qquad I_r\, I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k \,, \tag{2.162}$$

тобто

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c}
\cdot & 1 & I_1 & I_2 & \dots & I_{n-1} \\
\hline\hline
1 & 1 & I_1 & I_2 & \dots & I_{n-1} \\
\hline
I_1 & I_1 & \sum\limits_{k=2}^{n-1} \Upsilon_{1,k}^1 I_k & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^1 I_k & \cdots & 0 \\
\hline
I_2 & I_2 & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^1 I_k & \sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^2 I_k & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
I_{n-1} & I_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}, \tag{2.163}$$

де структурні константи алгебри $\Upsilon_{r,k}^s \in \mathbb{C}$ такі як в рівності (2.1). Покладемо $I_0 := 1$.

Лема 2.5.1. *Для довільного елемента* $a := \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, I_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, *алгебри* $\mathbb{A}_n$ *і довільного натурального* β *справедлива рівність*

$$a^\beta = a_0^\beta + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \dots, a_k)\, I_k\,, \tag{2.164}$$

де P_k *— однорідний поліном степеня* β *своїх аргументів.*

Доведення. Будемо доводити методом математичної індукції по β. При $\beta = 1$ твердження леми очевидне. Припустимо, що формула (2.164) справедлива при $\beta = s$:

$$a^s = a_0^s + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \dots, a_k)\, I_k$$

де P_k — однорідний поліном степеня s і, користуючись таблицею множення алгебри $\mathbb{A}_n$, доведемо справедливість формули (2.164) при $\beta = s+1$. Отже, маємо:

$$a^{s+1} = a^s a = a_0^{s+1} + I_1(a_0^s a_1 + P_1 a_0) + I_2(a_0^s a_2 + P_1 a_1 \Upsilon_{1,1}^2 + a_0 P_2) + \cdots$$
$$\cdots + I_{n-1}\Big[a_0^s a_{n-1} + P_{n-1} a_0 + \Upsilon_{1,n-1}^1 a_1 P_1 + \Upsilon_{2,n-1}^1 (a_2 P_1 + a_1 P_2) +$$
$$+ \Upsilon_{2,n-1}^2 a_2 P_2 + \Upsilon_{3,n-1}^1 (a_3 P_1 + a_1 P_3) + \Upsilon_{3,n-1}^1 (a_3 P_1 + a_1 P_3) +$$
$$+ \Upsilon_{3,n-1}^2 (a_3 P_2 + a_2 P_3) \cdots + \Upsilon_{n-1,n-1}^{n-2} a_{n-2} P_{n-2}\Big] =:$$

$$=: a_0^{s+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{P}_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k\,,$$

де $\widetilde{P}_k$ — однорідний поліном степеня $s+1$. Лему доведено.

Повністю аналогічно до леми 2.5.1, з використанням таблиці множення (2.163), доводиться наступна лема.

Лема 2.5.2. *Поліноми P_k з рівності (2.164) подаються у вигляді*

$$P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \beta a_0^{\beta-1} a_k + \widehat{P}_k(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}), \tag{2.165}$$

де $\widehat{P}_k$ — однорідний поліном степеня β.

Теорема 2.5.1. *В кожній алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння (2.105) має розв'язки.*

Доведення. Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{n-1} a_r I_r\,, \quad e_3 = \sum_{r=0}^{n-1} b_r I_r\,, \tag{2.166}$$

де $a_r, b_r \in \mathbb{C}$.

З леми 2.5.1 випливають рівності

$$e_2^\beta = a_0^\beta + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\, I_k\,, \quad e_3^\gamma = b_0^\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(b_0, b_1, \ldots, b_k)\, I_k\,,$$

де $P_k\,, Q_k$ — однорідні поліноми степенів β і γ, відповідно. Тоді для лівої частини рівняння (2.105), маємо

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_0^\beta\, b_0^\gamma + I_1\, R_1\big(b_0^\gamma P_1, a_0^\beta Q_1\big) +$$

$$+ I_2\, R_2\big(b_0^\gamma P_2, a_0^\beta Q_2, P_1 Q_1\big) + I_3\, R_3\big(b_0^\gamma P_3, a_0^\beta Q_3, P_1 Q_1, P_1 Q_2, P_2 Q_1\big) + \cdots$$

$$\cdots + I_{n-1}\, R_{n-1}\big(b_0^\gamma P_{n-1}, a_0^\beta Q_{n-1}, P_i Q_j\,,\; i, j = \{1, 2, \ldots, n-2\}\big),$$

де R_k — лінійна функція своїх аргументів. Отже, R_k при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ є однорідним поліномом степеня $\beta + \gamma$ від аргументів $a_0, b_0\,,\; a_1, b_1,\; \ldots, a_k, b_k$.

Таким чином, характеристичне рівняння (2.105) рівносильне такій характеристичній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_0^{\beta}\, b_0^{\gamma} = 0, \\ &R_1(a_0, b_0, a_1, b_1) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &R_{n-1}(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) = 0, \end{aligned} \tag{2.167}$$

де поліноми R_k визначені вище.

Перше рівняння системи (2.167) є комплексним поліномом від двох змінних степеня $\beta + \gamma$. Зафіксуємо $a_0 \neq 0$. Тоді за основною теоремою алгебри з першого рівняння системи (2.167) знаходимо b_0. Тепер a_0, b_0 визначені. Тоді за лемою 2.5.2 друге рівняння системи (2.167) є лінійним відносно невідомих a_1, b_1. Зафіксуємо a_1. Тоді з лінійного відносно b_1 рівняння $R_1(a_0, b_0, a_1, b_1) = 0$ знаходимо b_1 через a_0, a_1. Аналогічно з третього рівняння виражаємо b_2 через a_0, a_1, a_2. Продовжуючи цей процес $n-1$ раз всі b_k при $k = 1, 2, \dots, n-1$ будуть виражені через $a_0, a_1, \dots, a_k$. При цьому $a_0, a_1, \dots, a_k$ — довільні комплексні числа. Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі 2.5.1 не стверджується лінійна незалежність векторів e_1, e_2, e_3.

Отже, ми довели навіть більше, що за умов теореми 2.5.1 вектор e_2 (або e_3) можна вибрати довільним, тоді знайдеться вектор e_3 (або e_2), який задовольняє характеристичне рівняння (2.105).

Теорему 2.5.1 можна узагальнити на випадок характеристичного рівняння вигляду:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_1^{\alpha}\, e_2^{\beta}\, e_3^{\gamma} = 0\,, \tag{2.168}$$

тобто сума $\alpha + \beta + \gamma$ не рівна N. Ми також відмовилися від умови $e_1 = 1$.

Наслідок 2.5.1. *В кожній алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ характеристичне рівняння (2.168) має розв'язки.*

Доведення повністю аналогічне до доведення теореми 2.5.1, лише у системі (2.167) R_k є поліномами степеня $\alpha+\beta+\gamma$, але не однорідними.

Характеристичне рівняння (2.168) виникає тоді, коли ми розглядаємо лінійне диференціальне рівняння вигляду (2.104). У цьому випадку, функція $\Phi(\zeta)=\exp\zeta$ при $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3$ зі значеннями у будь-якій алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ є розв'язком рівняння (2.104), якщо вектори e_1,e_2,e_3 задовольняють рівняння (2.168).

2.5.2. Розширення алгебри та їх властивості

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1,\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\ldots,\widetilde{I}_n\}$ виду (2.162):

$$\forall\, r,s\in\{1,2,\ldots,n\}\qquad \widetilde{I}_r\,\widetilde{I}_s=\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n}\widetilde{\Upsilon}^s_{r,k}\,\widetilde{I}_k\,. \tag{2.169}$$

Нехай, як і раніше, $\mathbb{A}_n$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1,I_1,I_2,\ldots,I_{n-1}\}$ і таблицею множення (2.162).

Означення 2.5.3. *Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ називаєтьcя розширенням алгебри $\mathbb{A}_n$, якщо справедливі рівності*

$$\widetilde{\Upsilon}^s_{r,k}=\Upsilon^s_{r,k} \tag{2.170}$$

$$\forall\, k\in\{2,\ldots,n-1\}\quad \forall\, r,s\in\{1,2,\ldots,k-1\}. \tag{2.171}$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Зауваження 2.5.16. З умови (2.171) випливає, що $r,s=1,2,\ldots,n-2$. Тому для коректності означення необхідно $n\geq 3$. При $n=2$ за означенням покладаємо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, з таблицею множення

$\cdot$	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
1	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_1$	$\alpha\widetilde{I}_2$	0
$\widetilde{I}_2$	$\widetilde{I}_2$	0	0

(2.172)

є розширенням бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ (див., наприклад, [88]) з таблицею множення

$$\begin{array}{c||c|c} \cdot & 1 & I_1 \\ \hline\hline 1 & 1 & I_1 \\ \hline I_1 & I_1 & 0 \end{array}\ . \tag{2.173}$$

Зауважимо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ при всіх $\alpha \in \mathbb{C}$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{A}_3(1)$, моногенні функції в якій вивчались в роботі [152].

Зауваження 2.5.17. Іншими словами, рівність (2.170) означає, що якщо в таблиці множення виду (2.163) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ відкинути останній рядок і останній стовпчик і скрізь у таблиці множення елемент $\widetilde{I}_n$ замінити на нуль, то отримаємо таблицю множення алгебри $\mathbb{A}_n$.

Розглянемо приклади розширень.

Приклад 2.5.1. Кожна з наведених нижче алгебр є розширенням попередньої алгебри.

$$\mathbb{B} \;\to\; \mathbb{A}_3(1) \;\to\; \begin{array}{c||c|c|c|c} \cdot & 1 & I_1 & I_2 & I_3 \\ \hline\hline 1 & 1 & I_1 & I_2 & I_3 \\ \hline I_1 & I_1 & I_2 & I_3 & 0 \\ \hline I_2 & I_2 & I_3 & 0 & 0 \\ \hline I_3 & I_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \;\to\; \begin{array}{c||c|c|c|c|c} \cdot & 1 & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ \hline\hline 1 & 1 & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ \hline I_1 & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & 0 \\ \hline I_2 & I_2 & I_3 & I_4 & 0 & 0 \\ \hline I_3 & I_3 & I_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I_4 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\ .$$

Можна говорити також про *послідовність розширень*. Очевидно, що наведені вище алгебри мають такі відповідні базиси: $\{1, I^1\}$, $I^2 = 0$; $\{1, I^1, I^2\}$, $I^3 = 0$; $\{1, I^1, I^2, I^3\}$, $I^4 = 0$; $\{1, I^1, I^2, I^3, I^4\}$, $I^5 = 0$. Для кожного натурального n розглянемо алгебру з базисом $\{1, I^1, I^2, \ldots, I^n\}$, $I^{n+1} = 0$. Очевидно, що $(n+1)$-ша алгебра є розширенням n-ї алгебри. Якщо n пробігає всю множину натуральних чисел, то у такому випадку будемо казати, що маємо *послідовність розширень*.

Наведемо найпростіші властивості розширень.

1^o. *Розширення алгебри* $\mathbb{A}_n$ *не єдине.*

2^o. *Довільна алгебра виду* $\mathbb{A}_{n+1}$ *є розширенням лише однієї алгебри.*

Перейдемо до вивчення аналітичних властивостей в алгебрі $\mathbb{A}_n$ та в її розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Означення 2.5.4. *На алгебрі* $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ *визначимо лінійний оператор* $\widetilde{P}$: $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n) \mapsto \mathbb{A}_n$ *рівностями*

$$\widetilde{P}(1) = 1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_k) = I_k \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_n) = 0.$$

Тобто, для довільного $\tilde{a} := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\, \widetilde{I}_k \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$, $a_0, a_k \in \mathbb{C}$ маємо $\widetilde{P}(\tilde{a}) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k\, I_k \in \mathbb{A}_n$.

Означення 2.5.5. *На алгебрі* $\mathbb{A}_n$ *визначимо лінійний оператор* P : $\mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ *рівностями*

$$P(1) = 1, \quad P(I_k) = \widetilde{I}_k \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Тобто, для довільного $a := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k\, I_k \in \mathbb{A}_n$, $a_0, a_k \in \mathbb{C}$ маємо $P(a) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k\, \widetilde{I}_k \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

Зауваження 2.5.18. Надалі у цій роботі для елемента $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ і елемента $a \in \mathbb{A}_n$ використовуватимуться позначення, введені у означенях 2.5.4 і 2.5.5.

Теорема 2.5.2. *Оператор* $\widetilde{P}$ *узагальнено обернений відносно* P.

Доведення проводиться шляхом безпосередньої перевірки рівності $P\widetilde{P}P = P$.

Теорема 2.5.3. *Для довільних* $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ *справедлива рівність*

$$\widetilde{P}(\tilde{a}\, \tilde{b}) = \widetilde{P}(\tilde{a})\, \widetilde{P}(\tilde{b}). \tag{2.174}$$

Доведення. Розглянемо рівність

$$\widetilde{P}(\widetilde{I}_s\, \widetilde{I}_r) = \widetilde{P}\left(\sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s}\, \widetilde{I}_k \right) = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s}\, \widetilde{P}(\widetilde{I}_k) =$$

$$= \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n-1} \Upsilon^s_{r,k}\, I_k = I_s\, I_r\,. \tag{2.175}$$

Тепер з урахуванням рівності (2.175), маємо

$$\widetilde{P}(\tilde{a}\,\tilde{b}) = \widetilde{P}\left(\sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j\, \widetilde{I}_i\, \widetilde{I}_j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j\, \widetilde{P}(\widetilde{I}_i\, \widetilde{I}_j) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i b_j\, I_i\, I_j = ab = \widetilde{P}(\tilde{a})\widetilde{P}(\tilde{b}).$$

Теорему доведено.

Наслідок 2.5.2. *Для довільного* $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ *такого, що* $a_0 \neq 0$ *справедлива рівність*

$$\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}) = a^{-1}. \tag{2.176}$$

Доведення. В рівності (2.174) покладемо $\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}$, при цьому отримаємо

$$\widetilde{P}(\tilde{a}\,\tilde{a}^{-1}) = \widetilde{P}(1) = 1 = \widetilde{P}(\tilde{a})\,\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}) = a\widetilde{P}(\tilde{a}^{-1}).$$

Продемонструємо рівність (2.176) на простому прикладі. Як зазначалося в зауваженні 2.5.16, алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ є розширенням алгебри $\mathbb{B}$.

Приклад 2.5.2. В алгебрі $\mathbb{B}$ обернений елемент a^{-1} має вигляд

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\, I_1\,, \quad a_0 \neq 0.$$

А в алгебрі $\mathbb{A}_3(\alpha)$ обернений елемент $\tilde{a}^{-1}$ має такий вигляд

$$\tilde{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\, \widetilde{I}_1 + \left(\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3}\,\alpha\right) \widetilde{I}_2\,, \quad a_0 \neq 0.$$

На цих прикладах бачимо виконання рівності (2.176).

Означення 2.5.6. *Для довільного натурального* k *і довільного* $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ $\tilde{a}^{-k}$ *визначаємо рівністю* $\tilde{a}^{-k} := (\tilde{a}^{-1})^k$.

З рівності (2.174) випливає ще такий

Наслідок 2.5.3. *Для довільного цілого k і довільного $\tilde{a} \in \mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ справедлива рівність*

$$\widetilde{P}\big(\tilde{a}^k\big) = \big(\widetilde{P}(\tilde{a})\big)^k. \tag{2.177}$$

Наступний наслідок випливає з рівностей (2.174) та (2.177).

Наслідок 2.5.4. *Якщо вектори $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють рівняння (2.168), то вектори $\widetilde{P}(\tilde{e}_1)$, $\widetilde{P}(\tilde{e}_2)$, $\widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ також задовольняють рівняння (2.168).*

Приклад 2.5.3. Якщо вектори $e_1 = 1$, $e_2 = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2$, $e_3 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, алгебри $\mathbb{A}_3(\alpha)$ задовольняють рівняння (2.168), то вектори $e_1 = 1$, $e_2 = a_0 + a_1 I_1$, $e_3 = b_0 + b_1 I_1$ вже алгебри $\mathbb{B}$ також задовольняють рівняння (2.168).

Далі доведемо теорему, яка встановлює зв'язок між алгебрами виду $\mathbb{A}_n$ та їх розширеннями. З цією метою введемо таке означення.

Означення 2.5.7. *Нульовим розширенням алгебри виду $\mathbb{A}_n$ назвемо таке розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$ в якому*

$$\widetilde{\Upsilon}^s_{r,n+1} = 0 \qquad \forall\ r, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Тобто, таблиця множення нульового розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$ утворюється з таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n$ шляхом додавання $(n+1)$-го рядка і $(n+1)$-го стовпчика скрізь заповнених нулями крім тих клітинок де відбувається множення на одиницю алгебри.

Очевидно, що *нульове розширення єдине.* Наприклад, серед усіх розширень $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, алгебри $\mathbb{B}$ нульовим розширенням є лише алгебра $\mathbb{A}_3(0)$.

Якщо оператор P, який визначений в означенні 2.5.5, приймає значення в нульовому розширенні $\mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$, то подібно до оператора $\widetilde{P}$, він буде мультиплікативним. А саме, подібно до доведення теореми 2.5.3 доводиться наступне твердження.

Теорема 2.5.4. *Для довільної алгебри виду $\mathbb{A}_n$ і для оператора $P : \mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{E}_0(\mathbb{A}_n)$ справедлива рівність*

$$P(ab) = P(a)P(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{A}_n\,. \tag{2.178}$$

Теорема 2.5.5. *Якщо нульові розширення $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$ та $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ алгебр виду (2.163) неізоморфні, то й алгебри $\mathbb{V}_n$ і $\mathbb{W}_n$ також неізоморфні.*

Доведення. Будемо доводити методом від супротивного. Припустимо, що алгебри $\mathbb{V}_n$ та $\mathbb{W}_n$ ізоморфні. Це означає, що існує лінійне взаємно однозначне відображення $\varphi : \mathbb{V}_n \to \mathbb{W}_n$ таке, що для довільних $a, b \in \mathbb{V}_n$ справедлива рівність

$$\varphi(a\,b) = \varphi(a)\varphi(b). \tag{2.179}$$

Нехай $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис алгебри $\mathbb{V}_n$, $\{\widetilde{I}_k\}_{k=0}^{n}$ — базис алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$, а $\{\widetilde{\rho}_k\}_{k=0}^{n}$ — базис алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$. Визначимо відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ рівностями:

$$\psi(\widetilde{I}_k) = P\big(\varphi(I_k)\big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \psi(\widetilde{I}_n) = \widetilde{\rho}_n\,. \tag{2.180}$$

Оскільки відображення $\varphi : \mathbb{V}_n \to \mathbb{W}_n$ лінійне і оператор $P : \mathbb{W}_n \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ лінійний, то за визначенням (2.180) відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ також лінійне. Це дає змогу за допомогою рівностей (2.180) визначити відображення ψ для всіх $\tilde{a} \in \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$:

$$\psi(\tilde{a}) = P\big(\varphi(a)\big) + a_n\tilde{\rho}_n\,. \tag{2.181}$$

Тепер для відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ доведемо співвідношення

$$\psi(\tilde{a}\,\tilde{b}) = \psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}) \qquad \forall\ \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n). \tag{2.182}$$

Беручи до уваги рівність (2.181), маємо співвідношення

$$\psi(\tilde{a}\,\tilde{b}) = P\big(\varphi(ab)\big) + (a_nb_0 + b_na_0)\tilde{\rho}_n\,. \tag{2.183}$$

Розглянемо добуток

$$\psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}) = \big(P\big(\varphi(a)\big) + a_n\tilde{\rho}_n\big)\,\big(P\big(\varphi(b)\big) + b_n\tilde{\rho}_n\big) =$$

$$= P\big(\varphi(a)\big)P\big(\varphi(b)\big) + \big(P\big(\varphi(a)\big)\, b_n + P\big(\varphi(b)\big)\, a_n\big)\, \tilde{\rho}_n \,. \tag{2.184}$$

Оскільки оператор P приймає значення в нульовому розширенні $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$, то очевидними є рівності

$$P\big(\varphi(a)\big)\, b_n\tilde{\rho}_n = a_0 b_n\tilde{\rho}_n \,, \quad P\big(\varphi(b)\big)\, a_n\tilde{\rho}_n = b_0 a_n\tilde{\rho}_n \,. \tag{2.185}$$

Враховуючи співвідношення (2.178), (2.185), рівність (2.184) набуває вигляду

$$\psi(\tilde{a})\psi(\tilde{b}) = P\big(\varphi(ab)\big) + (a_n b_0 + b_n a_0)\tilde{\rho}_n \,. \tag{2.186}$$

Нарешті, наслідком рівностей (2.183), (2.186) є рівність (2.182).

Тепер покажемо, що відображення ψ взаємно однозначне. За визначенням (2.180), матриця переходу від базиса до базиса має вигляд

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки за припущенням алгебри $\mathbb{V}$ та $\mathbb{W}$ ізоморфні, то $\det A \neq 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Розкладаючи $\det \widetilde{A}$ за елементами останнього рядка, отримаємо $\det \widetilde{A} = 1 \cdot \det A \neq 0$, тобто відображення ψ взаємно однозначне.

Отже, ми побудували лінійне взаємно однозначне відображення $\psi : \mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n) \to \mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$, яке задовольняє умову (2.182). Це означає, що алгебри $\mathbb{E}_0(\mathbb{V}_n)$ та $\mathbb{E}_0(\mathbb{W}_n)$ ізоморфні. Ми прийшли до протиріччя з умовою теореми. Отож, алгебри $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ неізоморфні. Теорему доведено.

Зауваження 2.5.19. З таблиць множення усіх алгебр виду $\mathbb{A}_n$ при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (про таблиці множення зауваження 2.4.13) видно, що нульові розширення неізоморфних $(n-1)$-вимірних алгебр виду $\mathbb{A}_{n-1}$ знову є неізоморфними. Теорема 2.5.5 є, в певному сенсі, оберненим результатом до вказаного факту, але при всіх натуральних $n \geq 2$.

2.5.3. Моногенні функції на розширеннях алгебри $\mathbb{A}_n$

Для алгебр вигляду $\mathbb{A}_n = \mathbb{A}_n^1 = 1 \oplus_s N$ зображення (2.201) має вигляд рівності (2.37). Зауважимо, що рівність (2.37) подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt, \tag{2.187}$$

де F_k — деяка голоморфна функція в області $D := \{\xi = x + ya_0 + zb_0 \in \mathbb{C} : \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta\}$, а Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D і охоплює точку ξ.

Оскільки за умов теореми 2.1.3 кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ продовжується до функції, моногенної в нескінченному циліндрі

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : \xi \in D\}, \tag{2.188}$$

то надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ. Відмітимо, що циліндр $\Pi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \zeta \in \Pi_\zeta\}$ паралельний прямій L.

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрі виду $\mathbb{A}_n$ і моногенними функціями в її довільному розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють характеристичне рівняння (2.105). На ці вектори натягнемо лінійний простір

$$\widetilde{E}_3 := \{\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

В алгебрі $\mathbb{A}_n$ будемо розглядати трійку $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ і лінійний простір

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) := \{\zeta = x + y\widetilde{P}(\tilde{e}_2) + z\widetilde{P}(\tilde{e}_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 2.5.6. *Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ виду (2.166) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ задовольняють характеристичне рівняння (2.105) і нехай хоча б одне з чисел*

a_0 чи b_0 належить $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Крім того, нехай функція $\widetilde{\Phi}:\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\to\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ змінної $\widetilde{\zeta}=x+y\tilde{e}_2+z\tilde{e}_3$ моногенна в деякому циліндрі $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\subset\widetilde{E}_3$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_n$ трійка векторів $1,\widetilde{P}(\tilde{e}_2),\widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ також задовольняє характеристичне рівняння (2.105) і функція $\Phi(\zeta):=\widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ є моногенною в циліндрі $\Pi_\zeta:=\{\zeta\in\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big):\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$ алгебри $\mathbb{A}_n$.

Доведення. Той факт, що вектори $1,\widetilde{P}(\tilde{e}_2),\widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ задовольняють характеристичне рівняння (2.105) випливає з наслідку 2.5.4. Тепер зауважимо, що з тотожності (2.176) випливає тотожність

$$(t-\zeta)^{-1}=\widetilde{P}\left((t-\widetilde{\zeta})^{-1}\right)\quad\forall\, t\in\mathbb{C}:\, t\neq x+ya_0+zb_0\,. \tag{2.189}$$

За теоремою 2.1.3 функція $\widetilde{\Phi}$ подається у вигляді

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{I}_k\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{F}_k(t)(t-\widetilde{\zeta})^{-1}\,dt. \tag{2.190}$$

Подіємо на рівність (2.190) оператором $\widetilde{P}$. Враховуючи співвідношення (2.5.3) і (2.189), маємо

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{P}(\widetilde{I}_k)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{F}_k(t)\widetilde{P}\big((t-\widetilde{\zeta})^{-1}\big)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}I_k\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{F}_k(t)(t-\zeta)^{-1}\,dt.$$

Відповідно до теореми **A** отримана функція $\widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ є моногенною в циліндрі $\Pi_\zeta:=\{\zeta\in\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big):\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$. Теорему доведено.

Зауваження 2.5.20. З теореми 2.5.6 випливає, що для вивчення моногенних функцій в алгебрах виду $\mathbb{A}_n$ при $n=2,3,4,5$ достатньо обмежитись дослідженням моногенних функцій у певних дев'яти алгебрах (які є нульовими розширеннями алгебр виду $\mathbb{A}_5$) виду $\mathbb{A}_6$.

Крім того, з теореми 2.5.6 слідує, що клас розв'язків рівняння (2.104) (і взагалі кажучи, рівняння (2.168)) у вигляді компонент моногенних функцій буде тим ширший чим більша розмірність алгебри виду $\mathbb{A}_n$. Або точніше: якщо комплекснозначний розв'язок $U(x,y,z)$ рівняння (2.104) є деякою компонентою моногенної функції в деякій алгебрі $\mathbb{A}_n$ при $n<N$, то серед алгебр виду $\mathbb{A}_N$ існує алгебра $\mathbb{A}$ і існує моногенна функція Φ в $\mathbb{A}$ така, що $U(x,y,z)$ є деякою компонентою функції Φ. При цьому N може бути як завгодно великим.

Приклад 2.5.4. Розглянемо моногенні функції в алгебрі $\mathbb{B}$ і в її розширенні $\mathbb{A}_3(\alpha)$. В алгебрі $\mathbb{B}$ кожна моногенна функція подається у вигляді

$$\Phi(\zeta)=F(\xi)+\big(\xi_1F'(\xi)+F_0(\xi)\big)I_1\,,\quad \zeta=\xi+\xi_1\,I_1\,.$$

А з прикладу 2.5.2 і теореми 2.1.3 випливає, що кожна моногенна функція в алгебрі $\mathbb{A}_3(\alpha)$ подається у такому вигляді:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})=F(\xi)+\big(\xi_1F'(\xi)+F_0(\xi)\big)\widetilde{I}_1+$$
$$+\Big(\xi_2F'(\xi)+\frac{\xi^2\alpha}{2}F''(\xi)+\xi_1F_0'(\xi)+F_1(\xi)\Big)\widetilde{I}_2\,,\quad \widetilde{\zeta}=\xi+\xi_1\,\widetilde{I}_1+\xi_2\,\widetilde{I}_2\,.$$

Якщо в $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})$ покласти $\xi_2=0$, відкинути компоненту при $\widetilde{I}_2$ і $\widetilde{I}_1$ ототожнити з I_1, то з $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})$ отримаємо $\Phi(\zeta)$, тобто моногенну функцію в звуженні $\mathbb{B}$.

Зауваження 2.5.21. Теорема 2.5.6 залишається справедливою для моногенних функцій змінної $\zeta=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_de_d$ при $x_1,x_2,\ldots,x_d\in\mathbb{R}$, $e_1,e_2,\ldots,e_d\in\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

2.6. Гіперкомплексний підхід до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

У цьому підрозділі застосуємо результати підрозділів 2.1, 2.2, 2.4 та 2.5 до побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідних. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [31, 35, 36, 189]. Зокрема, буде запропоновано рекурентну процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків заданих рівнянь з частинними похідними, використовуючи моногенні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр. Ідея такого підходу полягає в наступному.

Нехай $\mathbb{A}$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і нехай $e_1, e_2, \ldots, e_d$ — набір векторів в $\mathbb{A}$, де натуральне число $d \geq 2$. Позначимо $\zeta := x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ і визначимо на алгебрі $\mathbb{A}$ експоненціальну функцію $\exp \zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду

$$\exp \zeta := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^r}{r!}\,. \tag{2.191}$$

Похідна від функції $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$ розуміється як похідна Гато ряду (2.191). Як наслідок, $\frac{\partial}{\partial x_j} \exp \zeta = e_j \exp \zeta$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

Нехай $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Позначимо $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, 2, \ldots, d$, і $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$. Розглянемо загальне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{2.192}$$

де

$$E_k(u) := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}\,, \quad C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \in \mathbb{R}.$$

Внаслідок рівності

$$E(u) = (E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^*) \exp \zeta,$$

де

$$E_k^* := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d}\, e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots e_d^{\alpha_d},$$

функція $\exp \zeta$ задовольняє рівняння (2.192), якщо вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ задовольняють *характеристичне* рівняння

$$E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^* = 0. \tag{2.193}$$

Оскільки рівняння (2.192) лінійне, то всі комплекснозначні компоненти розкладу функції $\exp \zeta$ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є його розв'язками.

Якщо ж рівняння (2.192) має вигляд

$$E_p(u) = 0, \tag{2.194}$$

то, очевидно, що при виконанні умови $E_p^*(u) = 0$ не лише $\exp\zeta$ є розв'язком рівняння (2.194), але й довільна $\mathbb{A}$-значна аналітична функція Φ змінної ζ. Аналогічно, усі комплекснозначні компоненти розкладу функції Φ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є розв'язками рівняння (2.194).

Такий підхід до побудови розв'язків заданих диференціальних рівнянь з частинними похідними використовувався в багатьох роботах, зокрема в роботах [104], [106], [169], [130], [11], [131], [88], [152], [151], [153], [154], [18], [36], [35], [145], [146].

Таким чином, маємо дві задачі. Задача (З 1) — описати всі набори векторів $e_1, e_2, \ldots, e_d$, які задовольняють характеристичне рівняння (2.193) (або вказати процедуру за якою вони знаходяться), а друга задача (З 2) — описати всі компоненти аналітичної функції. Зокрема, для рівняння (2.194) описати компоненти функції $\Phi(\zeta) = \exp\zeta$.

Відмітимо, що в п. 2.1.4 отримано конструктивний опис усіх аналітичних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$. Теорема 2.4.2 стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (2.192) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних асоціативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ — нільпотенти. А в теорема 2.5.1 показано, що в кожній алгебрі з базисом виду $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ рівняння (2.193) має розв'язки. Тобто, на класах комутативних асоціативних алгебр з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ задачі (З 1) та (З 2) повністю розв'язані.

Варто зауважити, що в скінченновимірних алгебрах розклад аналітичної функції за базисом має скінченну кількість компонент, а тому породжує скінченне число лінійно незалежних розв'язків заданого диференціального рівняння з частинними похідними.

У цьому підрозділі пропонується процедура побудови нескінченновимірних сімей розв'язків заданих рівнянь з частинними похідними, використовуючи моногенні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр. Для досягнення цієї мети, спочатку вивчаються розв'язки характеристичного рівняння (2.193) на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а потім вивчаються моногенні функції на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ та їх зв'язок з розв'язками рівняння (2.192). Після цього даний підхід застосовується до побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики.

2.6.1. Моногенні функції в областях простору E_d

Означення 2.6.8. *Будемо казати, що вектор* $e(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} c_r I_r$, $c_r \in \mathbb{C}$, *визначений на послідовності розширень* $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, *якщо при кожному* $n = 2, 3, \ldots$ *справедливе співвідношення* $e(n) \in \mathbb{E}^n$.

Означення 2.6.9. *Скажемо, що рівняння (2.193) має розв'язки на послідовності розширень* $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, *якщо при кожному* $n = 2, 3, \ldots$ *існують вектори* $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$ *алгебри* $\mathbb{E}^n$, *які задовольняють рівняння (2.193) в* $\mathbb{E}^n$.

Теорема 2.6.1. *На кожній послідовності розширень* $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ *рівняння (2.193) має розв'язки.*

Доведення. Повністю аналогічно до доведення теореми 2.5.1 доводиться, що при кожному $n = 2, 3, \ldots$ в алгебрі $\mathbb{E}^n$ рівняння (2.193) має розв'язки. Теорему доведено.

Зауваження 2.6.22. Більше того, серед розв'язків $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$ рівняння (2.193) на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ завжди можна $d-1$ вектор визначити довільним чином на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а останній вектор виражається рекурентними співвідношеннями через вибрані $d-1$ векторів. Нехай для визначеності

$$e_d(n+1) = f\big(e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_{d-1}(n+1), e_d(n)\big). \tag{2.195}$$

Збільшуючи як завгодно n, визначаємо вектор $e_d(n)$ на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Очевидно, що рекурентні формули (2.195) визначаються рівнянням (2.193) і послідовністю розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Прикладом рекурентних співвідношень (2.195) є формули (15) з роботи [36]. Також відмітимо, що якщо у змінній $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ перейти до "базису" послідовності розширень, то ми фактично отримуємо нескінченновимірну змінну ζ.

Далі сформулюємо деякі результати для моногенних функцій, що визначені в областях простору E_d при натуральних $d \geq 2$ (див. зауваження 2.1.4).

Нехай вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$, які задовольняють характеристичне рівняння (2.193) в $\mathbb{A}_n$, мають наступний розклад в базисі алгебри:

$$e_j = \sum_{r=0}^{n-1} a_{jr}\, I_r\,, \quad a_{jr} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{2.196}$$

Для елемента $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, комплексне число

$$\xi := x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0}$$

називається *спектром* точки ζ.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n$ лінійну оболонку $E_d := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$.

Далі істотним є припущення: $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В теоремі 4 роботи [189] встановлено підклас рівнянь вигляду (2.192) для яких умова $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Множині S простору $\mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in S\} \text{ в } E_d\,.$$

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_d$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h\in E_d.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_n$ за базисом $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$:

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x_1,x_2,\ldots,x_d)\, I_k\,. \tag{2.197}$$

У випадку, коли функції $U_k:\Omega\to\mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто для довільного $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\Omega$

$$U_k\,(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,\ldots,x_d+\Delta x_d)-U_k(x_1,x_2,\ldots,x_d)=$$

$$=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\,\Delta x_j + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2}\right), \qquad \sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2\to 0\,,$$

функція Φ моногенна в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли у кожній точці області Ω_ζ виконуються наступні аналоги умов Коші–Рімана:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\,e_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\,e_j \qquad \text{при всіх} \quad j=2,3,\ldots,d.$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1-\zeta)^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1} A_k\, I_k \quad \forall\, t\in\mathbb{C}:\, t\neq\xi\,, \tag{2.198}$$

де A_k визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0:=\frac{1}{t-\xi}\,, \quad A_1:=\frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,,\ \ \xi_1:=x_1a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_da_{d1},$$

$$A_s=\frac{\xi_s}{(t-\xi)^2}+\frac{1}{t-\xi}\sum_{r=1}^{s-1}A_r\,B_{r,s} \tag{2.199}$$

при

$$\xi_s:=x_1a_{1s}+x_2a_{2s}+\cdots+x_da_{ds}\,,\ \ B_{r,s}:=\sum_{k=1}^{s-1}\xi_k\Upsilon_{r,s}^k\,, \quad s=2,3,\ldots,n-1.$$

Із співвідношень (2.198) випливає, що точки $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in E_d$, лежать на множині

$$M: \quad \begin{cases} x_1 \operatorname{Re} a_{10} + x_2 \operatorname{Re} a_{20} + \cdots + x_d \operatorname{Re} a_{d0} = 0, \\ x_1 \operatorname{Im} a_{10} + x_2 \operatorname{Im} a_{20} + \cdots + x_d \operatorname{Im} a_{d0} = 0 \end{cases} \tag{2.200}$$

у просторі $\mathbb{R}^d$.

Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ. Це означає, що Ω_ζ містить відрізок $\{\theta_1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1) : \alpha \in [0,1]\}$ для всіх $\theta_1, \theta_2 \in \Omega_\zeta$ таких, що $\theta_2 - \theta_1 \in M_\zeta$. Позначимо

$$D := \{\xi = x_1 a_{10} + x_2 a_{20} + \cdots + x_d a_{d0} \in \mathbb{C} : \zeta \in \Omega_\zeta\}.$$

Наступна теорема є узагальненням теореми 2.1.3 і доведена в роботі [189].

Теорема 2.6.2. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ і нехай хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_k(t)(t - \zeta)^{-1} \, dt, \tag{2.201}$$

де F_k — деяка голоморфна функція в області D, а Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D і охоплює точку ξ.

Доведення. Нехай F_0 — перша компонента розкладу функції Φ за базисом $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$. Розглянемо функцію

$$\Phi_0(\zeta) := \Phi(\zeta) - I_0 \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_0(t)(te_1 - \zeta)^{-1} \, dt.$$

З розкладу (2.198) випливає, що значення функції Φ_0 належать радикалу $\mathcal{R}$, тобто $\Phi_0(\zeta) \in \mathcal{R}$. Тому Φ_0 має вигляд

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{s=1}^{n-1} V_s(x_1, x_2, \ldots, x_k) \, I_s \,, \tag{2.202}$$

де $V_s : \Omega \to \mathbb{C}$ задовольняє аналоги умов Коші–Рімана

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \, e_j \qquad j = 2, 3, \ldots, k. \tag{2.203}$$

Підставивши вирази (2.196) і (2.202) в рівність (2.203), отримаємо рівності

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_j} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\, a_{j\,0}\,, \qquad j = 2, 3, ..., k.$$

Так, як при доведенні леми 2.1.6, встановлюємо, що $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv F_1(\xi)$, де F_1 — голоморфна функція в області D. Отже,

$$\Phi_0(\zeta) = F_1(\xi)\, I_1 + \sum_{s=2}^{n} V_s(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, I_s\,.$$

Тепер розглянемо функцію

$$\Phi_1(\zeta) := \Phi_0(\zeta) - I_1\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_1(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt.$$

З розкладу (2.198) випливає, що функцію Φ_1 можна подати у вигляді

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{s=2}^{n} \widetilde{V}_s(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, I_s\,,$$

де $\widetilde{V}_s : \Omega \to \mathbb{C}$. Оскільки Φ_1 задовольняє умови (2.203), то для визначення функції $\widetilde{V}_2$ отримуємо систему

$$\frac{\partial \widetilde{V}_2}{\partial x_j} = \frac{\partial \widetilde{V}_2}{\partial x_1}\, a_{j\,0}\,, \qquad j = 2, 3, ..., k.$$

Так, як і для функції V_1, встановлюємо, що $\widetilde{V}_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv F_2(\xi)$, де F_2 — голоморфна функція в області D.

Таким чином, поступово розглядаючи функції

$$\Phi_j(\zeta) := \Phi_{j-1}(\zeta) - I_j\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_j(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt$$

при $j = 2, 3, \ldots, k$, отримуємо представлення (2.201) функції Φ. Теорему доведено.

Оскільки за умов теореми 2.6.2 кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_d : \xi \in D\},$$

тому надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ .

2.6.2. Множини розв'язків лінійних диференціальних рівнянь

Спочатку побудуємо сім'ї розв'язків рівняння (2.194). Відповідно до вступу цього підрозділу компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (2.197) задовольняють рівняння (2.194). Крім того, очевидно, що зображення моногенної фукції (2.201) залежить від n — розмірності алгебри.

Далі дослідимо, як компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (2.197) залежать від n і від k.

Отже, маємо дві алгебри $\mathbb{E}^n$ та $\mathbb{E}^{n+1}$. В алгебрі $\mathbb{E}^n$ визначений набір векторів $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$, який задовольняє рівняння (2.193), а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ визначений інший набір векторів — $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$, який також задовольняє рівняння (2.193) (відносно вибору векторів $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$ див. зауваження 2.6.22). В $\mathbb{E}^n$ розглядаємо змінну $\zeta(n) = x_1e_1(n)+x_2e_2(n)+\cdots+x_de_d(n)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n)\big)$, а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ розглядаємо змінну $\zeta(n+1) = x_1e_1(n+1) + x_2e_2(n+1) + \cdots + x_de_d(n+1)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n+1)\big)$. Нехай $\Phi\big(\zeta(n)\big) : \Pi_{\zeta(n)} \to \mathbb{E}^n$ має вигляд (2.197), а моногенна функція $\Phi\big(\zeta(n+1)\big) : \Pi_{\zeta(n+1)} \to \mathbb{E}^{n+1}$ має вигляд

$$\Phi\big(\zeta(n+1)\big) = \sum_{k=0}^{n} V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, \widetilde{I}_k\,.$$

Повністю аналогічно до теореми 2.5.6 доводиться співвідношення

$$U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \equiv V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad \text{при всіх } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким чином, для побудови розв'язків рівняння (2.194) у вигляді компонент моногенної функції має сенс розглядати лише останню — n-ту компоненту $U_n(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції в $\mathbb{E}^n$ при кожному фіксованому n. Перейдемо до вивчення поставленої задачі.

Праву частину рівності (2.201) подамо у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, W_k(x_1, \dots, x_d, t) dt$$

і будемо розглядати функції $W_k(x_1, \dots, x_d, t)$.

Підставляючи вираз для резольвенти (2.198) в рівність (2.201), враховуючи правила множення алгебри $\mathbb{E}^n$, отримаємо такі перші чотири значення:

$$W_0(x_1, \dots, x_d, t) = F_0 A_0 \,,$$

$$W_1(x_1, \dots, x_d, t) = F_1 A_0 + \widetilde{F}_0 A_1 \,,$$

$$W_2(x_1, \dots, x_d, t) = F_2 A_0 + \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2} + \widehat{F}_0 A_2 \,,$$

$$W_3(x_1, \dots, x_d, t) = F_3 A_0 + \Big(\widehat{F}_1(t) \Upsilon^1_{1,3} + \widetilde{F}_2(t) \Upsilon^1_{2,3}\Big) A_1 +$$

$$+ \Big(\widehat{F}_1(t) \Upsilon^1_{2,3} + \widetilde{F}_2(t) \Upsilon^2_{2,3}\Big) A_2 + \widetilde{\widetilde{F}}_0(t) A_3 \,,$$

де F з усіма індексами і тільдами довільні голоморфні функції комплексної змінної.

Проаналізуємо отримані вирази. Відповідно до побудови, вираз

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} W_0(x_1, \dots, x_d, t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_0 A_0 dt$$

є розв'язком рівняння (2.194). Розглянемо вираз для W_1. Оскільки голоморфні функції F_0, F_1 довільні, то вираз $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_1 A_0 dt$ задовольняє рівняння (2.192). Беручи до уваги, що $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma W_1 dt$ є розв'язком рівняння (2.194) і що це рівняння лінійне, то й їх різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_1 - F_1 A_0) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_0 A_1 dt$$

є розв'язком рівняння (2.194). Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що й наступна різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_2 - F_2 A_0 - \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widehat{F}_0 A_2 dt$$

є розв'язком рівняння (2.194). Аналогічно отримуємо наступний розв'язок:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{\widetilde{F}}_0(t)A_3dt.$$

Збільшуючи як завгодно натуральне n, отримуємо нескінченновимірну множину розв'язків рівняння (2.194):

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}F_k(t)A_k\,dt\right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{2.204}$$

де F_k — довільні голоморфні функції комплексної змінної, а A_k визначені рекурентними формулами (2.199).

Далі вкажемо сім'ю розв'язків рівняння (2.192). З цією метою зазначимо, що визначення функції $\exp\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду (2.191) рівносильне її визначенню у вигляді головного продовження голоморфної функції комплексної змінної e^z в алгебру $\mathbb{E}^n$:

$$\exp\zeta := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}e^z(z-\zeta)^{-1}dz, \tag{2.205}$$

де γ — спрямлювана кривая в комплексній площині, що охоплює точку $\xi = x_1a_{10}+x_2a_{20}+\cdots+x_da_{d0}$ (див., наприклад, [29, с. 182]). А оскільки функція (2.205) задовольняє рівняння (2.192), то і її компоненти також задовольняють це рівняння. Тобто, для рівняння (2.192) будемо мати таке нескінченне сімейство розв'язків:

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^tA_k\,dt\right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{2.206}$$

2.6.3. Вирази розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, породжені послідовністю розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$

У цьому пункті на конкретній послідовності розширень випишемо розв'язки виглядів (2.204) та (2.206).

Через $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ позначимо послідовність розширень, наведену в прикладі 2.5.1. На послідовності $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ у розкладі резольвенти (2.198) коефіцієнти A_k визначаються наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0 := \frac{1}{t-\xi}\,,$$

$$A_s = \frac{1}{t-\xi}(\xi_s A_0 + \xi_{s-1}A_1 + \cdots + \xi_1 A_{s-1}), \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{2.207}$$

Тобто, маємо такі перші значення:

$$A_1 = \frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,, \quad A_2 = \frac{\xi_2}{(t-\xi)^2} + \frac{\xi_1^2}{(t-\xi)^3}\,,$$

$$A_3 = \frac{\xi_3}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\,,$$

$$A_4 = \frac{\xi_4}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{(t-\xi)^3} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{(t-\xi)^4} + \frac{\xi_1^4}{(t-\xi)^5}\,,$$

$$A_5 = \frac{\xi_5}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3}{(t-\xi)^3} + \frac{3\xi_1^2\xi_3 + 3\xi_1\xi_2^2}{(t-\xi)^4} + \frac{4\xi_1^3\xi_2}{(t-\xi)^5} + \frac{\xi_1^5}{(t-\xi)^6}\,,$$

$$A_6 = \frac{\xi_6}{(t-\xi)^2} + \frac{\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4}{(t-\xi)^4} +$$

$$+ \frac{4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2}{(t-\xi)^5} + \frac{5\xi_1^4\xi_2}{(t-\xi)^6} + \frac{\xi_1^6}{(t-\xi)^7}\,,$$

і т. д.

Далі на $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ випишемо розклад експоненти (2.191). Для цього зауважимо, що $A_r = A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big)$, де $s = \{2, 3, \ldots, r+1\}$.

Введемо деякі означення. Нехай $\varphi(t-\xi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ — довільна комплекснозначна функція від $(r+1)$ комплексних змінних. Визначимо лінійний оператор P, який кожній функції φ ставить у відповідність функцію від r змінних за правилом

$$P\varphi\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) = \varphi\Big((s-1)!\,, \xi_1, \ldots, \xi_r\Big) \qquad \forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}.$$

Так, наприклад,

$$P\left(\frac{\xi_3}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\right) = \xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\,.$$

Тепер визначимо функції

$$\Psi_0 := 1, \quad \Psi_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) := P\, A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) \tag{2.208}$$
$$\forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Лема 2.6.1. *На послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ справедлива рівність*

$$\exp\zeta = e^\xi \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_r\, \rho^r, \tag{2.209}$$

де коефіцієнти Ψ_r визначені співвідношеннями (2.208).

Доведення. Нехай $\exp\zeta$ має вигляд (2.209). Визначимо коефіцієнти Ψ_r. Наслідком співвідношень (2.207) є рівності

$$A_r = \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}}{(z-\xi_0)^{s+1}}\,, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{2.210}$$

де $Q_{s,r} = Q_{s,r}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ — деякі поліноми (порівн. з лемою 2.1.3). З означення (2.205), з використанням співвідношень (2.198) і (2.210), маємо

$$\exp\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^z (z-\zeta)^{-1} dz = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r\, \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}\, e^z}{(z-\xi_0)^{s+1}}\, dz =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}\, e^{\xi_0}}{s!} = e^{\xi_0} \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_r\, \rho^r,$$

тобто

$$\Psi_r = \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}}{s!}\,. \tag{2.211}$$

Порівнюючи рівності (2.211) та (2.210) приходимо до висновку, що Ψ_r визначаються співвідношення (2.208). Лему доведено.

Випишемо декілька перших членів розкладу експоненти (2.209):

$$\exp\zeta = e^\xi \Bigg[1 + \xi_1\, \rho + \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2!}\right) \rho^2 + \left(\xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\right) \rho^3 +$$
$$+ \left(\xi_4 + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{2!} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^4}{4!}\right) \rho^4 +$$

$$+\left(\xi_5+\xi_1\xi_4+\xi_2\xi_3+\frac{\xi_1\xi_2^2+\xi_1^2\xi_3}{2!}+\frac{\xi_1^3\xi_2}{3!}+\frac{\xi_1^5}{5!}\right)\rho^5+\cdots\Bigg].$$

Оскільки функція $\exp\zeta$ задовольняє рівняння (2.192), то її комплексні компоненти $V_r(t,x)$ розкладу

$$\exp\zeta=\sum_{r=0}^{\infty}V_r(t,x)\,\rho^r \qquad (2.212)$$

також задовольняють рівняння (2.192). Сформулюємо це в наступному вигляді.

Теорема 2.6.3. *Рівняння (2.192) задовольняють комплексні функції*

$$V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\Psi_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\xi(x_1,x_2,\ldots,x_d)} \qquad (2.213)$$

при всіх $r=0,1,\ldots,$ *де поліноми* Ψ_r *визначаються рівностями (2.208).*

Зауваження 2.6.23. Виділяючи в комплексному розв'язку V_r дійсну і уявну частини, отримуємо два дійсні розв'язки рівняння (2.192) вигляду

$$V_{r,1}=U_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\cos\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

$$V_{r,2}=R_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\sin\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

де $U_r\,,R_r$ — деякі поліноми степеня r, а $\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d):=\operatorname{Re}\xi$, $\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d):=\operatorname{Im}\xi$.

В наступній теоремі встановлюється властивість розв'язків вигляду (2.213) рівняння (2.192).

Теорема 2.6.4. *Для розв'язків (2.213) рівняння (2.192) справедливі рівності*

$$\sum_{r+s=n}\int_{\gamma}V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,d\xi_s=0 \qquad \forall\ n=0,1,2,\ldots, \qquad (2.214)$$

де γ *— довільна замкнена жорданова спрямлювана крива у просторі* $\mathbb{R}^d$*, яка гомотопна точці.*

Доведення. Відповідно до аналога теореми Коші 2.2.2, справедлива рівність $\int_\gamma\exp\zeta\,d\zeta=0$. Нехай $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ фіксоване. Враховуючи позначення (2.212), отримуємо рівності

$$\int\limits_{\gamma} \exp\zeta\, d\zeta = \int_{\gamma} \sum_{r=0}^{n} V_r(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, \rho^r \sum_{s=0}^{n} d\xi_s\, \rho^s =$$

$$= \int\limits_{\gamma} \sum_{0 \le r+s \le n} V_r(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, d\xi_s\, \rho^{r+s} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при ρ^{r+s}, отримуємо співвідношення (2.214). Теорему доведено.

Тепер на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ випишемо декілька перших сімейств розв'язків виду (2.204) рівняння (2.194). Для цього у вирази (2.204) підставимо перші коефіцієнти розкладу резольвенти (2.207). Якщо послідовність (2.204) позначити через $\{U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\}_{k=0}^{\infty}$, то перші значення цієї послідовності матимуть наступний вигляд:

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1'(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2'(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!}\, F_2''(\xi),$$

$$U_3 = \xi_3 F_3'(\xi) + \xi_1\xi_2 F_3''(\xi) + \frac{\xi_1^3}{3!}\, F_3'''(\xi),$$

$$U_4 = \xi_4 F_4'(\xi) + \frac{1}{2}(2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2) F_4''(\xi) + \frac{\xi_1^2\xi_2}{2}\, F_4'''(\xi) + \frac{\xi_1^4}{4!}\, F_4^{(4)}(\xi),$$

$$U_5 = \xi_5 F_5'(\xi) + (\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3) F_5''(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3) F_5'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\, \xi_1^3\xi_2 F_5^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^5}{5!}\, F_5^{(5)}(\xi),$$

$$U_6 = \xi_6 F_6'(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4) F_6''(\xi) + \frac{1}{6}(\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4) F_6'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{4!}(4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2) F_6^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^4\xi_2}{4!}\, F_6^{(5)}(\xi) + \frac{\xi_1^6}{6!}\, F_6^{(6)}(\xi),$$

і т. д., де F_m при $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, — довільні голоморфні функції комплексної змінної.

Обчислюючи за рекурентною формулою (2.207) значення A_k, виписуємо нескінченну множину розв'язків рівняння (2.194), причому у кожному розв'язку міститься довільна голоморфна функція.

Зауваження 2.6.24. Порівняємо отримані нами вище розв'язки рівняння (2.194) та розв'язки цього рівняння з теорії Паламодова–Еренпрайса.

Наведемо приклад рівняння вигляду (2.194) і його розв'язків в області, яка не є P-повною для цього рівняння. Тобто ці розв'язки не можуть бути апроксимовані експоненціальними поліномами, які використовуються в теорії Паламодова–Еренпрайса. Розглянемо область $\Omega_\varepsilon := \{(x,y) : x^2 + y^2 > \varepsilon^2, \, \varepsilon > 0\}$. В теоремі 20.2 з монографії [24] стверджується, що для еліптичних операторів P відкрита множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є P-повною тоді і тільки тоді, коли її доповнення не містить компактних компонент. Отже, область Ω_ε не є P-повною для будь-якого двовимірного еліптичного оператора. Розглянемо двовимірний оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в ролі оператора P і наступні аналітичні розв'язки рівняння $\Delta u(x,y) = 0$ в області Ω_ε:

$$u_n(x,y) = \operatorname{Re} \frac{1}{(x+iy)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Оскільки область Ω_ε не є P-повною для оператора Δ, то до розв'язків рівняння $\Delta u(x,y) = 0$ в області Ω_ε теорія Паламодова–Еренпрайса не застосовна.

В той же час, очевидно, що $u_n(x,y) \equiv U_0(x,y)$ при $F(\xi) = 1/\xi^n$, де $\xi = x + iy$. Аналогічні приклади можна побудувати і для двовимірного бігармонічного рівняння $\Delta^2 u(x,y) = 0$.

2.6.4. Приклади

Приклад 2.6.1. ***Розв'язки одного рівняння гідродинаміки.***

Розглянемо наступну систему рівнянь гідродинаміки в лагранжевих координатах

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} = 0, \tag{2.215}$$

$$p(t,x) = a - bV(t,x) - \tau \frac{\partial p(t,x)}{\partial t}, \;\; a, b > 0, \tag{2.216}$$

де $V(t,x)$, $u(t,x)$, $p(t,x)$ — об'єм, швидкість і тиск, відповідно, τ — час релаксації. Рівняння (2.215) є, відповідно, законами збереження маси та імпульсу і мають досить загальний характер. Система рівнянь руху (2.215) замикається рівнянням стану середовища (2.216), яке несе інформацію про конкретну модель гідродинаміки, про славтивість середовища.

Зазначимо, що динамічні рівняння стану (2.216) є частинним випадком моделі Кельвіна – Фойгта [12, с. 31] лінійного вязкопружного середовища і використовується при описі хвильових процесів в грунтах і гірничих породах при малих навантаженнях.

Рівняння стану, подібне рівнянню (2.216), розглядалось також в роботі [65], де вивчались автомодельні розв'язки однієї загальної системи рівнянь гідродинаміки.

Відмітимо, що система рівнянь (2.215), (2.216) при достатній диференційовності функцій V, u, p зводиться до рівняння

$$\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \tag{2.217}$$

где $\alpha := 1/\tau > 0$, $\beta := b/\tau > 0$.

В роботі [35] за допомогою комутативної алгебри, ізоморфної алгебрі подвійних чисел, описані усі поліноміальні та аналітичні розв'язки рівняння (2.217). Зараз ми побудуємо нескінченну множину розв'язків рівняння (2.217) виду $V_n(t,x) = P_n(t,x)e^{at+bx}$, де P_n — поліном степеня n і $a, b \in \mathbb{C}$.

З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^3 + \alpha e_1^2 - \beta e_2^2 = 0. \tag{2.218}$$

Для простоти сприйняття вектори e_1, e_2 вигляду (2.196) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r\, \rho^r, \qquad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r\, \rho^r\,, \qquad k_r\,, m_r \in \mathbb{C}. \tag{2.219}$$

Таким чином, з рівності (2.219) і таблиці множення простору $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ випливають рівності

$$e_1^2 = k_0^2 + k_1^2\rho^2 + k_2^2\rho^4 + \cdots + k_{[n/2]}^2\rho^{2[n/2]} +$$

$$+2\big(k_0k_1\rho + k_0k_2\rho^2 + k_0k_3\rho^3 + \cdots + k_0k_n\rho^n\big) +$$
$$+2\big(k_1k_2\rho^3 + k_1k_3\rho^4 + k_1k_4\rho^5 + \cdots + k_1k_{n-1}\rho^n\big) +$$
$$+2\big(k_2k_3\rho^5 + k_2k_4\rho^6 + k_2k_5\rho^7 + \cdots + k_2k_{n-2}\rho^n\big) + \cdots$$
$$\cdots + 2k_{[(n-1)/2]}k_{[(n-1)/2]+1}\rho^{2[(n-1)/2]+1},$$

де $[k]$ — ціла частина числа k. Позначаючи $e_1^2 := \sum_{r=0}^{\infty} B_r\rho^r$, маємо

$$B_0 = k_0^2\,, \quad B_1 = 2k_0k_1\,, \quad B_2 = k_1^2 + 2k_0k_2\,, \tag{2.220}$$

і в загальному випадку

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = \begin{cases} k_{r/2}^2 + 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ парном,} \\ 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ непарном.} \end{cases} \tag{2.221}$$

Позначаючи $e_2^2 := \sum_{r=0}^{\infty} C_r\rho^r$, очевидно, що коефіцієнти C_r визначаються співвідношеннями

$$C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r). \tag{2.222}$$

Нехай $e_1^3 := \sum_{r=0}^{\infty} D_r\rho^r$. З рівності

$$e_1^3 = e_1e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r\rho^r \sum_{r=0}^{\infty} B_r\rho^r = \sum_{r=0}^{\infty} D_r\rho^r$$

випливають рівності

$$D_0 = k_0^3\,, \quad D_1 = 3k_0^2k_1\,, \quad D_2 = k_0B_2 + k_1B_1 + k_3B_0\,, \tag{2.223}$$

і в загальному випадку

$$D_r = k_0B_r + k_1B_{r-1} + \cdots + k_rB_0\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Беручи до уваги всі приняті позначення, характеристичне рівняння (2.218) рівносильне системі рівнянь

$$D_r + \alpha B_r - \beta C_r = 0\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.224}$$

Відповідно до зауваження 2.6.22, вектор e_1 покладаємо довільними, а вектор e_2 виразимо через e_1 рекурентними формулами виду (2.195). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким чином, із співвідношень (2.221), (2.222), маємо

$$m_r =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2m_0}\left(C_r - m_{r/2}^2 - 2\left(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \ldots + m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}\right)\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ парному,} \\ \frac{1}{2m_0}\left(C_r - 2\left(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \ldots + m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}\right)\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ непарному.} \end{cases}$$

Підставляючи значення C_r з умов (2.224), отримуємо

$$m_r = \begin{cases} \frac{1}{2\beta m_0}\Big(D_r + \alpha B_r - \beta\big(m_{\frac{r}{2}}^2 + 2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + 2m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big) \text{ при } r \text{ парному,} \\ \frac{1}{2\beta m_0}\Big(D_r + \alpha B_r - \beta\big(2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + 2m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}\big)\Big) \text{ при } r \text{ непарному.} \end{cases} \tag{2.225}$$

Використовуючи співвідношення (2.220), (2.223), з рівності (2.224) випишемо початкові значення m_0, m_1:

$$m_0 := \pm\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}, \qquad m_1 := \frac{3k_0^2 k_1 + 2\alpha k_0 k_1}{2\beta m_0}. \tag{2.226}$$

Таким чином, рівності (2.225) і (2.226) дозволяють рекурентною процедурою виписать значення m_r при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0 t + m_0 x = k_0 t \pm x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}},$$

а $\xi_r = k_r t + m_r x$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а m_r визначаються рекурентними формулами (2.225).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість розв'язків виду (2.213). Випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0(t, x) = \exp\left(k_0 t \pm\, x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right),$$

$$V_1(t, x) = \left(tk_1 \pm\, x\frac{3k_0 k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta(k_0 + \alpha)}}\right) \exp\left(k_0 t \pm\, x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right),$$

$$V_2(t, x) = \left[tk_2 \pm\, x\frac{3k_1^2 k_0 + 4\alpha k_1^2 + 20\alpha k_0 k_2 + 12k_0^2 k_2 + 8\alpha^2 k_2}{8\sqrt{\beta}(k_0 + \alpha)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(tk_1 \pm\, x\frac{3k_0 k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta(k_0 + \alpha)}}\right)^2\right] \exp\left(k_0 t \pm\, x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right),$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки, а k_0, k_1, k_2 — довільні комплексні числа.

Збільшуючи n, можемо виписати як завгодно багато розв'язків рівняння (2.217).

Приклад 2.6.2. ***Розв'язки тривимірного рівняння Лапласа.***

Для тривимірного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.227}$$

побудуємо розв'язки виду (2.204). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі трійки векторів e_1, e_2, e_3, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{2.228}$$

Вектори e_1, e_2, e_3 вигляду (2.196) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \rho^r, \quad e_3 = \sum_{r=0}^{\infty} g_r \rho^r, \quad k_r, m_r, g_r \in \mathbb{C}.$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$. Коефіцієнти B_r визначаються рівностями (2.220), (2.221).

Очевидно, що рівняння (2.228) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) + B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) + B_r(g_0, g_1, \ldots, g_r) = 0, \tag{2.229}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots .$$

Відповідно до зауваження 2.6.22, вектори e_1, e_2 покладаємо довільними, а вектор e_3 виразимо через e_1 та e_2 рекурентними формулами виду (2.195). Тобто, k_r , m_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (2.229), з урахуванням (2.220), маємо такі початкові значення:

$$g_0 = \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}, \quad g_1 = \frac{\pm i(k_0 k_1 + m_0 m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}, \tag{2.230}$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (2.221), система (2.229) має такий розв'язок:

$$g_r = \begin{cases} \frac{-1}{2g_0}\Big[k_{r/2}^2 + m_{r/2}^2 + g_{r/2}^2 + 2\big(k_0 k_r + k_1 k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1} k_{\frac{r}{2}+1} \\ + m_0 m_r + m_1 m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1} \\ + g_1 g_{r-1} + g_2 g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r}{2}-1} g_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big] \qquad \text{при } r \text{ парному}, \\ \frac{-1}{g_0}\Big(k_0 k_r + k_1 k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}} k_{\frac{r+1}{2}} \\ + m_0 m_r + m_1 m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}} \\ + g_1 g_{r-1} + g_2 g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r-1}{2}} g_{\frac{r+1}{2}}\Big) \qquad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \tag{2.231}$$

з початковими значеннями (2.230). Зауважимо, що формула (2.231) є формулою виду (2.195) для рівняння (2.227).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y + g_0 z = k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z,$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y + g_r z$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому k_r, m_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а g_r визначаються рекурентними формулами (2.231).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість розв'язків виду (2.204). Зараз випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$U_0 = F_0\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

$$U_1 = \Big(k_1 x + m_1 y \pm \frac{i(k_0 k_1 + m_0 m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\, z\Big) F_1\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

$$U_2 = \Bigg(k_2 x + m_2 y \pm \frac{i}{2\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\Big(k_1^2 + m_1^2 + 2k_0 k_1 + 2m_0 m_1 -$$

$$-\frac{(k_0 k_1 + m_0 m_1)^2}{k_0^2 + m_0^2}\Big)\, z\Bigg) F_2\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_1 x + m_1 y \pm \frac{i(k_0 k_1 + m_0 m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\, z\right)^2 F_2'\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

де k_r, m_r при $r = 0, 1, 2$, — довільні комплексні числа, а F_0, F_1, F_2 — довільні голоморфні функції комплексної змінної.

Приклад 2.6.3. ***Розв'язки хвильового рівняння.***

Маючи розв'язки рівняння (2.227) легко виписати розв'язки хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0. \qquad (2.232)$$

Для рівняння (2.232) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 - \hat{e}_3^2 = 0. \qquad (2.233)$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо трійка векторів* $e_1, e_2, e_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняє рівняння (2.228), то вектори* $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := e_2, \hat{e}_3 := ie_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняють рівняння (2.233) і навпаки.* Тобто, потрібно праві частини рівностей (2.230), (2.231) помножити на комплексну одиницю i. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi =$

$k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2+m_0^2}\,z$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (2.232) матимуть вигляд:

$$W_0 = F_0\left(k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2+m_0^2}\,z\right),$$

$$W_1 = \left(k_1x + m_1y \pm \frac{k_0k_1+m_0m_1}{\sqrt{k_0^2+m_0^2}}\,z\right)F_1\left(k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2+m_0^2}\,z\right),$$

де k_0, m_0, k_1, m_1 — довільні комплексні числа, а F_0, F_1 — довільні аналітичні функції дійсної або комплексної змінної.

Приклад 2.6.4. ***Розв'язки рівняння поперечного коливання пружного стержня.***

У цьому пункті для рівняння поперечного коливання пружного стержня (див., наприклад, [157, с. 940])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{2.234}$$

побудуємо розв'язки виду (2.213). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + a^2e_2^4 = 0. \tag{2.235}$$

Нехай вектори e_1, e_2 мають вигляд (2.219). Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^\infty B_r\rho^r$, $e_2^2 = \sum_{r=0}^\infty C_r\rho^r$. Коефіцієнти B_r визначені рівностями (2.220) та (2.221). Коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r). \tag{2.236}$$

Відповідно до зауваження 2.6.22, вектор e_2 покладемо довільним, а вектор e_1 виразимо через e_2 рекурентними формулами виду (2.195). Для цього рівняння (2.235) перепишемо у вигляді $e_1^2 + (ae_2^2)^2 = 0$, звідки $e_1 = \pm iae_2^2$, що рівносильно

$$k_r = \pm i\,a\,C_r\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.237}$$

Зауважимо, що формула (2.237) є формулою виду (2.195) для рівняння (2.234).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У цьому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y = \pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y,$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому m_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а k_r визначаються рекурентними формулами (2.237).

Таким чином, ми можемо виписати нескінченну кількість розв'язків виду (2.213) для рівняння (2.234). Випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^{\xi} = e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$V_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y \Big) e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2} \right) e^{\xi} =$$

$$= \left[\pm ia(m_1^2 + 2m_0 m_2)x + m_2 y + \frac{1}{2}(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y)^2 \right] e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

де m_0, m_1, m_2 — довільні комплексні числа.

Приклад 2.6.5. ***Розв'язки рівняння*** $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$ **.**

Маючи розв'язки рівняння (2.234), легко виписати розв'язки рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{2.238}$$

Для рівняння (2.238) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 - a^2 \hat{e}_2^4 = 0. \tag{2.239}$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо пара векторів* $e_1, e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняє рівняння (2.235), то вектори* $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняють рівняння (2.239) і навпаки.* Тобто, потрібно праву частину рівності (2.237) помножити на $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi = k_0 x + m_0 y = \pm\, a\, m_0^2\, x + m_0 y$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (2.238) матимуть вигляд:

$$W_0 = e^{\xi} = e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$W_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(\pm 2\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y \Big) e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

де m_0, m_1 — довільні комплексні числа.

Приклад 2.6.6. ***Розв'язки узагальненого бігармонічного рівняння.***

У цьому пункті для рівняння

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2p \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad p \in \mathbb{C} \tag{2.240}$$

побудуємо розв'язки виду (2.204). На послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^4 + 2p\, e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0. \tag{2.241}$$

Нехай вектори e_1, e_2 мають вигляд (2.219). Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^\infty B_r \rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (2.220), (2.221). Покладаючи $e_1^4 = \sum_{r=0}^\infty C_r \rho^r$, коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = B_r(B_0, B_1, \ldots, B_r).$$

Якщо $e_2^2 = \sum_{r=0}^\infty H_r \rho^r$, то коефіцієнти H_r визначаються рівностями

$$H_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) = B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r).$$

Аналогічно, для $e_2^4 = \sum_{r=0}^\infty D_r \rho^r$, коефіцієнти D_r, визначаються співвідношеннями

$$D_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) = H_r(H_0, H_1, \ldots, H_r).$$

Залишилось визначити коефіцієнти R_r із розкладу $e_1^2 e_2^2 = \sum_{r=0}^\infty R_r \rho^r$. Враховуючи правила множення для послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$, маємо

$$R_r = B_0 H_r + B_1 H_{r-1} + \cdots + B_r H_0.$$

Тепер очевидно, що рівняння (2.241) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$D_r + 2pR_r + C_r = 0, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.242}$$

Відповідно до зауваження 2.6.22, вектор e_1 покладемо довільним, а вектор e_2 виразимо через e_1 рекурентними формулами виду (2.195). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (2.242), маємо такі початкові значення:

$$m_0 = \pm k_0 \sqrt{\pm\sqrt{p^2 - 1} - p}\,, \quad m_1 = -\frac{k_0^3 k_1 + p k_0 k_1 m_0^2}{m_0^3 + p k_0^2 m_0}\,,$$

$$m_2 = -\frac{m_0^2(3m_1^2 + pk_1^2 + 2pk_0k_2) + 3k_0^2(k_1^2 + 2k_0k_2 + pm_1^2) + 4pk_0k_1m_0m_1}{2m_0^3 + 2pk_0^2m_0}, \quad (2.243)$$

де серед знаків $+, -$ вибирається будь-який. Зауважимо, що для визначення коефіцієнтів m_r при всіх $r = 3, 4, \ldots$ із рівностей (2.242) щоразу будемо отримувати лінійне рівняння.

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У цьому випадку, $\xi = k_0 x + m_0 y$, $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а m_r — визначаються із рекурентних формул (2.242) з урахуванням (2.243).

Таким чином, ми можемо виписати нескінченну кількість розв'язків виду (2.204). Зокрема, маючи значення m_0, m_1, m_2 можемо виписати перші три розв'язки

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!}\, F_2'(\xi),$$

де F_0, F_1, F_2 — довільні голоморфні функції змінної ξ.

Приклад 2.6.7. ***Розв'язки двовимірного рівняння Гельмгольца.***

У цьому пункті для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda\, u = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.244)$$

побудуємо розв'язки виду (2.213). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + e_2^2 + \lambda = 0. \quad (2.245)$$

Нехай вектори e_1, e_2 мають вигляд (2.219). Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^\infty B_r \rho^r$, $e_2^2 = \sum_{r=0}^\infty C_r \rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (2.220), (2.221), а коефіцієнти C_r визначаються формулою (2.236). Очевидно, що рівняння (2.245) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$k_0^2 + m_0^2 + \lambda = 0,$$

$$B_r(k_0, k_1, \dots, k_r) + B_r(m_0, m_1, \dots, m_r) = 0, \;\; r = 1, 2, \dots . \qquad (2.246)$$

Вектор e_1 покладаємо довільними, а вектор e_2 виразимо через e_1 (2.195). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \dots$. Із системи (2.246) маємо такі початкові значення:

$$m_0 = \pm i\sqrt{k_0^2 + \lambda}\,, \quad m_1 = \frac{\pm i k_0 k_1}{\sqrt{k_0^2 + \lambda}}\,, \quad m_2 = \frac{k_1^2 \lambda}{2m_0^3} - \frac{k_0 k_2}{m_0}\,, \qquad (2.247)$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (2.221), система (2.246) має такий розв'язок:

$$m_r = \begin{cases} \frac{-1}{2m_0}\Big[k_{r/2}^2 + m_{r/2}^2 + 2\big(k_0 k_r + k_1 k_{r-1} + \dots + k_{\frac{r}{2}-1} k_{\frac{r}{2}+1} + \\ + m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \dots + m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } r \text{ парному}, \\ \frac{-1}{m_0}\Big(k_0 k_r + k_1 k_{r-1} + \dots + k_{\frac{r-1}{2}} k_{\frac{r+1}{2}} + m_1 m_{r-1} + \\ + m_2 m_{r-2} + \dots + m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}\Big) \quad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \qquad (2.248)$$

з початковими значеннями (2.247). Зауважимо, що формула (2.248) є формулою виду (2.195) для рівняння (2.244).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \dots$. В цьому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y = k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2 + \lambda},$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \dots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \dots$, а m_r визначаються рекурентними формулами (2.248).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість розв'язків виду (2.213). Випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^{\xi} = e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2 + \lambda}},$$

$$V_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(k_1 x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\,y\Big)e^{k_0x\pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2}\right)e^{\xi} =$$

$$=\left[k_2x + \Big(\frac{k_1^2\lambda}{\sqrt{2m_0^3}} - \frac{k_0k_2}{m_0}\Big)y + \frac{1}{2}\Big(k_1x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\,y\Big)^2\right]e^{k_0x\pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}},$$

де k_0, k_1, k_2 — довільні комплексні числа.

Зауваження 2.6.25. Використовуючи запропонований підхід, отримуємо усі аналітичні розв'язки двовимірного рівняння Лапласа

$$\Delta_2 u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.249}$$

та двовимірного бігармонічного рівняння

$$\Delta_2^2 u(x,y) = 0. \tag{2.250}$$

Зокрема, усі аналітичні розв'язки рівняння (2.249) отримуються у вигляді компоненти U_0, а всі розв'язки у вигляді компонент U_k при $k = 2, 3, \ldots$ будуть підмножиною розв'язків, що отримані у вигляді компоненти U_0. Для рівняння (2.250) загальний розв'язок отримуємо у вигляді суми U_0+U_1. Причому, розв'язок U_0+U_1 буде вточності співпадати з формулою Гурса загального розв'язку рівняння (2.250). А всі інші розв'язки U_k при $k = 3, 4, \ldots$ є підмножиною множини розв'язків U_0+U_1.

Висновки

В розділі 2 досліджено алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, а саме:

1. отримано конструктивний опис моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

2. Доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морера, аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла.

3. Доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла по негладкій поверхні.

4. Встановлено відповідність між моногенною функцією в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній асоціативній алгебрі.

5. Для довільного лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідних зі сталими коефіцієнтами запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків.

РОЗДІЛ 3

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ В НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ З КОМУТАТИВНИМ МНОЖЕННЯМ

У цьому розділі досліджуються властивості моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірних алгебрах і нескінченновимірних просторах з комутативним множенням.

3.1. Опис просторових потенціальних полів за допомогою моногенних функцій в нескінченновимірних просторах

Як відомо, (див., наприклад, [131, с. 43]) у скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій. Для цього потрібно розглядати нескінченновимірні простори. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [147].

3.1.1. Моногенні функції в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$

Розглянемо нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру

$$\mathbb{F} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \right\} \tag{3.1}$$

над полем $\mathbb{R}$ з нормою $\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$ і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення для елементів базису має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \frac{1}{2}\, e_{4n} \quad \forall\, n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m}\Big) \quad \forall\, n > m \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n}\Big) \quad \forall\, m > n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m+1} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,,$$

$$e_{2n} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,.$$

Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів.

Відмітимо, що алгебра $\mathbb{F}$ ізоморфна алгебрі $\mathbf{F}$ абсолютно збіжних тригонометричних рядів Фур'є

$$g(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\, i^k \cos k\tau + b_k\, i^k \sin k\tau\Big)$$

з дійсними коефіцієнтами a_0, a_k, b_k і нормою $\|g\|_{\mathbf{F}} := |a_0| + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(|a_k| + |b_k|\Big)$. При цьому має місце ізоморфізм $e_{2k-1} \leftrightarrow i^{k-1} \cos{(k-1)\tau}\,,$ $e_{2k} \leftrightarrow i^k \sin\, k\tau$ між базисними елементами.

Тепер помістимо алгебру $\mathbb{F}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{F}} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

із топологією покоординатної збіжності.

П. Кетчум [104] розглядав саме цей простір $\widetilde{\mathbb{F}}$, хоча він і не використовував поняття топологічного векторного простору так само, як і поняття диференційовності за Гато.

Відмітимо, що $\widetilde{\mathbb{F}}$ не є алгеброю, оскільки добуток елементів $g_1, g_2 \in \widetilde{\mathbb{F}}$ не завжди визначений. Але для кожного $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \widetilde{\mathbb{F}}$ і $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ можна однозначно визначити добуток

$$g\zeta \equiv \zeta g := x \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k + y\Bigg(-\frac{c_2}{2}\, e_1 + \Big(c_1 - \frac{c_5}{2}\Big)\, e_2 - \frac{c_4}{2}\, e_3 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(c_{2k-1}-c_{2k+3})\,e_{2k}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(c_{2k-2}+c_{2k+2})\,e_{2k+1}\Bigg)+$$

$$+z\left(-\frac{c_3}{2}\,e_1-\frac{c_4}{2}\,e_2+\left(c_1-\frac{c_5}{2}\right)e_3+\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{\infty}(c_{k-2}-c_{k+2})\,e_k\right).$$

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^3$ і $\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$. Розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y, z)\, e_k\,, \tag{3.2}$$

де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ диференційовні в Ω. Тоді Φ є неперервною в Ω_ζ і, крім того, Φ є моногенною функцією в Ω_ζ, якщо $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{F}}$ в наступній рівності

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{3.3}$$

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності для функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ в області Ω_ζ.

Теорема 3.1.1. *Нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ неперервна і функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ в розкладі (3.2) диференційовні в Ω. Для того, щоб функція Φ була моногенною в області Ω_ζ, необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови Коші–Рімана в області Ω_ζ:*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_2, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_3. \tag{3.4}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо функція Φ моногенна в області Ω_ζ, то при $h = e_1$ рівність (3.3) перетворюється на рівність $\Phi'(\zeta) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$. Тепер покладаючи в рівності (3.3) спочатку $h = e_2$, а потім $h = e_3$, отримуємо умови (3.4).

Достатність. Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$, $h := h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3$, де $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ і додатне число ε таке, що $\zeta + \varepsilon h \in \Omega_\zeta$. Тоді при виконанні умов (3.4), з урахуванням диференційовності компонент, справедлива рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} - h\Phi'(\zeta) =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z)\right) e_k -$$

$$-\varepsilon(h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\, e_k\Big)\varepsilon^{-1} =$$

$$= \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) -$$

$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3\Big)e_k = o(\varepsilon), \;\; \varepsilon \to 0.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівність (3.3) в якій $\Phi'(\zeta) = \partial\Phi/\partial x$. Теорему доведено.

В роботі [143] доведено, що система (3.4) може бути подана у наступному еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial U_3}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial U_3}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial x} = -\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial y}\\
&\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{2k-2}}{\partial y} - \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial z}\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2k+1}}{\partial y} = \frac{\partial U_{2k-2}}{\partial x}\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial y} + \frac{\partial U_{2k+1}}{\partial z} = \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial x} \qquad k = 2, 3, \ldots\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Зв'язок між розв'язками системи (3.5) і просторовими потенціальними полями описано в роботі [143], де аналогічна властивість встановлена для розв'язків системи (3.5).

Означення 3.1.1. *Вектор-функція* $\mathbf{V}$ *називається гармонічним* *ветором, якщо* $\mathbf{V}$ *задовольняє систему рівнянь*

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0. \tag{3.6}$$

Наступна теорема є прямим наслідком теореми 1.19, де аналогічна властивість встановлена для розв'язків системи (3.5). [143].

Теорема 3.1.2. *Кожна моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *породжує гармонічний вектор* $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}\,U_2, -\frac{1}{2}\,U_3)$ *в області* Ω.

Відмітимо, що такий же зв'язок між гармонічними векторами і моногенними функціями зі значеннями в тривимірній напівпростій гармонічній алгебрі було отримано І. П. Мельниченком [130, 131].

Наступна теорема є безпосереднім наслідком теореми 1.20 [143].

Теорема 3.1.3. *Для довільної гармонічної в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *функції* $U_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ *існує моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *така, що* U_1 *є її першою компонентою в розкладі (3.2).*

Зокрема, кожна сферична функція є першою компонентою в розкладі (3.2) моногенної функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}$, а саме, $\Phi(\zeta) = a\zeta^n$, де $a \in \mathbb{F}$ (див., наприклад, [143]).

3.1.2. Моногенні функції в ТВП $\widetilde{\mathbb{G}}$

Розглянемо нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру

$$\mathbb{G} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \right\}$$

над полем $\mathbb{R}$ з нормою $\|g\|_{\mathbb{G}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$ і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення базисних елементів має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_{2n+1} e_m = e_{2n+m}, \quad e_{2n} e_{2m} = -e_{2n+2m-3} - e_{2n+2m+1} \tag{3.7}$$

для всіх натуральних n і m.

Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів.

Встановлюючи відповідність між базисиними елементами e_k і тригонометричними функціями: $e_{2n-1} \leftrightarrow i^{n-1}\cos^{n-1}\tau$, $e_{2n} \leftrightarrow i^{n}\sin\tau\cos^{n-1}\tau$, отримаємо модель алгебри $\mathbb{G}$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^3$ і $\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x,y,z) \in \Omega\}$. Будемо розглядати функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{G}$ вигляду (3.2), де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ диференційовні в Ω. Неперервна функція називається моногенною, якщо в рівность (3.3) $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{G}$.

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності функції Φ в області Ω_ζ.

Теорема 3.1.4. *Нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{G}$ неперервна в області Ω_ζ і функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ в розкладі (3.2) диференційовні в Ω. Для того, щоб функція Φ була моногенною в Ω_ζ, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (3.4) і були справедливі наступні співвідношення в Ω:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\right| < \infty, \tag{3.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg|U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1 -$$

$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3\Bigg|\varepsilon^{-1} = 0 \quad \forall\, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо функція Φ моногенна в області Ω_ζ, то при $h = e_1$ рівність (3.3) перетворюється на рівність $\Phi'(\zeta) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ і при цьому виконується співвідношення (3.8). Тепер покладаючи в рівності (3.3) спочатку $h = e_2$, а потім $h = e_3$, отримуємо умови (3.4).

Нарешті, при $h := h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3$, $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$, з урахуванням умов (3.4), маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\Phi(\zeta+\varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} - h\Phi'(\zeta) =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z)\right)e_k -$$

$$-\varepsilon(h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k\Big)\varepsilon^{-1}=$$

$$=\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z)-$$

$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3\Big)e_k. \tag{3.10}$$

Тому наслідком моногенності функції Φ в області Ω_ζ є співвідношення (3.9).

Достатність. Нехай $\zeta:=xe_1+ye_2+ze_3\in\Omega_\zeta$, $h:=h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3$, де $h_1,h_2,h_3\in\mathbb{R}$ і додатне число ε таке, що $\zeta+\varepsilon h\in\Omega_\zeta$. Тоді при виконанні умов (3.4) і співвідношення (3.8) справедлива рівність (3.10), наслідком якої і співвідношення (3.9) є моногенність функції Φ в області Ω_ζ. Теорему доведено.

Зауважимо, що співвідношення (3.8) і (3.9) зумовлені нормою абсолютною збіжності в алгебрі $\mathbb{G}$.

Напевно, неможливо отримати всі гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{G}$. Тому, помістимо алгебру $\mathbb{G}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{G}}:=\left\{g=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke_k:c_k\in\mathbb{R}\right\}$$

з топологією покоординатної збіжності і базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Покладаємо, що базисні елементи множаться за правилом (3.7) для всіх цілих n і m.

М. Рошкулець [169] розглядав простір $\widetilde{\mathbb{G}}$, хоча він і не використовував поняття топологічного векторного простору так само, як і поняття диференційовності за Гато. В роботі [169] доведено, що кожна сферична функція є компонентою розкладу за базисом функції $\lambda\zeta^n$, де $\lambda\in\widetilde{\mathbb{G}}$.

Відмітимо, що $\widetilde{\mathbb{G}}$ не є алгеброю, оскільки добуток елементів $g_1,g_2\in\widetilde{\mathbb{G}}$ не завжди визначений. Хоча, для кожного $g=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_ke_k\in\widetilde{\mathbb{G}}$ і $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3$ можна однозначно визначити добуток

$$g\zeta\equiv\zeta g:=x\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke_k+$$

$$+y\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1}\, e_{2k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{2k-2} + c_{2k+2})\, e_{2k+1}\right) + z \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-2}\, e_k\,.$$

Тепер розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(x,y,z)\; e_k\,, \tag{3.11}$$

де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ диференційовні в Ω. Тоді Φ є неперервною функцією в Ω_ζ і, отже, Φ є моногенною функцією в Ω_ζ, якщо $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ в рівності (3.3).

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ в області Ω_ζ.

Теорема 3.1.5. *Нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ має вигляд (3.11) і функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ диференційовні в Ω. Для того, щоб функція Φ була моногенною в області Ω_ζ, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (3.4) в Ω_ζ.*

Доведення теореми 3.1.5 повністю аналогічне до доведення теореми 3.1.4, але співвідношення вигляду (3.8) і (3.9) не потрібні, оскільки в просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$ не використовується поняття норми.

Запишемо умови (3.4) у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial y} = \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial x}\,,\\ &\frac{\partial U_{2m+1}}{\partial y} = -\frac{\partial U_{2m-2}}{\partial x} - \frac{\partial U_{2m+2}}{\partial x}\,,\\ &\frac{\partial U_{m+2}}{\partial z} = \frac{\partial U_m}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.12}$$

для всіх цілих чисел m.

Очевидно, якщо функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ мають неперервні частинні похідні другого порядку в області Ω і задовольняють умови (3.12), тоді вони задовольняють рівняння (2.227) в Q. Дійсно, у випадку, коли функція (3.11) двічі диференційовна за Гато, вона задовольняє рівність (1.12) в області Ω_ζ.

В наступній теоремі встановлено, що кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ породжує сімейство гармонічних векторів.

Теорема 3.1.6. *Кожна моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *породжує гармонічні вектори* $\mathbf{V} := (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ *в області* Ω *для всіх цілих чисел* m *.*

Доведення. Відмітимо, що система (3.12) може бути записана у наступному еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial x} + \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial y} + \frac{\partial U_{2m}}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_{2m}}{\partial y} - \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2m}}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_{2m+1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{2m+2}}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

для всіх цілих чисел m. Таким чином, вектор $\mathbf{V} := (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ задовольняє рівності (3.6) в Ω. Теорему доведено.

Наступна теорема показує, що всі гармонічні функції пов'язані з моногенними функціями зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Теорема 3.1.7. *Для довільної гармонічної в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *функції* $U_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ *існує моногенна функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *така, що* U_1 *є її першою компонентою в розкладі (3.11).*

Доведення. Спочатку відмітимо, що в області Ω існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_0^0 := (v_2^0, U_1, v_0^0)$. Крім того, для довільного гармонічного в Ω вектора $\mathbf{V}_0 := (v_2, U_1, v_0)$ компоненти v_0, v_2 визначаються з точністю до дійсної і уявної частин функції $f_0(t)$, голоморфної в області $\{t = x + iz : (x,y,z) \in \Omega\}$ комплексної площини, тобто рівності

$$v_0(x,y,z) = v_0^0(x,y,z) + \mathrm{Re}\, f_0(x+iz)\,,$$

$$v_2(x,y,z) = v_2^0(x,y,z) + \mathrm{Im}\, f_0(x+iz)$$

виконуються для всіх $(x,y,z) \in \Omega$. Тоді, з урахуванням теореми 3.1.6, знаходимо функції U_0 і U_2, а саме: $U_0 := v_0$, $U_2 := v_2$.

Тепер покажемо, що умови (3.13) дозволяють визначити функції U_{2m+1}, U_{2m+2}, якщо функція U_{2m} вже визначена для всіх натуральних m. Дійсно, у цьому випадку існує гармонічний вектор $\mathbf{V}^0_{2m} := (v^0_{2m+2}, v^0_{2m+1}, U_{2m})$ в області Ω. Крім того, для довільного гармонічного в Ω вектора $\mathbf{V}_{2m} := (v_{2m+2}, v_{2m+1}, U_{2m})$ компоненти v_{2m+1}, v_{2m+2} визначаються з точністю до дійсної і уявної частин довільної функції $f_{2m}(t)$, голоморфної в області $\{t = x + iy : (x, y, z) \in \Omega\}$ комплексної площини, тобто рівності

$$v_{2m+1}(x, y, z) = v^0_{2m+1}(x, y, z) + \operatorname{Re} f_{2m}(x + iy)\,,$$

$$v_{2m+2}(x, y, z) = v^0_{2m+2}(x, y, z) + \operatorname{Im} f_{2m}(x + iy)$$

виконуються для всіх $(x, y, z) \in \Omega$. Тоді, користуючись теоремою 3.1.6, знайдемо функції U_{2m+1} і U_{2m+2}, а саме: $U_{2m+1} := v_{2m+1}$, $\quad U_{2m+2} := v_{2m+2}$.

Накінець, покажемо також, що умови (3.13) дозволяють визначити функції U_{2m}, U_{2m+1}, якщо функція U_{2m+2} вже визначена для усіх від'ємних цілих чисел m. Дійсно, у цьому випадку існує гармонічний вектор $\mathbf{V}^0_{2m+1} := (U_{2m+2}, v^0_{2m+1}, v^0_{2m})$ в області Ω. Крім того, для довільного гармонічного в Ω вектора $\mathbf{V}_{2m+1} := (U_{2m+2}, v_{2m+1}, v_{2m})$ компоненти v_{2m}, v_{2m+1} визначаються з точністю до дійсної і уявної частин довільної функції $f_{2m+1}(t)$, голоморфної в області $\{t = z + iy : (x, y, z) \in \Omega\}$ комплексної площини, тобто виконуються рівності

$$v_{2m}(x, y, z) = v^0_{2m}(x, y, z) + \operatorname{Im} f_{2m+1}(z + iy)\,,$$

$$v_{2m+1}(x, y, z) = v^0_{2m+1}(x, y, z) + \operatorname{Re} f_{2m+1}(z + iy)$$

для усіх $(x, y, z) \in \Omega$. Тоді, скориставшись теоремою 3.1.6, знайдемо функції U_{2m} і U_{2m+1}, а саме: $U_{2m} := v_{2m}$, $\quad U_{2m+1} := v_{2m+1}$.

Отже, функції U_k, отримані у такий спосіб, задовольняють систему (3.13) і утворюють функцію (3.11), моногенну в Ω_ζ. Теорему доведено.

3.2. Продовження моногенних функцій та просторові потенціали

У цьому підрозділі будемо розглядати моногенні функції зі значеннями у комплексифікаціях $\mathbb{F}\oplus i\mathbb{F}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}\oplus i\widetilde{\mathbb{F}}$. Також розглядаємо моногенні функції зі значеннями у згаданих вище комплексифікованих просторах $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, які визначені в областях чотиривимірного дійсного підпростору $E_4\subset\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або $E_4\subset\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$). Це дає змогу довести аналоги основних інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$. Більше того, встановлюючи зв'язок між моногенними функціями визначеними в областях просторів E_3 та E_4, в теоремі 3.2.8 показано, що кожна моногенна функція $\Phi_0:\Omega_\zeta\to\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ з області $\Omega_\zeta\subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q_\xi\subset E_4$. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [148, 149].

3.2.1. Моногенні і аналітичні функції в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$

Розглянемо гармонічну алгебру $\mathbb{F}$ вигляду (3.1). Тепер розглянемо комплексифікацію $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{F}\oplus i\mathbb{F}\equiv\{a+ib\,:\,a,b\in\mathbb{F}\}$ алгебри $\mathbb{F}$ таку, що норма в $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ визначається рівністю $\|c\|:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|$, де $c=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k$, $c_k\in\mathbb{C}$.

Відмітимо, що алгебра $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ ізоморфна алгебрі $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ абсолютно збіжних тригонометричних рядів Фур'є

$$c(\theta)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\,i^k\cos k\theta+b_k\,i^k\sin k\theta\big)$$

з $c_0,a_k,b_k\in\mathbb{C}$ і нормою $\|c\|_{\mathbf{F}_{\mathbb{C}}}:=|c_0|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|+|b_k|\big)$. У цьому випадку між базисними елементами маємо ізоморфізм $e_{2k-1}\leftrightarrow i^{k-1}\cos{(k-1)\theta}$, $e_{2k}\leftrightarrow i^k\sin\,k\theta$.

Перейдемо до розгляду аналітичних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, заданих на підмножині лінійного многовиду $E_4:=\{\xi=xe_1+s\,ie_1+ye_2+ze_3\,:\,x,s,y,z\in\mathbb{R}\}$. Області $Q\subset\mathbb{R}^4$ поставимо у відповідність область $Q_\xi:=\{\xi=$

$xe_1 + s\, ie_1 + ye_2 + ze_3 : (x,s,y,z) \in Q\}$ в E_4.

Означення 3.2.2. *Функцію $\Psi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ будемо називати аналітичною в області Q_ξ, якщо в деякому околі кожної точки $\xi_0 \in Q_\xi$ її можна подати у вигляді суми збіжного степеневого ряду*

$$\Psi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\xi - \xi_0)^k, \quad c_k \in \mathbb{F}_\mathbb{C}.$$

Зокрема, аналітичні функції можна побудувати у вигляді головного продовження голоморфних функцій комплексної змінної (див. [29]).

Для $\xi \in E_4$ з $y^2 + z^2 \neq 0$, позначимо через $\tau_1 := x + is - i\sqrt{y^2+z^2}$ і $\tau_2 := x + is + i\sqrt{y^2+z^2}$. Нехай $s[\tau_1, \tau_2]$ — відрізок, що з'єднує точки τ_1 і τ_2. Для $t \in \mathbb{C}$: $t \notin s[\tau_1,\tau_2]$, нехай $\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}$ буде неперервною віткою функції $G(t) = \sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}$, аналітичної поза відрізком $s[\tau_1,\tau_2]$, для якої $G(t) > 0$ для довільного $t > x$.

Звідси випливає, що область $D \subset \mathbb{C}$ опукла в напрямку уявної осі. Позначимо через $\mathcal{E} := \{\xi \in E_4 : \tau_1, \tau_2 \in D\}$.

Нехай γ — спрямлювана жорданова крива в $\mathbb{C}$. Для функції g вигляду $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(t)\, e_k$, де $g_k : \gamma \to \mathbb{C}$, визначимо інтеграл вздовж кривої γ рівністю

$$\int_\gamma g(t)dt := \sum_{k=1}^{\infty} e_k \int_\gamma g_k(t)dt \tag{3.14}$$

у випадку, коли ряд з правого боку рівності є елементом алгебри $\mathbb{F}_\mathbb{C}$.

Теорема 3.2.1. *Нехай область $D \subset \mathbb{C}$ опукла в напрямку уявної осі і функція $F : D \to \mathbb{C}$ голоморфна в D. Тоді розклад головного продовження F в області $\mathcal{E}$ за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ має вигляд:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(t)(te_1 - \xi)^{-1}\, dt = e_1 \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}\, dt + \tag{3.15}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left(e_{2k+1} i^k \int_\gamma \frac{F(t)\left(u_2^{-k} + u_1^k\right)}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}\, dt + e_{2k} i^{k-1} \int_\gamma \frac{F(t)\left(u_2^{-k} - u_1^k\right)}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}\, dt\right),$$

де $\xi \in \mathcal{E}$, $u_1 := \frac{(t-x-is)-\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}{y+iz}$, $u_2 := \frac{(t-x-is)+\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}{y+iz}$, *і* γ *— довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в* D, *яка охоплює відрізок* $s[\tau_1,\tau_2]$.

Доведення. Для визначення коефіцієнтів розкладу елемента $(te_1-\xi)^{-1}$ за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ скористаємося ізоморфізмом алгебр $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ і представленням інтегралів [98, с. 353] $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta}{a+b\cos m\theta+c\sin m\theta}\,d\theta$, $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin m\theta}{a+b\cos m\theta+c\sin m\theta}\,d\theta$, які дозволяють записати коефіцієнти Фур'є функції $(t-x-si-yi\sin\theta-zi\cos\theta)^{-1}$. В результаті отримаємо рівність

$$(te_1-\xi)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}}\Bigg(e_1+\sum_{k=1}^{\infty} i^k\left(u_2^{-k}+u_1^k\right)e_{2k+1}+ \tag{3.16}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} i^{k-1}\left(u_2^{-k}-u_1^k\right)e_{2k}\Bigg) \qquad \forall\, t\in\mathbb{C}:\; t\notin s[\tau_1,\tau_2],$$

де відрізок $s[\tau_1,\tau_2]$ є спектром елемента ξ.

Тепер рівність (3.15) випливає безпосередньо з розкладу (3.16). Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду моногенних функцій.

Означення 3.2.3. *Неперервну функцію* $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ *будемо називати моногенною в області* $Q_\xi \subset E_4$, *якщо* Φ *диференційовна за Гато в кожній точці області* Q_ξ, *тобто, якщо для кожного* $\xi \in Q_\xi$ *існує елемент* $\Phi'(\xi) \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ *такий, що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\Phi(\xi+\varepsilon h)-\Phi(\xi)\right)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\xi) \qquad \forall\, h\in E_4\,. \tag{3.17}$$

Очевидно, що аналітична функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ є моногенною в області Q_ξ і її похідна $\Phi'(\xi)$ також моногенна в Q_ξ.

Нижче встановлено достатні умови аналітичності моногенної функції $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ в області $Q_\xi \subset E_4$.

Відмітимо, що у випадку, коли моногенна функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ має неперервні похідні Гато Φ', Φ'', вона задовольняє рівність $\Delta_3\Phi(\xi) \equiv 0$, оскільки

$$\Delta_3\Phi(\xi) \equiv \Phi''(\xi)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \equiv 0\,.$$

Отже, для кожної компоненти $U_k : Q \to \mathbb{C}$ розкладу

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,s,y,z)\ e_k \tag{3.18}$$

функції Φ, функції $\operatorname{Re} U_k(x,s,y,z)$, $\operatorname{Im} U_k(x,s,y,z)$ є просторовими гармонічними функціями для кожного фіксованого s.

Будемо казати, що функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ розкладу (3.18) є $\mathbb{R}$-*диференційовними* в Q, якщо для усіх точок $(x,s,y,z) \in Q$ справедливі наступні співвідношення:

$$U_k(x+\Delta x, s+\Delta s, y+\Delta y, z+\Delta z) - U_k(x,s,y,z) =$$
$$= \frac{\partial U_k}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial U_k}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\Delta z + o(\|\Delta\xi\|)\,,$$
$$\Delta\xi := e_1\Delta x + ie_1\Delta s + e_2\Delta y + e_3\Delta z \to 0.$$

Наступна теорема доводиться повністю аналогічно до доведення теореми 3.1.4.

Теорема 3.2.2. *Нехай функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ неперервна в області $Q_\xi \subset E_4$ і функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ з розкладу (3.18) є $\mathbb{R}$-диференційовними в Q. Для того, щоб функція Φ була моногенною в області Q_ξ, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, i\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, e_2\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, e_3 \tag{3.19}$$

в Q_ξ і в Q виконувались співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\right| < \infty, \tag{3.20}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\ \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg|\ U_k(x+\varepsilon h_1, s+\varepsilon h_2, y+\varepsilon h_3, r+\varepsilon h_4) - U_k(x,s,y,r) -$$

$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\,\varepsilon h_1-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial s}\,\varepsilon h_2-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial y}\,\varepsilon h_3-$$

$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial r}\,\varepsilon h_4\,\Bigg|\,\varepsilon^{-1}=0\qquad\forall\,h_1\,,h_2\,,h_3\,,h_4\in\mathbb{R}\,. \tag{3.21}$$

Відмітимо, що перші умови (3.19) означають, що кожна функція U_k з рівності (3.18) голоморфна за змінною $x+is$ для кожної фіксованої пари (y,z).

3.2.2. Інтегральні теореми для моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$

У випадку, коли Γ є жордановою спрямлюваною кривою в $\mathbb{R}^4$, будемо казати, що й конгруента їй крива $\Gamma_\xi\subset E_4$ також жорданова і спрямлювана. Для неперервної функції $\Phi:\Gamma_\xi\to\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ вигляду (3.18), де $(x,s,y,r)\in\Gamma$ і $U_k:\Gamma\to\mathbb{C}$, визначимо інтеграл вздовж кривої Γ_ξ з $d\xi:=e_1\,dx+ie_1\,ds+e_2\,dy+e_3\,dz$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma_\xi}\Phi(\xi)d\xi:=\sum_{k=1}^{\infty}e_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,s,y,z)dx+i\sum_{k=1}^{\infty}e_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,s,y,z)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}e_2e_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,s,y,z)dy+\sum_{k=1}^{\infty}e_3e_k\int\limits_{\Gamma}U_k(x,s,y,z)dz \tag{3.22}$$

у випадку, коли ряди в правій частині рівності є елементами алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.2.3. *Нехай функція $\Phi:Q_\xi\to\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ моногенна в області Q_ξ і функції $U_k:Q\to\mathbb{C}$ з розкладу (3.18) мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді для кожної замкненої спрямлюваної кривої $\Gamma_\xi\subset Q_\xi$, гомотопної точці в Q_ξ, справедлива рівність*

$$\int\limits_{\Gamma_\xi}\Phi(\xi)d\xi=0\,. \tag{3.23}$$

Доведення. Користуючись формулою Стокса і рівностями (3.19), отримаємо рівність

$$\int\limits_{\partial\triangle_\xi}\Phi(\xi)d\xi=0 \tag{3.24}$$

для межі $\partial\triangle_\xi$ кожного трикутника $\triangle_\xi$ такого, що $\overline{\triangle_\xi} \subset Q_\xi$. Тепер можемо завершити доведення подібно до доведення теореми 3.2 [47]. Теорему доведено.

Наступна теорема є аналогом теореми Морера для функцій $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$.

Теорема 3.2.4. *Якщо функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ неперервна в області Q_ξ і задовольняє рівність (3.24) для кожного трикутника $\triangle_\xi$ такого, що $\overline{\triangle_\xi} \subset Q_\xi$, тоді функція Φ моногенна в області Q_ξ .*

Доведення. Зафіксуємо в області Q_ξ деяку точку a . Розглянемо функцію

$$\Psi(\xi) := \int\limits_{S[a,\xi]} d\tau\, \Phi(\tau)$$

і покажемо, що вона моногенна в Q_ξ , причому

$$\Psi'(\xi) = \Phi(\xi). \tag{3.25}$$

Нехай $h \in E_4$ і $\varepsilon > 0$ таке, що трикутник $\triangle_\xi$ з вершинами $a, \xi, \xi + \varepsilon h$ міститься в області Q_ξ .

Розглянемо різницю

$$\Psi(\xi + \varepsilon h) - \Psi(\xi) = \int\limits_{S[a,\xi+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) - \int\limits_{S[a,\xi]} d\tau\, \Phi(\tau) =$$

$$= \int\limits_{S[a,\xi+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{S[\xi,a]} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{S[\xi+\varepsilon h,\xi]} d\tau\, \Phi(\tau) - \int\limits_{S[\xi+\varepsilon h,\xi]} d\tau\, \Phi(\tau) =$$

$$= \int\limits_{\partial\triangle_\xi} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) = \int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau). \tag{3.26}$$

Тепер, враховуючи рівність (3.26) і неперервність функції Φ, отримуємо співвідношення

$$\left\| \frac{\Psi(\xi + \varepsilon h) - \Psi(\xi)}{\varepsilon} - h\Phi(\xi) \right\| = \left\| \frac{\int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau)}{\varepsilon} - h\Phi(\xi) \right\| =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Bigg\| \int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} d\tau\Big(\Phi(\tau)-\Phi(\xi)\Big)\Bigg\| \le \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} \|\Phi(\tau)-\Phi(\xi)\|\|d\tau\| \le$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon}\sup_{\tau,\xi\in Q_\xi,\,\|\tau-\xi\|\le\varepsilon} \|\Phi(\tau)-\Phi(\xi)\| \int\limits_{S[\xi,\xi+\varepsilon h]} \|d\tau\| \le$$

$$\le c\,\|h\| \sup_{\tau,\xi\in Q_\xi,\,\|\tau-\xi\|\le\varepsilon} \|\Phi(\tau)-\Phi(\xi)\| \to 0, \qquad \varepsilon\to 0. \tag{3.27}$$

Із співвідношення (3.27) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{\Psi(\xi+\varepsilon h)-\Psi(\xi)}{\varepsilon} = h\Phi(\xi),$$

наслідком якої є рівність (3.25).

Оскільки в довільному околі точки ξ функція Φ є похідною Гато функції $\Psi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, то функція Φ є моногенною в області Q_ξ. Теорему доведено.

Нехай $\tau := we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3$, де $w\in\mathbb{C}$ і $\hat{y}, \hat{z}\in\mathbb{R}$. Узагальнюючи розклад резольвенти (3.16), отримаємо

$$(\tau-\xi)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(w-\tau_1)(w-\tau_2)}}\Bigg(e_1 + \sum_{k=1}^{\infty} i^k\left(u_2^{-k}+u_1^k\right)e_{2k+1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} i^{k-1}\left(u_2^{-k}-u_1^k\right)e_{2k}\Bigg), \quad w\notin s[\tau_1,\tau_2], \tag{3.28}$$

де

$$\tau_1 := x+is-i\sqrt{(y-\hat{y})^2+(z-\hat{z})^2}, \quad \tau_2 := x+is+i\sqrt{(y-\hat{y})^2+(z-\hat{z})^2},$$

$$u_1 := \frac{(w-x-is)-\sqrt{(w-\tau_1)(w-\tau_2)}}{(y-\hat{y})+i(z-\hat{z})},$$

$$u_2 := \frac{(w-x-is)+\sqrt{(w-\tau_1)(w-\tau_2)}}{(y-\hat{y})+i(z-\hat{z})},$$

$s[\tau_1,\tau_2]$ — відрізок, що з'єднує точки τ_1, τ_2, і $\sqrt{(w-\tau_1)(w-\tau_2)}$ така неперервна вітка функції

$$G(w) = \sqrt{(w-\tau_1)(w-\tau_2)},$$

аналітичної поза відрізком $s[\tau_1,\tau_2]$, для якої $G(w)>0$ при довільних $w>x$. Необхідно покласти $u_1^k=0$ і $u_2^{-k}=0$ по неперервності в рівності (3.28) для тих $w\notin s[\tau_1,\tau_2]$ для яких $\hat{y}=y$ і $\hat{z}=z$.

Отже, для кожного ξ елемент $\big(\tau-\xi\big)^{-1}$ існує при всіх

$$\tau\notin S(\xi):=\Big\{\tau=we_1+\hat{y}e_2+\hat{z}e_3:$$

$$\operatorname{Re}w=x,\ |\operatorname{Im}w-s|\le\sqrt{(y-\hat{y})^2+(z-\hat{z})^2}\Big\}.$$

Наступна теорема є аналогом інтегральної формули Коші.

Теорема 3.2.5. *Нехай область $Q\subset\mathbb{R}^4$ опукла в напрямку осей Oy, Oz. Крім того, нехай функція $\Phi:Q_\xi\to\mathbb{F}_\mathbb{C}$ моногенна в області Q_ξ і функції $U_k:Q\to\mathbb{C}$ з розкладу (3.18) мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді для кожної точки $\xi\in Q_\xi$ справедлива рівність:*

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\xi}\Phi(\tau)\big(\tau-\xi\big)^{-1}d\tau\,, \tag{3.29}$$

де Γ_ξ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Q_ξ, яка один раз охоплює множину $S(\xi)$ і гомотопна колу $\{\tau=we_1+\hat{y}e_2+\hat{z}e_3:|w-x-is|=R,\,\hat{y}=y,\hat{z}=z\}$, яке повністю міститься в Ω_ξ.

Доведення. Оскільки Γ_ξ гомотопна колу $C_\tau(\xi,\varepsilon):=\{\tau=we_1+\hat{y}e_2+\hat{z}e_3:|w-x-is|=R,\,\hat{y}=y,\hat{z}=z\}$ і охоплює множину $S(\xi)$, то з теореми 3.2.3 випливає рівність

$$\int\limits_{\Gamma_\xi}\Phi(\tau)\,(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau=\int\limits_{C_\tau(\xi,\varepsilon)}\Phi(\tau)\,(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau. \tag{3.30}$$

На колі $C_\tau(\xi,\varepsilon)$ справедлива рівність

$$(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau=\big(w-(x+is)\big)^{-1}dw.$$

Зауважимо, що на колі інтегрування $C_\tau(\xi,\varepsilon)$ $\hat{y}$, $\hat{z}$ є сталими, тому функція $\Phi(\tau)$ залежить лише від комплексної змінної w. Крім того, з умов моногенності (3.19) випливає, що функція Φ є голоморфною функцією комплексної змінної

w. Тоді, використовуючи інтегральну формулу Коші для голоморфних функцій комплексної змінної, з рівності (3.30) отримуємо рівність

$$\int\limits_{\Gamma_\xi} \Phi(\tau)\,(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau = \int\limits_{C_\tau(\xi,\varepsilon)} \frac{\Phi(w,\hat{y},\hat{z})\,dw}{w-(x+is)} = 2\pi i\,\Phi(x+is,\hat{y},\hat{z}) = 2\pi i\,\Phi(\xi).$$

Теорему доведено.

Зауваження 3.2.26. Користуючись формулою (3.29), отримаємо розклад моногенної функції $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ в ряд Тейлора (див., наприклад, [30, с. 107]) у випадку, коли виконуються умови теореми 3.2.5. Отже, у цьому випадку $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ є аналітичною функцією.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.2.6. *Нехай функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ неперервна в області Q_ξ і функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ з розкладу (3.18) мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді функція Φ моногенна в Q_ξ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *виконуються умови (3.19) в Q_ξ і співвідношення (3.20), (3.21) в Q;*

(II) *функція Φ задовольняє рівність (3.24) для кожного трикутника $\triangle_\xi$ такого, що $\overline{\triangle_\xi} \subset Q_\xi$;*

(III) *функція Φ аналітична в області Q_ξ.*

Доведення. Еквівалентність умови (I) і моногенність функції $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ доведена в теоремі 3.2.2. Еквівалентність умови (II) і моногенність функції Φ випливає з теорем 3.2.3, 3.2.4. Для доведення еквівалентності моногенності і аналітичності, зазначимо, що із зауваження 3.2.26 випливає розклад моногенної функції у степеневий ряд

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\xi-\xi_0)^n. \qquad (3.31)$$

З іншого боку, ряд (3.31) визначає моногенну функцію в області його збіжності. Теорему доведено.

3.2.3. Моногенні функції в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ та їх зв'язок з просторовими потенціалами

Помістимо алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}} := \Big\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{C} \Big\}$$

з топологією покоординатної збіжності. Відмітимо, що $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ не є алгеброю, оскільки добуток елементів $g_1, g_2 \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ не завжди визначений. В той же час, використовуючи таблицю множення базисних елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, легко визначити добуток $hg = gh$ для довільних $g \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ і $h \in E_4$.

Розглянемо моногенні функції, визначені в областях лінійного многовиду $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ або E_4.

Означення 3.2.4. *Неперервна функція $\Phi : \mathcal{Q} \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ називається моногенною в області $\mathcal{Q} \subset E_3$ (або $\mathcal{Q} \subset E_4$), якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці області $\mathcal{Q}$, тобто, якщо для кожного $\zeta \in \mathcal{Q}$ існує елемент $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ такий, що*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \tag{3.32}$$

для всіх $h \in E_3$ (або $h \in E_4$, відповідно).

$\Phi'(\zeta)$ будемо називати *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Очевидно, що функція $\Psi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, аналітична в області $Q_\xi \subset E_4$, є моногенною в Q_ξ, і її похідна $\Psi'(\xi)$ також є моногенною в Q_ξ.

Підкреслимо, що у випадку коли моногенна функція $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ має неперервні похідні Гато Φ', Φ'', вона задовольняє тотожність $\Delta_3\Phi(\xi) \equiv 0$, оскільки

$$\Delta_3\Phi(\xi) \equiv \Phi''(\xi)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \equiv 0\,. \tag{3.33}$$

Отже, для кожної компоненти $U_k : Q \to \mathbb{C}$ розкладу

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, s, y, z)\ e_k \tag{3.34}$$

функції Φ, функції $\operatorname{Re} U_k(x,s,y,z)$, $\operatorname{Im} U_k(x,s,y,z)$ є просторовими гармонічними функціями для кожного фіксованого s.

Далі розглянемо функції $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$, для яких функції U_k в розкладі (3.34) є $\mathbb{R}$-диференційовними в Q. Тоді очевидно, що такі функції Φ неперервні в $Q_{\tilde{\zeta}}$.

Наступна теорема доводиться повністю аналогічно до доведення теореми 3.1.1.

Теорема 3.2.7. *Нехай в розкладі (3.34) функції $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$, визначеної в області $Q_\xi \subset E_4$, функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в Q. Для того, щоб функція Φ була моногенною в області Q_ξ, необхідно і достатньо, щоб в області Q_ξ виконувались аналоги умов Коші–Рімана*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, i\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3\,. \tag{3.35}$$

Відмітимо, що перша з умов (3.35) означає, що кожна функція U_k з рівності (3.34) є голоморфною за змінною $x+is$ для кожної фіксованої пари (y,z).

В теоремі 3.1.1 встановлено, що необхідні і достатні умови моногенності функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}$ в області Ω_ζ містять лише другу і третю з умов (3.35), які можуть бути записані у еквівалентній формі (3.5).

Покажемо, що довільна моногенна функція $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ з області $\Omega_\zeta \subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q_\xi \subset E_4$. Для простоти розглянемо випадок, коли Ω_ζ є кулею з центром в початку координат.

Теорема 3.2.8. *Нехай $\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3 : x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ куля радіуса R в E_3 і $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ моногенна функція в Ω_ζ. Тоді існує єдина моногенна функція $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ в області $Q_\xi := \{\xi = xe_1 + sie_1 + ye_2 + ze_3 \in E_4 : x^2 + s^2 + y^2 + z^2 + 2|s|\sqrt{y^2+z^2} < R^2\}$ така, що $\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta)$ для усіх $\zeta \in \Omega_\zeta$.*

Доведення. Розглянемо розклад функції $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ за базисом

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(u_k(x,y,z) + iv_k(x,y,z)\big)\, e_k\,, \tag{3.36}$$

де $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $v_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — просторові гармонічні функції.

За теоремою D з роботи Січяка [193] для кожного $k = 1, 2, \ldots$ існують функції $\tilde{u}_k(x+is, y, z)$, $\tilde{v}_k(x+is, y, z)$, визначені в області $\{(x+is, y, z) : (x+is)e_1 + ye_2 + ze_3 \in Q_\xi\}$ і голоморфні за змінною $x+is$ для кожної фіксованої пари (y, z) такі, що рівності $\tilde{u}_k(x,y,z) = u_k(x,y,z)$, $\tilde{v}_k(x,y,z) = v_k(x,y,z)$ виконуються для всіх $(x,y,z) \in \Omega$. За теоремою єдиності для голоморфних функцій $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ — єдині.

Позначимо $U_k(x,s,y,z) := \tilde{u}_k(x+is,y,z) + i\tilde{v}_k(x+is,y,z)$ і розглянемо функцію (3.34). За побудовою рівність $\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta)$ виконується для всіх $\zeta \in \Omega_\zeta$, і функція (3.34) задовольняє першу з умов (3.35) в Q_ξ , оскільки кожна функція U_k голоморфна за змінною $x+is$ для кожної фіксованої пари (y,z) .

Для доведення того, що функція (3.34) задовольняє другу і третю з умов (3.35) в Q_ξ , відзначимо, що рівності (3.5), які є еквівалентною формою цих умов, виконуються в усіх точках $(x,0,y,z) \in Q_\xi$, оскільки функція Φ_0 моногенна в області Ω_ζ . Крім того, з урахуванням теореми єдиності для голоморфних функцій і того, що ліва і права частини рівностей (3.5) є голоморфними функціями змінної $x+is$ для кожної фіксованої пари (y,z) , рівності (3.5) виконуються також в усіх точках $(x,s,y,z) \in Q_\xi$.

Отже, функція (3.34) задовольняє умови (3.35) в області Q_ξ . За теоремою 3.2.7 ця функція є моногенною в Q_ξ . Теорему доведено.

Теорема 3.2.8 дає можливість легко отримати розклад (3.34) продовження $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ у випадку, коли розклад (3.36) початкової моногенної функції $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ відомий в явному вигляді.

Розглянемо деякі розклади елементарних аналітичних функцій змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3$ за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. З урахуванням ізоморфізму алгебр $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ і $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ побудова подібних розкладів зводиться до визначення відповідних коефіцієнтів Фур'є. У такий спосіб в роботах [131, 143] розклади степеневої функції ζ^n та експоненціальної функції e^ζ отримано відповідно через поліноми

Лагранжа та функції Беселя.

Для прикладу розглянемо також при $x > 0$, $y + iz \neq 0$ функцію

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big(e_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \left(w_2^{-k} + w_1^k \right) e_{2k+1} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^{k-1} \left(w_2^{-k} - w_1^k \right) e_{2k} \Big),$$

де $w_1 := \frac{x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y+iz}$, $\quad w_2 := \frac{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y+iz}$, і функцію

$$\operatorname{Ln} \zeta = \Big(\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x}{2} + 2m\pi i \Big) e_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k} \left(w_2^{-k} + w_1^k \right) e_{2k+1} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^{k-1}}{k} \left(w_2^{-k} - w_1^k \right) e_{2k} \,,$$

де m — ціле число. Щоб отримати розклад продовження функції ξ^{-1} і $\operatorname{Ln} \xi$ для $\xi = xe_1 + sie_1 + ye_2 + ze_3 \in E_4$, $x > 0$, $y + iz \neq 0$, ми маємо підставити $x + is$ замість x у розкладах функцій ζ^{-1} і $\operatorname{Ln} \zeta$, відповідно.

Встановимо зв'язок продовження моногенних функцій з просторовими потенціалами. Для цього, окрім рівняння Лапласа (2.227), будемо розглядати також осесиметричні потенціальні поля. Якщо просторове потенціальне поле симетричне відносно осі Ox, то його потенціал $u(x, y, z)$ також симетричний відносно осі Ox, тобто $u(x, y, z) = \varphi(x, r) = \varphi(x, -r)$, де $r := \sqrt{y^2 + z^2}$. Для функції φ рівняння (2.227) набуває вигляду

$$r \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \varphi(x, r) + \frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial r} = 0 \,. \tag{3.37}$$

Відомо, що продовження гармонічних і аналітичних функцій відіграють важливу роль в різних питаннях аналізу та застосуваннях (див., наприклад, [29, 42, 43, 80, 113, 114, 131, 193]).

Опишемо властивості деяких продовжень просторових гармонічних функцій.

Теорема 3.2.9. *Для кожної функції* $u(x, y, z)$, *гармонічної в кулі* $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ *радіуса* R, *існує функція* $U(x, s, y, z)$ *в* *області* $Q := \{(x,s,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x^2+s^2+y^2+z^2+2|s|\sqrt{y^2+z^2} < R^2\}$ *з наступними властивостями:*

1) $U(x,0,y,z) = u(x,y,z)$ *для всіх* $(x,y,z) \in \Omega$;

2) $U(x,s,y,z)$ *голоморфна за змінною* $x+is$ *для кожної фіксованої пари* (y,z);

3) $\Delta_3 U(x,s,y,z) = 0$ *при всіх* $(x,s,y,z) \in Q$ *для довільного фіксованого* s.

Доведення. З урахуванням теореми 3.1.3 , існує моногенна функція (3.36) в Ω_ζ, для якої $u_1 = u$ і всі $v_k \equiv 0$. Нехай Φ така ж функція, як в теоремі 3.2.8. Тоді $U := U_1$ є першою компонентою розкладу (3.34). В теоремі 3.2.8 доведено, що U має властивості 1) і 2). І накінець, властивість 3) випливає з (3.33). Теорему доведено.

Теорема 3.2.10. *Для кожної функції* $u(x,y,z)$, *гармонічної в кулі* $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ *радіуса* R, *існує функція* $G(x,r,y,z)$ *в області* $Q := \{(x,r,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x^2+r^2+y^2+z^2+2|r|\sqrt{y^2+z^2} < R^2\}$ *з наступними властивостями:*

1) $G(x,0,y,z) = u(x,y,z)$ *при всіх* $(x,y,z) \in \Omega$;

2) $\Delta_3 G(x,r,y,z) = 0$ *при всіх* $(x,r,y,z) \in Q$ *для довільного фіксованого* r;

3) *функція* $G(x,r,y,z)$ *задовольняє рівність (3.37) для кожної фіксованої пари* (y,z).

Більше того,

$$G(x,r,y,z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{F(t,y,z)}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}}\, dt\,, \tag{3.38}$$

де $F(x+is,y,z) = U(x,s,y,z)$ *і* U *така ж функція, як в теоремі 3.2.9, і* γ *— довільна замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області* $\{x+is \in \mathbb{C} : (x,s,y,z) \in Q\}$ *і охоплює відрізок* $s[x-ir, x+ir]$.

Доведення. В роботі [131, с. 60] доведено, що функція (3.38) має властивості 1) і 3). Крім того, виконується наступна рівність (див. [131, с. 67]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t,y,z)}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-|r|}^{|r|}\frac{U(x,s,y,z)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds\,.$$

Властивість 2) випливає з такої ж властивості функції U. Теорему доведено.

Функція (3.38) має зв'язок з функцією (3.15) подібно до того, як розв'язки рівняння (3.37) мають зв'язок з головними продовженнями аналітичних функцій комплексної змінної (див. [131, 143]), але це питання тут не розглядається.

Відомо, що кожна просторова гармонічна функція може бути подана у вигляді $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+iy\sin\theta+iz\cos\theta,\theta)\,d\theta$, де функція g допускає диференціювання за змінними x,y,z під знаком інтеграла (див., наприклад, [213]).

Цей результат можна уточнити в певному сенсі з використанням моногенних функцій зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathbb{C}}$, який ізоморфний простору $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ і містить алгебру $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$.

Для області $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, позначимо через $\mathbf{\Omega}_\zeta:=\{\zeta=x+iy\sin\theta+iz\cos\theta:(x,y,z)\in\Omega\}\subset\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.2.11. *Для кожної функції $u(x,y,z)$, гармонічної в однозв'язній області $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, існує моногенна функція $\Phi_0:\mathbf{\Omega}_\zeta\to\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathbb{C}}$ така, що $u_1=u$, всі $v_k\equiv 0$ в розкладі (3.36) і*

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_0(x+iy\sin\theta+iz\cos\theta)\,d\theta\,,$$

де інтеграл розуміється так, як у означенні (3.14).

Доведення. З урахуванням теореми 3.1.3 , існує моногенна функція (3.36) в $\mathbf{\Omega}_\zeta$, для якої $u_1=u$ і всі $v_k\equiv 0$, тобто

$$\Phi_0(x+iy\sin\theta+iz\cos\theta)=u(x,y,z)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(x,y,z)\,i^k\sin\,k\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k+1}(x,y,z)\,i^k\cos\,k\theta\,,$$

де ряди формальні, тобто можуть бути розбіжними.

За означенням (3.14), маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_0(x+iy\sin\theta+iz\cos\theta)\,d\theta=\frac{u(x,y,z)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_{2k}(x,y,z)}{2\pi}\,i^k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\,k\theta\,d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_{2k+1}(x,y,z)}{2\pi}\,i^k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\,k\theta\,d\theta=u(x,y,z)\,.$$

Теорему доведено.

3.2.4. Інтегральні теореми для моногенних функцій в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$

Для неперервної функції $\Phi:\Gamma_\xi\to\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ вигляду (3.34), визначимо інтеграл вздовж жорданової спрямлюваної кривої Γ_ξ рівністю (3.22) у випадку, коли ряди в правій частині рівності є елементами простору $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$.

В наступній теоремі, для простоти, припустимо, що крива Γ_ξ є кусково-гладким краєм деякої кусково-гладкої поверхні. У цьому випадку, наступне твердження є результатом формули Стокса та рівностей (3.19).

Теорема 3.2.12. *Нехай $\Phi:Q_\xi\to\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ моногенна функція в області Q_ξ і функції $U_k:Q\to\mathbb{C}$ з розкладу (3.34) мають неперервні частинні похідні в Q. Нехай також Σ — кусково-гладка поверхня в Q з кусково-гладким краєм Γ. Тоді виконується рівність (3.23).*

Визначимо добуток $gh\equiv hg$ для кожного $g=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k\in\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ і $h=\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_ke_k\in\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ у випадку, коли послідовність $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена:

$$gh\equiv hg:=\left(c_1t_1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{[k/2]}c_kt_k\right)e_1+$$

$$+\left(c_2t_1+\left(c_1+\frac{c_5}{2}\right)t_2+\frac{-c_4}{2}\,t_3+\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(c_{k-2+(-1)^k}+c_{k+2+(-1)^k}\right)t_k\right)e_2+$$

$$+\left(c_3 t_1 + \frac{-c_4}{2}\,t_2 + \left(c_1 - \frac{c_5}{2}\right)t_3 + \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\Big(c_{k-2} - c_{k+2}\Big)t_k\right)e_3 +$$

$$+\sum_{m=4}^{\infty}\Upsilon_m\, e_m\,, \tag{3.39}$$

де константи Υ_m визначені співвідношеннями у наступних 4 випадках:

1) якщо m має вигляд $m = 4r$ з натуральним r, то

$$\Upsilon_m = c_m t_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m-1}\left(c_{m-k+1} + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}c_{m+k+(-1)^k}\right)t_k +$$
$$+\left(c_1 - \frac{c_{2m+1}}{2}\right)t_m + \frac{c_{2m}}{2}\,t_{m+1} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+2}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\left(c_{k-m+(-1)^k} - c_{k+m+(-1)^k}\right)t_k\,;$$

2) якщо m має вигляд $m = 4r - 1$ з натуральним r, то

$$\Upsilon_m = c_m t_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m-2}\left((-1)^{k-1}c_{m-k-(-1)^k} + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}c_{m+k-1}\right)t_k -$$
$$-\frac{c_{2m-2}}{2}\,t_{m-1} + \left(c_1 - \frac{c_{2m-1}}{2}\right)t_m +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\left(c_{k-m+1} - c_{k+m-1}\right)t_k\,;$$

3) якщо m має вигляд $m = 4r - 2$ з натуральним r, то

$$\Upsilon_m = c_m t_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m-1}\left(c_{m-k+1} + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}c_{m+k+(-1)^k}\right)t_k +$$
$$+\left(c_1 + \frac{c_{2m+1}}{2}\right)t_m - \frac{c_{2m}}{2}\,t_{m+1} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+2}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(c_{k-m+(-1)^k} + c_{k+m+(-1)^k}\right)t_k\,;$$

4) якщо m має вигляд $m = 4r - 3$ з натуральним r, то

$$\Upsilon_m = c_m t_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m-2}\left((-1)^{k-1}c_{m-k-(-1)^k} + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}c_{m+k-1}\right)t_k +$$

$$+\frac{c_{2m-2}}{2}\,t_{m-1}+\left(c_1+\frac{c_{2m-1}}{2}\right)t_m+\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(c_{k-m+1}+c_{k+m-1}\right)t_k\,.$$

У випадку, коли Γ — кусково-гладка крива (або Σ — кусково-гладка поверхня) в $\mathbb{R}^4$ будемо казати, що Γ_ξ також кусково-гладка крива (або Σ_ξ також кусково-гладка поверхня, відповідно). Будемо казати, що область $Q\subset\mathbb{R}^4$ *опукла в напрямку площини* $\{(\hat{x},\hat{s},\hat{y},\hat{z}):\hat{x},\hat{s}\in\mathbb{R},\,\hat{y}=y,\hat{z}=z\}$, якщо Q містить довільний відрізок, паралельний цій площині, який з'єднує дві точки області Q.

Теорема 3.2.13. *Нехай область Q опукла в напрямку площини $\{(\hat{x},\hat{s},\hat{y},\hat{z}):\hat{x},\hat{s}\in\mathbb{R},\,\hat{y}=y,\hat{z}=z\}$. Нехай також $\Phi:Q_\xi\to\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ моногенна функція в області Q_ξ, а функції $U_k:Q\to\mathbb{C}$ з розкладу (3.34) утворюють рівномірно обмежене сімейство і мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді для кожної точки $\xi\in Q_\xi$ виконується рівність (3.29), де Γ_ξ — кусково-гладка крива, що один раз охоплює множину $S(\xi)$ і, крім того, Γ_ξ і коло $\{\tau=we_1+\hat{y}e_2+\hat{z}e_3:|w-x-is|=R,\,\hat{y}=y,\hat{z}=z\}$ є краями кусково-гладкої поверхні Σ_ξ, що повністю містяться в Ω_ξ.*

Доведення. Покажемо, що інтеграл у правій частині рівності (3.29) існує. Оскільки $\xi\in\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, то й резольвента $(\tau-\xi)^{-1}:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\tau,\xi)e_k$ є елементом алгебри $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, тобто

$$\|(\tau-\xi)^{-1}\|\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k(\tau,\xi)|<\infty.$$

Крім того, функція (3.34) приймає значення в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ і при цьому функції $U_k:Q\to\mathbb{C}$ утворюють рівномірно обмежене сімейство.

Тоді добуток $\Phi(\tau)(\tau-\xi)^{-1}$ є елементом ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ і визначається рівністю вигляду (3.39):

$$\Phi(\tau)(\tau-\xi)^{-1}=:\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\tau,\xi)\,e_k\,,$$

при цьому для усіх компонент $g_k(\tau,\xi)$ справедлива оцінка

$$|g_k(\tau,\xi)|\le c\,\|(\tau-\xi)^{-1}\|\,,$$

де стала c не залежить від k , τ і ξ .

Отже, усі компоненти $g_k(\tau,\xi)$ є сумовними функціями на кривій Γ . Тому інтеграл у правій частині рівності (3.29), визначений рівністю вигляду (3.22), є елементом простору $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, а це означає, що цей інтеграл існує.

Оскільки Γ_ξ гомотопна колу $C_\tau(\xi,\varepsilon) := \{\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3 : |w - x - is| = R,\ \hat{y} = y, \hat{z} = z\}$ і охоплює множину $S(\xi)$, то з теореми 3.2.12 випливає рівність

$$\int\limits_{\Gamma_\xi} \Phi(\tau)\,(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau = \int\limits_{C_\tau(\xi,\varepsilon)} \Phi(\tau)\,(\tau-\xi)^{-1}\,d\tau.$$

Далі доведення теореми завершується повністю аналогічно до доведення теореми 3.2.5. Теорему доведено.

Висновки

У розділі 3 досліджуються моногенні функції зі значеннями в нескінченновимірних топологічних векторних просторах та нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа. А саме, отримано наступні результати:

1. Показано, що кожна просторова гармонічна функція є деякою компонентою згаданих моногенних функцій.

2. Побудовано просторові гармонічні функції у формі компонент головного продовження аналітичних функцій комплексної змінної в комплексифікацію $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ алгебри $\mathbb{F}$.

3. Доведено інтегральні теореми для моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ та топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, що містить алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

4. Доведено існування спеціальних продовжень моногенних функцій зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ та досліджено їх зв'язок з просторовими потенціалами.

РОЗДІЛ 4

КЛАСИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В НЕКОМУТАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

У цьому розділі вивчаються алгебраїчно–аналітичні властивості спеціальних класів відображень зі значеннями в некомутативних алгебрах.

4.1. Кватерніонні G-моногенні відображення

У цьому підрозділі вивчаються алгебраїчно–аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [191].

4.1.1. Алгебра комплексних кватерніонів

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду (див. [57])

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

, (4.1)

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$.

Відмітимо, що комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре [181]).

Підмножина $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається *лівим ідеалом*, якщо з умови $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $b \in \mathcal{I}$ випливає, що $ab \in \mathcal{I}$, і *правим ідеалом*, якщо з умови $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $b \in \mathcal{I}$ випливає, що $ba \in \mathcal{I}$ (див., наприклад, [5, с. 64]).

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

і два ліві максимальні ідеали:

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Оскільки радикал алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить тільки нульовий елемент, то алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є напівпростою алгеброю (див., наприклад, [29, с. 146]).

Наслідком очевидних рівностей

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cap \widehat{\mathcal{I}}_2 = \{0\}, \qquad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cup \widehat{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

є розклад алгебри в пряму суму:

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$\begin{aligned} f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0, \\ f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є, відповідно, максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Означимо також лінійні функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, покладаючи

$$\begin{aligned} &\widehat{f}_1(e_1) = \widehat{f}_1(e_4) = 1, \qquad \widehat{f}_1(e_2) = \widehat{f}_1(e_3) = 0, \\ &\widehat{f}_2(e_2) = \widehat{f}_2(e_3) = 1, \qquad \widehat{f}_2(e_1) = \widehat{f}_2(e_4) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Максимальні ідеали $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ є, відповідно, ядрами функціоналів $\widehat{f}_1$ та $\widehat{f}_2$.

4.1.2. G-моногенні відображення

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2 = 1\,, \quad i_u = a_u e_1 + b_u e_2 \quad a_u, b_u \in \mathbb{C}, \tag{4.4}$$

де $u = 2, 3, \ldots, m$ при $m \in \{2, 3, 4\}$, — лінійно незалежні вектори над полем $\mathbb{R}$ (див. [146, с. 223]). Це означає, що рівність

$$\sum_{u=1}^{m} \alpha_u i_u = 0, \qquad \alpha_u \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_u = 0$ для всіх $u = 1, 2, \ldots, m$.

Зауважимо, що скрізь в підрозділах 4.1 — 4.3 $m \in \{2, 3, 4\}$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку

$$E_m := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : \ x_u \in \mathbb{R}\Big\}$$

над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Множині $S \subset \mathbb{R}^m$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S\Big\} \subset E_m. \tag{4.5}$$

Відмітимо, що топологічні властивості множини S_ζ простору E_m будемо розуміти як відповідні властивості множини S евклідового простору $\mathbb{R}^m$.

Наслідком рівностей (4.2), (4.3) і (4.4) є наступні співвідношення

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f}_1(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} a_u\, x_u,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f_2}(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} b_u\, x_u.$$

Тепер елемент $\zeta \in E_m$ можна подати у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

Відмітимо, що образи множин з простору E_m при відображенні функціоналами f_1 і $\widehat{f_1}$, а також f_2 і $\widehat{f_2}$, — тотожні.

Істотним є припущення, що кожен функціонал $f_1,\, f_2$ відображає простір E_m на всю площину комплексних чисел, тобто виконується рівність $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, де $f_1(E_m),\, f_2(E_m)$ — образи простору E_m при відображенні функціоналами $f_1,\, f_2$. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар $(a_2, \ldots, a_m)$, $(b_2, \ldots, b_m)$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Визначимо норму кватерніона $x = \sum\limits_{q=1}^{4} x_q e_q,\ x_q \in \mathbb{C}$ рівністю

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{q=1}^{4} |x_q|^2}.$$

Означення 4.1.1. *Якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_m$ виконується рівність $f(yx) = f(y) \cdot f(x)$, то функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ будемо називати правомультиплікативним в просторі E_m.*

Означення 4.1.2. *Якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_m$ виконується рівність $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, то функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ будемо називати лівомультиплікативним в просторі E_m.*

Лема 4.1.1. *Функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і правомультиплікативні, а функціонали $\widehat{f_1} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f_2} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і лівомультиплікативні.*

Доведення. Покажемо, що функціонал $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ є правомультиплікативним, тобто $f_1(yx) = f_1(y) \cdot f_1(x)$. Нехай

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 \in E_m.$$

Тоді

$$f_1(yx) = f_1\big((y_1 e_1 + y_2 e_2)(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4)\big) =$$

$$= f_1(y_1x_1e_1 + y_2x_2e_2 + y_1x_3e_3 + y_2x_4e_4) = y_1x_1 + y_1x_3,$$

$$f_1(y) \cdot f_1(x) = f_1(y_1e_1 + y_2e_2) \cdot f_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) =$$

$$= y_1(x_1 + x_3) = y_1x_1 + y_1x_3.$$

Отже, $f_1(yx) = f_1(y) \cdot f_1(x)$.

Неперервність функціоналу $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ випливає із його обмеженості. А саме

$$\frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \le \frac{|x_1| + |x_3|}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2}} \le 2.$$

Аналогічно доводиться відповідна мультиплікативність і неперервність інших функціоналів. Лему доведено.

Нехай Ω_ζ — область в просторі E_m.

Означення 4.1.3. *Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ будемо називати право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_m. \tag{4.6}$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо правою похідною Гато відображення Φ в точці ζ.

Означення 4.1.4. *Неперервне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ будемо називати ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon} = \widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h \in E_m. \tag{4.7}$$

При цьому $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ назвемо лівою похідною Гато відображення $\widehat{\Phi}$ в точці ζ.

Розглянемо розклад відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{q=1}^{4} U_q(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, e_q\,. \tag{4.8}$$

У припущенні, що функції $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$, $q = 1, 2, 3, 4$, є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто задовольняють співвідношення

$$U_q\,(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - U_q(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial U_q}{\partial x_u} \Delta x_u + o\left(\sqrt{\sum_{u=1}^{m} (\Delta x_u)^2}\right), \qquad \sum_{u=1}^{m} (\Delta x_u)^2 \to 0\,,$$

в наступних теоремах встановлено необхідні і достатні умови право-G-моногенності відображення $\Phi(\zeta)$ і ліво-G-моногенності відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$.

Теорема 4.1.1. *Для того, щоб відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду (4.8), де* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω*, було право-*G*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_s} = a_s \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_s} = b_s \frac{\partial U_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial x_s} = a_s \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial x_s} = b_s \frac{\partial U_4}{\partial x_1} \tag{4.9}$$

при всіх $s = 2, 3, \ldots, m$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо відображення (4.8) право-G-моногенне в області Ω_ζ, то при $h = i_1$ рівність (4.6) набуває вигляду

$$\Phi'(\zeta) = \sum_{q=1}^{4} \frac{\partial U_q(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1}\, e_q \qquad \forall \zeta \in \Omega_\zeta.$$

Тепер, покладаючи в рівності (4.6) послідовно $h = i_2, ..., h = i_m$, та з урахуванням правил множення (4.1), отримуємо умови (4.9) для компонент право-G-моногенного відображення (4.8).

Достатність. Нехай $h := \sum\limits_{u=1}^{m} h_u i_u$, де $h_u \in \mathbb{R}$, і додатне число ε таке, що $\zeta + \varepsilon h \in \Omega_\zeta$. Враховуючи умови (4.9), маємо

$$\frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} - h \sum_{q=1}^{4} \frac{\partial U_q(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1}\, e_q =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{q=1}^{4} \Big(U_q(x_1 + \varepsilon h_1, x_2 + \varepsilon h_2, ..., x_m + \varepsilon h_m) - U_q(x_1, x_2, ..., x_m) \Big) e_q -$$

$$- \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} h_1 + a_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} h_2 + ... + a_m \frac{\partial U_1}{\partial x_1} h_m \right) e_1 -$$

$$- \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} h_1 + b_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} h_2 + ... + b_m \frac{\partial U_2}{\partial x_1} h_m \right) e_2 -$$

$$-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1}h_1+a_2\frac{\partial U_3}{\partial x_1}h_2+...+a_m\frac{\partial U_3}{\partial x_1}h_m\right)e_3-$$

$$-\left(\frac{\partial U_4}{\partial x_1}h_1+b_2\frac{\partial U_4}{\partial x_1}h_2+...+b_m\frac{\partial U_4}{\partial x_1}h_m\right)e_4=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{q=1}^{4}\Bigg(U_q(x_1+\varepsilon h_1,x_2+\varepsilon h_2,...,x_m+\varepsilon h_m)-U_q(x_1,x_2,...,x_m)-$$

$$-\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial U_q(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_u}\varepsilon h_u\Bigg)e_q. \qquad (4.10)$$

Внаслідок диференційовності функцій U_q в області Ω справедливі співвідношення

$$U_q(x_1+\varepsilon h_1,x_2+\varepsilon h_2,...,x_m+\varepsilon h_m)-U_q(x_1,x_2,...,x_m)-$$

$$-\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial U_q(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}\varepsilon h_u=o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon\to 0,\ q=1,2,3,4.$$

Тому, перейшовши до границі в рівності (4.10) при $\varepsilon\to 0$, отримуємо рівність (4.6). Теорему доведено.

Аналогічно доводиться критерій ліво-G-моногенності відображень.

Теорема 4.1.2. *Для того, щоб відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (4.8), де $U_q:\Omega\to\mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, було ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta\subset E_m$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_s}=a_s\frac{\partial U_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial U_2}{\partial x_s}=b_s\frac{\partial U_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial U_3}{\partial x_s}=b_s\frac{\partial U_3}{\partial x_1},\quad \frac{\partial U_4}{\partial x_s}=a_s\frac{\partial U_4}{\partial x_1} \qquad (4.11)$$

при всіх $s=2,3,\ldots,m$.

Відмітимо, що отримані умови (4.9) і (4.11) є аналогами умов Коші–Рімана, які у згорнутому вигляді можуть бути записані співвідношеннями:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_u}=i_u\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \qquad (4.12)$$

і

$$\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x_u} = \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x_1}\, i_u, \tag{4.13}$$

відповідно, для всіх $u = 2, 3, ..., m$.

4.1.3. Конструктивний опис G-моногенних відображень

Лема 4.1.2. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-\xi_1}\, e_1 + \frac{1}{t-\xi_2}\, e_2 \tag{4.14}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : \, t \neq \xi_1, \;\; t \neq \xi_2, \qquad \forall\, \zeta \in E_m.$$

Доведення. Встановимо, при яких $t \in \mathbb{C}$ в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує елемент $(t-\zeta)^{-1}$ і знайдемо коефіцієнти A_q його розкладу за базисом:

$$(t-\zeta)^{-1} = \sum_{q=1}^{4} A_q\, e_q.$$

Враховуючи розклад (4.4) елементів i_u, $u = 1, 2, ..., m$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо

$$1 = (t-\zeta)(t-\zeta)^{-1} = \Big((t-\xi_1)e_1 + (t-\xi_2)e_2\Big) \sum_{q=1}^{4} A_q\, e_q =$$

$$= (t-\xi_1)A_1e_1 + (t-\xi_1)A_3e_3 + (t-\xi_2)A_2e_2 + (t-\xi_2)A_4e_4 = e_1 + e_2.$$

Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних базисних одиницях, отримуємо розклад (4.14). Лему доведено.

Із розкладу (4.14) випливає, що точки $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u \in E_m$, утворюють дві множини

$$M^1 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Re}\, a_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Im}\, a_u = 0, \end{cases} \qquad M^2 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Re}\, b_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \,\mathrm{Im}\, b_u = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

в m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$.

Доведення наступного твердження здійснюється за схемою доведення леми 2.1.4.

Лема 4.1.3. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *опукла в напрямку множин* M_ζ^1, M_ζ^2 *і* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, *а відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ. *Якщо точки* $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, ..., x_m) \in M^1\}$, *то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1. \tag{4.16}$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, ..., x_m) \in M^2\}$, *то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2.$$

Доведення. Оскільки $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, то існує елемент $i_2^* \in E_m$ такий, що $f_k(i_2^*) = i$. Розглянемо лінійний простір $E^* := \{\zeta^* = x i_1^* + y i_2^* + z i_3^* : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, породжений векторами $i_1^* := 1$, i_2^*, $i_3^* := \zeta_2 - \zeta_1$.

Зафіксуємо $k = 1, 2$. Нехай (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) — точки області Ω такі, що відрізок, який їх з'єднує, паралельний прямій $\{\alpha i_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

В області Ω побудуємо дві поверхні зі спільним краєм: поверхню Q^k, яка містить точку (x_1, y_1, z_1), і поверхню Σ^k, яка містить точку (x_2, y_2, z_2), такі, що звуження на них функціонала f_k на відповідні їм підмножини Q_ζ^*, Σ_ζ^* області $\Omega_\zeta \cap E*$ є взаємно-однозначними відображеннями цих підмножин на одну й ту ж область D_k комплексної площини і, крім того, в кожній точці $\zeta_0^* \in Q_{\zeta^*}$ (а також $\zeta_0^* \in \Sigma_{\zeta^*}$), виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta_0^* + \varepsilon(\zeta^* - \zeta_0^*)) - \Phi(\zeta_0^*)}{\varepsilon} = \Phi'(\zeta_0^*)(\zeta^* - \zeta_0^*) \tag{4.17}$$

при всіх $\zeta^* \in Q_{\zeta^*}$ таких, що $\zeta_0^* + \varepsilon(\zeta^* - \zeta_0^*) \in Q_{\zeta^*}$ (або, відповідно, при всіх $\zeta^* \in \Sigma_{\zeta^*}$ таких, що $\zeta_0^* + \varepsilon(\zeta^* - \zeta_0^*) \in \Sigma_{\zeta^*}$) для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$.

В якості поверхні Q^k розглянемо в області Ω фіксований рівносторонній трикутник з вершинами A_1, A_2, A_3 і центром в точці (x_1, y_1, z_1), площина якого перпендикулярна прямій $\{\alpha i_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$, і продовжимо побудову поверхні Σ^k.

Розглянемо трикутник з вершинами A'_1, A'_2, A'_3 і центром в точці (x_2, y_2, z_2), який лежить в області Ω, такий, що його сторони $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_1A'_3$ паралельні відрізкам A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 відповідно і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A_1A_2A_3$. Оскільки область Ω опукла в напрямку прямої $\{\alpha i_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$, то призма з вершинами $A'_1, A'_2, A'_3, A''_1, A''_2, A''_3$, для якої точки A''_1, A''_2, A''_3 лежать в площині трикутника $A_1A_2A_3$ і її ребра $A'_mA''_m$ при $m = 1, 2, 3$ паралельні прямій $\{\alpha i_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$, повністю міститься в Ω.

Зафіксуємо тепер трикутник з вершинами B_1, B_2, B_3 такий, що точка B_m належить відрізку $A'_mA''_m$ при $m = 1, 2, 3$ і зрізана піраміда з вершинами $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ і бічними ребрами A_mB_m, $m = 1, 2, 3$, повністю міститься в області Ω.

Нарешті, в площині трикутника $A'_1A'_2A'_3$ зафіксуємо трикутник T^k з вершинами C_1, C_2, C_3 такий, що його сторони C_1C_2, C_2C_3, C_1C_3 паралельні відрізкам $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_1A'_3$ відповідно і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A'_1A'_2A'_3$. За побудовою зрізана піраміда з вершинами $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ і бічними ребрами B_mC_m, $m = 1, 2, 3$, повністю міститься в області Ω.

Позначимо через Σ^k поверхню, утворену трикутником T^k і бічними поверхнями зрізаних пірамід $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ і $B_1B_2B_3C_1C_2C_3$.

Оскільки поверхні Q^k і Σ^k мають спільний край, то функціонал f_k відображає множини $Q^k_{\zeta^*}$ і $\Sigma^k_{\zeta^*}$ на одну й ту ж область D_k комплексної площини. В області D_k визначимо дві комплекснозначні функції H_1 і H_2 так, що при кожному $\xi_k \in D_k$

$$H_1(\xi_k) := f_k(\Phi(\zeta^*)), \text{ де } \xi_k = f_k(\zeta^*) \text{ і } \zeta^* \in Q_{\zeta^*}\,,$$

$$H_2(\xi_k) := f_k(\Phi(\zeta^*)), \text{ де } \xi_k = f_k(\zeta^*) \text{ і } \zeta^* \in \Sigma_{\zeta^*}\,.$$

Враховуючи, що $\zeta_1 \in Q_{\zeta^*}$ і $\zeta_2 \in \Sigma_{\zeta^*}$, маємо

$$\begin{aligned} H_1(\xi_k) &:= f_k(\Phi(\zeta_1)), \text{ де } \xi_k = f_k(\zeta_1) \text{ і } \zeta_1 \in Q_{\zeta^*}\,, \\ H_2(\xi_k) &:= f_k(\Phi(\zeta_2)), \text{ де } \xi_k = f_k(\zeta_2) \text{ і } \zeta_2 \in \Sigma_{\zeta^*}\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Покажемо, що H_1 і H_2 — голоморфні в D_k функції комплексної змінної ξ_k. Для цього зауважимо, що, діючи на рівність (4.17) функціоналом f_k, з урахуванням його лінійності, неперервності і відповідної мультиплікативності отримуємо рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{f_k\big(\Phi(\zeta_0^*+\varepsilon(\zeta^*-\zeta_0^*))\big)-f_k(\Phi(\zeta^*))}{\varepsilon}=f_k(\Phi'(\zeta_0^*))(f_k(\zeta^*)-f_k(\zeta_0^*)),$$

з якої для функцій H_1, H_2 випливає існування похідних в точці $f_k(\zeta_0^*)\in D_k$ за усіма напрямками, причому для кожної з функцій H_1, H_2 вказані похідні рівні. Тоді за теоремою 21 з монографії Ю.Ю. Трохимчука [25] функції H_1, H_2 є голоморфними в області D_k.

Оскільки з визначення функцій H_1 і H_2 випливає, що $H_1(\xi_k)\equiv H_2(\xi_k)$ на межі області D_k, то в силу голоморфності функцій H_1 і H_2 в області D_k тотожність $H_1(\xi_k)\equiv H_2(\xi_k)$ виконується скрізь в D_k. Тобто справедливі рівності

$$f_k(\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1))=f_k(\Phi(\zeta_2))-f_k(\Phi(\zeta_1))=H_2(\xi_k)-H_1(\xi_k)=0.$$

Отже, $\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)$ належить ядру $\mathcal{I}_k$ функціонала f_k. Лему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступне твердження.

Лема 4.1.4. *Нехай область $\Omega_\zeta\subset E_m$ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2 і $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1-\zeta_2\in\{\zeta=\sum\limits_{u=1}^{m}x_ui_u:(x_1,x_2,...,x_m)\in M^1\}$, то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1)-\widehat{\Phi}(\zeta_2)\in\widehat{\mathcal{I}}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1-\zeta_2\in\{\zeta=\sum\limits_{u=1}^{m}x_ui_u:(x_1,x_2,...,x_m)\in M^2\}$, то

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1)-\widehat{\Phi}(\zeta_2)\in\widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Теорема 4.1.3. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(\zeta)+\Phi_2(\zeta),$$

де $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — *деякі право-*G*-моногенні в області* Ω_ζ *відображення зі значеннями відповідно в правих максимальних ідеалах* $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$.

Доведення. Із розкладу одиниці $1 = e_1 + e_2$ випливає, що довільне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\Phi = e_1\Phi + e_2\Phi,$$

при цьому $e_1\Phi \in \mathcal{I}_2$, а $e_2\Phi \in \mathcal{I}_1$.

Введемо позначення $\Phi_1 := e_2\Phi$, $\Phi_2 := e_1\Phi$. Покажемо, що відображення Φ_1, Φ_2 — право-G-моногенні в області Ω_ζ . Для цього рівність (4.6) помножимо зліва на e_1 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} e_1 \frac{\Phi(\zeta+\varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = e_1 h \Phi'(\zeta). \tag{4.19}$$

Оскільки елементи e_1 та h належать комутативній підалгебрі з базисом $\{e_1, e_2\}$, то $e_1 h = h e_1$ і тому з рівності (4.19) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{e_1\Phi(\zeta+\varepsilon h) - e_1\Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h e_1 \Phi'(\zeta),$$

яка і доводить, що відображення Φ_2 — право-G-моногенне в області Ω_ζ . Аналогічно доводиться, що відображення Φ_1 також право-G-моногенне. Лему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 4.1.4. *Кожне ліво-*G*-моногенне в області* Ω_ζ *відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}_1(\zeta) + \widehat{\Phi}_2(\zeta), \tag{4.20}$$

де $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$, $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ — *деякі ліво-*G*-моногенні в області* Ω_ζ *відображення зі значеннями відповідно в лівих максимальних ідеалах* $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$.

Позначимо через

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) = \Big\{ \xi_1 = x_1 + \sum_{u=2}^{m} a_u x_u : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega \Big\},$$

$$D_2 := f_2(\Omega_\zeta) = \Big\{\xi_2 = x_1 + \sum_{u=2}^{m} b_u x_u : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega\Big\}$$

області в комплексній площині $\mathbb{C}$, на які область Ω_ζ відображається відповідно функціоналами f_1, f_2.

Лема 4.1.5. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^1 і $f_1(E_m) = \mathbb{C}$. Нехай також неперервна функція $V : \Omega \to \mathbb{C}$ задовольняє співвідношення*

$$\frac{\partial V}{\partial x_u} = a_u \frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{4.21}$$

при $u = 2, 3, \ldots, m$ в Ω. Тоді V є голоморфною фукнцією змінної ξ_1 в області D_1.

Доведення. Виділимо дійсну і уявну частини змінної ξ_1:

$$\xi_1 = x_1 + \sum_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Re} a_u + i \sum_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Im} a_u =: \tau_1 + i\eta_1$$

і відмітимо, що виконуються рівності (4.24)

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_1} \operatorname{Im} a_u = i \frac{\partial V}{\partial \tau_1} \operatorname{Im} a_u. \tag{4.22}$$

Оскільки з умови $f_1(E_m) = \mathbb{C}$ випливає, що хоча б одне з чисел $\operatorname{Im} a_u$ відмінне від нуля, то з (4.22) отримуємо рівність

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_1} = i \frac{\partial V}{\partial \tau_1}.$$

Доведемо, що

$$V(x_1', x_2', \ldots, x_m') = V(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') \tag{4.23}$$

для точок

$$(x_1', x_2', \ldots, x_m'),\ (x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') \in \Omega$$

таких, що відрізок, який з'єднує ці точки, паралельний прямій $L^k \subset M^k$. Для завершення скористаємося доведенням леми 4.1.3. Оскільки $f_1(E_m) = \mathbb{C}$, то існує елемент $i_2^* \in E_m$ такий, що $f_1(i_2^*) = i$. Розглянемо лінійний простір

$$E^* := \{\zeta = x i_1^* + y i_2^* + z i_3^* : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

породжений векторами $i_1^* := 1$, i_2^*, $i_3^* = \zeta' - \zeta''$, де $\zeta' := \sum\limits_{u=1}^{m} x'_u i_u$, $\zeta'' := \sum\limits_{u=1}^{m} x''_u i_u$. Тепер справедливість співвідношень (4.23) доводиться так, як при доведенні леми 2.1.6, де замість Ω_ζ, L розглядаємо $\Omega_\zeta \cap E^*$, $\{\alpha i_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$, відповідно.

Звідси випливає, що функція $V : \Omega \to \mathbb{C}$ вигляду $V(x_1, x_2, \ldots, x_m) := F(\xi_1)$, де $F(\xi_1)$ — довільна голоморфна функція в області D_1, є загальним розв'язком системи (4.24). Лему доведено.

Лема 4.1.6. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^2 і $f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Нехай також неперервна функція $V : \Omega \to \mathbb{C}$ задовольняє співвідношення*

$$\frac{\partial V}{\partial x_u} = b_u \frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{4.24}$$

при $u = 2, 3, \ldots, m$ в Ω. Тоді V є голоморфною фукнцією змінної ξ_2 в області D_2.

В наступних теоремах описано усі право-G-моногенні відображення зі значеннями в ідеалах $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$ за допомогою голоморфних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 4.1.5. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^2 і $f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-G-моногенне відображення $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ подається у вигляді*

$$\Phi_1(\zeta) = F_2(\xi_2) e_2 + F_4(\xi_2) e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{4.25}$$

де F_2, F_4 — деякі голоморфні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Доведення. Оскільки відображення Φ_1 приймає значення в ідеалі $\mathcal{I}_1$, то маємо

$$\Phi_1(\zeta) = V_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) e_2 + V_4(x_1, x_2, \ldots, x_m) e_4, \tag{4.26}$$

де $V_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ і $V_4 : \Omega \to \mathbb{C}$.

Відображення Φ_1 задовольняє умови право-G-моногенності (4.12) при $\Phi = \Phi_1$. Підставляючи співвідношення (4.4) і (4.26) в ці умови і враховуючи єдиність розкладу елементів алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, отримаємо наступну систему рівнянь для визначення функцій V_2 і V_4:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_u} = b_u \frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial V_4}{\partial x_u} = b_u \frac{\partial V_4}{\partial x_1}, \qquad u = 2, 3, \ldots, m. \tag{4.27}$$

Користуючись лемою 4.1.6, отримаємо

$$V_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F_2(\xi_2), \qquad V_4(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F_4(\xi_2),$$

тому відображення Φ_1 подається у вигляді (4.29). Теорему доведено.

Теорема 4.1.6. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^1 і $f_1(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-G-моногенне відображення $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ подається у вигляді*

$$\Phi_2(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_3(\xi_1)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{4.28}$$

де F_1, F_3 — деякі голоморфні в області D_1 функції змінної ξ_1.

В наступних теоремах, які доводяться повністю аналогічно до теореми 4.1.5, описано усі ліво-G-моногенні відображення зі значеннями в ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою голоморфних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 4.1.7. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^2 і $f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_1(\zeta) = \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{4.29}$$

де $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3$ — деякі голоморфні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Теорема 4.1.8. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множини M_ζ^1 і $f_1(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_2(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{4.30}$$

де $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4$ — деякі голоморфні в області D_1 функції змінної ξ_1.

В силу теорем 4.1.3, 4.1.5 і 4.1.6 всі право- G-моногенні відображення $\Phi :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ у випадку, коли область Ω_ζ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2, можуть бути побудовані за допомогою чотирьох довільних комплекснозначних голоморфних функцій $F_1(\xi_1), F_2(\xi_2), F_3(\xi_1), F_4(\xi_2)$.

Теорема 4.1.9. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2 і $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4, \tag{4.31}$$

де F_1 і F_3 — деякі голоморфні в області D_1 функції змінної ξ_1, а F_2 і F_4 — деякі голоморфні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Тепер з урахуванням теорем 4.1.4, 4.1.7 і 4.1.8 справедливе твердження для ліво- G-моногенного відображення.

Теорема 4.1.10. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2 і $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-$G$-моногенне відображення $\widehat{\Phi} :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4, \tag{4.32}$$

де $\widehat{F}_1$ і $\widehat{F}_4$ — деякі голоморфні в області D_1 функції змінної ξ_1, а $\widehat{F}_2$ і $\widehat{F}_3$ — деякі голоморфні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Рівність (4.31) дає можливість явно побудувати усі право- G-моногенні відображення $\Phi :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а рівність (4.32) вказує на спосіб явної побудови будь-якого ліво- G-моногенного відображення $\widehat{\Phi} :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою відповідних чотирьох голоморфних функцій комплексної змінної.

Зауваження 4.1.27. З теореми 4.1.9 випливає, що компоненти право- G-моногенного відображення $\Phi :\Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω. З іншого боку, якщо компоненти F_k є $\mathbb{R}$-диференційовними, то умови (4.12) є не лише необхідними, але й достатніми умовами право- G-моногенності відображення Φ в області Ω_ζ, тобто рівності (4.12) є аналогами класичних умов Коші–Рімана. Аналогічні висновки справедливі і для ліво-G-моногенного відображення.

Тепер критерії G-моногенності, сформульовані в теоремах 4.1.1 та 4.1.2, можна посилити.

Теорема 4.1.11. *Для того, щоб відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) вигляду (4.8) було право-G-моногенним (або ліво-G-моногенним) в області $\Omega_\zeta \subset E_m$ необхідно і достатньо, щоб компоненти $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ були $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в Ω і виконувались умови (4.12) (або відіповідно умови (4.13)) в кожній точці області Ω_ζ.*

З урахуванням розкладу (4.14) і правил множення (4.1) отримуємо наступне інтегральне представлення право-G-моногенного відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох комплекснозначних голоморфних функцій F_1, F_2, F_3, F_4:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_1(t)e_1 + F_3(t)e_3\Big)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_2(t)e_2 + F_4(t)e_4\Big)dt, \tag{4.33}$$

і ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох комплекснозначних голоморфних функцій $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3$, $\widehat{F}_4$:

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\Big(F_1(t)e_1 + F_4(t)e_4\Big)(t-\zeta)^{-1}dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Big(F_2(t)e_2 + F_3(t)e_3\Big)(t-\zeta)^{-1}dt, \tag{4.34}$$

де замкнені жорданові спрямлювані криві Γ_k лежать у відповідних областях D_k, охоплюють відповідну точку ξ_k і не містять точку ξ_q, $k, q = 1, 2$ при $k \neq q$.

Відмітимо також, що права похідна Гато відображення $\Phi(\zeta)$ виражається формулою

$$\Phi'(\zeta) = F_1'(\xi_1)e_1 + F_2'(\xi_2)e_2 + F_3'(\xi_1)e_3 + F_4'(\xi_2)e_4, \tag{4.35}$$

а ліва похідна Гато відображення $\Phi(\zeta)$ — формулою

$$\widehat{\Phi}'(\zeta) = \widehat{F}_1'(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2'(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3'(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4'(\xi_1)e_4. \tag{4.36}$$

Наслідок 4.1.1. *Якщо відображення $\Phi(\zeta)$ право-G-моногенне, то*

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,, \tag{4.37}$$

і якщо відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ ліво-G-моногенне, то

$$\widehat{\Phi}'(\zeta) = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_1}\,. \tag{4.38}$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівностей (4.31) і (4.32), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_m : f_1(\zeta) \in D_1,\ f_2(\zeta) \in D_2\}$.

Теорема 4.1.12. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_m$ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2 і $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ продовжується до право-G-моногенного відображення в області Π_ζ, а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — до ліво-G-моногенного відображення в області Π_ζ.*

Теорема 4.1.12 дає можливість легко знайти область право-G-моногенності відображення (4.31) і ліво-G-моногенності відображення (4.32).

Принциповим наслідком рівностей (4.31) і (4.32) є наступне твердження, справедливе для G-моногенних відображень в довільній області Ω_ζ.

Теорема 4.1.13. *Нехай $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — право-G-моногенне, а $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Тоді похідні Гато усіх порядків $\Phi^{(s)}$ є право-G-моногенними відображеннями, а $\widehat{\Phi}^{(s)}$ — ліво-G-моногенними відображеннями в області Ω_ζ.*

Доведення. Оскільки куля Θ (яка повністю міститься в області Ω) з центром в довільній точці $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)}) \in \Omega$ є опуклою множиною в напрямку множин M^1 і M^2, то в околі $\Theta_\zeta := \{\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, ..., x_m) \in \Theta\}$ точки $\zeta_0 = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u^{(0)} i_u$ справедливі рівності вигляду (4.31) і (4.35). При цьому компоненти розкладу (4.35) є голоморфними функціями відповідних комплексних змінних, тобто вираз для $\Phi'(\zeta)$ подається у вигляді рівності (4.31).

Аналогічно вираз для $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ має вигляд рівності (4.32). Це і означає, що відображення $\Phi'(\zeta)$ є право-G-моногенним, а $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ — ліво-G-моногенним в Ω_ζ. Теорему доведено.

Використовуючи інтегральне представлення (4.33) право-G-моногенного відображення Φ і представлення (4.34) ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}$, легко отримуємо наступні інтегральні представлення похідної Гато порядку s цих відображень:

$$\Phi^{(s)}(\zeta) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1} \Big(F_1(t)e_1 + F_3(t)e_3\Big) dt +$$

$$+\frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1} \Big(F_2(t)e_2 + F_4(t)e_4\Big) dt$$

і

$$\widehat{\Phi}^{(s)}(\zeta) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \Big(\widehat{F}_1(t)e_1 + \widehat{F}_4(t)e_4\Big)\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1} dt +$$

$$+\frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \Big(\widehat{F}_2(t)e_2 + \widehat{F}_3(t)e_3\Big)\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1} dt.$$

4.1.4. Зв'язок G-моногенних відображень з рівняннями з частинними похідними

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_n U(x_1, x_2, \ldots, x_m) := \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \frac{\partial^n U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} = 0, \quad (4.39)$$

де $C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \in \mathbb{R}$. Якщо відображення Φ має праву похідну Гато n-го порядку, а відображення $\widehat{\Phi}$ — ліву похідну Гато n-го порядку, то наслідком рівностей (4.6) і (4.7) є відповідно рівності

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} = i_1^{\alpha_1}\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m}\, \Phi^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}(\zeta) = i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m}\, \Phi^{(n)}(\zeta)$$

і

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}\widehat{\Phi}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} = \widehat{\Phi}^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}(\zeta)\, i_1^{\alpha_1}\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m} = \widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta)\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m}.$$

Тому внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\Phi(\zeta) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m}\, \Phi^{(n)}(\zeta) \tag{4.40}$$

кожне відображення Φ, яке має праву похідну Гато n-го порядку при виконанні умови

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m} = 0, \tag{4.41}$$

задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\Phi(\zeta) = 0$. Аналогічно внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta) \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\, i_2^{\alpha_2}\, \ldots\, i_m^{\alpha_m} \tag{4.42}$$

кожне відображення $\widehat{\Phi}$, яке має ліву похідну Гато n-го порядку, при виконанні умови (4.41) задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = 0.$

Відповідно, усі дійснозначні компоненти розкладу відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ за базисом $\{e_n, ie_n\}_{n=1}^4$ є розв'язками рівняння (4.39).

Таким чином, задача про побудову розв'язків рівняння (4.39) у вигляді компонент право- або ліво-G-моногенних відображень зводиться до відшукання в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ m лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (4.4), які задовольняють характеристичне рівняння (4.41).

Якщо обидва функціонали f_1, f_2 приймають значення в $\mathbb{C}$, то згідно з теоремою 4.1.13 кожне право-G-моногенне відображення задовольняє рівність (4.40), а ліво-G-моногенне відображення — рівність (4.42).

Як зазначалося вище, співвідношення

$$f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C} \tag{4.43}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар $(a_2, \ldots, a_m)$, $(b_2, \ldots, b_m)$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо рівняння (4.39) має особливий вигляд, то можна вказати достатні умови для виконання співвідношень (4.43). Для цього введемо позначення

$$P(\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_m) := \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\, \delta_2^{\alpha_2}\, \ldots\, \delta_m^{\alpha_m}.$$

Теорема 4.1.14. *Нехай в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує m лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів вигляду (4.4), які задовольняють рівність (4.41). Тоді якщо $P(\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_m) \neq 0$ при всіх дійсних значеннях $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_m$, то виконуються співвідношення (4.43).*

Доведення. Використовуючи таблицю множення (4.1) алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо рівності

$$i_2^{\alpha_2} = a_2^{\alpha_2} e_1 + b_2^{\alpha_2} e_2, \qquad \ldots, \qquad i_m^{\alpha_m} = a_m^{\alpha_m} e_1 + b_m^{\alpha_m} e_2.$$

Тепер рівність (4.41) набуває вигляду

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \,(a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} e_1 + b_2^{\alpha_2} \ldots b_m^{\alpha_m} e_2) = 0. \tag{4.44}$$

Більше того, враховуючи припущення, що вектори $i_1, i_2, \ldots, i_m$ вигляду (4.4) задовольняють рівність (4.41), існують комплексні коефіцієнти a_u, b_u при $u = 2, 3, \ldots, m$ такі, що виконується рівність (4.44).

З рівності (4.44) випливає, що

$$\begin{gathered} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} = 0, \\ \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} b_2^{\alpha_2} \ldots b_m^{\alpha_m} = 0. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Оскільки розв'язок системи (4.44) існує (за умовою теореми) і $P(\delta_2, \ldots, \delta_m) \neq 0$ при всіх дійсних $\delta_2, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}$, то рівності (4.44) можуть виконуватися лише тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар $(a_2, \dots, a_m)$, $(b_2, \dots, b_m)$ належить множині $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Теорему доведено.

Тепер зауважимо, що з умови теореми $P(\delta_2, \dots, \delta_m) \neq 0$ випливає, що завжди $C_{n,0,\dots,0} \neq 0$, оскільки в іншому випадку при $\delta_2 = \dots = \delta_m = 0$ було б $P(\delta_2, \dots, \delta_m) = 0$. А також оскільки функція $P(\delta_2, \dots, \delta_m)$ неперервна на $\mathbb{R}^{m-1}$, то умова $P(\delta_2, \dots, \delta_m) \neq 0$ по суті означає одне з двох $P(\delta_2, \dots, \delta_m) > 0$ або $P(\delta_2, \dots, \delta_m) < 0$ при всіх $\delta_2, \dots, \delta_m \in \mathbb{R}$.

Очевидно також, що рівняння вигляду (4.39) еліптичного типу завжди задовольняє умову $P(\delta_2, \dots, \delta_m) \neq 0$ при всіх $\delta_2, \dots, \delta_m \in \mathbb{R}$. Але в той же час існують рівняння вигляду (4.39), для яких $P(\delta_2, \dots, \delta_m) > 0$, і які не є еліптичними. Таким, наприклад, є рівняння

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x_1^5} + \frac{\partial^5 U}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} + \frac{\partial^5 U}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^3} + \frac{\partial^5 U}{\partial x_1^2 \partial x_4^3} = 0. \tag{4.46}$$

Приклад 4.1.1. Покажемо зв'язок G-моногенних відображень з тривимірним рівнянням Лапласа:

$$\Delta_3 U(x_1, x_2, x_3) := \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = 0. \tag{4.47}$$

Для рівняння (4.47) характеристичне рівняння (4.41) набуває вигляду

$$1 + i_2^2 + i_3^2 = 0. \tag{4.48}$$

Трійку лінійно назалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів i_1, i_2, i_3 назвемо *гармонічною трійкою*, якщо має місце рівність (4.48) і виконуються умови $i_2^2 \neq 0$, $i_3^2 \neq 0$ (див. [105]).

Після підстановки рівностей (4.4) в умови (4.48) приходимо до наступного твердження.

Твердження. *Гармонічними трійками в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є вектори i_1, i_2, i_3, розклад яких за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ має вигляд (4.4) і комплексні числа a_u, b_u, $u = 2, 3$, задовольняють систему рівнянь*

$$1 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \qquad 1 + b_2^2 + b_3^2 = 0. \tag{4.49}$$

Систему (4.49) задовольняють, зокрема, вирази

$$a_2 = i\sin t, \quad a_3 = i\cos t, \quad b_2 = i\sin\tau, \quad b_3 = i\cos\tau,$$

яким відповідають змінні

$$\xi_1 = x_1 + ix_2\sin t + ix_3\cos t, \quad \xi_2 = x_1 + ix_2\sin\tau + ix_3\cos\tau, \tag{4.50}$$

де $t, \tau \in \mathbb{C}$.

Представлення (4.31) і (4.32), в яких ξ_1, ξ_2 визначені рівностями (4.50), визначають G-моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, пов'язані з рівнянням (4.47). Звідси випливає, що розв'язками рівняння (4.47) є дійсна і уявна частини функції $U(x_1, x_2, x_3) = F(x_1 + ix_2\sin t + ix_3\cos t)$, де $t \in \mathbb{C}$ і F — довільна голоморфна функція.

Приклад 4.1.2. Тепер продемонструємо зв'язок G-моногенних відображень з двовимірним диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0. \tag{4.51}$$

Для рівняння (4.51) характеристичне рівняння (4.41) набуває вигляду

$$i_1^4 + i_2^4 = 0. \tag{4.52}$$

Рівняння (4.52) задовольняє, наприклад, така пара лінійно незалежних векторів

$$i_1 = 1, \qquad i_2 = \frac{i+1}{\sqrt{2}}\,e_1 + \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,e_2\,,$$

яким відповідають змінні

$$\xi_1 = x_1 + \frac{i+1}{\sqrt{2}}\,x_2\,, \quad \xi_2 = x_1 + \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,x_2\,. \tag{4.53}$$

Представлення (4.31) і (4.32), в яких ξ_1, ξ_2 визначені рівностями (4.53), визначають G-моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, які пов'язані з рівнянням (4.51). Таким чином, розв'язками рівняння (4.51) є дійсні і уявні частини функцій $U_1(x_1, x_2) = F_1\left(x_1 + \frac{i+1}{\sqrt{2}}\,x_2\right)$, $U_2(x_1, x_2) = F_2\left(x_1 + \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,x_2\right)$, де F_1, F_2 — довільні голоморфні функції.

Приклад 4.1.3. Тепер наведемо приклад застосування G-моногенних відображень для дослідження розв'язків чотиривимірного диференціального рівняння. Розглянемо диференціальне рівняння (4.46). Для нього характеристичне рівняння (4.41) набуває вигляду

$$i_1^5 + i_1^3 i_2^2 + i_1 i_2 i_3^3 + i_1^2 i_4^3 = 0. \tag{4.54}$$

Розв'язком рівняння (4.54) є наступна четвірка векторів

$$i_1 = 1,\ \ i_2 = i\sqrt{1 + b_1^3 + c_1^3}\, e_1 + i\sqrt{1 + b_2^3 + c_2^3}\, e_2\,,\ \ i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2\,,\ i_4 = c_1 e_1 + c_2 e_2\,,$$

де b_1, b_2, c_1, c_2 — довільні комплексні числа. У цьому випадку змінні ξ_1, ξ_2 мають наступний вигляд:

$$\xi_k = x_1 + i\sqrt{1 + b_k^3 + c_k^3}\, x_2 + b_k x_3 + c_k x_4\,, \qquad k = 1; 2. \tag{4.55}$$

Тоді представлення (4.31) і (4.32), в яких ξ_1, ξ_2 визначені рівностями (4.55), визначають G-моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, які пов'язані з рівнянням (4.46). Таким чином, розв'язками рівняння (4.46) є дійсна і уявна частини функції

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = F\left(x_1 + i\sqrt{1 + b^3 + c^3}\, x_2 + b x_3 + c x_4\right),$$

де b, c — довільні комплексні числа, а F — довільна голоморфна функція.

4.2. Інтегральні теореми для кватерніонних G-моногенних відображень

У цьому підрозділі досліджуються властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів, пов'язані з їх інтегральними представленнями і представленнями у вигляді рядів. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [191].

4.2.1. Аналог теореми Коші для поверхневого інтеграла

Нехай Ω_ζ — обмежена замкнена область в E_m. Для неперервного відображення $\varphi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$\varphi(\zeta)=\sum_{q=1}^{4}U_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_q+i\sum_{q=1}^{4}V_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_q\,,$$

де $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\Omega$ і $U_q:\Omega\to\mathbb{R}$, $V_q:\Omega\to\mathbb{R}$, визначимо *об'ємний інтеграл* по Ω_ζ рівністю

$$\int\limits_{\Omega_\zeta}\varphi(\zeta)\,dx_1dx_2\ldots dx_m:=\sum_{q=1}^{4}e_q\int\limits_{\Omega}U_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m+$$

$$+i\sum_{q=1}^{4}e_q\int\limits_{\Omega}V_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

Нехай Σ_ζ — кусково-гладка поверхня в E_m. Для неперервних відображень $\varphi:\Sigma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi:\Sigma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$\varphi(\zeta)=\sum_{q=1}^{4}U_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_q+i\sum_{q=1}^{4}V_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_q\,, \tag{4.56}$$

$$\psi(\zeta)=\sum_{r=1}^{4}P_r(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_r+i\sum_{r=1}^{4}Q_r(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,e_r\,, \tag{4.57}$$

де $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\Sigma$, $U_q:\Sigma\to\mathbb{R}$, $V_q:\Sigma\to\mathbb{R}$ і $P_r:\Sigma\to\mathbb{R}$, $Q_r:\Sigma\to\mathbb{R}$, визначимо *поверхневий інтеграл* по Σ_ζ з диференціальною формою $\sigma:=\sum\limits_{u=1}^{m}i_u\bigwedge\limits_{p=1,p\neq u}^{m}dx_p$ рівністю

$$\int\limits_{\Sigma_\zeta}\varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta):=\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\sum_{r=1}^{4}e_q\,i_u\,e_r\int\limits_{\Sigma}\Big(U_q\,P_r-V_q\,Q_r\Big)\bigwedge_{p=1,p\neq u}^{m}dx_p+$$

$$+i\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\sum_{r=1}^{4}e_q\,i_u\,e_r\int\limits_{\Sigma}\Big(V_q\,P_r+U_q\,Q_r\Big)\bigwedge_{p=1,p\neq u}^{m}dx_p. \tag{4.58}$$

Через $\partial\Omega_\zeta$ будемо позначати межу області Ω_ζ. В наступній теоремі доведено аналог формули Гауса – Остроградського в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 4.2.1. *Нехай однозв'язна область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *а неперервні відображення* $\varphi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *мають неперервні частинні похідні першого порядку в області* Ω_ζ, *які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial\,(\varphi\, i_u\,\psi)}{\partial x_u} dx_1\, dx_2 ... dx_m, \tag{4.59}$$

де $\sigma := \sum\limits_{u=1}^{m} i_u \bigwedge\limits_{p=1, p\neq u}^{m} dx_p$.

Доведення. Застосуємо до кожного з інтегралів у правій частині рівності (4.58) формулу Гауса – Остроградського [28, с. 378]:

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) =$$

$$= \sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\sum_{r=1}^{4} e_q i_u e_r \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial U_q}{\partial x_u}P_r + U_q\frac{\partial P_r}{\partial x_u} - \frac{\partial V_q}{\partial x_u}Q_r - V_q\frac{\partial Q_r}{\partial x_u}\right) dx_1\, dx_2 ... dx_m +$$

$$+ i\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\sum_{r=1}^{4} e_q i_u e_r \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial V_q}{\partial x_u}P_r + V_q\frac{\partial P_r}{\partial x_u} - \frac{\partial U_q}{\partial x_u}Q_r - U_q\frac{\partial Q_r}{\partial x_u}\right) dx_1\, dx_2 ... dx_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial\,(\varphi\, i_u\,\psi)}{\partial x_u} dx_1\, dx_2 ... dx_m.$$

Теорему доведено.

Тепер наслідком теореми 4.2.1 і умов (4.12), (4.13) є наступне твердження.

Теорема 4.2.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ, *і вони разом із своїми частинними похідними* *першого порядку неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \Big(\widehat{\Phi}(\zeta)\, i_u^2\, \Phi'(\zeta) + \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_u^2\, \Phi(\zeta)\Big)\, dx_1\, dx_2 ... dx_m. \qquad (4.60)$$

Доведення. Рівність (4.60) є наслідком формули (4.59) з використанням співвідношень (4.37), (4.38) і аналогів умов Коші – Рімана (4.12), (4.13):

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) = \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial\Big(\widehat{\Phi}\, i_u\, \Phi\Big)}{\partial x_u} dx_1\, dx_2 ... dx_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x_u} i_u \Phi + \widehat{\Phi} i_u \frac{\partial\Phi}{\partial x_u}\right) dx_1\, dx_2 ... dx_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \sum_{u=1}^{m} \Big(\widehat{\Phi}(\zeta)\, i_u^2\, \Phi'(\zeta) + \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_u^2\, \Phi(\zeta)\Big)\, dx_1\, dx_2 ... dx_m.$$

Теорему доведено.

Наслідок 4.2.1. *При виконанні умов теореми* 4.2.2 *і додатковому припущенні* $\sum\limits_{u=1}^{m} i_u^2 = 0$ *рівність* (4.60) *набуває вигляду*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) = 0.$$

4.2.2. Аналог теореми Коші для криволінійного інтеграла

Встановимо аналог інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла від право-G-відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ.

Нехай γ_ζ — жорданова спрямлювана крива в E_m. Визначимо *інтеграл вздовж кривої* γ_ζ від неперервних відображень $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$

вигляду (4.56) і (4.57), відповідно, де $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \gamma$, $U_q : \gamma \to \mathbb{R}$, $V_q : \gamma \to \mathbb{R}$ і $P_r : \gamma \to \mathbb{R}$, $Q_r : \gamma \to \mathbb{R}$, рівністю

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) := \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \sum_{r=1}^{4} e_q\, i_u\, e_r \int\limits_{\gamma} \big(U_q\, P_r - V_q\, Q_r\big) dx_u +$$

$$+ i \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \sum_{r=1}^{4} e_q\, i_u\, e_r \int\limits_{\gamma} \big(V_q\, P_r + U_q\, Q_r\big) dx_u, \tag{4.61}$$

де $d\zeta := \sum\limits_{u=1}^{m} dx_u i_u$.

Визначимо також поверхневий інтеграл з диференціальною формою $dx_u \wedge dx_v$. Нехай Σ_ζ — кусково-гладка поверхня в E_m. Для неперервного відображення $\varphi : \Sigma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (4.56), де $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Sigma$ і $U_q : \Sigma \to \mathbb{R}$, $V_q : \Sigma \to \mathbb{R}$, визначимо *поверхневий інтеграл* по Σ_ζ з диференціальною формою $dx_u \wedge dx_v$ рівністю

$$\int\limits_{\Sigma_\zeta} \varphi(\zeta) dx_u \wedge dx_v := \sum_{q=1}^{4} e_q \int\limits_{\Sigma} U_q(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_u \wedge dx_v +$$

$$+ i \sum_{q=1}^{4} e_q \int\limits_{\Sigma} V_q(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_u \wedge dx_v.$$

В наступній теоремі доведено аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 4.2.3. *Нехай відображення $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервні разом із частинними похідними першого порядку в області Ω_ζ і Σ_ζ — довільна кусково-гладка поверхня в Ω_ζ зі спрямлюваним жордановим краєм γ_ζ. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial(\varphi\, i_3\, \psi)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \ldots + \left(\frac{\partial(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x_m} - \frac{\partial(\varphi\, i_m\, \psi)}{\partial x_1} \right) dx_m \wedge dx_1. \tag{4.62}$$

Доведення. Застосовуючи до кожного з інтегралів в правій частині рівності (4.61) формулу Стокса [28, с. 338], отримуємо

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) =$$

$$= \sum_{q,r=1}^{4} e_q e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_m} dx_m \wedge dx_1 - \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ \sum_{q,r=1}^{4} e_q i_2 e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_3} dx_2 dx_3 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{q,r=1}^{4} e_q i_m e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_{m-1}} dx_{m-1} \wedge dx_m - \frac{\partial(U_q P_r - V_q Q_r)}{\partial x_1} dx_m \wedge dx_1 +$$

$$+ i \sum_{q,r=1}^{4} e_q e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_m} dx_m \wedge dx_1 - \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ i \sum_{q,r=1}^{4} e_q i_2 e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_3} dx_2 dx_3 + \ldots$$

$$\ldots + i \sum_{q,r=1}^{4} e_q i_m e_r \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_{m-1}} dx_{m-1} \wedge dx_m - \frac{\partial(V_q P_r - U_q Q_r)}{\partial x_1} dx_m \wedge dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial(\varphi\, i_3\, \psi)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \ldots + \left(\frac{\partial(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x_m} - \frac{\partial(\varphi\, i_m\, \psi)}{\partial x_1} \right) dx_m \wedge dx_1.$$

В наступній теоремі показано, що у випадку G-моногенності відображень, права частина рівності (4.62) рівна нулю.

Теорема 4.2.4. *Нехай в області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$*, а* γ_ζ *— спрямлювана жорданова межа деякої кусково-гладкої поверхні в* Ω_ζ*. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{4.63}$$

Доведення. Використовуючи формулу (4.62) і умови (4.12), (4.13), отримуємо:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_1}\, i_2\, \Phi + \widehat{\Phi}\ i_2\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_2}\, \Phi - \widehat{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_2}\, i_3\, \Phi + \widehat{\Phi}\, i_3\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_3}\, i_2\, \Phi - \widehat{\Phi}\ i_2\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_m}\, \Phi + \widehat{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x_1}\, i_m\, \Phi - \widehat{\Phi}\ i_m\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) dx_m \wedge dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_\zeta} \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2\, \Phi'(\zeta) \Big) dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2 i_3\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_3 i_2\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_3 i_2\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2 i_3\, \Phi'(\zeta) \Big) dx_2 \wedge dx_3 + \ldots$$

$$\ldots + \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_m\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_m\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_m\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_m\, \Phi'(\zeta) \Big) dx_m \wedge dx_1 = 0.$$

Теорему доведено.

Будемо розуміти трикутник $\triangle_\zeta$ як плоску фігуру, яка обмежена трьома відрізками, що з'єднують три його вершини. Позначимо через $\partial\triangle_\zeta$ границю трикутника $\triangle_\zeta$ у відносній топології площини цього трикутника.

Оскільки кожен трикутник $\triangle_\zeta \subset \Omega_\zeta$ може бути включений в опуклу підмножину області Ω_ζ, то наслідком теореми 4.2.4 є наступне твердження.

Наслідок 4.2.2. *Якщо область* Ω_ζ *опукла в* E_m*, відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ*,* *то для довільного трикутника* $\triangle_\zeta$, *замикання якого міститься в області* Ω_ζ, *справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0,$$

де $\partial\triangle_\zeta$ *— межа трикутника* $\triangle_\zeta$.

Для узагальнення аналога теореми Коші на випадок спрямлюваної кривої, яка не є межею кусково-гладкої поверхні, доведемо допоміжні леми. Для цього зробимо попередні зауваження.

Розглянемо алгебру $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ з базисом $\{e_q, ie_q\}_{q=1}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, яка ізоморфна алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Очевидно, що в алгебрі $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ існує базис $\{i_q\}_{q=1}^8$, де вектори $i_1, i_2, ..., i_m$ ті ж, що і в співвідношеннях (4.4).

Для елемента $a := \sum\limits_{q=1}^{8} a_q i_q,\ a_q \in \mathbb{R}$, визначимо евклідову норму

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{q=1}^{8} a_q^2}\,.$$

Відповідно, $\|\zeta\| = \sqrt{\sum\limits_{u=1}^{m} x_u^2}$ і $\|i_1\| = \|i_2\| = ... = \|i_m\| = 1$.

В силу теореми про еквівалентність норм (див., наприклад, [29, с. 60]), для довільного елемента $b := \sum\limits_{q=1}^{4} (b_{1q} + ib_{2q})e_q,\ b_{1q}, b_{2q} \in \mathbb{R}$, виконуються нерівності

$$|b_{1q} + ib_{2q}| \le \sqrt{\sum_{q=1}^{4} (b_{1q}^2 + b_{2q}^2)} \le c\|b\|, \tag{4.64}$$

де c — додатна стала, яка не залежить від b.

Лема 4.2.1. *Якщо* γ_ζ *— замкнена жорданова спрямлювана крива, а відображення* $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервні, то*

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| \le c \int\limits_{\gamma_\zeta} \|\varphi(\zeta)\| \|d\zeta\| \|\psi(\zeta)\|, \tag{4.65}$$

де c *— абсолютна додатна стала.*

Доведення. Використовуючи представлення відображень φ і ψ у вигляді (4.56) і (4.57) відповідно, отримуємо оцінку

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)\right\|\leq$$

$$\leq\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\sum_{r=1}^{4}\|e_q i_u e_r\|\int\limits_{\gamma}|U_q(x_1,x_2,...,x_m)+iV_q(x_1,x_2,...,x_m)|\times$$
$$\times|P_r(x_1,x_2,...,x_m)+iQ_r(x_1,x_2,...,x_m)|\,dx_u.$$

Враховуючи нерівність (4.64) і нерівності $\|e_k i_u e_m\|\leq c_u,\ u=1,2,...,m$, де c_u — абсолютні додатні сталі, отримуємо оцінку (4.65). Лему доведено.

За схемою доведення відповідної леми для функції, яка задана в комплексній площині (див., наприклад, [160]), доводиться наступне твердження.

Лема 4.2.2. *Нехай в однозв'язній області* Ω_ζ *визначені неперервні відображення* $\varphi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, *а* γ_ζ *— спрямлювана крива в* Ω_ζ. *Тоді для довільного* $\varepsilon>0$ *існує ламана* $\Lambda_\zeta\subset\Omega_\zeta$, *вершини якої лежать на кривій* γ_ζ, *така, що*

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-\int\limits_{\Lambda_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)\right\|<\varepsilon. \tag{4.66}$$

Доведення. Розглянемо замкнену область $\overline{\Delta}_\zeta\subset\Omega_\zeta$, яка містить всередині криву γ_ζ. Оскільки відображення φ і ψ неперервні в кожній точці області $\overline{\Delta}_\zeta$, то вони рівномірно неперервні в цій області. Крім того, їх добуток також є відображенням рівномірно неперервним в цій області. Тобто, для довільного $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)$ таке, що

$$\|\varphi(\zeta')\,\psi(\zeta')-\varphi(\zeta'')\,\psi(\zeta'')\|<\varepsilon_1, \tag{4.67}$$

якщо $\|\zeta'-\zeta''\|<\delta(\varepsilon)$, причому ζ',ζ'' — довільні точки області $\overline{\Delta}_\zeta$. Більше того, за тих же припущень, справедливі і наступні нерівності:

$$\|\varphi(\zeta')\,i_u\,\psi(\zeta')-\varphi(\zeta'')\,i_u\,\psi(\zeta'')\|<\varepsilon_u, \tag{4.68}$$

$u = 2, 3, ..., m$.

Розіб'ємо криву γ_ζ на n дуг Q_ζ^0, $Q_\zeta^1, \ldots, Q_\zeta^{n-1}$ так, щоб довжина кожної з них була меншою за δ і впишемо в криву γ_ζ ламану Λ_ζ так, щоб її ланки $L_\zeta^0, L_\zeta^1, \ldots, L_\zeta^{n-1}$ стягували ці дуги. Вершини ламаної Λ_ζ позначимо через $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n$. Оскільки довжина кожної дуги Q_ζ^k менша за δ, то відстань між довільними двома точками однієї і тієї ж дуги тим паче менша за δ. Те ж саме справедливо для ланок L_ζ^k.

Порівняємо тепер значення інтеграла по кривій γ_ζ зі значенням того ж інтеграла вздовж ламаної Λ_ζ. З цією метою розглянемо суму, що є наближеним значенням інтеграла $\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta)$:

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k)\, \Delta\zeta_k\, \psi(\zeta_k). \tag{4.69}$$

Оскільки $\Delta\zeta_k = \int\limits_{Q_\zeta^k} d\zeta$, то рівність (4.69) подається у вигляді

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Q_\zeta^k} \varphi(\zeta_k)\, d\zeta\, \psi(\zeta_k). \tag{4.70}$$

З іншого боку, інтеграл $\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta)$ можна подати у вигляді суми інтегралів, взятих по дугах Q_ζ^k:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Q_\zeta^k} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta). \tag{4.71}$$

Розглянемо різницю рівностей (4.71) і (4.70):

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Q_\zeta^k} \Big(\varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_k)\, d\zeta\, \psi(\zeta_k)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{u=1}^{m} \int\limits_{Q^k} \Big(\varphi(\zeta)\, i_u\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_k)\, i_u\, \psi(\zeta_k)\Big) dx_u.$$

Оскільки на кожній дузі Q_ζ^k справедливі нерівності (4.67), (4.68), то маємо

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S\right\| < \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{u=1}^{m} \varepsilon_u\, Q_{x_u}^k < \varepsilon\, L, \tag{4.72}$$

де $Q_{x_u}^k$ — довжини проекцій дуги Q^k на осі Ox_u відповідно, $\varepsilon := \max\limits_{u=1,2,\dots,m}\{\varepsilon_u\}$ і L — довжина кривої γ_ζ.

Аналогічно оцінимо різницю $\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S$. Оскільки $\Delta\zeta_k = \int\limits_{L_\zeta^k} d\zeta$, то рівність (4.69) подається у вигляді

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{L_\zeta^k} \varphi(\zeta_k)\, d\zeta\, \psi(\zeta_k). \tag{4.73}$$

З іншого боку, інтеграл $\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta)$ можна подати у вигляді суми інтегралів, взятих по ланках L_ζ^k:

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{L_\zeta^k} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta). \tag{4.74}$$

Розглянемо різницю рівностей (4.74) і (4.73):

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{L_\zeta^k} \Big(\varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_k)\, d\zeta\, \psi(\zeta_k)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{u=1}^{m} \int\limits_{L^k} \Big(\varphi(\zeta)\, i_u\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_k)\, i_u\, \psi(\zeta_k)\Big) dx_u.$$

Оскільки на кожній ланці L_ζ^k справедливі нерівності (4.67), (4.68), то маємо

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S\right\| < \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{u=1}^{m} \varepsilon_u\, L_{x_u}^k < \varepsilon\, L, \tag{4.75}$$

де $L_{x_u}^k$ — довжини проекцій ламаної L^k на осі Ox_u відповідно, $\varepsilon := \max\limits_{u=1,2,\dots,m}\{\varepsilon_u\}$ і L — довжина кривої γ_ζ.

З нерівностей (4.72) і (4.75) отримуємо

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| \le$$

$$\le \left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S \right\| + \left\| S - \int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| < 2\varepsilon L.$$

Лему доведено.

Тепер, з використанням наслідку 4.2.2 і леми 4.2.2, доводиться наступний аналог теореми Коші для довільної спрямлюваної кривої в опуклій області.

Теорема 4.2.5. *Нехай в опуклій області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *справедлива рівність (4.63).*

Доведення. На підставі леми 4.2.2 впишемо в криву γ_ζ ламану Λ_ζ так, щоб виконувалась нерівність (4.66). Тоді ламану Λ_ζ розіб'ємо діагоналями на трикутники. Оскільки область Ω_ζ опукла, то всі отримані трикутники повністю містяться в області Ω_ζ. За наслідком 4.2.2 інтеграл по кожному трикутнику рівний нулю. Тоді і інтеграл по ламаній рівний нулю:

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{4.76}$$

Тепер наслідком співвідношень (4.66) і (4.76) є рівність (4.63). Теорему доведено.

У випадку довільної області Ω_ζ аналог інтегральної теореми Коші доводиться за схемою теореми 3.2 з роботи Е. К. Блюма [47].

Теорема 4.2.6. *Нехай в області* Ω_ζ *визначені право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$, *гомотопної точці області* Ω_ζ, *справедлива рівність (4.63).*

Доведення. Нехай крива γ_ζ визначена рівністю $\zeta = \phi(t)$, $0 \le t \le 1$, при цьому $\phi(0) = \phi(1) = \zeta_0$, і нехай γ_ζ гомотопна точці ζ_0. Тоді існує неперервне на квадраті $Q := [0,1] \times [0,1]$ відображення $H(s,t)$ двох дійсних змінних s і t зі значеннями в області Ω_ζ таке, що

$$H(0,t) = \phi(t), \qquad H(1,t) \equiv \zeta_0 \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

$$H(s,0) = H(s,1) = \zeta_0 \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Оскільки відображення H неперервне на компактній множині Q, то її образ $K := \{H(s,t) : (s,t) \in Q\}$ є компактною множиною в Ω_ζ.

Позначимо через $\rho := \min\limits_{\zeta' \in K,\, \zeta'' \in \partial\Omega_\zeta} ||\zeta' - \zeta''||$.

Відображення H є також рівномірно неперервним на множині Q. Це означає, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall\, (s,t), (s',t') : |s'-s| < \delta,\, |t'-t| < \delta \Rightarrow ||H(s',t') - H(s,t)|| < \frac{\rho}{2}. \tag{4.77}$$

Виберемо набір чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, які задовольняють нерівності $t_j - t_{j-1} < \delta,\, j = 1,2,\ldots,n$, і покладемо $s_1 = t_1$. При $j = 1,2,\ldots,n-1$ позначимо через $\zeta_{0,j} := H(0,t_j)$, $\zeta_{1,j} := H(s_1,t_j)$ і через L_ζ^j відрізок з початком в точці $\zeta_{0,j}$ і кінцем в точці $\zeta_{1,j.}$ Крім того, введемо в розгляд криву $\gamma_\zeta^{[1]} := \{H(s_1,t) : 0 \le t \le 1\}$.

Позначимо через $\gamma_\zeta[\zeta_1,\zeta_2]$ дугу жорданової орієнтованої кривої γ_ζ з початком в точці ζ_1 і кінцем в точці ζ_2.

Внаслідок нерівності (4.77) дуги $\gamma_\zeta[\zeta_0,\zeta_{0,1}]$, $\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_0,\zeta_{1,1}]$ і відрізок L_ζ^1 містяться в кулі $S(\zeta_0) := \{\zeta \in E_m : ||\zeta - \zeta_0|| < \rho\}$. Оскільки $S(\zeta_0)$ є опуклою множиною і міститься в Ω_ζ, то з теореми 4.63 випливає рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_0,\zeta_{0,1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) + \int\limits_{L_\zeta^1} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_0,\zeta_{1,1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta). \tag{4.78}$$

При $j = 1,2,\ldots,n-2$ з нерівності (4.77) випливають наступні нерівності

$$||\zeta - \zeta_{0,j}|| < \frac{\rho}{2} \qquad \forall\, \zeta \in \gamma_\zeta[\zeta_{0,j},\zeta_{0,j+1}],$$

$$||\zeta - \zeta_{1,j}|| < \frac{\rho}{2} \qquad \forall\, \zeta \in \gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j},\zeta_{1,j+1}], \qquad ||\zeta_{1,j} - \zeta_{0,j}|| < \frac{\rho}{2},$$

внаслідок яких дуги $\gamma_\zeta[\zeta_{0,j},\zeta_{0,j+1}]$, $\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j},\zeta_{1,j+1}]$, а також відрізки L_ζ^1, L_ζ^{j+1} містяться в кулі $S(\zeta_{0,j}) := \{\zeta \in E_m : ||\zeta-\zeta_{0,j}|| < \rho\}$ при $j=1,2,\ldots,n-2$. Оскільки $S(\zeta_{0,j})$ є опуклою множиною і міститься в Ω_ζ, то з теореми 4.2.5 випливають рівності

$$-\int\limits_{L_\zeta^j}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)+\int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_{0,j},\zeta_{0,j+1}]}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)+$$

$$+\int\limits_{L_\zeta^{j+1}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j},\zeta_{1,j+1}]}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta) \qquad (4.79)$$

при $j=1,2,\ldots,n-2$.

Нарешті, аналогічно до рівності (4.78) отримуємо рівність

$$-\int\limits_{L_\zeta^{n-1}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)+\int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_{0,n-1},\zeta_0]}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,n-1},\zeta_0]}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta). \qquad (4.80)$$

Додавши усі рівності (4.78) — (4.80), отримаємо рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta) \qquad (4.81)$$

Далі покладемо $s_j=t_j$ і введемо в розгляд криву $\gamma_\zeta^{[j]} := \{H(s_j,t) : 0 \le t \le 1\}$ при $j=1,2,\ldots,n$. Аналогічно до рівності (4.81), отримаємо рівності

$$\int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[2]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\ldots=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta).$$

Отже, справедлива рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=\int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta),$$

де крива $\gamma_\zeta^{[n]}$ вироджується в точку, оскільки $H(1,t)\equiv\zeta_0$. Тепер очевидною рівністю

$$\int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)=0$$

завершується доведення теореми. Теорему доведено.

Встановимо достатні умови на криву γ_ζ, розміщену на межі області, при яких справедлива рівність (4.63). Для цього скористаємося схемою доведення теореми 4 роботи [20] для G-моногенних відображень.

Нехай на межі $\partial\Omega_\zeta$ задано замкнену жорданову спрямлювану криву $\gamma_\zeta \equiv \gamma_\zeta(t)$, де $0 \le t \le 1$, яка гомотопна внутрішній точці ζ_0 цієї області. Це означає, що існує відображення $H(s,t)$, неперервне на квадраті $[0,1]\times[0,1]$, таке, що $H(0,t) = \gamma_\zeta(t), H(1,t) \equiv \zeta_0$ і всі криві $\gamma_\zeta^s \equiv \gamma_\zeta^s(t) := \{\zeta = H(s,t) : 0 \le t \le 1\}$ при $0 < s < 1$ розміщені в області Ω_ζ.

Введемо також в розгляд криві $\Gamma_\zeta^t \equiv \Gamma_\zeta^t(s) := \{\zeta = H(s,t) : 0 \le s \le 1\}$ і позначимо через mes лінійну міру Лебега на спрямлюваній кривій.

Теорема 4.2.7. *Нехай відображення $\Phi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервне в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ і право-G-моногенне в Ω_ζ, а $\widehat{\Phi} : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервне в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ і ліво-G-моногенне в Ω_ζ. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої γ_ζ, розміщеної на межі $\partial\Omega_\zeta$ і гомотопної внутрішній точці $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$, для якої криві сімейства $\{\Gamma_\zeta^t : 0 \le t \le 1\}$ спрямлювані і множина $\{\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta^s : 0 \le s \le 1\}$ обмежена, справедлива рівність (4.63).*

Доведення. Нехай $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$. Зафіксуємо число $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta\right)$ таке, що для довільних $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Omega}_\zeta$ із умови $\|\zeta_1 - \zeta_2\| < 2\rho$ випливають нерівності

$$\Big\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\Big\| < \varepsilon_1\,, \tag{4.82}$$

$$\Big\|\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2)\Big\| < \varepsilon_2\,. \tag{4.83}$$

Оскільки функція $H(s,t)$ рівномірно неперервна на квадраті $[0,1]\times[0,1]$, то існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $s \in (0,\delta)$ і $t, t' \in [0,1] : |t - t'| < \delta$ виконується нерівність $|H(0,t) - H(s,t')| < \rho$.

Нехай числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ такі, що для відповідних точок $\zeta_{0,k} := H(0,t_k)$ кривої γ_ζ виконуються співвідношення

$$\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta[\zeta_{0,k}, \zeta_{0,k+1}] = \rho \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\operatorname{mes}\gamma_\zeta[\zeta_{0,n},\zeta_{0,0}] \le \rho.$$

Очевидно, що $2 \le n \le \left[\frac{\operatorname{mes}\gamma_\zeta}{\rho}\right] + 1$.

Введемо в розгляд точки $\zeta_{s,k} := H(s,t_k)$ кривої γ_ζ^s і криві

$$\Upsilon_{[k]}^s := \gamma_\zeta[\zeta_{0,k},\zeta_{0,k+1}] \cup \Gamma_\zeta^{t_{k+1}}[\zeta_{0,k+1},\zeta_{s,k+1}] \cup \gamma_\zeta^s[\zeta_{s,k+1},\zeta_{s,k}] \cup \Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]$$

при $k = 0,1,\ldots,n$, де $\zeta_{s,n+1} := \zeta_{s,0}$ при $0 \le s < 1$, покладаючи при цьому, що орієнтація кривих $\Upsilon_{[k]}^s$ індукована орієнтацією кривої γ_ζ.

Нехай $s \in (0,\delta)$. Оскільки при всіх $\zeta \in \Upsilon_{[k]}^s$ виконується нерівність $\|\zeta - \zeta_{0,k}\| \le 2\rho$, то, враховуючи теорему 4.2.6, лему 4.2.1 і нерівності (4.82), (4.83), отримуємо

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\Upsilon_{[k]}^s}\Big(\widehat{\Phi}(\zeta)-\widehat{\Phi}(\zeta_{0,k})\Big)\,d\zeta\,\Big(\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta_{0,k})\Big)\right\| \le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\Upsilon_{[k]}^s}\left\|\widehat{\Phi}(\zeta)-\widehat{\Phi}(\zeta_{0,k})\right\|\,\|d\zeta\|\,\left\|\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta_{0,k})\right\| \le c\varepsilon_1\varepsilon_2\sum_{k=0}^{n}\operatorname{mes}\Upsilon_{[k]}^s \le$$

$$\le c\varepsilon_1\varepsilon_2\Big(\operatorname{mes}\gamma_\zeta + \operatorname{mes}\gamma_\zeta^s + 2(n+1)\max_{k=\overline{0,n}}\operatorname{mes}\Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]\Big) \le$$

$$\le M\varepsilon_1\varepsilon_2\left(1+\frac{1}{\rho}\max_{k=\overline{0,n}}\operatorname{mes}\Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]\right), \tag{4.84}$$

де стала c не залежить від ε_1, ε_2 і ρ.

Перейшовши до границі в нерівності (4.84) при $s \to 0$, отримуємо нерівність

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta\,\Phi(\zeta)\right\| \le M\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

перейшовши в якій, у свою чергу, до границі при ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, переконуємося в справедливості рівності (4.63). Теорему доведено.

4.2.3. Аналог теореми Морера

Позначимо через $s[\zeta_1,\zeta_2]$ відрізок з початком в точці ζ_1 і кінцем в точці ζ_2.

Наступні твердження є аналогами теореми Морера для відображень, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 4.2.8. *Нехай* $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$. *Якщо відображення* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в області* Ω_ζ *і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\zeta\,\Phi(\zeta)=0 \tag{4.85}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle_\zeta}\subset\Omega_\zeta$, *то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ.

Доведення. Зафіксуємо в області Ω_ζ деяку точку a. Розглянемо відображення

$$\Psi(\zeta):=\int\limits_{s[a,\zeta]} d\tau\,\Phi(\tau)$$

і покажемо, що воно право-G-моногенне в Ω_ζ, причому

$$\Psi'(\zeta)=\Phi(\zeta). \tag{4.86}$$

Нехай $h\in E_m$ і $\varepsilon>0$ таке, що трикутник $\triangle_\zeta$ з вершинами $a,\zeta,\zeta+\varepsilon h$ міститься в області Ω_ζ.

Розглянемо різницю

$$\Psi(\zeta+\varepsilon h)-\Psi(\zeta)=\int\limits_{s[a,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\,\Phi(\tau)-\int\limits_{s[a,\zeta]} d\tau\,\Phi(\tau)=$$

$$=\int\limits_{s[a,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\,\Phi(\tau)+\int\limits_{s[\zeta,a]} d\tau\,\Phi(\tau)+\int\limits_{s[\zeta+\varepsilon h,\zeta]} d\tau\,\Phi(\tau)-\int\limits_{s[\zeta+\varepsilon h,\zeta]} d\tau\,\Phi(\tau)=$$

$$=\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\tau\,\Phi(\tau)+\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\,\Phi(\tau)=\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\,\Phi(\tau). \tag{4.87}$$

Тепер, враховуючи рівність (4.87), лему 4.2.1 і неперервність відображення Φ, отримуємо співвідношення

$$\left\|\frac{\Psi(\zeta+\varepsilon h)-\Psi(\zeta)}{\varepsilon}-h\Phi(\zeta)\right\|=\left\|\frac{\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]}d\tau\,\Phi(\tau)}{\varepsilon}-h\Phi(\zeta)\right\|=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]}d\tau\Big(\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\Big)\right\|\le\frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\|d\tau\|\le$$

$$\le\frac{c}{\varepsilon}\sup_{\tau,\zeta\in\Omega_\zeta,\,\|\tau-\zeta\|\le\varepsilon}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]}\|d\tau\|\le$$

$$\le c\,\|h\|\sup_{\tau,\zeta\in\Omega_\zeta,\,\|\tau-\zeta\|\le\varepsilon}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\to0,\qquad\varepsilon\to0. \tag{4.88}$$

Із співвідношення (4.88) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\Psi(\zeta+\varepsilon h)-\Psi(\zeta)}{\varepsilon}=h\Phi(\zeta),$$

наслідком якої є рівність (4.86).

Оскільки в довільному околі точки ζ відображення Φ є правою похідною Гато відображення $\Psi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, то в силу теореми 4.1.13, відображення Φ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Теорему доведено.

Теорема 4.2.9. *Нехай $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$. Якщо відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервне в області Ω_ζ і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{4.89}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ такого, що $\overline{\triangle_\zeta}\subset\Omega_\zeta$, то відображення $\widehat{\Phi}$ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ.

4.2.4. Аналог інтегральної формули Коші

Для встановлення інтегральної формули Коші розглянемо допоміжні твердження.

Наслідком представлення (4.31) і правил множення (4.1) є наступне твердження.

Лема 4.2.3. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *опукла в напрямку множин* M_ζ^1, M_ζ^2 *і* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. *Нехай також в області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, *а* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *— довільна спрямлювана крива. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = e_1 \int\limits_{\gamma_1} F_1(\xi_1)d\xi_1 + e_2 \int\limits_{\gamma_2} F_2(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+e_3 \int\limits_{\gamma_1} F_3(\xi_1)d\xi_1 + e_4 \int\limits_{\gamma_2} F_4(\xi_2)d\xi_2\,, \tag{4.90}$$

де γ_1, γ_2 *— образи кривої* γ_ζ *при відображенні функціоналами* f_1, f_2, *а* F_1, F_2, F_3, F_4 *— функції, визначені в рівності (4.31).*

Аналогічно наслідком представлення (4.32) і правил множення (4.1) є наступне твердження.

Лема 4.2.4. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *опукла в напрямку прямих* M_ζ^1, M_ζ^2 *і* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. *Нехай також в області* Ω_ζ *визначене ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, *а* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *— довільна спрямлювана крива. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)d\zeta = e_1 \int\limits_{\gamma_1} \widehat{F}_1(\xi_1)d\xi_1 + e_2 \int\limits_{\gamma_2} \widehat{F}_2(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+e_3 \int\limits_{\gamma_2} \widehat{F}_3(\xi_2)d\xi_2 + e_4 \int\limits_{\gamma_1} \widehat{F}_4(\xi_1)d\xi_1\,, \tag{4.91}$$

де γ_1, γ_2 *— образи кривої* γ_ζ *при відображенні функціоналами* f_1, f_2, *а* $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3$, $\widehat{F}_4$ *— функції, визначені в рівності (4.32).*

Нехай $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \in E_m$. Обернений елемент ζ^{-1} має вигляд

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\xi_1} e_1 + \frac{1}{\xi_2} e_2 \tag{4.92}$$

і існує тоді і тільки тоді, коли $\xi_1 \neq 0$ і $\xi_2 \neq 0$.

Нехай $\zeta_0 = \xi_{10} e_1 + \xi_{20} e_2$ — фіксована точка області $\Omega_\zeta \subset E_m$. В околі ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром в точці ζ_0. Через $C_k \subset \mathbb{C}$ позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні функціоналом f_k, $k = 1, 2$.

Вважатимемо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* $\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in M_\zeta^1\cup M_\zeta^2\}$. Це означає, що C_k є межею деякої області D'_k і $\xi_{k0}\in D'_k$, $\quad k=1,2$.

Будемо казати, що крива $\gamma_\zeta\subset\Omega_\zeta$ *охоплює один раз множину* $\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in M_\zeta^1\cup M_\zeta^2\}$, якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ_ζ в області $\Omega_\zeta\setminus\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in M_\zeta^1\cup M_\zeta^2\}$.

В наступних теоремах встановлено аналоги інтегральної формули Коші для G-моногенних відображень в області Ω_ζ.

Теорема 4.2.10. *Нехай область $\Omega_\zeta\subset E_m$ опукла в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2 і $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$, а відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0\in\Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_0)\cdot\Phi(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta}\widehat{\Phi}(\zeta)(\zeta-\zeta_0)^{-1}d\zeta\,\Phi(\zeta),$$

де γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in M_\zeta^1\cup M_\zeta^2\}$.

Доведення. Оскільки крива γ_ζ гомотопна колу $C(\zeta_0)$ в області $\Omega_\zeta\setminus\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in M_\zeta^1\cup M_\zeta^2\}$, то з теореми 4.2.6 випливає, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta}(\zeta-\zeta_0)^{-1}d\zeta\,\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(\zeta_0)}\widehat{\Phi}(\zeta)(\zeta-\zeta_0)^{-1}d\zeta\,\Phi(\zeta).$$

Крім того, використовуючи представлення (4.92), лему 4.2.3 та інтегральну формулу Коші для аналітичних функцій $F_n, n=1,2,3,4$, отримуємо такі рівності:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(\zeta_0)}\widehat{\Phi}(\zeta)\,(\zeta-\zeta_0)^{-1}d\zeta\,\Phi(\zeta)=$$

$$=e_1\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\widehat{F}_1(\xi_1)\,F_1(\xi_1)}{\xi_1-\xi_{10}}d\xi_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{\widehat{F}_3(\xi_2)\,F_4(\xi_2)}{\xi_2-\xi_{20}}d\xi_2\right)+$$

$$+e_2\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{\widehat{F}_2(\xi_2)\,F_2(\xi_2)}{\xi_2-\xi_{20}}d\xi_2+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\widehat{F}_4(\xi_1)\,F_3(\xi_1)}{\xi_1-\xi_{10}}d\xi_1\right)+$$

$$+e_3\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\widehat{F}_1(\xi_1)\,F_3(\xi_1)}{\xi_1-\xi_{10}}d\xi_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{\widehat{F}_3(\xi_2)\,F_2(\xi_2)}{\xi_2-\xi_{20}}d\xi_2\right)+$$

$$+e_4\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{\widehat{F}_2(\xi_2)\,F_4(\xi_2)}{\xi_2-\xi_{20}}d\xi_2+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\widehat{F}_4(\xi_1)\,F_1(\xi_1)}{\xi_1-\xi_{10}}d\xi_1\right)=$$

$$=e_1\left(\widehat{F}_1(\xi_{10})\,F_1(\xi_{10})+\widehat{F}_3(\xi_{20})\,F_4(\xi_{20})\right)+e_2\left(\widehat{F}_2(\xi_{20})\,F_2(\xi_{20})+\widehat{F}_4(\xi_{10})\,F_3(\xi_{10})\right)+$$

$$+e_3\left(\widehat{F}_1(\xi_{10})\,F_3(\xi_{10})+\widehat{F}_3(\xi_{20})\,F_2(\xi_{20})\right)+e_4\left(\widehat{F}_1(\xi_{10})\,F_1(\xi_{10})+\widehat{F}_3(\xi_{20})\,F_4(\xi_{20})\right)=$$

$$=\widehat{\Phi}(\zeta_0)\cdot\Phi(\zeta),$$

де $\zeta_0=\xi_{10}e_1+\xi_{20}e_2$. Теорему доведено.

4.2.5. Степеневі ряди і ряди Лорана для G-моногенних відображень

Розглядаючи питання про розклад G-моногенного відображення в степеневий ряд (ряд Тейлора), будемо вважати область $\Omega_\zeta\subset E_m$ обмеженою.

Нехай $\zeta_0=\sum\limits_{u=1}^{m}x_{u0}i_u$ — довільна фіксована точка області Ω_ζ. Поставимо їй у відповідність точки комплексної площини $\xi_{10}:=x_{10}+\sum\limits_{u=2}^{m}a_ux_{u0}$, $\xi_{20}:=x_{10}+\sum\limits_{u=2}^{m}b_ux_{u0}$ де a_u, b_u — коефіцієнти розкладу (4.4) при $u=2,3,...,m$.

Позначимо $R_0:=\min\limits_{\zeta\in\partial\Omega_\zeta}\|\zeta-\zeta_0\|$, де через $\partial\Omega_\zeta$ позначено межу області $\Omega_\zeta\subset E_m$. Розглянемо кулю $\Theta(\zeta_0,R_0):=\{\zeta\in E_m:\|\zeta-\zeta_0\|<R_0\}\subset E_m$ радіуса R_0 з центром в точці ζ_0, а через G_1 і G_2 позначимо області в $\mathbb{C}$, на які куля $\Theta(\zeta_0,R_0)$ відображається функціоналами f_1 і f_2 відповідно.

Нехай $R:=\min\Big\{R_0\,,\min\limits_{\tau_1\in\partial G_1}|\tau_1-\xi_{10}|\,,\min\limits_{\tau_2\in\partial G_2}|\tau_2-\xi_{20}|\Big\}$, де через ∂G_1 і ∂G_2 позначено межі областей G_1 і G_2 відповідно. Через $U(\xi_{10},R):=\{\xi_1\in\mathbb{C}:$

$|\xi_1 - \xi_{10}| < R\}$, $U(\xi_{20}, R) := \{\xi_2 \in \mathbb{C} : |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$ позначимо круги радіуса R в комплексній площині з центрами в точках ξ_{10} і ξ_{20} відповідно.

Безпосереднє застосування способу розкладу аналітичної функції, що базується на розкладі ядра Коші в ряд (див., наприклад, [30, с. 94]), до право-G-моногенного відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, дозволяє отримати його розклад в степеневий ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n, \tag{4.93}$$

а до ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — розклад в степеневий ряд

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{p}_n (\zeta - \zeta_0)^n \tag{4.94}$$

в кулі з центром у фіксованій точці $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ радіуса меншого, ніж відстань від точки ζ_0 до межі $\partial\Omega_\zeta$. Тут

$$p_n = \frac{\Phi^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Big((\tau - \zeta_0)^{-1} \Big)^{n+1} d\tau \, \Phi(\tau);$$

$$\widehat{p}_n = \frac{\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\tau) \Big((\tau - \zeta_0)^{-1} \Big)^{n+1} d\tau,$$

а γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in M_\zeta^1 \cup M_\zeta^2\}$ і лежить в кулі, яка повністю міститься в області Ω_ζ. Це пов'язано з тим, що в нерівності $\|ab\| \le c\,\|a\|\|b\|$ константа c не може бути замінена одиницею.

Далі покажемо, що представлення (4.31) дозволяє отримати розклад право-G-моногенного відображення в степеневий ряд (4.93), а представлення (4.32) — розклад ліво-G-моногенного відображення в степеневий ряд (4.94) в області

$$B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_m : f_1(\zeta) \in U(\xi_{10}, R)\,, f_2(\zeta) \in U(\xi_{20}, R)\}.$$

Оскільки за побудовою область $B(\zeta_0, R)$ опукла в напрямку множин M_ζ^1 і M_ζ^2, то право-G-моногенне в $B(\zeta_0, R)$ відображення Φ подається у вигляді (4.31), а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$ — у вигляді (4.32).

Теорема 4.2.11. *Нехай* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-G-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0, R)$ *відображення* Φ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду (4.93), в якому*

$$p_n = a_n e_1 + b_n e_2 + c_n e_3 + d_n e_4 \tag{4.95}$$

і a_n, b_n, c_n, d_n *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \end{aligned} \tag{4.96}$$

які містяться у представленні (4.31) відображення Φ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Доведення. Оскільки у представленні (4.31) функції F_1, F_3 голоморфні в крузі $U(\xi_{10}, R)$, а функції F_2, F_4 голоморфні в крузі $U(\xi_{20}, R)$, то у відповідних кругах ряди (4.96) абсолютно збіжні. Тоді при всіх $\zeta \in B(\zeta_0, R)$ рівність (4.31) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_2 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_3 + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_4.$$

Тепер, враховуючи співвідношення

$$\begin{aligned} (\zeta - \zeta_0)^n e_1 &= (\xi_1 - \xi_{10})^n e_1, \quad (\zeta - \zeta_0)^n e_2 = (\xi_2 - \xi_{20})^n e_2, \\ (\zeta - \zeta_0)^n e_3 &= (\xi_1 - \xi_{10})^n e_3, \quad (\zeta - \zeta_0)^n e_4 = (\xi_2 - \xi_{20})^n e_4 \end{aligned} \tag{4.97}$$

для всіх $\zeta \in E_m$ і $n = 0, 1, \ldots$, приходимо до розкладу (4.93), коефіцієнти якого визначаються рівністю (4.95), при цьому ряд (4.93) абсолютно збігається в області $B(\zeta_0, R)$. Теорему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 4.2.12. *Нехай* $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$, *відображення* $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є ліво-*G*-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0\in\Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0,R)$ *відображення* $\widehat{\Phi}$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду (4.94), в якому*

$$\widehat{p}_n=\widehat{a}_ne_1+\widehat{b}_ne_2+\widehat{c}_ne_3+\widehat{d}_ne_4 \tag{4.98}$$

і $\widehat{a}_n$, $\widehat{b}_n$, $\widehat{c}_n$, $\widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{a}_n(\xi_1-\xi_{10})^n,\qquad \widehat{F}_2(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{b}_n(\xi_2-\xi_{20})^n,$$
$$\widehat{F}_3(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{c}_n(\xi_2-\xi_{20})^n,\qquad \widehat{F}_4(\xi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{d}_n(\xi_1-\xi_{10})^n,$$

які містяться у представленні (4.32) відображення $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta\in B(\zeta_0,R)$.

Наступна теорема є аналогом теореми єдиності для право-G-моногенних відображень, які визначені в області $\Omega_\zeta\subset E_m$ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 4.2.13. *Нехай* $f_1(E_m)=f_2(E_m)=\mathbb{C}$. *Якщо два право-*$G$*-моногенні відображення* $\Phi_1:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\Phi_2:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в довільній області* $\Omega_\zeta\subset E_m$ *співпадають в деякому околі довільної внутрішньої точки області* Ω_ζ, *то вони тотожно рівні у всій області* Ω_ζ.

Доведення. Нехай в околі $\omega(\zeta_0,R):=\{\zeta\in E_m:\|\zeta-\zeta_0\|<R\}$ довільної точки $\zeta_0\in\Omega_\zeta$ справедливе співвідношення

$$\Phi_1(\zeta)\equiv\Phi_2(\zeta). \tag{4.99}$$

Оскільки куля $\omega(\zeta_0,R)$ є опуклою множиною, то для відображень Φ_1,Φ_2 справедливі подання вигляду (4.31):

$$\Phi_1(\zeta)=F_1(\xi_1)e_1+F_2(\xi_2)e_2+F_3(\xi_1)e_3+F_4(\xi_2)e_4\,,$$

$$\Phi_2(\zeta)=H_1(\xi_1)e_1+H_2(\xi_2)e_2+H_3(\xi_1)e_3+H_4(\xi_2)e_4\,.$$

Із співвідношення (4.99) випливають наступні співвідношення

$$F_1 \equiv H_1, \quad F_3 \equiv H_3 \quad \text{в області} \quad f_1\big(\omega(\zeta_0, R)\big), \tag{4.100}$$

$$F_2 \equiv H_2, \quad F_4 \equiv H_4 \quad \text{в області} \quad f_2\big(\omega(\zeta_0, R)\big). \tag{4.101}$$

За теоремою єдиності для голоморфних функцій комплексної змінної (див., наприклад, [30, с. 104]), рівності (4.100) справедливі всюди в області $f_1(\Omega_\zeta)$, а рівності (4.101) — всюди в області $f_2(\Omega_\zeta)$. Це і означає, враховуючи єдиність розкладу за базисом, що співвідношення (4.99) справедливе всюди в області Ω_ζ. Теорему доведено.

Аналогічна теорема справедлива і для ліво-G-моногенних відображень.

Теорема 4.2.14. *Нехай $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. Якщо два ліво-$G$-моногенні відображення $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в довільній області $\Omega_\zeta \subset E_m$ співпадають в деякому околі довільної внутрішньої точки області Ω_ζ, то вони тотожно рівні у всій області Ω_ζ.*

Зазначимо, що співпадання відображень $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ на множині точок, яка містить хоча б одну граничну точку області Ω_ζ, є недостатнім для тотожної рівності цих відображень у всій області Ω_ζ. Так, наприклад, значення G-моногенних в E_m відображень $\Phi_1(\zeta) = \zeta e_3$ і $\Phi_2(\zeta) = 0$ співпадають для всіх $\zeta \in M_\zeta^2$, проте не співпадають тотожно.

Далі розглянемо питання про ряди Лорана G-моногенних відображень і здійснимо класифікацію особливих точок.

В теоремі 4.1.12 встановлено, що у випадку, коли область Ω_ζ опукла в напрямку множин M_ζ^1 і M_ζ^2, G-моногенне в області Ω_ζ відображення продовжується до відображення, G-моногенного в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_m : f_1(\zeta) \in D_1, f_2(\zeta) \in D_2\}$. Тому, розглядаючи питання про розклад G-моногенного відображення в ряд Лорана відносно точки $\zeta_0 = \sum\limits_{u=1}^{m} x_{u0} i_u$, будемо вважати, що воно задане в необмеженій області

$$\mathcal{K}_\zeta := \{\zeta \in E_m : 0 \le r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty \,, 0 \le r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\} \,.$$

Теорема 4.2.15. *Нехай* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n \,, \tag{4.102}$$

де $(\zeta - \zeta_0)^n := \big((\zeta - \zeta_0)^{-1}\big)^{-n}$ *при* $n = -1, -2, \ldots$, *і коефіцієнти* p_n *визначаються формулами (4.95), в яких* a_n, b_n, c_n, d_n *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad & F_2(\xi_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad & F_4(\xi_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \end{aligned} \tag{4.103}$$

які містяться в розкладі (4.31) відображення Φ *при* $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$.

Доведення. Оскільки в поданні (4.31) функції F_1, F_3 голоморфні в кільці $\{\xi_1 \in \mathbb{C} : r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R\}$, а функції F_2, F_4 голоморфні в кільці $\{\xi_2 \in \mathbb{C} : r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$, то ряди (4.103) у відповідних кільцях абсолютно збіжні. Використовуючи розклади (4.103), рівність (4.31) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_2 +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_3 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_4.$$

Тепер, враховуючи співвідношення (4.97), які виконуються при всіх цілих значеннях n, отримуємо розклад відображення Φ в абсолютно збіжний в області $\mathcal{K}_\zeta$ ряд (4.102), коефіцієнти якого визначаються рівностями (4.95). Теорему доведено.

Повністю аналогічно доводиться розклад у ряд Лорана ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}$.

Теорема 4.2.16. *Нехай* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{p}_n(\zeta - \zeta_0)^n \,, \tag{4.104}$$

де $(\zeta - \zeta_0)^n := \big((\zeta - \zeta_0)^{-1}\big)^{-n}$ *при* $n = -1, -2, \ldots$ *і коефіцієнти* $\widehat{p}_n$ *визначаються формулами (4.98), в яких* $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{c}_n, \widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{b}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$
$$\widehat{F}_3(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{d}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n,$$

які містяться в розкладі (4.32) відображення $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$.

Сукупність членів ряду Лорана (4.102) або (4.104) з невід'ємними степенями називають його *правильною частиною*, а сукупність членів цього ряду з від'ємними степенями — *головною частиною* ряду Лорана.

Компактифікуємо алгебру $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, додаючи до неї нескінченно віддалену точку ∞, до якої прямує кожна послідовність $w_n := \tau_{1,n}e_1+\tau_{2,n}e_2+\tau_{3,n}e_3+\tau_{4,n}e_4$, де $\tau_{1,n}$, $\tau_{2,n}$, $\tau_{3,n}$, $\tau_{4,n} \in \mathbb{C}$, у випадку коли хоча б одна з послідовностей $\tau_{1,n}$, $\tau_{2,n}$, $\tau_{3,n}$, $\tau_{4,n}$ збігається до нескінченно віддаленої точки розширеної комплексної площини.

Спираючись на теореми 4.2.15, 4.2.16 здійснимо класифікацію особливих точок G-моногенних відображень.

Припустимо, що право-G-моногенне відображення $\Phi : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ задані в області

$$\mathcal{K}_\zeta^0 := \{\zeta \in E_m : 0 < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \leq \infty \,, 0 < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \leq \infty\} \,.$$

Позначимо через $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 := \{\zeta \in E_m : |\xi_1 - \xi_{10}| < R \,, |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.2.17. *Нехай* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$. *Якщо розклад* (4.102) *відображення* $\Phi : \mathcal{K}^0_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$:

1) *не містить головної частини, то відображення* Φ *має скінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + \zeta^*, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M^1_\zeta \cup M^2_\zeta\}}} \Phi(\zeta) \tag{4.105}$$

2) *містить лише скінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1, 2$ *відображення* Φ *має нескінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + \zeta^*_k, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^*_k : \zeta^*_k \in M^k_\zeta\}}} \Phi(\zeta) \tag{4.106}$$

в усіх точках $\zeta_0 + \zeta^*_k \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + \zeta^*_k : \ \zeta^*_k \in M^k_\zeta\}$;

3) *містить нескінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1, 2$ *відображення* Φ *або має нескінченну границю, або не має ні скінченної, ні нескінченної границі в усіх точках* $\zeta_0 + \zeta^*_k \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + \zeta^*_k : \zeta^*_k \in M^k_\zeta\}$.

Доведення. Відображення Φ в області $\mathcal{K}^0_\zeta$ подається у вигляді (4.31), де функції F_1, F_3 голоморфні в проколотому околі $U(\xi_{10}, R) \setminus \{\xi_{10}\}$ точки ξ_{10}, а функції F_2, F_4 голоморфні в проколотому околі $U(\xi_{20}, R) \setminus \{\xi_{20}\}$ точки ξ_{20}.

Розглянемо випадок, коли розклад (4.102) не містить головної частини, тобто має вигляд (4.93). При цьому коефіцієнти рядів Лорана (4.103) пов'язані з коефіцієнтами ряду (4.93) співвідношеннями (4.95), з яких, в силу рівностей $p_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$, слідують рівності $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ при всіх від'ємних індексах n. Отже, ряди Лорана (4.103) в околах відповідних точок ξ_{10}, ξ_{20} є рядами Тейлора своїх сум і тому функції F_1, F_2, F_3, F_4 з рівності (4.31) є голоморфними у відповідних областях $U(\xi_{10}, R)$ чи $U(\xi_{20}, R)$. Тому відображення (4.31) має скінченні границі (4.105) в усіх точках множини $\widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \left\{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M^1_\zeta \cup M^2_\zeta\right\}$.

Розглянемо тепер випадок, коли головна частина розкладу (4.102) містить лише скінченне число доданків, тобто в (4.102) тільки скінченне число відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (4.95), які пов'язують коефіцієнти рядів Лорана (4.103) з коефіцієнтами ряду (4.102), випливає, що всі головні частини рядів (4.103) не містять нескінченної кількості доданків і головна частина хоча б одного з них відмінна від тотожного нуля. Тому точка ξ_{10} не є істотно особливою точкою для функцій F_1, F_3, а точка ξ_{20} — для функцій F_2 і F_4, але хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має полюс у відповідній точці. Звідси випливає, що хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має нескінченну границю при $\xi_1 \to \xi_{10}$ чи при $\xi_2 \to \xi_{20}$, тобто границя (4.106) є також нескінченною при $k = 1$ або $k = 2$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли головна частина розкладу (4.102) містить нескінченно багато відмінних від нуля членів, тобто існує нескінченно багато відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (4.95) випливає, що головна частина хоча б одного з рядів (4.103) містить нескінченно багато доданків, а це, в свою чергу, означає, що або точка ξ_{10} є істотно особливою для функцій F_1 чи F_3, або точка ξ_{20} є істотно особливою, принаймні, для однієї з функцій: F_2 чи F_4. Тому відображення Φ не може мати скінченної границі в усіх точках множини $\widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M^1_\zeta \cup M^2_\zeta\}$, але воно може мати в цих точках нескінченну границю. Теорему доведено.

Наприклад, якщо ξ_{10} — полюс функції F_1 і істотно особлива точка функції F_3, а ξ_{20} — істотно особлива точка функцій F_2, F_4, то функція F_1 має нескінченну границю в точці ξ_{10}, а отже, границя (4.106) є нескінченною в усіх точках $\zeta_0 + \zeta_1^* \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \zeta_1^* \in M^1_\zeta\}$.

У випадку, коли, наприклад, $F_2 \equiv 0$, $F_3 \equiv 0$, $F_4 \equiv 0$ і точка ξ_{10} є істотно особливою для функції F_1, відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі (4.106) в усіх точках $\zeta_0 + \zeta_1^* \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \zeta_1^* \in M^1_\zeta\}$.

Аналогічні твердження справедливі для ліво-G-моногенних відображень.

Поняття усувної особливої точки, полюса або істотно особливої точки для G-моногенного в області $\mathcal{K}^0_\zeta$ відображення $\Phi : \mathcal{K}^0_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вводяться так, як і відповідні поняття для аналітичних функцій в комплексній площині (див., наприклад, [30, с. 119]). А саме, точка ζ_0 називається:

1) *усувною особливою точкою* відображення Φ, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M_\zeta^1 \cup M_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) = A;$$

2) *полюсом* відображення Φ, якщо існує нескінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M_\zeta^1 \cup M_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) = \infty;$$

3) *істотно особливою точкою* відображення Φ, якщо відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі при $\zeta \to \zeta_0$ і $\zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in M_\zeta^1 \cup M_\zeta^2\}$.

Повністю аналогічно вводяться поняття усувної точки, полюса та істотно особливої точки для ліво-G-моногенних відображень $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

З теореми 4.2.17 випливає, що ізольована особлива точка у G-моногенного відображення може бути лише усувною, а у випадку, коли відображення має неусувну особливість в точці ζ_0, особливими є всі точки хоча б однієї з множин $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \ \zeta_1^* \in M_\zeta^1\}$ або $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_2^* : \ \zeta_2^* \in M_\zeta^2\}$.

4.3. Кватерніонні H-моногенні відображення

У цьому підрозділі введено клас кватерніонних H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень і встановлено зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями. Доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [191].

4.3.1. Властивості H-моногенних відображень

Означення 4.3.5. *Неперервне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду (4.8) будемо називати* H*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$, *якщо* Φ *диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці* $\zeta \in \Omega_\zeta$, *тобто якщо компоненти відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними* $x_1, x_2, ..., x_m$, *і формальний диференціал відображення*

$$d\Phi := \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial U_q}{\partial x_u} \, dx_u e_q \tag{4.107}$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} dx_u i_u$, *тобто*

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s \, d\zeta \, B_s \,, \tag{4.108}$$

де A_s, B_s *— деякі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$*–значні функції.*

Відмітимо, якщо частинні похідні першого порядку функцій U_q при $q = 1, 2, 3, 4$ існують і неперервні, то формальний диференціал (4.107) є повним диференціалом відображення Φ, тобто головною частиною приросту цього відображення.

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ будемо називати *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ в точці ζ.

Покажемо, що означення похідної Φ'_H коректне.

Теорема 4.3.1. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є* H*-моногенним в області* Ω_ζ, *то його похідна* Φ'_H *існує і не залежить від вибору функцій* A_s, B_s *в рівності* (4.108), *при цьому*

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \tag{4.109}$$

Доведення. Внаслідок H-моногенності відображення Φ виконується рівність

$$\sum_{s=1}^{16} A_s d\zeta B_s = \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial U_q}{\partial x_u} dx_u e_q \,. \tag{4.110}$$

Нехай

$$A_s = a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4 \,, \qquad (4.111)$$
$$B_s = b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4$$

для $s = 1, 2, \ldots, 16$. Враховуючи рівність

$$d\zeta = \left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right)e_1 + \left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right)e_2$$

і (4.111), отримуємо:

$$A_s d\zeta B_s = (a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4)\left[\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right)e_1 + \right.$$
$$\left. + \left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right)e_2\right](b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4) =$$
$$= \left(a_{s1}b_{s1}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right) + a_{s3}b_{s4}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right)\right)e_1 +$$
$$+ \left(a_{s2}b_{s2}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right) + a_{s4}b_{s3}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right)\right)e_2 +$$
$$+ \left(a_{s1}b_{s3}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right) + a_{s3}b_{s2}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right)\right)e_3 +$$
$$+ \left(a_{s2}b_{s4}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} b_u x_u\right) + a_{s4}b_{s1}\left(dx_1 + \sum_{u=1}^{m} a_u x_u\right)\right)e_4 \,. \qquad (4.112)$$

Наслідком рівностей (4.110) і (4.112) є співвідношення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4} \,, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s2} + a_{s4}b_{s3} \,,$$
$$\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s3} + a_{s3}b_{s2} \,, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial x_1} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s4} + a_{s4}b_{s1} \qquad (4.113)$$

З урахуванням рівностей (4.111), маємо

$$\Phi'_H(\zeta) := \sum_{s=1}^{16} A_s B_s = \sum_{s=1}^{16} \Big((a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4})e_1 +$$

$$+(a_{s2}b_{s2}+a_{s4}b_{s3})e_2+(a_{s1}b_{s3}+a_{s3}b_{s2})e_3+(a_{s2}b_{s4}+a_{s4}b_{s1})e_4\Big).$$

звідки, враховуючи співвідношення (4.113), отримуємо

$$\Phi'_H(\zeta)=\frac{\partial U_1}{\partial x_1}e_1+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}e_2+\frac{\partial U_3}{\partial x_1}e_3+\frac{\partial U_4}{\partial x_1}e_4=\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}.$$

Теорему доведено.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.3.2. *Якщо відображення* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\Psi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є* H*-моногенними в області* Ω_ζ*, то добуток* $\Phi\cdot\Psi$ *також є* H*-моногенним відображенням в* Ω_ζ*, при цьому*

$$d(\Phi\cdot\Psi)=d\Phi\cdot\Psi+\Phi\cdot d\Psi.$$

Доведення. Нехай

$$\Phi(\zeta)=\sum_{q=1}^{4}U_q(x_1,x_2,...,x_m)e_q\,,\quad \Psi(\zeta)=\sum_{q=1}^{4}V_q(x_1,x_2,...,x_m)e_q\,.$$

Тоді

$$d\Phi=\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial U_q}{\partial x_u}dx_u e_q\,,\qquad d\Psi=\sum_{q=1}^{4}\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial V_q}{\partial x_u}dx_u e_q$$

і

$$d(\Phi\cdot\Psi)=d\Big(U_1V_1+U_3V_4\Big)e_1+d\Big(U_2V_2+U_4V_3\Big)e_2+$$
$$+d\Big(U_1V_3+U_3V_2\Big)e_3+d\Big(U_2V_4+U_4V_1\Big)e_4=$$
$$=e_1\sum_{u=1}^{m}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_u}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial x_u}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial x_u}V_4+\frac{\partial V_4}{\partial x_u}U_3\right)dx_u+$$
$$+e_2\sum_{u=1}^{m}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_u}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial x_u}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial x_u}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial x_u}U_4\right)dx_u+$$
$$+e_3\sum_{u=1}^{m}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_u}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial x_u}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial x_u}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial x_u}U_3\right)dx_u+$$

$$+e_4 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_u} V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x_u} U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial x_u} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_u} U_4 \right) dx_u.$$

Перетворимо отриманий вираз до наступного вигляду:

$$e_1 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_u} V_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_u} V_4 \right) dx_u + e_2 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_u} V_2 + \frac{\partial U_4}{\partial x_u} V_3 \right) dx_u +$$

$$+e_3 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_u} V_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_u} V_2 \right) dx_u + e_4 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_u} V_4 + \frac{\partial U_4}{\partial x_u} V_1 \right) dx_u +$$

$$+e_1 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_u} U_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_u} U_4 \right) dx_u + e_2 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_u} U_2 + \frac{\partial V_4}{\partial x_u} U_3 \right) dx_u +$$

$$+e_3 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_u} U_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x_u} U_2 \right) dx_u + e_4 \sum_{u=1}^{m} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_u} U_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x_u} U_1 \right) dx_u,$$

звідки будемо мати

$$\Big(V_1 dU_1 + V_4 dU_3\Big) e_1 + \Big(V_2 dU_2 + V_3 dU_4\Big) e_2 + \Big(V_3 dU_1 + V_2 dU_3\Big) e_3 +$$
$$+\Big(V_4 dU_2 + V_1 dU_4\Big) e_4 + \Big(U_1 dV_1 + U_3 dV_4\Big) e_1 + \Big(U_2 dV_2 + U_4 dV_3\Big) e_2 +$$
$$+\Big(U_1 dV_3 + U_3 dV_2\Big) e_3 + \Big(U_2 dV_4 + U_4 dV_1\Big) e_4 = d\Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot d\Psi.$$

Теорему доведено.

В силу теореми 4.3.2 множина H-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ утворює функціональну алгебру, оскільки добуток двох H-моногенних відображень також є H-моногенним відображенням.

4.3.2. Теорема про еквівалентні означення G-моногенних відображень

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями.

Теорема 4.3.3. *Кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ є H-моногенним відображенням в цій області.*

Доведення. Нехай Φ — право-G-моногенне відображення. Тоді існування частинних похідних першого порядку від компонент відображення Φ випливає з існування похідної Гато (рівність (4.6)). Покажемо тепер, що диференціал

$$d\Phi = \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_u}\, dx_u \tag{4.114}$$

подається у вигляді (4.108).

Для цього відмітимо, що наслідком рівності (4.114) і умов (4.12) є рівність

$$d\Phi = \sum_{u=1}^{m} i_u \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\, dx_u = d\zeta\, \Phi'(\zeta)$$

тобто представлення вигляду (4.108), в якому $A_1 = 1, B_1 = \Phi'(\zeta)$.

Аналогічно встановлюється, що наслідком рівності (4.114) при $\Phi = \widehat{\Phi}$ і умов (4.13) є рівність

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'(\zeta) d\zeta,$$

тобто знову представлення вигляду (4.108), в якому $A_1 = \widehat{\Phi}'(\zeta), B_1 = 1$. Теорему доведено.

Означення 4.3.6. *H-моногенне відображення Φ, диференціал якого подається у вигляді*

$$d\Phi = d\zeta\, \Phi'_H(\zeta) \tag{4.115}$$

будемо називати право-H-моногенним в області Ω_ζ.

Означення 4.3.7. *H-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$, диференціал якого подається у вигляді*

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'_H(\zeta) d\zeta \tag{4.116}$$

будемо називати ліво-H-моногенним в області Ω_ζ.

Встановимо необхідні і достатні умови G-моногенності відображення.

Теорема 4.3.4. *Відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *(або* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *) вигляду (4.8) є право-*G*-моногенним (або ліво-*G*-моногенним) тоді і тільки тоді, коли воно право-*H*-моногенне (або відповідно ліво-*H*-моногенне) і його компоненти* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними в області* Ω*.*

Доведення. Необхідність доведена при доведенні теореми 4.3.3. Доведемо достатність. Нехай відображення Φ — право-H-моногенне, тобто виконується рівність (4.115). Наслідком рівностей (4.114) і (4.115) є рівність

$$\sum_{u=1}^{m} i_u \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\, dx_u = d\zeta \Phi'_H(\zeta).$$

З урахуванням рівностей (4.109) і $d\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} dx_u i_u$ маємо тотожність

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_u}\, dx_u = \sum_{u=1}^{m} i_u \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\, dx_u,$$

наслідком якої є умови Коші–Рімана (4.12). Тоді за теоремою 4.1.11 відображення Φ — право-G-моногенне.

Аналогічно розглядається випадок ліво-H-моногенного відображення. Теорему доведено.

З теорем 4.1.9 і 4.3.4 випливає

Наслідок 4.3.1. *Якщо область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *опукла в напрямку множин* M_ζ^1*,* M_ζ^2 *і* $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$*, то кожне право-*$H$*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *з* $\mathbb{R}$*-диференційовними в* Ω *компонентами* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *подається у вигляді (4.31), а кожне ліво-*H*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *з* $\mathbb{R}$*-диференційовними в* Ω *компонентами* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *подається у вигляді (4.32).*

Наступна теорема містить критерій право-G-моногенності і ліво-G-моногенності відображень.

Теорема 4.3.5. *Відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($*або* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *компоненти* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *розкладу (4.8) є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω *і виконуються умови (4.12)* $\big($*або (4.13)*$\big)$ *в кожній точці області* Ω_ζ*;*

(II) *компоненти* $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ *розкладу (4.8) є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω *і відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *є право-*H*-моногенним* $\big($*або ліво-*H*-моногенним*$\big)$ *в області* Ω_ζ*.*

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$*, то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(III) *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл, в якому відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *розкладається в степеневий ряд (4.93)* $\big($*або (4.94)*$\big)$*;*

(IV) *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *неперервне і виконується рівність (4.85)* $\big($*або (4.89)*$\big)$ *для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$*.*

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$ *і, крім того, область* $\Omega_\zeta \subset E_m$ *опукла в напрямку множин* M_ζ^1*,* M_ζ^2*, то відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли*

(V) *існують єдина пара голоморфних в області* D_1 *функцій* F_1, F_3 $\big($*або* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4\big)$ *і єдина пара голоморфних в області* D_2 *функцій* F_2, F_4 $\big($*або* $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3\big)$ *таких, що в області* Ω_ζ *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *подається у вигляді (4.31)* $\big($*або (4.32)*$\big)$.

Доведення. В теоремі 4.1.11 встановлено, що відображення Φ буде право-G-моногенним в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (I). Еквівалентність умови (II) і властивість право-G-моногенності відображення Φ встановлено в теоремі 4.3.4. Доведення еквівалентності умови (III) і право-G-моногенності відображення Φ випливає з теореми 4.2.11 і властивості збіжного ряду (4.93) визначати відображення, право-G-моногенне в області збіжності. Еквівалентність умови (IV) і властивість право-G-моногенності випливає з теореми 4.2.8 і теореми 4.2.6. Нарешті, для доведення еквівалентності умови (V) і право-G-моногенності відображення Φ досить відмітити, що відображення (4.31) право-G-моногенне в області Ω_ζ, а єдиність четвірки F_1, F_2, F_3, F_4

з (4.31) випливає з єдиності розкладу елемента алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ і встановлюється подібно до того, як у зауваженні 2.1.3 доведено єдиність набору голоморфних функцій в зображенні моногенної функції (2.33).

Критерій ліво- G-моногенності відображення $\widehat{\Phi}$ доводиться аналогічно. Теорему доведено.

4.4. Кватерніонні функції, аналітичні за Хаусдорфом

Визначається клас кватерніонних функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Встановлюються співвідношення між відомими означеннями похідних та похідною за Хаусдорфом. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [123].

4.4.1. Аналітичність за Хаусдорфом та похідна Хаусдорфа

В роботі [93] Ф. Хаусдорф запропонував означення аналітичної функції зі значеннями в комплексній асоціативній (комутативній чи ні) алгебрі $\mathbb{A}$ з одиницею. Реалізуємо підхід Хаусдорфа для функцій зі значеннями в алгебрі дійсних кватерніонів $\mathbb{H}$. Позначимо через $e_1 = 1$, e_2, e_3, e_4 вектори канонічного базису, тобто $e_1 = 1, e_2 = i, e_3 = j, e_4 = k$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{H}$. Розглядаємо функцію $f : \Omega \to \mathbb{H}$ змінної $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ наступного вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} f_k(x)\, e_k\,. \tag{4.117}$$

Означення 4.4.1. *Функція $f : \Omega \to \mathbb{H}$ вигляду (4.117) називається H–аналітичною в області Ω, якщо f є аналітичною за Хаусдорфом в кожній точці $x \in \Omega$, тобто, якщо дійснозначні компоненти f_k є диференційовними функціями чотирьох дійсних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 і якщо диференціал $df_x =$*

$\sum\limits_{k=1}^{4} df_k(x_1,x_2,x_3,x_4)e_k$ *є лінійним однорідним поліномом диференціала* $dx :=$ $dx_1e_1+dx_2e_2+dx_3e_3+dx_4e_4$, *тобто,*

$$df_x=\sum_{s=1}^{16} A_s(x)\,dx\,B_s(x)\,, \tag{4.118}$$

де A_s *і* B_s *— деякі* $\mathbb{H}$*–значні функції змінної* x *.*

У цьому випадку, для кожного $x\in\Omega$ кватерніон

$$f'_H(x):=\sum_{s=1}^{16} A_s(x)\,B_s(x) \tag{4.119}$$

називається *похідною Хаусдорфа* (або коротко H–похідною) функції f в точці x .

Позначимо через $\mathfrak{M}_H(\Omega)$ множину всіх кватерніоннозначних H–аналітичних функцій в області Ω .

Розглянемо деякі приклади кватерніонних H–аналітичних функцій і обчислимо їх H–похідні.

Приклад 4.4.1. Нехай $f_n(x)=x^n$ при $n\in\mathbb{N}$.

Якщо $n=1$, то $f_1(x)=x$ і $df_1=dx=1\cdot dx\cdot 1$. Тому f_1 є H–аналітичною функцією і її похідна рівна

$$f'_{1,H}(x)=1 \qquad \text{для всіх } x.$$

Якщо $n=2$, то $f_2(x)=x^2$ і $df_2(x)=d(x^2)=x\cdot dx+dx\cdot x$. Тому f_2 є H–аналітичною функцією і її похідна рівна

$$f'_{2,H}(x)=(x^2)'_H=x\cdot 1+1\cdot x=2x.$$

Аналогічним чином для функції $f_3(x)=x^3$ маємо:

$$d(x^3)=d(x^2)\cdot x+x^2\cdot dx=x\cdot dx\cdot x+dx\cdot x^2+x^2\cdot dx.$$

Тому f_3 є також H–аналітичною функцією і її похідна рівна

$$f'_{3,H}(x)=(x^3)'_H=x\cdot x+1\cdot x^2+x^2\cdot 1=3x^2.$$

За індукцією показується, що f_n є H–аналітичною при всіх $n \in \mathbb{N}$ з похідною $f'_{n,H}(x) = (x^n)'_H = nx^{n-1}$. Очевидно, що $x^n \cdot a$ та $a \cdot x^n$ також є H–аналітичними для всіх $a \in \mathbb{H}$ і їх H–похідні рівні, відповідно, $n \cdot x^{n-1} \cdot a$ та $a \cdot n \cdot x^{n-1}$. Очевидно, що поліноми $\sum\limits_{n=0}^{m} x^n\, a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{m} a_n\, x^n$ є H–аналітичними і

$$\left(\sum_{n=0}^{m} x^n\, a_n\right)'_H = \sum_{n=1}^{m} nx^{n-1}\, a_n\,, \quad \left(\sum_{n=0}^{m} a_n\, x^n\right)'_H = \sum_{n=1}^{m} na_n\, x^{n-1}\,.$$

Приклад 4.4.2. Оскільки кватерніони некомутативні, то можна розглядати поліноми більш складного вигляду. Спочатку розглянемо поліном $f(x) = x\,a\,x\,b\,x$, де $a, b \in \mathbb{H}$. Тоді

$$d(x\,a\,x\,b\,x) = dx \cdot a\,x\,b\,x + x\,a \cdot dx \cdot b\,x + x\,a\,x\,b \cdot dx.$$

Тому, функція f є H–аналітичною і

$$f'_H(x) = a\,x\,b\,x + x\,a\,b\,x + x\,a\,x\,b.$$

Таким же чином показується, що загальний поліном:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} M_k(x)$$

є H–аналітичною функцією, де одночлен M_k визначається рівністю $M_k := \sum\limits_{\ell=1}^{m} a_{k,\ell,1}\, x\, a_{k,\ell,2}\, x \cdot \ldots \cdot x\, a_{k,\ell,k+1}$, m — натуральне і $a_{k,\ell,p} \in \mathbb{H}$.

В наступній теоремі описуються усі кватерніонні H–аналітичні функції та їх H–похідні.

Теорема 4.4.1. *Кожна кватерніонна функція з диференційовними дійснозначними компонентами є H–аналітичною.*

Доведення. З наступних відомих рівностей

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(e_1 x\, e_1 - e_2 x\, e_2 - e_3 x\, e_3 - e_4 x\, e_4\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(-e_1 x\, e_2 - e_2 x\, e_1 + e_3 x\, e_4 - e_4 x\, e_3\right),$$
$$x_3 = \frac{1}{4}\left(-e_1 x\, e_3 - e_3 x\, e_1 - e_2 x\, e_4 + e_4 x\, e_2\right),$$
$$x_4 = \frac{1}{4}\left(-e_1 x\, e_4 - e_4 x\, e_1 + e_2 x\, e_3 - e_3 x\, e_2\right)$$

випливають рівності для диференціалів:

$$dx_1 = \frac{1}{4}\left(e_1 dx\, e_1 - e_2 dx\, e_2 - e_3 dx\, e_3 - e_4 dx\, e_4\right), \tag{4.120}$$
$$dx_2 = \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_2 - e_2 dx\, e_1 + e_3 dx\, e_4 - e_4 dx\, e_3\right), \tag{4.121}$$
$$dx_3 = \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_3 - e_3 dx\, e_1 - e_2 dx\, e_4 + e_4 dx\, e_2\right), \tag{4.122}$$
$$dx_4 = \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_4 - e_4 dx\, e_1 + e_2 dx\, e_3 - e_3 dx\, e_2\right). \tag{4.123}$$

Для обчислення диференціала df, скористаємось формулами (4.120)–(4.123):

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{4}\left(e_1 dx\, e_1 - e_2 dx\, e_2 - e_3 dx\, e_3 - e_4 dx\, e_4\right) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_2 - e_2 dx\, e_1 + e_3 dx\, e_4 - e_4 dx\, e_3\right) + \\ &\quad\quad + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_3 - e_3 dx\, e_1 - e_2 dx\, e_4 + e_4 dx\, e_2\right) + \\ &\quad\quad\quad + \frac{\partial f}{\partial x_4} \cdot \frac{1}{4}\left(-e_1 dx\, e_4 - e_4 dx\, e_1 + e_2 dx\, e_3 - e_3 dx\, e_2\right). \end{aligned}$$

Позначаючи $\partial_k f := \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, маємо

$$df = \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\partial_1 f e_1 dx e_1 - \partial_2 f e_2 dx e_1 - \partial_3 f e_3 dx e_1 - \partial_4 f e_4 dx e_1\right) + \right.$$
$$+ \left(-\partial_1 f e_2 dx e_2 - \partial_2 f e_1 dx e_2 + \partial_3 f e_4 dx e_2 - \partial_4 f e_3 dx e_2\right) +$$

$$+\left(-\partial_1 f e_3 dx e_3 - \partial_2 f e_4 dx e_3 - \partial_3 f e_1 dx e_3 + \partial_4 f e_2 dx e_3\right) +$$

$$+\left(-\partial_1 f e_4 dx e_4 + \partial_2 f e_3 dx e_4 - \partial_3 f e_2 dx e_4 - \partial_4 f e_1 dx e_4\right)) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot ((\partial_1 f e_1 - \partial_2 f e_2 - \partial_3 f e_3 - \partial_4 f e_4)\, dx e_1 +$$

$$+ (-\partial_1 f e_2 - \partial_2 f e_1 + \partial_3 f e_4 - \partial_4 f e_3)\, dx e_2 +$$

$$+ (-\partial_1 f e_3 - \partial_2 f e_4 - \partial_3 f e_1 + \partial_4 f e_2)\, dx e_3 +$$

$$+ (-\partial_1 f e_4 + \partial_2 f e_3 - \partial_3 f e_2 - \partial_4 f e_1)\, dx e_4 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \Big(\overline{\mathcal{D}}_{F,r}[f] e_1 dx e_1 - \widehat{\mathcal{D}}_{F,r}[f] e_2 dx e_2 -$$

$$- \widetilde{\mathcal{D}}_{F,r}[f] e_3 dx e_3 - \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_{F,r}[f] e_4 dx e_4 \Big),$$

де

$$\overline{\mathcal{D}}_{F,r}[f] := \partial_1 f e_1 - \partial_2 f e_2 - \partial_3 f e_3 - \partial_4 f e_4;$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{F,r}[f] := \partial_1 f - \partial_2 f e_2 + \partial_3 f e_3 + \partial_4 f e_4;$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{F,r}[f] := \partial_1 f + \partial_2 f e_2 - \partial_3 f e_3 + \partial_4 f e_4;$$

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_{F,r}[f] := \partial_1 f + \partial_2 f e_2 + \partial_3 f e_3 - \partial_4 f e_4.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що оператор $\overline{\mathcal{D}}_{F,r}$ є кватерніонно спряженим до відомого оператора Фуетера (правостороннього), що діє на C^1–функцію за формулою $\mathcal{D}_{F,r}[f] := \partial_1 f + \partial_2 f e_2 + \partial_3 f e_3 + \partial_4 f e_4$. Ці два оператори відіграють ключову роль в кватерніонному аналізі.

Використовуючи означення (4.119), маємо:

$$f'_H(x) = \frac{1}{4}\left(\overline{\mathcal{D}}_{F,r}[f] + \widehat{\mathcal{D}}_{F,r}[f] + \widetilde{\mathcal{D}}_{F,r}[f] + \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}_{F,r}[f] \right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{4.124}$$

З теореми 4.4.1 миттєво випливають наступні твердження.

Приклад 4.4.3. Кватерніонний збіжний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n, \tag{4.125}$$

є H –аналітичною функцією в області його збіжності. Таке ж справедливо для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Більше того, кожний загальний збіжний кватерніонний ряд вигляду

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(x)\,, \tag{4.126}$$

є H –аналітичною функцією в області його збіжності.

Тепер покажемо, що ряд (4.125) можна почленно диференціювати в сенсі Хаусдорфа.

Теорема 4.4.2. *Якщо ряд (4.125) збіжний в кулі* $B := \{x \in \mathbb{H} : |x| < R\}$, *то його сума є* H *–аналітичною функцією в* B *і цей ряд можна почленно диференціювати в сенсі похідної Хаусдорфа:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n\right)'_H = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\, a_n\,.$$

Доведення. За теоремою 4.4.1 ряд (4.125) є H –аналітичною функцією. Це означає, що ряд (4.125) має похідну Хаусдорфа.

Ряд (4.125) подамо у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + f_4 e_4\,, \tag{4.127}$$

де $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{m,n,p,q=0}^{\infty} \alpha^{(k)}_{m,n,p,q}\, x_1^m\, x_2^n\, x_3^p\, x_4^q$ при $k = 1, 2, 3, 4$, — дійсні аналітичні функції в кулі B . Як наслідок, ряди для f_k можна почленно диференціювати по x_1 на інтервалі $(-R, R)$, при цьому x_2 , x_3 , x_4 такі, що $x \in B$. В свою чергу, це означає, що ліву частину рівності (4.127) можна почленно диференціювати по x_1 . Внаслідок формули (4.124), маємо:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n\right)'_H = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} (x^n\, a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\, a_n\,.$$

Теорему доведено.

Як наслідок, елементарні функції $\cos x$, $\sin x$, $\exp x$ (якщо їх означити як суми відповідних степеневих рядів) є H–аналітичними, причому

$$(\cos x)'_H = -\sin x, \quad (\sin x)'_H = \cos x, \quad (\exp x)'_H = \exp x.$$

4.4.2. Співвідношення між H–аналітичністю та кватерніонною диференційовністю

В основі поняття кватерніонної диференційовності лежить прямий перенос поняття диференційовності з дійсного і комплексного аналізу. Некомутативність кватерніонів призводить до двох випадків:

$$h \mapsto h^{-1}\Delta f_x(h)\,, \tag{4.128}$$

$$h \mapsto \Delta f_x(h)h^{-1}\,, \tag{4.129}$$

де для кватерніонної функції $f : \Omega \to \mathbb{H}$ покладено

$$\Delta f_x(h) := f(x+h) - f(x)\,.$$

З властивостей кватерніонного спряження маємо:

$$h^{-1}\Delta f_x(h) = \overline{\Delta \overline{f}_x(h)\overline{h}^{-1}}. \tag{4.130}$$

Таким чином, попередні два випадки по суті зводиться один до одного. Тому будемо розглядати один з них.

Означення 4.4.2. *Скажемо, що функція f має ліву похідну, якщо існує границя*

$${}'f(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ x+h\in\Omega}} h^{-1}\Delta f_x(h), \tag{4.131}$$

яка називається лівою похідною функції f в точці x.

Аналогічне означення для правої похідної.

Означення 4.4.3. *Функція f називається ліво-диференційовною в точці x, якщо існує стала $B_x \in \mathbb{H}$ така, що*

$$\Delta f_x(h) = hB_x + o(h), \quad h \to 0. \tag{4.132}$$

Аналогічне означення для правої диференційовності.

Відмітимо, що функція $f = ax + b$, $a, b \in \mathbb{H}$ є право диференційовною у всьому просторі $\mathbb{H}$, а функція $g = xa + b$ є ліво-диференційовною в $\mathbb{H}$. Нагадаємо, що обидві ці функції є також $H-$аналітичними. Але квадратичний поліном також є $H-$аналітичною функцією. Чи буде він диференційовним в сенсі попереднього означення?

Розглянемо функцію $\alpha = x^2$. Тоді

$$\Delta\alpha_x(h) = xh + hx + h^2.$$

А при це означає, що при $x \notin \mathbb{R}$ функція α не має похідної в $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$.

В наступній теоремі описано всі класи функцій, які є ліво- або право-дифренційовним.

Теорема 4.4.3. [122]. *Нехай функція $f : \Omega \to \mathbb{H}$ ліво-диференційовна в області Ω, а функція $g : \Omega \to \mathbb{H}$ — право-диференційовна в Ω. Тоді існують кватерніонні сталі a і b такі, що*

$$f(x) = a + xb \quad \forall\, x \in \Omega\,,$$

і існують кватерніонні сталі p і q такі, що

$$g(x) = p + qx \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Наслідок 4.4.2. *Множина кватерніонних ліво-диференційовних і кватерніонних право-диференційовних функцій в Ω є підмножиною множини $\mathfrak{M}_H(\Omega)$. Крім того,*

$$f'_H(x) = {}'f(x) = b, \qquad g'_H(x) = g'(x) = q.$$

4.4.3. Співвідношення між $H-$аналітичністю та $F-$гіперголоморфністю

Клас кватерніонно диференційовних функцій виявився дуже бідним і спонукав до пошуку більш цікавих теорій кватерніонної диференційовності.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^4$. На класі $C^1(\Omega, \mathbb{H})$ визначаємо оператор Фуетера $\mathcal{D}_F := \sum_{\ell=1}^{4} e_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$. Його стуктура подібна до комплексного оператора Коші–Рімана $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Означення 4.4.4. *Функція $f : \Omega \to \mathbb{H}$ називаєтьcя гіперголоморфною (або F–гіперголоморфною), якщо $f \in ker\mathcal{D}_F =: \mathfrak{M}_F(\Omega)$.*

Тобто, F–гіперголоморфні функції задовольняють рівняння

$$\mathcal{D}_F[f](x) := \sum_{k=1}^{4} e_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0. \tag{4.133}$$

Далі розглянемо диференціал комплексної функції:

$$df_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\, d\overline{z}, \tag{4.134}$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Рівність (4.134) має два кватерніонні аналоги: ліво- і правосторонні:

$$d(\sigma^{(2)} \cdot f) = \frac{1}{2}(\sigma^{(3)} \cdot \overline{\mathcal{D}}_F[f] - \overline{\sigma^{(3)}} \cdot \mathcal{D}_F[f])\,, \tag{4.135}$$

$$d(g \cdot \sigma^{(2)}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{D}}_{F,r}[g] \cdot \sigma^{(3)} - \mathcal{D}_{F,r}[g] \cdot \overline{\sigma^{(3)}})\,, \tag{4.136}$$

де $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{H})$,

$$\sigma^{(2)} = idx_2 \wedge dx_3 + jdx_3 \wedge dx_1 + kdx_1 \wedge dx_2\,,$$

$$\sigma^{(3)} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - idx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 +$$
$$+ jdx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - kdx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2\,,$$

і $\mathcal{D}_{F,r}$ означає дію оператора $\mathcal{D}_F$ справа, а $\overline{\mathcal{D}}_F$ — кватерніонно спряжене з $\mathcal{D}_F$.

Зрозумілими є наступні відповідності:

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_F \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,;\;\; \overline{\mathcal{D}}_F \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\,; \\ \sigma^{(3)} \longleftrightarrow dz\,;\;\; \overline{\sigma^{(3)}} \longleftrightarrow d\overline{z}\,. \end{gathered} \tag{4.137}$$

Означення 4.4.5. *(Гіпердиференційовність для F–гіперголоморфності). Функція $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H})$ називається гіпердиференційовною, якщо існує $A_x \in \mathbb{H}$ таке, що*

$$d(\sigma^{(2)} f) = \sigma^{(3)} \cdot A_x \,.$$

Тут реалізована ідея коефіцієнту пропорційності між диференціалами. Але тут ми маємо справу з диференціальними формами третього степеня. Це обумовлено розмірністю простору $\mathbb{R}^4$.

Далі визначимо аналоги приросту функції і приросту аргументу. Нехай задано фіксоване $x^0 \in \Omega$ і нехай

$$\Pi := \left\{ x^0 + \sum_{k=1}^{3} h_k t_k \in \mathbb{R}^4 | (t_1, t_2, t_3) \in [0,1]^3 \right\}$$

— паралелепіпед з вершиною x^0, а

$$\partial\Pi := \left\{ x^0 + \sum_{k=1}^{3} h_k t_k \in \mathbb{R}^4 | (t_1, t_2, t_3) \in \partial([0,1]^3) \right\}$$

— його межа. У комплексному випадку $\Pi = [z_0, z]$ є відрізком, а $\partial\Pi = \{z_0, z\}$ — складається з двох точок.

Для визначення аналога похідної, введемо наступні поняття.

Для заданого паралелепіпеда Π з вершиною x^0, інтеграл

$$\int_{\partial\Pi} \sigma^{(2)} f(x)$$

назвемо приростом функції f в точці x^0, а інтеграл

$$\int_{\Pi} \sigma^{(3)}$$

— приростом аргументу.

Означення 4.4.6. *(Гіперпохідна для оператора Фуетера). Нехай задано послідовність паралелепіпедів $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ з вершиною x^0 таких, що $diam \Pi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Функція f має гіперпохідну $'f(x^0)$ в точці x^0, якщо існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\int_{\Pi_n} \sigma^{(3)} \right)^{-1} \cdot \int_{\partial\Pi_n} \sigma^{(2)} f(x) \right).$$

Нижче описується зв'язок між введеними вище поняттями.

Теорема 4.4.4. [122] *$f \in \mathfrak{M}_F(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли f гіпердиференційовна. Крім того,*

$$A_x = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{D}}_F[f](x)\,.$$

Теорема 4.4.5. [122] *Якщо $f \in \mathfrak{M}_F(x^0)$, то f має гіперпохідну в точці x^0 і*

$$A_{x^0} = {}'f(x^0) = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{D}}_F(x^0).$$

Для функції $f \in \mathfrak{M}_F(\Omega)$ гіперпохідна ${}'f$ обчислюється за формулою

$${}'f(x) = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{D}}_F[f](x) = \frac{1}{2}\left(e_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{k=2}^{4} e_k\,\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \qquad (4.138)$$

Оскільки за означенням $\mathfrak{M}_F(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, а H–аналітичні функції мають диференційовні дійснозначні компоненти, то має сенс порівнювати множини $\mathfrak{M}_H(\Omega)$ та $\mathfrak{M}_F(\Omega)$ за однакових умов гладкості.

Теорема 4.4.6. *На класі $\mathcal{C}^1(\Omega)$ справедливе включення $\mathfrak{M}_F(\Omega) \subset \mathfrak{M}_H(\Omega)$. Крім того,*

$${}'f(x) = f'_H(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,. \qquad (4.139)$$

Доведення. За теоремою 4.4.1, $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset \mathfrak{M}_H(\Omega)$. Але, крім умови $\mathfrak{M}_F(\Omega) \subset \mathcal{C}^1(\Omega)$, F–гіперголоморфна функція містить додаткову умову (4.133). Тому $\mathfrak{M}_F(\Omega) \subset \mathfrak{M}_H(\Omega)$.

Тепер доведемо рівність (4.139). Оскільки умова $f \in \mathfrak{M}_F(\Omega)$ еквівалентна умові $\sum\limits_{k=1}^{4} e_k\,\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$ то

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} e_k\,\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0. \qquad (4.140)$$

До обох сторін рівності(4.140) додамо вираз $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$:

$$\frac{1}{2}\left(e_1\frac{\partial f}{\partial x_1}-\sum_{k=2}^{4}e_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}. \qquad (4.141)$$

Ліва частина рівності (4.141) рівна $'f(x)$, і тому ми маємо $'f(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Беручи до уваги рівність (4.124), отримуємо формулу (4.139). Теорему доведено.

Зауваження 4.4.28. Справедливими є аналогічні результати для правостороннього оператора Фуетера, тобто для наступного оператора:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_k}e_k=0.$$

Більше деталей разом з доведеннями можна знайти в статтях [199], [135], [122].

4.4.4. Співвідношення між H–аналітичністю та MT–гіперголоморфністю

Означення 4.4.7. *Функція $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{H}$ класу $C^1(\Omega)$ називається Моісіл–Теодореско–гіперголоморфною (або коротко MT–гіперголоморфною), якщо в кожній точці з Ω функція f задовольняє умову*

$$\mathcal{D}_{MT}[f](x):=\sum_{k=2}^{4}e_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=0.$$

Позначимо через $\mathfrak{M}_{MT}(\Omega)$ множину всіх MT–гіперголоморфних функцій в області Ω.

Оператор $\mathcal{D}_{MT}$ можна розглядати як оператор $\mathcal{D}_F$, але який діє на функцію, незалежну від змінної x_1. Тоді для $f\in\mathfrak{M}_{MT}(\Omega)$ маємо: $f\in\mathfrak{M}_F(\mathbb{R}\times\Omega)$, тоді $\mathcal{D}_F[f]=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\mathcal{D}_{MT}[f]=0+0=0$. Тоді f має F–похідну $\overline{\mathcal{D}}_F[f]=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0$. Крім того, очевидним є включення $\mathfrak{M}_{MT}\subset\mathfrak{M}_H$ і

$$f'_{MT}(x)=f'_H(x)=0.$$

Виявляється MT–гіперголоморфні функції можуть мати іншу похідну, яка володіє властивостями, подібними до F–похідної.

Розглянемо

$$\mathcal{D}^i_{MT}[f](x) := e_2\,\mathcal{D}_{MT}[f](x) = \frac{\partial f}{\partial x_2} - e_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + e_3\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \tag{4.142}$$

Зрозуміло, що множина розв'язків рівняння (4.142) співпадає з множиною $\mathfrak{M}_{MT}$, але структура оператора $\mathcal{D}^i_{MT}$ подібна до оператора $\mathcal{D}_F$. Тепер для функцій $f \in \ker \mathcal{D}^i_{MT}$ можна визначити похідну $f'_{MT,i}$. Зокрема, справедлива наступна формула для i–гіперпохідної (див. [122, с. 537]):

$$f'_{MT,i} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{D}^i_{MT}}[f](x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + e_4\frac{\partial f}{\partial x_3} - e_3\frac{\partial f}{\partial x_4}\right). \tag{4.143}$$

Розглянемо змінну $x := x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 = e_2(x_2 - x_3e_4 + x_4e_3)$. Через $\widetilde{x}$ позначимо змінну $x_2 - x_3e_4 + x_4e_3$.

Тепер розглядатимемо функції з $ker\mathcal{D}^i_{MT}$ змінної $\widetilde{x}$. Нехай функція $f : \widetilde{\Omega} = -e_2\Omega \longrightarrow \mathbb{H}$ належить $ker\mathcal{D}^i_{MT}(\widetilde{\Omega}) = \mathfrak{M}_{MT}(\widetilde{\Omega})$. Зауважимо, що i–гіперпохідна від $f(\widetilde{x}) \in \mathfrak{M}_{MT}(\widetilde{\Omega})$ визначена рівністю (4.143).

Легко перевіряються наступні рівності:

$$x_2 = \frac{1}{2}(e_1\widetilde{x}e_1 - e_2\widetilde{x}e_2),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(e_4\widetilde{x}e_1 - e_2\widetilde{x}e_3), \tag{4.144}$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}(e_3\widetilde{x}e_1 + e_2\widetilde{x}e_4).$$

Використовуючи співвідношення (4.144), подібно до доведення теореми 4.4.1, доводиться наступна формула для H–похідної:

$$f'_H(\widetilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,. \tag{4.145}$$

Теорема 4.4.7. *На класі* $\mathcal{C}^1(\widetilde{\Omega})$ *справедливе включення* $\mathfrak{M}_{MT}(\widetilde{\Omega}) \subset \mathfrak{M}_H(\widetilde{\Omega})$. *Крім того,*

$$f'_{MT,i}(\widetilde{x}) = f'_H(\widetilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,. \tag{4.146}$$

Доведення. Включення $\mathfrak{M}_{MT}(\widetilde{\Omega}) \subset \mathfrak{M}_{H}(\widetilde{\Omega})$ є очевидним. Доведемо формулу (4.146). Оскільки

$$f \in \mathfrak{M}_{MT}(\widetilde{\Omega}) \iff \frac{\partial f}{\partial x_2} - e_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + e_3\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

то

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - e_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + e_3\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0. \tag{4.147}$$

До обох частин рівності (4.147) додамо вираз $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + e_4\frac{\partial f}{\partial x_3} - e_3\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,. \tag{4.148}$$

Ліва частина рівності (4.148) рівна $f'_{MT,i}(\widetilde{x})$ і ми маємо: $f'_{MT,i}(\widetilde{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$. Приймаючи до уваги рівність (4.145), отримуємо формулу (4.146). Теорему доведено.

Існує два аналоги формули (4.142):

$$\mathcal{D}^j_{MT}[f](x) := e_3\,\mathcal{D}_{MT}[f](x) = e_4\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} - e_2\,\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$\mathcal{D}^k_{MT}[f](x) := e_4\,\mathcal{D}_{MT}[f](x) = -e_3\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + e_2\,\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

Для цих операторів справедливі аналогічні результати як для оператора $\mathcal{D}^i_{MT}$.

4.4.5. Співвідношення між H–аналітичністю та кліффордовим аналізом для кватерніонних функцій

Позначимо через $\mathcal{C}\ell_{0,m}$ кліффордову алгебру з базисними векторами $e_1, e_2, \ldots, e_m$ і одиницею $e_0 = 1$. Звичайно параметр m є натуральним. При $m = 2$ маємо $\mathcal{C}\ell_{0,2} = \mathbb{H}$. В кліффордовому аналізі розглядають оператори, подібні до оператора Фуетера. Зазвичай їх називають оператором Коші–Рімана та спряженим до нього:

$$\mathcal{D}_{CR} := \sum_{\ell=0}^{m} e_\ell\frac{\partial}{\partial x_\ell}\,, \qquad \overline{\mathcal{D}}_{CR} := \sum_{\ell=0}^{m} \overline{e}_\ell\frac{\partial}{\partial x_\ell}.$$

Теорія функцій для $ker\mathcal{D}_{CR}$ називається кліффордовим аналізом. Оскільки $\mathcal{C}\ell_{0,2} = \mathbb{H}$, то можемо розглядати оператор Коші–Рімана для випадку $m = 2$: $\mathcal{D}_{CR} := \sum_{\ell=0}^{2} e_\ell \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}$.

Аналогом оператора Моісіла-Теодореску в кліффордовому аналізі є оператор Дірака. Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^m$. На класі $C^1(\Omega; C\ell_{0,m})$ визначимо оператор Дірака рівністю

$$\mathcal{D}_{Dir} := \sum_{\ell=1}^{m} e_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}.$$

Зауважимо, що кліффордове спряжене до $\mathcal{D}_{Dir}$ рівне $\overline{\mathcal{D}}_{Dir} = -\mathcal{D}_{Dir}$. Тому розширюючи область Ω до області $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, можемо записати

$$\mathcal{D}_{CR} = \sum_{\ell=0}^{m} e_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathcal{D}_{Dir},$$

і, як наслідок, функцію $f \in ker\mathcal{D}_{Dir}$ можемо ототожнити з функцією $\widetilde{f} \in ker\mathcal{D}_{CR}$ рівністю

$$\widetilde{f}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{для} \quad \text{кожного } x_0.$$

Тому кожна функція з $ker\mathcal{D}_{Dir}$ має гіперпохідну в сенсі оператора Коші–Рімана, яка є тотожним нулем в Ω:

$$'\widetilde{f}(x_0, x^0) = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{D}}_{CR}[\,\widetilde{f}\,](x_0, x^0) = -\mathcal{D}_{Dir}[f](x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

Дослідимо, що буде у випадку $m = 2$, тобто для $\mathcal{C}\ell_{0,2} = \mathbb{H}$? Маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Dir} &= \sum_{\ell=1}^{2} e_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} = i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - k\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = j\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_1}\right). \end{aligned}$$

Остання рівність означає, що теорія кватерніонного оператора Дірака зводиться до вивчення голоморфних або антиголоморфних функцій однієї комплексної змінної.

Подібно до доведення теореми 4.4.6 доводиться наступне твердження.

Теорема 4.4.8. *На класі* $\mathcal{C}^1(\Omega)$ *справедливе включення* $ker\mathcal{D}_{CR}(\Omega) \subset \mathfrak{M}_H(\Omega)$. *Крім того,*

$$'f_{CR}(x) = f'_H(x) = \frac{\partial f}{\partial x_0}\,.$$

4.4.6. Співвідношення між H–аналітичністю та s–регулярністю

Теорія так званих кватерніонних s–регулярних (від slice–regular) функцій була започаткована Г. Джентілі та Д. Струппою в роботі [84], базуючись на ідеї К. Кулліна [64]. Ми будемо розглядати кватерніонні s–регулярні функції в кулі $B := \{x \in \mathbb{H} : |x| < R\}$.

Оскільки кватерніони некомутативні, то природно, що існують ліво- і право–s–регулярні функції. Клас усіх ліво–s–регулярних функцій $f : B \to \mathbb{H}$ в області B співпадає із збіжними в B степеневими рядами вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$ (див., наприклад, теорему 2.7 в [85], або [86, c. 15], або теорему 6.1.5 в [44]). Крім того, ліва s-похідна $'f_s(x)$ степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\, a_n$ рівна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\, a_n$. Аналогічно, клас усіх право–s–регулярних функцій $f : B \to \mathbb{H}$ в області B співпадає з степеневими рядами вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, $a_n \in \mathbb{H}$. Крім того, права s-похідна $f'_s(x)$ степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ рівна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1}$. Будемо розглядати лише клас ліво–s–регулярних функцій.

Теорема 4.4.9. *Множина (ліво і право)* s *–регулярних функцій* $f : B \to \mathbb{H}$ *в* B *є підмножиною множини* $\mathfrak{M}_H(B)$. *Крім того,*

$$'f_s(x) = f'_H(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

для ліво–s *–регулярних функцій та*

$$f'_s(x) = f'_H(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

для право–s *–регулярних функцій.*

Доведення. Розглянемо клас ліво– s –регулярних функцій. В прикладі 4.4.3 показано, що кожна ліво– s –регулярна функція $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ є H–аналітичною в кулі своєї збіжності. Крім того, за теоремою 4.4.2 H –похідна $f'_H(x)$ співпадає з лівою s-похідною $'f_s(x)$. Випадок для право– s –регулярних функцій доводиться аналогічно. Теорему доведено.

В той же час, існують H –аналітичні функції, які не є ані ліво– s –регулярними, ані право– s –регулярними (див. приклад 4.4.2).

4.5. Голоморфні функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона

Алгебри Келі–Діксона є спеціальним класом некомутативних алгебр. Зауважимо, що кватерніони також є алгеброю Келі–Діксона. Узагальнення умов Коші–Рімана у всіх алгебрах Келі–Діксона здійснено в роботі [118], де визначені диференційовні функції змінних, що належать алгебрам Келі–Діксона. Для таких функцій встановлено аналоги основних результатів комплексного аналізу.

У цьому підрозділі, на відміну від роботи [118], досліджується інший клас диференційовних функцій (з використанням оператора Дірака) в алгебрах Келі–Діксона і, що більш важливо, запропоновано алгоритм конструктивної побудови функцій із згаданого класу. Результати цього підрозділу опубліковано в роботах [78, 79].

4.5.1. Алгебри Келі–Діксона та деякі їх властивості

Нехай K — комутативне поле з $\mathrm{char} K \neq 2$ і A — алгебра над полем K. Алгебра з одиницею $A \neq K$ така, що $x^2 + \alpha_x x + \beta_x = 0$ для кожного $x \in A$ і $\alpha_x, \beta_x \in K$, називається *квадратичною алгеброю.*

Нижче коротко наведено *процедуру Келі–Діксона* і властивості отриманих алгебр. Детальніше про процедуру Келі–Діксона див. [**?**] і [177].

Нехай A — скінченновимірна алгебра з одиницею над полем K із *скалярною інволюцією*

$$\overline{} : A \to A, \quad a \to \overline{a},$$

тобто з лінійним відображенням, яке задовольняє наступні співвідношення:

$$\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}, \quad \overline{\overline{a}} = a$$

і

$$a + \overline{a},\ \ a\overline{a} \in K \cdot 1 \text{ для всіх } a, b \in A.$$

Елемент $\overline{a}$ називається *спряженим* до елемента a, а лінійна форма

$$t : A \to K, \quad t\,(a) = a + \overline{a}$$

і квадратична форма

$$n : A \to K, \quad n\,(a) = a\overline{a}$$

називаються, відповідно, *слідом* і *нормою* елемента a. Отже, алгебра A зі скалярною інволюцією є квадратичною.

Нехай $\gamma \in K$ — фіксований ненульовий елемент. Визначимо алгебраїчне множення на векторному просторі:

$$A \oplus A : (a_1, a_2)\,(b_1, b_2) := (a_1 b_1 + \gamma b_2 \overline{a_2}, \overline{a_1} b_2 + b_1 a_2)\,. \qquad (4.149)$$

Таким способом ми отримуємо алгебраїчну структуру над $A \oplus A$, яку позначимо через (A, γ) і назвемо *алгеброю, отриманою з* A *процедурою Келі–Діксона* або *узагальненою алгеброю Келі–Діксона.* Маємо $\dim\,(A, \gamma) = 2 \dim A$.

Нехай $x \in (A, \gamma)$, $x = (a_1, a_2)$. Відображення

$$^{-} : (A, \gamma) \to (A, \gamma)\ ,\ x \to \bar{x} = (\overline{a}_1, -a_2)$$

є скалярною інволюцією алгебри (A, γ), в певному сенсі, є продовженням інволюції $^{-}$ алгебри A.

Покладаючи $A = K$ і застосовуючи процедуру t разів, $t \geq 1$, отримаємо алгебру над K:

$$A_t = \left(\frac{\gamma_1, \ldots, \gamma_t}{K}\right).$$

За індукцією в цій алгебрі, множина $\{e_0 = 1, e_1, ..., e_{n-1}\}$, $n = 2^t$, породжує базис з властивостями:

$$e_i^2 = \gamma_i 1, \quad \gamma_i \in K, \quad \gamma_i \neq 0, \quad i = 1, ..., n-1 \tag{4.150}$$

і

$$e_i e_j = -e_j e_i = \beta_{ij} e_k, \; \beta_{ij} \in K, \; \beta_{ij} \neq 0, \; i \neq j, \; i, j = \; 1, ...n-1, \tag{4.151}$$

де β_{ij} і e_k однозначно визначаються через e_i і e_j.

З леми 4 [177] випливає, що в алгебрі A_t з базисом $B = \{e_0 = 1, e_1, ..., e_{n-1}\}$, що задовольняє співвідношення (4.150) і (4.151), справедливі рівності

$$e_i (e_i x) = \gamma_i^2 x = (x e_i) e_i \tag{4.152}$$

для всіх $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ і $x \in A$.

Алгебри A_t некомутативні і неасоціативні, але *гнучкі* (тобто $x(yx) = (xy)x = xyx$ для всіх $x, y \in A_t$), квадратичні та *степенево асоціативні* (тобто підалгебра $< x >$ алгебри A, породжена довільним елементом $x \in A$, — асоціативна).

Для порівняння алгебр Келі–Діксона з алгебрами Кліффорда, наведемо початкові відомості про кліффордові алгебри.

Нехай поле K містить *первісний корінь* (тобто, корінь $n-$го степеня з одиниці) ω. Нехай також A — асоціативна алгебра над K. Нехай $S = \{e_1, ..., e_r\}$ — множина елементів в A таких, що $e_i e_j = \omega e_j e_i$ для всіх $i < j$ і $e_i^n \in \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\}$. *Узагальнена алгебра Кліффорда* над полем K $Cl_r^n(K)$ визначається як поліноміальна алгебра $K[e_1, ..., e_r]$. Нагадаємо, що алгебра $Cl_r^n(K)$ є асоціативною. Більш детальну інформацію про алгебри Кліффорда можна знайти в роботах [194], [52].

Приклад 4.5.1. 1) При $n = 2$ маємо $Cl_r^2(K)$ з $\omega = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ для всіх $i < j$ і $e_i^2 \in \{-1, 1\}$. Якщо $r = p + q$ і $e_1^2 = ... = e_p^2 = 1$, $e_{p+1}^2 = .. = e_q^2 = -1$, то алгебру $Cl_r^2(K)$ позначають через $Cl_{p,q}(K)$.

2) i) При $p = q = 0$, маємо $Cl_{0,0}(K) \simeq K$;

ii) При $p = 0, q = 1$ маємо двовимірну алгебру $Cl_{0,1}(K)$ з базисним вектором e_1 таким, що $e_1^2 = -1$, тобто $Cl_{0,1}(K) \simeq K(e_1)$. При $K = \mathbb{R}$, очевидно, маємо $Cl_{0,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

iii) При $p = 0, q = 2$ алгебра $Cl_{0,2}(K)$ є чотиривимірною алгеброю, породженою векторами $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Оскільки $e_1^2 = e_2^2 = (e_1e_2)^2 = -1$ та $e_1e_2 = -e_2e_1$, то приходимо до висновку, що ця алгебра ізоморфна алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

iv) При $p = 1, q = 1$ або при $p = 2, q = 0$ маємо алгебру $Cl_{1,1}(K) \simeq Cl_{2,0}(K)$, яка ізоморфна алгебрі *паракватерніонів* або *антикватерніонів* (див. [100]).

Далі встановимо деякі тотожності в алгебрах Келі–Діксона. Нехай A — алгебра Келі–Діксона з базисом $\{e_0 := 1, e_1, ..., e_n\}$ таким, що $e_me_r = -e_re_m$, $r \neq m, e_m^2 = \gamma_m \in K, m \in \{1, 2, ..., n\}$. Для елементів $a = \sum\limits_{m=0}^{n} a_me_m, b = \sum\limits_{m=0}^{n} b_me_m$ визначимо елемент $T(a,b)$ в K рівністю $T(a,b) = \sum\limits_{m=0}^{n} e_m^2 a_m b_m$. Через $\overrightarrow{A}$ позначимо множину елементів $\{\overrightarrow{a} : \overrightarrow{a} = \sum\limits_{m=1}^{n} a_me_m, a_m \in K\}$. Тоді спряжений до елемента a подається у вигляді $\overline{a} = a_0 - \overrightarrow{a}$. Очевидно, $\overrightarrow{(\overrightarrow{a})} = \overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{e_m} = e_m$.

Лема 4.5.1. *Нехай A — алгебра Келі–Діксона. Тоді справедливі рівності*

1)
$$T(a,b) = T(b,a),$$
для всіх $a, b \in A$.

2)
$$T(\lambda a, b) = \lambda T(a,b),$$
для всіх $\lambda \in K,\ a, b \in A$.

3)
$$T(a, b+c) = T(a,b) + T(a,c),$$
для всіх $a, b, c \in A$.

4)

$$T\left(a,\overline{a}\right)=a\overline{a}=n\left(a\right),$$

для всіх $a\in A$

5)

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}=2T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)-\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}, \tag{4.153}$$

$$ab=ba-2\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}+2T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right), \tag{4.154}$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}=-T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}. \tag{4.155}$$

$$(\overrightarrow{a})^2\in K, \tag{4.156}$$

для всіх $a,b\in A$.

Доведення.

Співвідношення 1), 2), 3), 4) очевидні. 5) Для $\overrightarrow{a}=\sum\limits_{m=1}^{n}a_me_m,\overrightarrow{b}=\sum\limits_{m=1}^{n}b_me_m$, маємо

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}=\sum_{m=1}^{n}a_me_m\cdot\sum_{m=1}^{n}b_me_m=\sum_{m=1}^{n}e_m^2a_mb_m+\alpha=T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)+\alpha,\alpha\in\overrightarrow{A}. \tag{4.157}$$

Обчислимо

$$\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}=T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)-\alpha,\quad \alpha\in\overrightarrow{A}. \tag{4.158}$$

Якщо ми додамо співвідношення (4.157) та (4.158), то отримаємо $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}=2T\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$, тобто тотожність (4.153) доведено.

Для $a=a_0+\overrightarrow{a}$ і $b=b_0+\overrightarrow{b}$, обчислюємо

$$ab=(a_0+\overrightarrow{a})\left(b_0+\overrightarrow{b}\right)=a_0b_0+a_0\overrightarrow{b}+b_0\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$$

та

$$ba=\left(b_0+\overrightarrow{b}\right)(a_0+\overrightarrow{a})=b_0a_0+b_0\overrightarrow{a}+a_0\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}.$$

З останніх двох рівностей і з рівності (4.153) отримуємо $ab - ba = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} = 2T\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) - 2\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$, тобто тотожність (4.154) доведено.

Тотожність (4.155) очевидна. Для $\overrightarrow{a} = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m e_m$, справедлива рівність $(\overrightarrow{a})^2 = \sum\limits_{m=1}^{n} (a_m)^2 \in K$.

В алгебрі кватерніонів доведені вище тотожності були отримані в роботі [201].

Теорема 4.5.1. *Нехай A — алгебра Келі–Діксона така, що $e_m^2 = -1$, для всіх $m \in \{1, 2, ..., n\}$. Якщо $n > 1$ то для всіх $x \in A$ справедлива рівність*

$$\overline{x} = \frac{1}{1-n}\sum_{m=0}^{n} e_m x e_m.$$

Доведення. Нехай $x = \sum\limits_{m=0}^{n} e_m x_m$. З леми 4.5.1 і тотожності (4.152) маємо

$$\sum_{m=0}^{n} e_m x e_m = x + \sum_{m=1}^{n} e_m x e_m =$$

$$= x + \sum_{m=1}^{n} e_m \left(e_m x - 2e_m \overrightarrow{x} + 2T\left(e_m, \overrightarrow{x}\right)\right) =$$

$$= x + \sum_{m=1}^{n} e_m^2 x - 2\sum_{m=1}^{n} e_m^2 \overrightarrow{x} + 2\sum_{m=1}^{n} e_m^2 e_m x_m =$$

$$= x - nx + 2n\overrightarrow{x} - 2\sum_{m=1}^{n} e_m x_m =$$

$$= (1-n)\,x - 2\,(1-n)\,\overrightarrow{x} = (1-n)\left(x - 2\overrightarrow{x}\right) =$$

$$= (1-n)\,\overline{x}.$$

Для дійсних кватерніонів отримуємо добре відому тотожність:

$$\overline{x} = -\frac{1}{2}\left(x + ixi + jxj + kxk\right).$$

Теорема 4.5.2. *Нехай A — алгебра Келі–Діксона. Тоді для всіх $x, y, z \in A$ справедлива рівність*

$$(xy - yx)^2 z = z\,(xy - yx)^2\,. \tag{4.159}$$

Доведення. Враховуючи рівність (4.154) і тотожність $T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in K$, з (4.159) маємо

$$(-2\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}+2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}))^2z=z(-2\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}+2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[4(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2+4T^2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})-8(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\right]z=$$

$$=z\left[4(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2+4T^2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})-8(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2z+4T^2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z-8T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})z=$$

$$=4z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2+4T^2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z-8T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}).$$

З останньої рівності маємо рівність
$(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2z-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})z=z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})$.
Позначимо

$$\begin{aligned}E\ =\ &\left[(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2z-z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2\right]-\\&-[2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})z-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})]\end{aligned}$$

і покажемо, що $E=0$. Для цього, введемо ще одні позначення

$$E_1=(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2z-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})z$$

і

$$E_2=z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})z(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}).$$

Спочатку обчислимо E_1. Маємо

$$E_1=[(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})]z.$$

З тотожності (4.155) маємо $\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}=T(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})+\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}$.
Тоді

$$(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2=T^2(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})+\left(\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}\right)^2+2T(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})$$

Тому

$$E_1=[T^2(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})+\left(\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}\right)^2+2T(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}-2T(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})]z=$$

$$= [T^2(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) + \left(\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}\right)^2 + 2T(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})(\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}} - \overrightarrow{y}\overrightarrow{x})]z.$$

Оскільки $\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}} - \overrightarrow{y}\overrightarrow{x} = -T(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$, то з (4.156) маємо $[(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2 - 2T(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})] = [\left(\overrightarrow{\overrightarrow{y}\overrightarrow{x}}\right)^2 - T^2(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})] = \alpha \in K$. Тому $E_1 = \alpha z$. Тепер обчислимо E_2. Будемо мати $E_2 = z[(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})^2 - 2T(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}\overrightarrow{x})] =$ $= z\alpha = \alpha z$, оскільки $\alpha \in K$.

Отже, маємо $E = E_1 - E_2 = 0$, тобто, співвідношення (4.159) доведено.

Зауваження 4.5.29. 1) Тотожність (4.159) називається *тотожністю Холла.* У попередній теоремі тотожність Холла доведено для довільної алгебри Келі–Діксона і для довільної кліффордової алгебри $Cl_{p,q}(K)$.

2) Тотожність (4.159) може бути записана у вигляді $[x,y]^2 z = z[x,y]^2$ або $\left[[x,y]^2, z\right] = 0$, де $[x,y] = xy - yx$ називається комутатором двох елементів. Якщо $A = \mathbb{H}$, то тотожність (4.159) доведена Холлом в [91]. Якщо $A = \mathbb{H}$ і, наприклад, $y = i, z = j$, маємо квадратне кватерніонне рівняння коренем якого є довільний кватерніон:

$$xixk + kxix + ixixj - jxixi + x^2 j - jx^2 - ix^2 k - kx^2 i = 0.$$

4.5.2. Алгоритм Бейлса

В роботі [45] Дж. Бейлсом описано множення базисних векторів алгебри A_t, $\dim A_t = 2^t = n$ при $\gamma_1 = ... = \gamma_t = -1$ і $K = \mathbb{R}$, використовуючи двійковий (бінарний) розклад для запису індексів. Спочатку сформулюємо загальне зауваження.

Зауваження 4.5.30. Нехай e_p, e_q — два вектори з базису B, де p, q представлені бінарним розкладом для індексів цих векторів, тобто $p, q \in \mathbb{Z}_2^n$. Маємо, що $e_p e_q = \gamma_n(p,q) e_{p\otimes q}$, де:

1) $p \otimes q$ — сума p і q належать групі $\mathbb{Z}_2^n$ або, точніше, "*особливий або*" для бінарних чисел p і q;

2) γ_n — функція $\gamma_n : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \{-1, 1\}$.

Відображення γ_n називається *спіральним відображенням.*

Елементи групи $\mathbb{Z}_2^n$ можна розглядати як цілі числа від 0 до $2^n - 1$ із множенням "*особливий або*" бінарних представлень. Очевидно, ця операція еквівалентна додаванню в $\mathbb{Z}_2^n$.

Всюди далі в цьому параграфі будемо розглядати $K = \mathbb{R}$. Користуючись такими ж позначеннями, як у роботі Дж. Бейлса, розглянемо наступні матриці:

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.160}$$

В тій же роботі [45, с. 88–91] отримано властивості спіральних відображень γ_n і сформульовано ці властивості у вигляді таблиці. Дж. Бейлс поділив спіральну таблицю для $\mathbb{Z}_2^n$ на 2×2 матриці і отримав наступний результат.

Теорема 4.5.3. *Для $n > 0$ спіральну таблицю Келі–Діксона γ_n можна поділити на квадратні матриці розмірності 2 вигляду $A, B, C, -B, -C$, визначені співвідношеннями* (4.160). *Співвідношення між ними наступні:*

Рис. 1: спіральні дерева

Означення 4.5.1. *Нехай $x = x_0, x_1, x_2, ...$ і $y = y_0, y_1, y_2, ...$ — дві послідовності дійсних чисел. Впорядкована пара*

$$(x, y) = x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, ...$$

називається перетасованою послідовністю послідовностей x *та* y *.*

З урахуванням теореми 1.2 з [45] нижче наведено алгоритм знаходження $\gamma_n(s,r)$, де $s,r \in \mathbb{Z}_2^n$:

1) знаходимо перетасовану послідовність (s,r);

2) починаючи з кореня A_0, знаходимо $\gamma_n(s,r)$, використовуючи спіральні дерева (рис. 1). При цьому, прийнято наступні домовленості: "00" =незмінний, "01" =лівий $\rightarrow$ правий, "10" =правий $\rightarrow$ лівий, "11" =правий $\rightarrow$ правий.

Нехай $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$ — алгебра узагальнених кватерніонів і $\mathbb{H}(-1,-1)$ — алгебра звичайних кватерніонів з діленням. Нижче наведено таблиці множення:

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	γ_1	e_3	$\gamma_1 e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	γ_2	$-\gamma_2 e_1$
e_3	e_3	$-\gamma_1 e_2$	$\gamma_2 e_1$	$\gamma_1\gamma_2$

Таблиця множення алгебри узагальнених кватерніонів

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Таблиця множення алгебри кватерніонів з діленням

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	1	1	1
e_1	1	-1	1	-1
e_2	1	-1	-1	1
e_3	1	1	-1	-1

спіральна таблиця кватерніонів

$$\begin{pmatrix} A_0 & A \\ B & -B \end{pmatrix}$$

спіральна таблиця кватерніонів, використовуючи позначення теореми 1.2.

Приклад 4.5.2. Нехай A_4 — алгебра дійсних седеніонів. Це означає, що $\dim A_4 = 16$ і $\{1, e_1, ..., e_{15}\}$ — базис в цій алгебрі. Обчислимо $e_7 e_{13} = \gamma_4(7_2, 13_2) e_{7 \otimes 13}$. Маємо наступний двійковий розклад:

$$\begin{aligned} 7_2 &= 0111, \text{ оскільки } 7 = 2^2 + 2 + 1, \\ 13_2 &= 1101, \text{ оскільки } 13 = 2^3 + 2^2 + 1. \end{aligned}$$

Оскільки $0111 \otimes 1101 = 1010 (= 2^3 + 2 = 10)$, то $7 \otimes 13 = 10$.

Тепер обчислимо $\gamma_4 (e_7, e_{13})$. Спочатку перетасуємо послідовності 0111 і 1101. Отримаємо 01 11 10 11. Починаючи з A_0, маємо: $A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{10} C \xrightarrow{11} -C$, тоді $\gamma_4 (e_7, e_{13}) = -1$ і $e_7 e_{13} = -e_{10}$.

4.5.3. Ліво- A_t-гіперголоморфні функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона

У цьому пункті для узагальнених алгебр Келі–Діксона A_t, виписавши базисні елементи зручним способом, ми отримаємо таблиці множення для певних елементів базису. Користуючись цими результатами, в теоремі 4.5.9 отримуємо приклад ліво-гіперголоморфної функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Зауваження 4.5.31. 1) В алгебрі узагальнених кватерніонів $\mathbb{H} (\gamma_1, \gamma_2)$ базис може бути записаний у вигляді

$$\{1 = e_0, e_1, e_2, e_1 e_2\}.$$

Для алгебри узагальнених октоніонів $\mathbb{O}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ базис може бути записаний у вигляді

$$\{1 = e_0, e_1, e_2, e_1 e_2, e_4, e_1 e_4, e_2 e_4, (e_1 e_2)\, e_4\}.$$

Тому $e_3 = e_1 e_2, e_7 = e_3 e_4 = (e_1 e_2)\, e_4$, $e_2 e_4 = e_6$ і при обчисленні цих добутків елементи $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не з'являються або з'являється добуток деяких з них в кінці.

Зауважимо, що в алгебрі $A_t = \left(\frac{\gamma_1, \ldots, \gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ в добутках

$$e_1 e_2, (e_1 e_2)\, e_4, ..., ((e_{2^r} e_{2^{r+1}}) \ldots e_{2^k}) e_{2^i}$$

елементи $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t$ або їх добутки не з'являються або з'являються в кінці.

2) Використовуючи попереднє зауваження, базис в алгебрі $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ можна записати у вигляді

$$\{1 = e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{2^{t-1}-1}, e_{2^{t-1}}, e_1 e_{2^{t-1}}, e_2 e_{2^{t-1}}, e_3 e_{2^{t-1}}, \ldots, e_{2^{t-1}-1} e_{2^{t-1}}\} \tag{4.161}$$

з

$$e_i e_{2^{t-1}} = -e_{2^{t-1}} e_i = e_{2^{t-1}} \overline{e}_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 2^{t-1} - 1\}. \tag{4.162}$$

Теорема 4.5.4. *Нехай* $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ *— алгебра Келі–Діксона і* $\{e_0 = 1, e_1, ..., e_{n-1}\}$, $n = 2^t$, *— базис. Нехай також* $r \geq 1$, $r < k \leq i < t$. *Тоді*

$$((e_{2^r} e_{2^{r+1}}) \ldots e_{2^k}) e_{2^i} = (-1)^{k-r+2} e_T, \tag{4.163}$$

$$((e_1 e_{2^r}) e_{2^{r+1}}) \ldots e_{2^k}) e_{2^i} = (-1)^{k-r+3} e_{T+1}, \tag{4.164}$$

де $T = 2^r + 2^{r+1} + \ldots + 2^k + 2^i$ *і*

$$e_1 e_{2^i} = e_{2^i+1}. \tag{4.165}$$

Доведення. Із зауваження 4.5.31 випливає, що можна скористатися теоремою 4.5.3 для $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$. Із зауваження 4.5.30 випливає, що $T = 2^r + 2^{r+1} + \ldots + 2^k + 2^i$. Для T маємо бінарний розклад

$$T_2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{i-k-1}\underbrace{111\ldots1}_{k-r+1}\underbrace{0\ldots0}_{r}.$$

Використовуючи ті ж зауваження, отримаємо $e_{2^r} e_{2^{r+1}} = \gamma_n \left(\underbrace{01...0}_{r+2}, \underbrace{10\ldots0}_{r+2}\right) e_{2^r+2^{r+1}}$. Далі перетасовуємо послідовності $\underbrace{01\ldots0}_{r+2}$ та $\underbrace{10\ldots0}_{r+2}$, отримуємо 01 10 $\underbrace{00\;00\ldots00\;00}_{r\text{ пар}}$. Починаючи з A_0, маємо:

$$A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{10} C,$$

тоді $\gamma_n \left(\underbrace{01\ldots0}_{r+2}, \underbrace{10\ldots0}_{r+2}\right) = 1$ і $e_{2^r} e_{2^{r+1}} = e_{2^r+2^{r+1}}$.

Обчислимо $(e_{2^r}e_{2^{r+1}})e_{2^{r+2}}$. Отримуємо

$$(e_{2^r}e_{2^{r+1}})e_{2^{r+2}} = e_{2^r+2^{r+1}}e_{2^{r+2}} = \gamma_n\left(\underbrace{011...0}_{r+3},\underbrace{10...0}_{r+3}\right)e_{2^r+2^{r+1}+2^{r+2}}.$$

Перетасовуючи $\underbrace{011...0}_{r+3}$ і $\underbrace{10...0}_{r+3}$, отримаємо 01 10 $10\underbrace{00\ 00...00\ 00}_{r\ \text{пар}}$. Починаючи з A_0, будемо мати: $A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{10} C \xrightarrow{10} -C$, тоді

$$\gamma_n\left(\underbrace{011...0}_{r+3},\underbrace{10...0}_{r+3}\right) = -1,$$

тому $e_{2^r+2^{r+1}}e_{2^{r+2}} = -e_{2^r+2^{r+1}+2^{r+2}}$. Продовжуючи цю процедуру, зауважимо, що кількість "1", отриманих в результаті перетасування впливає на знак. Оскільки $T = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i$ має бінарний розклад

$$T_2 = 1\underbrace{00...0}_{i-k-1}\underbrace{111..1}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r},$$

в якому $k - r + 2$ елементів рівні 1, отримуємо співвідношення (4.163). Аналогічно випливають співвідношення (4.164) і (4.165). Теорему доведено.

Теорема 4.5.5. *За умов теореми 4.5.4, для алгебри* $A_t = \left(\frac{-1,...,-1}{\mathbb{R}}\right)$ *маємо:*

$$\begin{array}{c|ll} \cdot & e_T & e_{T+1} \\ \hline e_{T_1} & (-1)^{k-r+1}e_{2^i} & -(-1)^{k-r+1}e_{2^i+1} \\ e_{T_1+1} & -(-1)^{k-r+1}e_{2^i+1} & -(-1)^{k-r+1}e_{2^i} \end{array} \qquad (4.166)$$

для $r < k$, *де* $T = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i$, $T_1 = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k$ *і*

$$\begin{array}{c|ll} \cdot & e_T & e_{T+1} \\ \hline e_{2^k} & e_M & -e_{M+1} \\ e_{2^k+1} & -e_{M+1} & -e_M \end{array}, \qquad (4.167)$$

де $M = 2^k + 2^i$.

Доведення. *Випадок 1*: $r < k$. Обчислимо $e_{T_1}e_T$. Будемо мати $e_{T_1}e_T = \gamma(s,q)\,e_M$, де s, q — бінарний розклад T_1 і T. Бінарним розкладом M є $M_2 = T_1 \otimes T$. Тоді $M = 2^i$,

$$s = \underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r}, \quad q = \underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r}.$$

Перетасуванням $s \otimes q$, маємо

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{11\ 11\ 11\ ...11}_{(k-r+1)\text{ пар}}\ \underbrace{00\ 00\ ...00\ 00}_{r\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, отримаємо:

$$\underbrace{A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{00} ... \xrightarrow{00}}_{i-k} \underbrace{A \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} ... \xrightarrow{11} (-1)^{k-r+1} C}_{k-r+1} \underbrace{\xrightarrow{00} ... \xrightarrow{00} (-1)^{k-r+1} C}_{r}.$$

Тому $\gamma(s,q) = (-1)^{k-r+1}$.

Тепер обчислимо $e_{T_1} e_{T+1}$. Для цього будемо перетасовувати $\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r}$ з $\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}$. В результаті маємо:

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{11\ 11\ 11...11}_{(k-r+1)\text{ пар}}\ \underbrace{00\ 00...00\ 01}_{r\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, отримаємо:

$$\underbrace{A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{00} ... \xrightarrow{00}}_{i-k} \underbrace{A \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} ... \xrightarrow{11} (-1)^{k-r+1} C}_{k-r+1} \underbrace{\xrightarrow{00} ... \xrightarrow{01} -(-1)^{k-r+1} C}_{r}.$$

Для $e_{T_1+1} e_T$, перетасуємо $\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}$ з $\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r}$, будемо мати

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{11\ 01\ 01...01}_{(k-r+1)\text{ пар}}\ \underbrace{00\ 00...00\ 10}_{r\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, отримаємо:

$$\underbrace{A_0 \xrightarrow{01} A \xrightarrow{00} ... \xrightarrow{00}}_{i-k} \underbrace{A \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} -C \xrightarrow{11} C \rightarrow ... \xrightarrow{11} (-1)^{k-r+1} C}_{k-r+1} \underbrace{\xrightarrow{00} ... \xrightarrow{10} -(-1)^{k-r+1} C}_{r}.$$

Для $e_{T_1+1} e_{T+1}$ обчислимо спочатку $(T_1+1) \otimes (T+1)$. Отримаємо

$$\left(2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 1\right) \otimes \left(2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i + 1\right) =$$

$$= \left(\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}\right) \otimes \left(\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}\right) =$$

$$= \quad \underbrace{10...0}_{i-k}\underbrace{000...0}_{k-r+1}\underbrace{0...0}_{r} = 2^i.$$

Тепер перетасуємо $\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}$ з $\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{111...1}_{k-r+1}\underbrace{0...1}_{r}$, отримаємо

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{11\ 01\ 01...01}_{(k-r+1)\text{ пар}}\ \underbrace{00\ 00...00\ 11}_{r\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, будемо мати:

$$\underbrace{A_0 \overset{01}{\to} A \overset{00}{\to} ... \overset{00}{\to}}_{i-k}\underbrace{A \overset{11}{\to} -C \overset{11}{\to} C \overset{11}{\to} -C \overset{11}{\to} C \overset{11}{\to} ... \overset{11}{\to} (-1)^{k-r+1}\,C}_{k-r+1}\underbrace{\overset{00}{\to} ... \overset{11}{\to} -(-1)^{k-r+1}\,C}_{r}.$$

Випадок 2: $r = k$. Маємо $M = 2^k \otimes T = 2^i + 2^k$. Для $e_{2^k}e_T$ перетасуємо $\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{10...0}_{k+1}$ з $\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{0...0}_{k+1}$, отримаємо

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{10\ 00\ 00\ ...00}_{(k+1)\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, будемо мати:

$$\underbrace{A_0 \overset{01}{\to} A \overset{00}{\to} ..... \overset{00}{\to}}_{i-k}\underbrace{A \overset{10}{\to} C \overset{00}{\to} C \overset{00}{\to} ... \overset{00}{\to} C}_{k+1}.$$

Для $e_{2^k}e_{T+1}$ перетасуємо $\underbrace{00...0}_{i-k}\underbrace{10...0}_{k+1}$ з $\underbrace{100...0}_{i-k}\underbrace{0...1}_{k+1}$, звідки випливає

$$\underbrace{01\ 00\ 00...00}_{(i-k)\text{ пар}}\ \underbrace{10\ 00\ 00\ ...01}_{(k+1)\text{ пар}}.$$

Починаючи з A_0, будемо мати:

$$\underbrace{A_0 \overset{01}{\to} A \overset{00}{\to}}_{i-k} ... \overset{00}{\to} \underbrace{A \overset{10}{\to} C \overset{00}{\to} C \overset{00}{\to} ... \overset{01}{\to} -C}_{k+1}$$

і т. д. Теорему доведено.

Теорема 4.5.6. *Нехай* $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ *— алгебра Келі–Діксона. Для довільних* $x_1, x_2, ..., x_t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *маємо*

$$\left(\frac{\gamma_1, ..., \gamma_t}{\mathbb{R}}\right) \simeq \left(\frac{\gamma_1 x_1^2, ..., \gamma_t x_t^2}{\mathbb{R}}\right).$$

Довдення. Нехай $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ з базисом $\{e_0 = 1, e_1, ..., e_{n-1}\}$, $n = 2^t$ і нехай $A_t' = \left(\frac{\gamma_1 x_1^2,...,\gamma_t x_t^2}{\mathbb{R}}\right)$ з базисом $\{e_0' = 1, e_1', ..., e_{n-1}'\}$ таким, що $(e_i')^2 =$

$\gamma_i x_i^2,\ i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Зауважимо, що $(x_i e_i)^2 = x_i^2 \gamma_i$ і тоді відображення $\tau : A_t' \to A_t,\ \tau(e_i') = e_i x_i$ є ізоморфною алгеброю.

Вище сформульоване твердження є узагальненням твердження 1.1, с. 52 з [112].

Зауваження 4.5.32. З теореми 4.5.6 випливає, що для кожного $n = 2^t$ є лише n неізоморфних алгебр A_t. Ці алгебри мають вигляд $A_t = \left(\frac{\gamma_1, ..., \gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ з $\gamma_1, ..., \gamma_t \in \{-1, 1\}$.

Нехай $\{e_0 = 1, e_1, ..., e_{n-1}\}$ — базис в $A_t = \left(\frac{\gamma_1, ..., \gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$, $n = 2^t$. Області $\Omega \subset \mathbb{R}^{2^t - 1}$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1} : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega\}$, яка міститься в A_t.

Розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to A_t$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) e_k, \tag{4.168}$$

де $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$ і $\Phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Означення 4.5.2. *Функцію вигляду (4.168) будемо називати ліво-A_t-голоморфною в області Ω_ζ, якщо частинні похідні першого порядку $\partial\Phi_k / \partial x_k$ існують в Ω і в кожній точці Ω_ζ виконується наступна рівність:*

$$D[\Phi](\zeta) = \sum_{k=1}^{2^t - 1} e_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0.$$

Оператор D називається оператором Дірака.

Відмітимо, якщо A_t — алгебра узагальнених кватерніонів, то ліво-A_t-голоморфні функції також називаються *гіперголоморфними.* Відмітимо також, що кожна гіперголоморфна функція Φ в області Ω_ζ є розв'язком рівняння

$$\gamma_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Зауваження 4.5.33. Нехай $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ — алгебра узагальнених кватерніонів з базисом $\{1, e_1, e_2, e_3\}$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ і $\mathbb{H}(-1, -1)$ — алгебра звичайних кватерніонів з діленням і базисом $\{1, i, j, k\}$. Нехай Ω —

область в $\mathbb{R}^3$, а $\Omega_\zeta := \{\zeta = xi + yj + zk : (x,y,z) \in \Omega\}$ — відповідна область в $\mathbb{H}(-1,-1)$. Функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(-1,-1)$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z)\,i + u_3(x,y,z)\,j + u_4(x,y,z)\,k$$

буде гіперголоморфною в області Ω, якщо

$$D[\Phi](\zeta) = i\frac{\partial\Phi}{\partial x} + j\frac{\partial\Phi}{\partial y} + k\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

Для іншої області $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Delta_{\widetilde{\zeta}} := \{\widetilde{\zeta} = \widetilde{x}e_1 + \widetilde{y}e_2 + \widetilde{z}e_3 : (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in \Delta\}$ в алгебрі $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$. Оператор Дірака в $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$, який позначимо через $\widetilde{D}$, має вигляд

$$\widetilde{D} := e_1\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}} + e_2\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}} + e_3\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}.$$

Елементи базисів в $\mathbb{H}(-1,-1)$ і $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$ задовольняють наступні рівності:

$$e_1 = i\sqrt{\gamma_1}, \quad e_2 = j\sqrt{\gamma_2}, \quad e_3 = k\sqrt{\gamma_1\gamma_2}. \tag{4.169}$$

Встановимо зв'язок між гіперголоморфними функціями в алгебрах $\mathbb{H}(-1,-1)$ і $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$, де $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$. Для цього позначимо через

$$x = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\,\widetilde{x}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\,\widetilde{y}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\,\widetilde{z}.$$

Ці співвідношення дають операторні рівності:

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\widetilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.170}$$

Тепер, використовуючи співвідношення (4.169) і (4.170), отримаємо

$$\widetilde{D}[\Phi](\widetilde{\zeta}) = e_1\frac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{x}} + e_2\frac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{y}} + e_3\frac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{z}} =$$

$$= i\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\sqrt{\gamma_1} + j\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\sqrt{\gamma_2} + k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\sqrt{\gamma_1\gamma_2} =$$

$$= i\frac{\partial\Phi}{\partial x} + j\frac{\partial\Phi}{\partial y} + k\frac{\partial\Phi}{\partial z} = D[\Phi](\zeta) = 0.$$

Використовуючи вище згадані позначення, отримаємо наступну теорему.

Теорема 4.5.7. *Нехай* Ω *— довільна область в* $\mathbb{R}^3$ *і* Δ *— область в* $\mathbb{R}^3$ *така, що координати відповідних точок* $\zeta = xi + yj + zk \in \Omega_\zeta$ *і* $\widetilde{\zeta} = \widetilde{x}e_1 + \widetilde{y}e_2 + \widetilde{z}e_3 \in \Delta_{\widetilde{\zeta}}$ *задовольняють наступні співвідношення*:

$$x = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_1)\gamma_1}}\,\widetilde{x},\;\; y = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_2)\gamma_2}}\,\widetilde{y},\;\; z = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_1)sign(\gamma_2)\gamma_1\gamma_2}}\,\widetilde{z},$$

де $sign(a)$ *— знак дійсного, відмінного від нуля, числа* a *. Тоді, якщо функція* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}\big(sign(\gamma_1), sign(\gamma_2)\big)$ *гіперголоморфна в області* Ω_ζ *, то ця ж функція* Φ *змінної* $\widetilde{\zeta}$*, гіперголоморфна в області* $\Delta_{\widetilde{\zeta}} \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *. Справедливе також обернене твердження.*

Доведення. Оскільки $e_1 = i\sqrt{sign(\gamma_1)\gamma_1}$, $e_2 = j\sqrt{sign(\gamma_2)\gamma_2}$, $e_3 = k\sqrt{sign(\gamma_1)sign(\gamma_2)\gamma_1\gamma_2}$, то твердження теореми є безпосереднім наслідком зауваження 4.5.33.

Зауваження 4.5.34. 1) Попередня теорема стверджує, що для вивчення гіперголоморфних функцій в узагальнених алгебрах кватерніонів $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ достатнього розглядати функції лише в алгебрах $\mathbb{H}\big(sign(\gamma_1), sign(\gamma_2)\big)$.

2) Аналогічний результат було встановлено в тривимірній комутативній асоціативній алгебрі (теорема 5 [152]).

Теорема 4.5.8. *Нехай* $A_t = \left(\frac{\gamma_1,\ldots,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ *— узагальнена алгебра Келі–Діксона,* Ω *— довільна область в* $\mathbb{R}^{2^t-1}$ *і* Δ *— область в* $\mathbb{R}^{2^t-1}$ *така, що координати відповідних точок* $\zeta = x_1e_1 + \ldots + x_{2^t-1}e_{2^t-1} \in \Omega_\zeta$ *і* $\widetilde{\zeta} = \widetilde{x}_1\,\widetilde{e}_1 + \widetilde{x}_2\,\widetilde{e}_2 + \ldots + \widetilde{x}_{2^t-1}\,\widetilde{e}_{2^t-1} \in \Delta_{\widetilde{\zeta}}$ *задовольняють наступні співвідношення:*

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_1)\gamma_1}}\,\widetilde{x}_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_2)\gamma_2}}\,\widetilde{x}_2, \ldots$$

$$\ldots, x_n = \frac{1}{\sqrt{sign(\gamma_1)...sign(\gamma_t)\gamma_1...\gamma_t}}\,\widetilde{x}_n.$$

Якщо функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \left(\frac{sign(\gamma_1),\ldots,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$ *ліво-*A_t*-голоморфна в області* Ω_ζ *, то ця ж функція* Φ *, але змінної* $\widetilde{\zeta}$ *є ліво-*A_t*-голоморфною в області* $\Delta_{\widetilde{\zeta}} \in A_t$ *. Справедливе також обернене твердження.*

Доведення. Нехай $\{1, e_1, ..., e_{n-1}\}$ — базис в $\left(\frac{sign(\gamma_1),...,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$ і $\{1, \widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_{n-1}\}$ — базис в $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$.

Оскільки

$$\widetilde{e}_1 = e_1\sqrt{sign\,(\gamma_1)\,\gamma_1}, \quad \widetilde{e}_2 = e_2\sqrt{sign\,(\gamma_2)\,\gamma_2}, \ldots,$$

$$\ldots, \widetilde{e}_{n-1} = e_{n-1}\sqrt{sign\,(\gamma_1)\,...sign\,(\gamma_t)\,\gamma_1...\gamma_t}\,,$$

то результат отримується простими обчисленнями, як у зауваженні 4.5.33.

Зауваження 4.5.35. З урахуванням попередньої теореми, очевидно, що для вивчення ліво-A_t-голоморфних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ достатньо розглядати ліво-A_t-голоморфні функції лише в алгебрах $\left(\frac{sign(\gamma_1),...,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$.

Тепер розглянемо інший клас диференційовних функцій. Нехай $A_t = \left(\frac{\gamma_1,...,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ з $\gamma_1 = ... = \gamma_t = -1$ і область $\Omega \subset \mathbb{R}^{2^t}$. Позначимо через $\Omega_\zeta := \{\zeta = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_{n-1}e_{n-1} : (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega\}$ область в A_t. Ця область називається *конгруентною* до області Ω.

Розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to A_t$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})e_k, \tag{4.171}$$

де $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$ і $\Phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Означення 4.5.3. *Функцію вигляду (4.171) будемо називати ліво-A_t-гіперголоморфною в області Ω_ζ, якщо частинні похідні першого порядку $\partial\Phi_k/\partial x_k$ існують в Ω і в кожній точці області Ω_ζ виконуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{2^t-1} e_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0.$$

Далі наведемо алгоритм побудови ліво-A_t-гіперголоморфних функцій. Нехай $v\,(x, y)$ — раціональна функція, визначена в області $G \subset \mathbb{R}^2$. Далі, використовуючи ідеї теореми 3 з роботи [214], побудуємо приклад ліво-A_t-гіперголоморфної функції для всіх $t \geq 1$, $t \in \mathbb{N}$. Для цього розглянемо наступні функції:

$$\phi_1 = x_0 + e_1 x_1, \quad \phi_2 = \frac{1}{e_1}(x_0 + e_1 x_1),$$

$$\rho_{2s-1} = x_{2s} - e_1 x_{2s+1}, \quad \rho_{2s} = -\frac{1}{e_1}(x_{2s} - e_1 x_{2s+1}), \ \ s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\},$$

$$F_t(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2) + v(\rho_1, \rho_2) e_2 + v(\rho_3, \rho_4) e_4 + [v(\rho_5, \rho_6) e_2] e_4 +$$

$$+ v(\rho_7, \rho_8) e_8 + (v(\rho_9, \rho_{10}) e_2) e_8 + (v(\rho_{11}, \rho_{12}) e_4) e_8 + [(v(\rho_{13}, \rho_{14}) e_2) e_4] e_8 + ...$$

$$... + \sum_{i=4}^{t-1} (\sum_{k=1}^{i} (\sum_{r=1}^{k-1} v(\rho_{M_{rki}-1}, \rho_{M_{rki}}) e_{2^r}) e_{2^{r+1}} ...) e_{2^k}) e_{2^i}) + \sum_{i=1}^{t-1} (v(\rho_{2^i-1}, \rho_{2^i}) e_{2^i}),$$

де $M_{rki} = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i$.

Тоді

$$F_t(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{t-1} (\sum_{k=1}^{i} (\sum_{r=1}^{k-1} v(\rho_{M_{rki}-1}, \rho_{M_{rki}}) e_{2^r}) e_{2^{r+1}} ...) e_{2^k}) e_{2^i}) + \sum_{i=1}^{t-1} (v(\rho_{2^i-1}, \rho_{2^i}) e_{2^i}),$$

або

$$F_t(\zeta) = F_{t-1}(\zeta) +$$

$$+ (\sum_{k=1}^{t-2} (\sum_{r=1}^{k-1} v\left(\rho_{M_{rk(t-1)}-1}, \rho_{M_{rk(t-1)}}\right) e_{2^r}) e_{2^{r+1}} ...) e_{2^k}) e_{2^{t-1}}) + v(\rho_{2^{t-1}-1}, \rho_{2^{t-1}}) e_{2^{t-1}}.$$

Позначимо через $\mathbb{C}_{2s}$ площини $\{x_{2s} + e_1 x_{2s+1} : x_{2s}, x_{2s+1} \in \mathbb{R}\}$ і через $D_{2s} := \{(x_{2s}, x_{2s+1}) : x_{2s} + e_1 x_{2s+1} \in \mathbb{C}_{2s}\}$, $s \in \{0, 1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$ евклідові площини. Нехай G_{2s} — області в $\mathbb{C}_{2s}$ і $\widetilde{G}_{2s}$ — відповідні області в D_{2s}. Маємо наступну теорему.

Теорема 4.5.9. *З урахуванням попередніх позначень розглянемо функції* $v(\phi_1, \phi_2)$ *і* $v(\rho_{2s-1}, \rho_{2s})$, *визначені у відповідних областях* $G_0 \subset \mathbb{C}_0$ *і* $G_{2s} \subset \mathbb{C}_{2s}$, $s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$. *Тоді відображення* $F_t(\zeta)$ *буде ліво-*A_t*-гіперголоморфною функцією в області* $\Theta \subset A_t$, *конгруентній області* $\widetilde{G}_0 \times \widetilde{G}_2 \times \widetilde{G}_4 \times ... \times \widetilde{G}_{2^{t-1}-1} \subset \mathbb{R}^{2^t}$ *для* $t \geq 1$.

Доведення. Для $t = 1$ маємо $F_1(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2)$, яка є голоморфною функцією в $D_0 \subset \mathbb{C}_0$, що випливає з теореми 3 [214].

Для $t = 2$ отримуємо $F_2(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2) + v(\rho_1, \rho_2)\, e_2$ і для $t = 3$ отримаємо $F_3(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2) + v(\rho_1, \rho_2)\, e_2 + v(\rho_3, \rho_4)\, e_4$. Функції $F_2(\zeta)$ і $F_3(\zeta)$ — гіперголоморфні і, відповідно, октоніонні гіперголоморфні функції згідно зауваження 4.5.31 і теореми 3 з [214].

Для $t \geq 4$, користуючись методом математичної індукції, і припускаючи, що $F_{t-1}(\zeta)$ ліво-A_{t-1}-гіперголоморфна функція, доведемо, що $F_t(\zeta)$ — A_t-гіперголоморфна. Це означає, що $D[F_t] = 0$. Із співвідношень (4.161) і (4.162) будемо мати

$$D[F_t] = \sum_{k=0}^{2^t-1} e_k \frac{\partial F_t}{\partial x_k} = \sum_{k=0}^{2^{t-1}-1} e_k \frac{\partial F_t}{\partial x_k} + \sum_{k=2^{t-1}}^{2^t-1} e_k \frac{\partial F_t}{\partial x_k} =$$

$$= D[F_{t-1}] + e_{2^{t-1}} \sum_{k=0}^{2^{t-1}-1} \overline{e}_k \frac{\partial F_t}{\partial x_{k+2^{t-1}}}.$$

За індукцією отримуємо $D[F_{t-1}] = 0$. Доведемо, що $\sum\limits_{k=0}^{2^{t-1}-1} \overline{e}_k \dfrac{\partial F_t}{\partial x_{2^{t-1}+k}} = 0$. Ця сума має 2^{t-1} доданків. Два перших:

$$\left(\frac{\partial F_t}{\partial x_{2^{t-1}}} - e_1 \frac{\partial F_t}{\partial x_{2^{t-1}+1}}\right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} \frac{\partial \rho_{2^{t-1}-1}}{\partial x_{2^{t-1}}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}} \frac{\partial \rho_{2^{t-1}}}{\partial x_{2^{t-1}}} - e_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} \frac{\partial \rho_{2^{t-1}-1}}{\partial x_{2^{t-1}+1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}} \frac{\partial \rho_{2^{t-1}}}{\partial x_{2^{t-1}+1}}\right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}} \left(\frac{-1}{e_1}\right) - e_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} (-e_1) + \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}}\right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}} e_1 - \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}} - e_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}} = 0.$$

Оскільки $e_1^2 = \gamma_1$, $\gamma_1^2 = 1$, $\frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}-1}}$ і $\frac{\partial v}{\partial \rho_{2^{t-1}}}$, то вони можуть бути записані у вигляді $a_{2^{t-1}-1}(\zeta) + b_{2^{t-1}-1}(\zeta)\, e_1$, відповідно $a_{2^{t-1}}(\zeta) + b_{2^{t-1}}(\zeta)\, e_1$, де $a_{2^{t-1}-1}(\zeta)$, $b_{2^{t-1}-1}(\zeta)$, $a_{2^{t-1}}(\zeta)$, $b_{2^{t-1}}(\zeta)$ — дійснозначні функції.

Випадок 1: $r < k$. В загальному випадку позначимо через $T = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^{t-1}$ і $T_1 = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k$ для $r < k$. Обчислимо доданки

$$-e_{T_1}\frac{\partial F_t}{\partial x_T} - e_{T_1+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}.$$

Обчислимо перший $\frac{\partial F_t}{\partial x_T}$. Маємо

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_T} = \left(... \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}\frac{\partial \rho_{T-1}}{\partial x_T} + \frac{\partial v}{\partial \rho_T}\frac{\partial \rho_T}{\partial x_T} \right) e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} =$$

$$= \left(... \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_T}\frac{-1}{e_1} \right) e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} =$$

$$= \left(... \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_T}e_1 \right) e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}}.$$

Оскільки можна записати $\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}$ у вигляді $a_{T-1}(\zeta) + b_{T-1}(\zeta)\, e_1$ і $\frac{\partial v}{\partial \rho_T}$ у вигляді $a_T(\zeta) + b_T(\zeta)\, e_1$, де a_{T-1}, b_{T-1}, a_T, b_T — дійснозначні функції, то користуючись теоремою 4.5.4, отримуємо:

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_T} = \left(... \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}} + \frac{\partial v}{\partial \rho_T}e_1 \right) e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} =$$

$$= (...(a_{T-1}(\zeta)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} + (...(b_{T-1}(\zeta)e_1)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} +$$

$$+ (...(a_T(\zeta)e_1)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} + (...(b_T(\zeta)e_1)e_1)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} =$$

$$= a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T + b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1} +$$

$$+ a_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1} - b_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T.$$

Користуючись теоремою 4.5.5, співвідношенням (4.166), обчислимо $-e_{T_1}\frac{\partial F_t}{\partial x_T}$.

$$-e_{T_1}\frac{\partial F_t}{\partial x_T}=-e_{T_1}\Big(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T+b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1}+$$

$$+a_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1}-b_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T\Big)=$$

$$=-\Big(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}(-1)^{k-r+1}e_{2^i}-b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}(-1)^{k-r+1}e_{2^i+1}\Big)-$$

$$-\Big(-a_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}(-1)^{k-r+1}e_{2^i+1}-b_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}(-1)^{k-r+1}e_{2^i}\Big)=$$

$$=-\Big(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i}-b_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i+1}\Big)-$$

$$-\Big(-a_T(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i+1}-b_T(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i}\Big).$$

Тепер обчислимо $\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}$. Будемо мати

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}=\Big(...\Big(\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}\frac{\partial \rho_{T-1}}{\partial x_{T+1}}+\frac{\partial v}{\partial \rho_T}\frac{\partial \rho_T}{\partial x_{T+1}}\Big)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}}=$$

$$=\Big(...\Big(-\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}e_1+\frac{\partial v}{\partial \rho_T}\Big)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}}.$$

Оскільки можна записати $\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}$ у вигляді $a_{T-1}(\zeta)+b_{T-1}(\zeta)\,e_1$ і $\frac{\partial v}{\partial \rho_T}$ у вигляді $a_T(\zeta)+b_T(\zeta)\,e_1$, де a_{T-1}, b_{T-1}, a_T, b_T — дійснозначні функції, то користуючись твердженням 4.5.4, отримаємо:

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}=\Big(...\Big(-\frac{\partial v}{\partial \rho_{T-1}}e_1+\frac{\partial v}{\partial \rho_T}\Big)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}}=$$

$$= (...(-a_{T-1}(\zeta)e_1)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} - (...(b_{T-1}(\zeta)e_1e_1)e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}}+$$

$$+(...(a_T(\zeta))e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} + (...(b_T(\zeta)e_1))e_{2^r})e_{2^{r+1}})...e_{2^k})e_{2^{t-1}} =$$

$$= -a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1} + b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T+$$

$$+a_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T + b_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1}.$$

Користуючись теоремою 4.5.5, обчислимо $-e_{T_1+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}$.

$$-e_{T_1+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}} = -e_{T_1+1}\Bigg(- a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1} + b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T+$$

$$+a_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}e_T + b_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}e_{T+1}\Bigg) =$$

$$= -\Bigg(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+3}(-1)^{^{k-r+1}}e_{2^i} - b_{T-1}(\zeta)(-1)^{k-r+2}(-1)^{^{k-r+1}}e_{2^i+1}\Bigg)-$$

$$-\Bigg(- a_T(\zeta)(-1)^{k-r+2}(-1)^{^{k-r+1}}e_{2^i+1} - b_T(\zeta)(-1)^{k-r+3}(-1)^{^{k-r+1}}e_{2^i}\Bigg) =$$

$$= -\Bigg(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i} - b_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i+1}\Bigg)-$$

$$-\Bigg(- a_T(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i+1} - b_T(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i}\Bigg).$$

Тепер обчислимо $-e_{T_1}\frac{\partial F_t}{\partial x_T} - e_{T_1+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}}$. В результаті маємо

$$-e_{T_1}\frac{\partial F_t}{\partial x_T} - e_{T_1+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}} =$$

$$= -\Big(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i} - b_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i+1}\Big)-$$

$$-\Big(- a_{T}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i+1} - b_{T}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i}\Big)-$$

$$-\Big(a_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i} - b_{T-1}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i+1}\Big)-$$

$$-\Big(- a_{T}(\zeta)(-1)^{2k-2r+3}e_{2^i+1} - b_{T}(\zeta)(-1)^{2k-2r+4}e_{2^i}\Big) = 0.$$

Випадок 2: $r = k$. Користуючись теоремою 4.5.4, теоремою 4.5.5 і співвідношенням (4.167), легко показати, що

$$-e_{2^k}\frac{\partial F_t}{\partial x_T} - e_{2^k+1}\frac{\partial F_t}{\partial x_{T+1}} = 0.$$

Зауваження 4.5.36. Попереднє твердження є узагальненням теореми 3 з [214].

Алгоритм

1) Задати t;

2) Задати функції v, ϕ_1, ϕ_2;

3) Для $i \in \{1, ..., t-1\}$, $k \in \{1, ..., i\}$, $r \in \{1, ..., k-1\}$ обчислити $M_{rki} = 2^r + ... + 2^k + 2^i$, $v\,(\rho_{M_{rki}-1}, \rho_{M_{rki}}) = \alpha_{M_{rki}} + \beta_{M_{rki}}e_1$;

4) Для $i \in \{1, ..., t-1\}$, $k \in \{1, ..., i\}$, $r \in \{1, ..., k-1\}$

— якщо $r < k$, обчислити

$$(...\,(\alpha_{M_{rki}} + \beta_{M_{rki}}e_1)\,e_{2^r})e_{2^{r+1}}...)e_{2^k})e_{2^i}) =$$

$$= (-1)^{k-r+2}\,(\alpha_{M_{rki}}e_{M_{rki}} - \beta_{M_{rki}}e_{M_{rki}-1})\,;$$

— якщо $r = k$, обчислити

$$v\,(\rho_{2^i-1}, \rho_{2^i})\,e_{2^i} = (\alpha_{2^i-1} + \beta_{2^i-1}e_1)e_{2^i} =$$

$$= \alpha_{2^i-1} e_{2^i} + \beta_{2^i-1} e_{2^i+1};$$

5) Вихідна функція

$$F_t(\zeta) = v(\phi_1, \phi_2) + \sum_{i=4}^{t-1} (\sum_{k=1}^{i} (\sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k-r+2} (\alpha_{M_{rki}}(\zeta) e_{M_{rki}} - \beta_{M_{rki}}(\zeta) e_{M_{rki}-1})))+$$

$$+\sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_{2^i-1}(\zeta) e_{2^i} + \beta_{2^i-1}(\zeta) e_{2^i+1}).$$

4.6. Ефективний метод розв'язування алгебраїчних рівнянь в алгебрах узагальнених кватерніонів та узагальнених октоніонів

У цьому підрозділі застосовано техніку, розвинену в попередньому параграфі, до розв'язування алгебраїчних рівнянь в алгебрах узагальнених кватерніонів та узагальнених октоніонів. Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [77].

4.6.1. Ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та його застосування до розв'язування кватерніонних алгебраїчних рівнянь

Нехай $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, і нехай $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ — алгебра узагальнених кватерніонів з базисом $\{1, e_1, e_2, e_3\}$. Через $\mathbb{H}(1,1)$ позначимо звичайну алгебру кватерніонів з діленням і з базисом $\{1, i, j, k\}$. Алгебра $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ визначається наступною таблицею множення:

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-\gamma_1$	e_3	$-\gamma_1 e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-\gamma_2$	$\gamma_2 e_1$
e_3	e_3	$\gamma_1 e_2$	$-\gamma_2 e_1$	$-\gamma_1 \gamma_2$

Алгебра $\mathbb{H}(1,-1)$ називається алгеброю *кокватерніонів* [61], або *паракватерніонів* [99], або *спліт-кватерніонів* [73], [139], або *псевдо-кватерніонів* [173, с. 389]. Позначимо через $\{1, i_1, i_2, i_3\}$ базис алгебри кокватерніонів.

Далі встановимо ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ при різних значеннях γ_1, γ_2.

Спочатку покажемо, що при $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ алгебра $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{H}(1,1)$.

Ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та $\mathbb{H}(1,1)$ встановлюється оператором A та його оберненим A^{-1}, де

$$A: \quad e_1 \mapsto i\sqrt{\gamma_1}, \quad e_2 \mapsto j\sqrt{\gamma_2}, \quad e_3 \mapsto k\sqrt{\gamma_1\gamma_2}.$$

Легко переконатися у наступних властивостях оператора A:

1) $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$;

2) $A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$;

3) $A(xy) = A(x)\, A(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$.

З цих властивостей випливає, що оператори A і A^{-1} є адитивними і мультиплікативними.

Лема 4.6.1. *Оператори A і A^{-1} є неперервними та їх норма рівна* 1.

Доведення. Позначимо через $\|\cdot\|_{\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)}$ евклідову норму в $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$. Оскільки простори $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та $\mathbb{H}(1,1)$ нормовані, то неперервність A еквівалентна обмеженості A, тобто існуванню дійсної сталої c такої, що для всіх $x \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$, справедлива нерівність

$$\frac{\|A(x)\|_{\mathbb{H}(1,1)}}{\|x\|_{\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)}} \le c.$$

Очевидною є рівність

$$\frac{\left\|x_0 + x_1 i\sqrt{\gamma_1} + x_2 j\sqrt{\gamma_2} + x_3 k\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\right\|}{\|x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\|} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_0^2 + x_1^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_2 + x_3^2\gamma_3}}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_2 + x_3^2\gamma_3}} = 1.$$

Лему доведено.

Тепер встановимо ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ при $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ та при $\gamma_1\gamma_2 < 0$.

При $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ алгебра $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ ізоморфна $\mathbb{H}(1, -1)$. Ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та $\mathbb{H}(1, -1)$ задається оператором B та його оберненим B^{-1}, де

$$B: \quad e_1 \mapsto i_3\sqrt{-\gamma_1}, \quad e_2 \mapsto i_2\sqrt{-\gamma_2}, \quad e_3 \mapsto i_1\sqrt{\gamma_1\gamma_2}.$$

При $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0$ ізоморфізм між $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та алгеброю $\mathbb{H}(1, -1)$ задається оператором C та його оберненим C^{-1}, де

$$C: \quad e_1 \mapsto i_1\sqrt{\gamma_1}, \quad e_2 \mapsto i_2\sqrt{-\gamma_2}, \quad e_3 \mapsto i_3\sqrt{-\gamma_1\gamma_2}.$$

При $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0$ ізоморфізм між $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ та $\mathbb{H}(1, -1)$ задається оператором D та його оберненим D^{-1}, де

$$D: \quad e_1 \mapsto i_3\sqrt{-\gamma_1}, \quad e_2 \mapsto i_1\sqrt{\gamma_2}, \quad e_3 \mapsto i_2\sqrt{-\gamma_1\gamma_2}.$$

Властивості операторів $B, B^{-1}, C, C^{-1}, D, D^{-1}$ подібні до властивостей оператора A.

Оскільки кожна з алгебр $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ ізоморфна алгебрі кватерніонів або кокватерніонів, то за допомогою вкзаних вище операторів, можемо узагальнити властивості цих алгебр на алгебру узагальнених кватерніонів.

Перейдемо до застосувань встановлених ізоморфізмів. Нехай $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_3 + x_3e_3 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ і нехай $f : \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2) \to \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ — неперервна функція вигляду $f(x) = f_0(x_0, x_1, x_2, x_3) + f_1(x_0, x_1, x_2, x_3)e_1 + f_2(x_0, x_1, x_2, x_3)e_2 + f_3(x_0, x_1, x_2, x_3)e_3$. Нехай F — один із операторів A, B, C або D, які залежать від знаків γ_1 і γ_2. Визначимо оператор $\mathfrak{F}$, який кожну неперервну функцію f зі значеннями в $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ відображає в неперервну функцію $\mathfrak{F}f$ зі значеннями в $\mathbb{H}(1, 1)$ або $\mathbb{H}(1, -1)$ за правилом:

$$\mathfrak{F}f := f_0 + f_1\, F(e_1) + f_2\, F(e_2) + f_3\, F(e_3).$$

Теорема 4.6.1. *Нехай* $x^0 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *— корінь рівняння* $f(x) = 0$ *в* $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$. *Тоді* $F(x^0)$ *є коренем рівняння* $\mathfrak{F}\, f\big(F(x)\big) = 0$ *в* $\mathbb{H}(1, 1)$

або в $\mathbb{H}(1,-1)$, *залежно від знаків* γ_1 *і* γ_2. *Справедливе також обернене твердження.*

Доведення. Нехай $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Діючи оператором A на рівність $f(x^0) = 0$ і використовуючи неперервність A, отримуємо

$$A\big(f(x^0)\big) = Af\big(A(x^0)\big) = A(0) = 0.$$

Для доведення оберненого твердження діємо оператором A^{-1} на рівність $f(x^0) = 0$. Решта випадків доводяться аналогічно. Теорему доведено.

Таким чином, всі результати для кватерніонних та кокватерніонних рівнянь можуть бути узагальнені для алгебри $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$.

Відомо, що кожен поліном степеня n з коефіцієнтами з поля K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) має не більше n коренів в K. Якщо коефіцієнти належать $\mathbb{H}(1,1)$, то ситуація інша. Для алгебри кватерніонів відомий наступний аналог фундаментальної теореми алгебри: *Якщо поліном має лише один доданок найбільшого степеня, то він має хоча б один корінь в* $\mathbb{H}(1,1)$ (див. [195], теорема 65; [72], теорема 1).

Розглянемо поліном степеня n вигляду

$$f(x) = a_0 x a_1 x \ldots a_{n-1} x a_n + \varphi(x), \tag{4.172}$$

де x, a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $a_n \in \mathbb{H}(1,1)$, при $a_\ell \neq 0$ для $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ і $\varphi(x)$ є сумою скінченного числа одночленів вигляду $b_0 x b_1 x \ldots b_{t-1} x b_t$, де $t < n$. З наведеного вище випливає, що рівняння $f(x) = 0$ має хоча б один корінь. Діючи оператором A^{-1} на цю рівність, отримуємо, що рівняння $\big(A^{-1}f\big)\big(A^{-1}(x)\big) = 0$ при $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, має хоча б один корінь в $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$. Тобто, справедливий наступний результат.

Теорема 4.6.2. *В алгебрі узагальнених кватерніонів* $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *при* $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ *кожен поліном вигляду (4.172) має хоча б один корінь.*

Тепер розглянемо рівняння $x^2 + ax + b = 0$, де $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ при $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Означення 4.6.1. *Скажемо, що корінь* $x_0 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ *називається еліпсоїдальним, якщо для кожного елемента*

$x_1 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *вигляду* $x_1 = a_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$ *тако, що* $\gamma_1 a_1^2 + \gamma_2 a_2^2 + \gamma_1 \gamma_2 a_3^2 = \gamma_1 b_1^2 + \gamma_2 b_2^2 + \gamma_1 \gamma_2 b_3^2$ *є також коренем цього рівняння.*

Використовуючи теорему 3 з [134] і теорему 4.6.1, отримуємо наступний наслідок.

Теорема 4.6.3. *В алгебрі узагальнених кватерніонів* $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *при* $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ *рівняння* $x^2 + ax + b = 0$ *має еліпсоїдальний корінь тоді і тільки тоді, коли* a *і* b *є дійсними і* $a^2 - 4b < 0$.

Більше результатів про структуру коренів квадратних кватерніонних рівнянь можна знайти в [201], [132], [133], [138].

Тепер застосуємо результати з алгебри кокватерніонів. Будемо розглядати три випадки: $\gamma_1, \gamma_2 < 0$; $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0$; $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0$.

Означення 4.6.2. *Скажемо, що корінь* $x_0 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *називаєтьcя гіперболоїдальним, якщо кожен елемент* $x_1 \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *вигляду* $x_1 = a_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$ *такий, що* $\gamma_1 a_1^2 + \gamma_2 a_2^2 + \gamma_1 \gamma_2 a_3^2 = \gamma_1 b_1^2 + \gamma_2 b_2^2 + \gamma_1 \gamma_2 b_3^2$ *також є коренем цього рівняння.*

Використовуючи теорему 2.5 з [155] та теорему 4.6.1, отримуємо наступний результат.

Теорема 4.6.4. *Нехай коефіцієнти* r_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ *поліноміального рівняння* $r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_0 = 0$, $x \in \mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ *дійсні числа. Тоді всі його недійсні корені є гіперболоїдальними.*

Про розв'язування лінійних кокватерніонних рівнянь можна знайти в роботах [101], [73], а про розв'язування лінійних кватерніонних рівнянь радимо джерела [203], [187].

Нехай $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}(1, 1)$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Введемо позначення

$$\widetilde{x} = A^{-1}(x) = x_0 + x_1 \frac{e_1}{\sqrt{\gamma_1}} + x_2 e_2 \frac{e_2}{\sqrt{\gamma_2}} + x_3 e_3 \frac{e_1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}.$$

Таким чином, алгебраїчні рівняння $f(x) = 0$ з неперервною f в $\mathbb{H}(1, 1)$ можуть бути редуковані до подібних рівнянь у всіх алгебрах $\mathbb{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ при

$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ і навпаки. Подібні результати справедливі для випадку, коли γ_1 і γ_2 мають різні знаки.

4.6.2. Ізоморфізм між алгебрами $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ та його застосування до розв'язування октоніонних алгебраїчних рівнянь

Нехай $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ — алгебра узагальнених октоніонів над полем $\mathbb{R}$ з базисом $\{1, f_1, ..., f_7\}$ і таблицею множення:

$\cdot$	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
1	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	f_1	$-\alpha$	f_3	$-\alpha f_2$	f_5	$-\alpha f_4$	$-f_7$	αf_6
f_2	f_2	$-f_3$	$-\beta$	βf_1	f_6	f_7	$-\beta f_4$	$-\beta f_5$
f_3	f_3	αf_2	$-\beta f_1$	$-\alpha\beta$	f_7	$-\alpha f_6$	βf_5	$-\alpha\beta f_4$
f_4	f_4	$-f_5$	$-f_6$	$-f_7$	$-\gamma$	γf_1	γf_2	γf_3
f_5	f_5	αf_4	$-f_7$	αf_6	$-\gamma f_1$	$-\alpha\gamma$	$-\gamma f_3$	$\alpha\gamma f_2$
f_6	f_6	f_7	βf_4	$-\beta f_5$	$-\gamma f_2$	γf_3	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma f_1$
f_7	f_7	$-\alpha f_6$	βf_5	$\alpha\beta f_4$	$-\gamma f_3$	$-\alpha\gamma f_2$	$\beta\gamma f_1$	$-\alpha\beta\gamma$

Алгебра $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ є некомутативною і неасоціативною, але є *альтернативною* (тобто, $x^2 y = x\,(xy)$ and $yx^2 = (yx)\,x \,\forall\, x, y \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$), *гнучкою* (тобто $x\,(yx) = (xy)\,x \,\forall\, x, y \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$), *степенево асоціативною* (тобто, для кожного $x \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ підалгебра, породжена x є асоціативною).

Далі будемо розглядати алгебру узагальнених октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ і алгебри $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ та $\mathbb{O}(1, 1, -1)$. Нехай $\{1, f_1, \ldots, f_7\}$ — базис в $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\{1, \widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_7}\}$ — канонічний базис в $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ і $\{1, \widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_7}\}$ —канонічний базис в $\mathbb{O}(1, 1, -1)$.

Тепер покажемо, що алгебра $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ при $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ є ізоморфною алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ або $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і вкажемо формули переходу від одного базису до іншого. Отже, якщо $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ є ізоморфною алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, 1)$, причому ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_1: \quad f_1 \mapsto \widetilde{f}_1\sqrt{\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widetilde{f}_2\sqrt{\beta}, \ f_3 \mapsto \widetilde{f}_3\sqrt{\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widetilde{f}_4\sqrt{\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widetilde{f}_5\sqrt{\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widetilde{f}_6\sqrt{\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widetilde{f}_7\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0,$ то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_2: \quad f_1 \mapsto \widehat{f}_1\sqrt{\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f}_2\sqrt{\beta}, \ f_3 \mapsto \widehat{f}_3\sqrt{\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widehat{f}_4\sqrt{-\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f}_5\sqrt{-\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widehat{f}_6\sqrt{-\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widehat{f}_7\sqrt{-\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha, \gamma > 0, \beta < 0,$ то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_3: \quad f_1 \mapsto \widehat{f}_1\sqrt{\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f}_4\sqrt{-\beta}, \ f_3 \mapsto \widehat{f}_5\sqrt{-\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widehat{f}_2\sqrt{\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f}_3\sqrt{\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widehat{f}_6\sqrt{-\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widehat{f}_7\sqrt{-\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha > 0, \beta, \gamma < 0,$ то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_4: \quad f_1 \mapsto \widehat{f}_1\sqrt{\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f}_4\sqrt{-\beta}, \ f_3 \mapsto \widehat{f}_5\sqrt{-\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widehat{f}_6\sqrt{-\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f}_7\sqrt{-\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widehat{f}_2\sqrt{\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widehat{f}_3\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha < 0, \beta, \gamma > 0,$ то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_5: \quad f_1 \mapsto \widehat{f}_4\sqrt{-\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f}_1\sqrt{\beta}, \ f_3 \mapsto \widehat{f}_5\sqrt{-\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widehat{f}_2\sqrt{\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f}_6\sqrt{-\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widehat{f}_3\sqrt{\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widehat{f}_7\sqrt{-\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha, \gamma < 0, \beta > 0,$ то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$A_6: \quad f_1 \mapsto \widehat{f}_4\sqrt{-\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f}_1\sqrt{\beta}, \ f_3 \mapsto \widehat{f}_5\sqrt{-\alpha\beta},$$
$$f_4 \mapsto \widehat{f}_6\sqrt{-\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f}_2\sqrt{\alpha\gamma}, \ f_6 \mapsto \widehat{f}_7\sqrt{-\beta\gamma}, \ f_7 \mapsto \widehat{f}_3\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,.$$

Якщо $\alpha, \beta < 0, \gamma > 0$, то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A_7: \quad & f_1 \mapsto \widehat{f_4}\sqrt{-\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f_5}\sqrt{-\beta}, \;\; f_3 \mapsto \widehat{f_1}\sqrt{\alpha\beta}, \\ & f_4 \mapsto \widehat{f_2}\sqrt{\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f_6}\sqrt{-\alpha\gamma}, \;\; f_6 \mapsto \widehat{f_7}\sqrt{-\beta\gamma}, \;\; f_7 \mapsto \widehat{f_3}\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,. \end{aligned}$$

Якщо $\alpha, \beta, \gamma < 0$, то алгебра дійсних октоніонів $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$ і ізоморфізм визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A_8: \quad & f_1 \mapsto \widehat{f_4}\sqrt{-\alpha}, \quad f_2 \mapsto \widehat{f_5}\sqrt{-\beta}, \;\; f_3 \mapsto \widehat{f_1}\sqrt{\alpha\beta}, \\ & f_4 \mapsto \widehat{f_6}\sqrt{-\gamma}, \quad f_5 \mapsto \widehat{f_2}\sqrt{\alpha\gamma}, \;\; f_6 \mapsto \widehat{f_3}\sqrt{\beta\gamma}, \;\; f_7 \mapsto \widehat{f_7}\sqrt{-\alpha\beta\gamma}\,. \end{aligned}$$

Легко переконатися в тому, що оператори A_k, $k = \overline{1, 8}$ є адитивними і мультиплікативними. Наступне твердження доводиться повністю аналогічно до доведення леми 4.6.1.

Лема 4.6.2. *Оператори A_k, $k = \overline{1, 8}$ є неперервними і їх норма рівна 1.*

Нехай $x = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{7} x_k f_k \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ і нехай $g : \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma) \to \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ — неперервна функція вигляду $g(x) = g_0(x_0, \ldots, x_7) + \sum\limits_{k=1}^{7} g_k(x_0, \ldots, x_7) f_k$. Нехай L — один з операторів A_k, $k = \overline{1, 8}$, залежно від знаків α, β і γ. Визначимо оператор $\mathfrak{L}$ правилом:

$$\mathfrak{L} g := f_0 + \sum_{k=1}^{7} g_k \, L(f_k).$$

Оператор $\mathfrak{L}$ кожну неперервну функцію g зі значеннями в $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ відображає в неперервну функцію $\mathfrak{L} g$ зі значеннями в $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ або $\mathbb{O}(1, 1, -1)$,

Наступна теорема доводиться подібно до доведення теореми 4.6.1.

Теорема 4.6.5. *Нехай $x^0 \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ — корінь рівняння $g(x) = 0$ в $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$. Тоді $L(x^0)$ є коренем рівняння $\mathfrak{L}\, g\big(L(x)\big) = 0$ в $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ або $\mathbb{O}(1, 1, -1)$, залежно від знаків α, β, γ. Справедливе також обернене твердження.*

Таким чином, вивчення алгебраїчних рівнянь в довільній алгебрі $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ з $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ зводиться до вивчення відповідних алгебраїчних рівнянь в алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, 1)$ або в алгебрі $\mathbb{O}(1, 1, -1)$.

Використовуючи попередню теорему і теорему 65 з роботи [195] маємо наступне твердження.

Теорема 4.6.6. *Рівняння* $x^n = a$, *де* $a \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma) \setminus \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma > 0$, *має* n *коренів.*

Висновки

В розділі 4 вивчаються алгебаїчно-аналітичні властивості спеціальних класів відображень зі значеннями в некомутативних алгебрах. А саме, отримано наступні результати.

1. В теоремі 4.3.1 доведено існування і єдиність похідної H-моногенного відображення, а в теоремі 4.3.2 — властивість похідної добутку H-моногенних відображень.

2. Встановлено зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями (теорема 4.3.3 і теорема 4.3.4).

3. Доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

4. Встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних та похідною за Хаусдорфом;

5. Запропоновано алгоритм побудови ліво- A_t-гіперголоморфних функції в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

6. Доведено, що для вивчення ліво-A_t-гіперголоморфних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона $A_t = \left(\frac{\gamma_1,\ldots,\gamma_t}{\mathbb{R}}\right)$ достатньо обмежитись вивченням ліво- A_t-голоморфних функцій в алгебрах $\left(\frac{sign(\gamma_1),\ldots,sign(\gamma_t)}{\mathbb{R}}\right)$.

7. Показано, що вивчення алгебраїчних рівнянь в довільній алгебрі

$\mathbb{O}(\alpha,\beta,\gamma)$ з $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ зводиться до вивчення відповідних алгебраїчних рівнянь в алгебрі $\mathbb{O}(1,1,1)$ або в алгебрі $\mathbb{O}(1,1,-1)$. Так само, показано, що вивчення алгебраїчних рівнянь в довільній алгебрі $\mathbb{H}(\gamma_1,\gamma_2)$ з $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ зводиться до вивчення відповідних алгебраїчних рівнянь в алгебрі $\mathbb{H}(1,1)$ або в алгебрі $\mathbb{H}(1,-1)$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії функцій гіперкомплексної змінної в скінченновимірних алгебрах (комутативних і некомутативних) та в нескінченновимірних просторах з комутативним множенням.

Основні результати дисертації такі:

1. отримано конструктивний опис моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

2. Доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, а також в нескінченновимірній комутативній алгебрі і топологічному векторному просторі з комутативним множення, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа.

3. Встановлено співвідношення між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу. Вказані моногенні функції застосовано для побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

4. Введено клас кватерніонних G-моногенних відображень і отримано їх конструктивний опис за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної; доведено аналоги інтегральних теорем для відображень цього класу.

5. Встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних та похідною за Хаусдорфом

6. Розроблено алгоритм побудови функцій, що належать ядру оператора Дірака в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Одержані результати та розвинені в дисертації методи можуть бути використані при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними і крайових задач математичної фізики, що знаходять застосування в гідродинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агранович М. С. Об аналитических решениях уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами // ДАН СССР. — 1959. — **124**, № 6. — С. 1183 – 1186.

2. Агранович М. С. Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. — 1961. — **16**, № 2. — С. 27 – 93.

3. Акивис М. А., Розенфельд Б. А. Эли Картан. — М.: Из–во МЦНМО, 2007. — 326 с.

4. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966. — 202 с.

5. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Мир, 1976. — 648 с.

6. Гусев В. А. О кватернионных функциях, моногенных в смысле В.С.Федорова // Успехи мат. наук. — 1965. — **20**, № 1. — Р. 203 – 208.

7. Калиновский Я. А., Бояринова Ю. Е. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их применения. — К.: ИПРИ НАН Украины, 2012. — 183 с.

8. Клейн Ф. Лекции о развитии математикив XIX столетии. — М.–Л.: ОНТИ, 1937. — Ч. 1. — 432 с.

9. Клиффорд В. К. Предварительный очерк бикватернионов // Здравый смысл точных наук. — П., 1922, С. 203 — 221.

10. Ковалев В. Ф. Бигармоническая задача Шварца. — К.: Ин-т матем. НАН Украины, Препринт 86.16. — 1986. – 19 с.

11. Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П. Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — **8**. — С. 25 – 27.

12. Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 288 с.

13. Мейлихзон А. С. По поводу моногенности кватернионов // Докл. АН СССР. — 1948. — **59** (3). — С. 431 – 434.

14. Мельниченко И. П. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. — 1986. — **38** (2). — С. 252 – 254.

15. Молин Ф. Э. Числовые системы. — Новосибирск: Наука, 1985.

16. Морев И. А. Об одном обобщении понятия моногенности // Мат. сборник. — 1957. — **42**(60), № 2. — Р. 197 – 206.

17. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Наука, 1967. — 488 с.

18. Плакса С. А. Аналитические решения одной системы эллиптических уравнений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 292 – 306.

19. Плакса С. А. Условия Коши-Римана для пространственных гармонических функций // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2006. — **3** (4). — С. 396 – 403.

20. Плакса С. А., Шпаковский В. С. Интегральные теоремы для дифференцируемых функций в трехмерной гармонической алгебре // Доповіді НАН України. — 2010. — **5**. — С. 23 – 30.

21. Плакса С. А., Шпаковский В. С. О логарифмическом вычете моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с двумерным радикалом // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 7. — С. 967 – 973.

22. Синьков М. В., Калиновский Я. А., Бояринова Ю. Е. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

23. Супруненко Д. А. О максимальных коммутативных подал- гебрах полной линейной алгебры // Успехи мат. наук, **11**(3) (1956), 181–184.

24. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1956. — 296 с.

25. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. — М.: Физматиз, 1963. — 212 с.

26. Федоров В. С. Моногенность // Мат. сборник. — 1946. — **18**(60), № 3. — P. 353 – 378.

27. Федоров В. С. О моногенности гиперкомплексных функций // Мат. сборник. — 1953. — **32**(74), № 2. — P. 249 – 254.

28. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. — 662 с.

29. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

30. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — Ч.2. — М.: Наука, 1976. — 571 с.

31. Шпаківський В. С. Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Труды ИПММ НАН Украины. — 2018. — **32**. – С. 147 – 168.

32. Шпаківський В. С. Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — P. 272 – 294.

33. Шпаківський В. С. Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геом. центру. — 2018. — **11**, № 3. — P. 1 – 18.

34. Шпаківський В. С., Кузьменко Т. С. Про один клас кватерніонних відображень // Укр. мат. журн. — 2016. — **68** (1). — С. 117 – 130.

35. Шпаковский В. С. Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2016. — **30**. — С. 155 – 164.

36. Шпаковский В. С. Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 262 – 274.

37. Шпаковский В. С. Об изоморфизме функциональных алгебр в гармонической алгебре с двумерным радикалом // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 384 – 391.

38. Шпаковский В. С., Кузьменко Т. С. О моногенных отображениях кватернионной переменной // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13** (2). — С. 123 – 142.

39. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. — 191 с.

40. Abreu Blaya R., Bory Reyes J. Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces // Adv. Appl. Cliff. Alg. 9 (1) (1999), pp. 1–22.

41. Abreu Blaya R., Bory Reyes J. Moreno-García T. Minkowski Dimension and Cauchy Transform in Clifford Analysis // Compl. anal. oper. theory, 1 (2007), pp. 301–315.

42. Aizenberg L., Kytmanov A. On the holomorphic extendability of functions given on a connected part of the boundary // Mat. sb. **182** (4), 490–507 (1991) [in Russian].

43. Aizenberg L., Tumanov A., Vidras A. The class of holomorphic functions representable by Carleman formula // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 4 ser. **27** (1), 93–105 (1998).

44. Alpay D., Colombo F., Sabadini I. Slice hyperholomorphic Schur analysis. — Birkhäuser, 2016.

45. Bales J. W. A Tree for Computing the Cayley-Dickson Twist // Missouri J. Math. Sci., **21**(2)(2009), 83–93.

46. Bernstein S. Factorization of the nonlinear Schrödinger equation and applications // Complex Variables and Elliptic Equations, 51(5-6) (2006), pp. 429–452.

47. Blum E. K. A theory of analytic functions in banach algebras // Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), 343 – 370.

48. Boccaletti D., Catoni F., Cannatay R., Catoniz V., Nichelattix E., Zampetti P. The Mathematics of Minkowski Space-Time and an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers. — Springer, 2006. — 185 p.

49. Borodich F. M., Volovikov A. Yu. Surface integrals for domains with fractal boundaries and some applications to elasticity // Proc. Royal Soc. Ser. A. 456 (2000), pp. 1–24.

50. Bory-Reyes J., Shapiro M. Clifford analysis versus its quaternionic counterparts // Math. Methods Appl. Sciences **33**(9) (2010), 1089–1101.

51. Brackx F. Delanghe R. Duality in hypercomplex functions theory // J. Funct. Anal., **37**(1980), no. 2, 164–181.

52. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford analysis. — Pitman Research Notes in Mathematics, Boston, MA, 1982.

53. Brown R., Gray A. Vector cross products // Commentarii Mathematici Helvetici 42 (1)(1967), 222–236.

54. Buoni J. J. Differentiability in Banach algebras // Amer. Math. Monthly. — 1974. — **81**, № 5. — P. 493 – 495.

55. Burde D., de Graaf W. Classification of Novikov algebras // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **24**(2013), no. 1, 1–15.

56. Burde D., Fialowski A. Jacobi-Jordan algebras // Linear Algebra Appl., **459** (2014), 586–594.

57. Cartan E. Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes // Annales de la faculté des sciences de Toulouse. – 1898. – **12**, № 1. – P. 1–64.

58. Catoni F. Commutative (Segre's) quaternion fields and relation with Maxwell equations // Advances in applied Clifford algebras. — 2008. — **18** (1). — P. 9 – 28.

59. Cesari L. Surface area. — Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, N. J., 1956.

60. Clifford W. K. Applications of Grassmann's extensive algebra // American J. Math. – 1878. — **1**. — P. 350 – 358.

61. Cockle J. On systems of algebra involving more than one imaginary // Philosophical Magazine, **35** (3) (1849), 434-435.

62. Colombo F., Sabadini I. Struppa D. Slice monogenic functions // Israel J. Math. 171 (1) (2009), pp. 385–403.

63. Colombo F.,Sabadini I., Struppa D. C. Noncommutative functional calculus: theory and applications of slice hyperholomorphic functions. — Progress in Mathematics, Birkhäuser, 2011.

64. Cullen C. G. An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions // Duke Math. J. **32** (1965), 139–148.

65. Danylenko V. A., Sorokina V. V., Vladimirov V. A. On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 7125 – 7135.

66. Dedekind R. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebitdeten Größen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.–Phys. — 1885. — S. 141 – 159.

67. Дегтерева М. К вопросу построения теории аналитических функций в линейных алгебрах // Докл. АН СССР. — **61** (1). — 141 – 159.

68. Delanghe R., Kraußhar R. S., Malönek H. R. Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem // Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. — 2001. — **70** (4-5-6). — P. 231 – 249.

69. De Morgan A. Trigonometry and double algebra. — Taylor, Walton and Maberly, 1849. — 167 p.

70. Dzagnidze O. $\mathbb{C}^2$-differentiability of quaternion functions and their representation by integrals and series // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2015. — Vol. 167. — P. 19 – 27.

71. Dzagnidze O. On some new properties of quaternion functions // J. Math. Sci. — 2018. — Vol. 235, № 5. – P. 557 – 603.

72. Eilenberg S., Niven I. The fundamental theorem of algebra for quaternions // Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 246–248.

73. Erdoğdu M., Özdemir M. Two-sided linear split quaternionic equations with unknowns // Linear and Multilinear Algebra. — **63** (1) (2015), 97–106.

74. Ehrenpreis L. Solutions of some problems of division // Amer. Journ. of Math., I, **76** (1954), 883 – 903; II, **77** (1955), 286 – 292.

75. Eriksson-Bique S.-L. A correspondence of hyperholomorphic and monogenic functions in $\mathbb{R}^4$ // Clifford analysis and its applications, NATO Science Series. — 2001. — **25**. — P. 71 – 80.

76. Flaut C., Savin D. Quaternion algebras and generalized Fibonacci–Lucas quaternions // Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2015, Volume 25, Issue 4, pp 853–862.

77. Flaut C., Shpakivskyi V. An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 2. — P. 337 – 350.

78. Flaut C., Shpakivskyi V. Holomorphic functions in generalized Cayley-Dickson algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 1. — P. 95 – 112.

79. Flaut C., Shpakivskyi V. Some identities in algebras obtained by the Cayle-Dickson process // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2013. — **23**, № 1. — P. 63 – 76.

80. Fock V. A., Kuni F. M. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **127** (6), 1195–1198 (1959) [in Russian].

81. Fréchet M. Sur la distance de deux surfaces // Ann. Soc. Polonaise Math. 3 (1924), pp. 4–19.

82. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Commet. Math. Helv., **7**(1935), 307–330.

83. Futugawa M. On the theory of functions of a quaternary variable // Tohoku Math. J., **29** (1928), 175–222; **35** (1932), 69–120.

84. Gentili G., Struppa D. C. A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable // Comptes Rendus Mathematique **342**(10), (2006), 741–744.

85. Gentili G., Struppa D. A new theory of regular functions of a quaternionic variable // Advances in Mathematics **216** (2007), 279–301.

86. Gentili G., Stoppato G., Struppa D. Regular functions of a quaternionic variable. — Springer Monographs in Mathematics, 2013.

87. Grassmann H. Das lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. — Leipzig: Wigand, 1844.

88. Grishchuk S. V., Plaksa S. A. Monogenic functions in a biharmonic algebra // Ukr. Math. J., **61**(12) (2009), 1865–1876.

89. Gürlebeck K., Malonek H. R. A hypercomplex derivative of monogenic functions in $\mathbb{R}^{n+1}$ and its applications // Complex Variables **39** (1999), 199—228.

90. Gürlebeck K., Sprössig W. Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. — John Wiley and Sons, 1997. — 363 p.

91. Hall M. Projective planes // Trans. Amer. Math. Soc. vol. **54**(1943), 229-277.

92. Hamilton W. R. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1844. — **2**. — P. 424 – 434.

93. Hausdorff F. Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen // Leipziger Berichte, **52** (1900), 43–61.

94. Hegazim A. S., Abdelwahab H. Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras // Linear Algebra and its Applications, **494**(2016), 165–218.

95. Hempfling Th., Leutwiler H. Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^4$ // Clifford algebras and their appl. in math. physics. — Aachen: Kluwer, Dordrecht. — 1998. — P. 227 – 238.

96. Herus O. F. On hyperholomorphic functions of the space variable // Ukr. Math. J. **63** (4) (2011), pp. 530–537.

97. Herus O. F. On the Cauchy theorem for hyperholomorphic functions of spatial variable // J. Math. Sci. **229** (1) (2018), pp. 1–6.

98. Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. – Cambridge University Press, Cambridge (1931).

99. Ivanov S., Zamkovoy S. Parahermitian and paraquaternionic manifolds // Diff. Geometry Appl., **23**, pp. 205—234.

100. Ivanov S., Zamkovoy S. Parahermitian and paraquaternionic manifolds // Differential Geometry and its Applications **23**(2005), 205–234.

101. Janovská D., Opfer G. Linear equations and the Kronecker product in coquaternions // Mitt. Math. Ges. Hamburg **33** (2013), 181 — 196.

102. Javtokas A. A bicomplex Hurwitz zeta-function // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2006. — **1** (9). — P. 23 – 31.

103. Joly C. J. A manual of quaternions. — London, Macmillan, 1905 — 320 p.

104. Ketchum P. W. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable // Amer. J. Math., **51** (1929), 179–188.

105. Ketchum P. W. Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc., **30** (1928), no. 4, 641–667.

106. Ketchum P. W. Solution of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables // American J. Math., **54**, No. 2, 253–264.

107. Kravchenko V. V., Shapiro M. V. Integral representations for spetial models of mathematical physics . — Pitman Research Notes in Mathematics, Addison Wesley Longman Inc. (1996).

108. Kunz K. S. An algebraic technique for the solution of Laplace's equation in three dimensions // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1970. — **67**. — P. 383 – 389.

109. Kunz K. S. Application of an algebraic technique to the solution of Laplace's equation in three dimensions // Siam. J. Appl. Math. — 1971. — **21** (3). — P. 425 – 441.

110. Kuzmenko T. S., Shpakivskyi V. S. A theory of quaternionic G-monogenic mappings in E_3 // Models and Theories in Social Systems (Eds. C. Flaut et al.). — Springer, 2019. — Vol. 179. — P. 451 – 508.

111. Kuzmenko T. S., Shpakivskyi V. S. Generalized integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13** (4). — С. 499 – 513

112. Lam T. Y. Introduction to quadratic forms over fields. — Graduate Studies in Mathematics, vol 67, American Math. Soc., Providence RI, 2005.

113. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1987. — 736 с.

114. Lelong P. Prolongement analytique et singularitŕe complexes des fonctions harmoniques // Bull. Soc. Math. Belg. **7** (1), 10-–23 (1954).

115. Leutwiler H. Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ // Complex variables theory appl. — 1992. — **20**. — P. 19 – 51.

116. Leutwiler H. Quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ versus its hyperbolic modification // In: "Clifford Analysis and Its Applications" (Eds.: F. Bracks and al.). Kluwer Acad. Pub., 2001. — P. 193 – 211.

117. Lorch E. R. The theory of analytic function in normed abelin vector rings // Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 414 – 425.

118. Ludkovsky S. V. Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration // J. Math. Sci., **141** (3)(2007), 1231-1298.

119. Luna-Elizarrarás M. E., Macias-Cedeño M. A., Shapiro M. Hyperderivatives in Clifford analysis and some applications to the Cliffordian Cauchy-type integrals // Hypercomplex Analysis. Series: Trends in Mathematics. Sabadini, Irene; Shapiro, Michael; Sommen, Frank (Eds.) (2009), 221—234.

120. Luna-Elizarrarás M. E., Macias-Cedeño M. A., Shapiro M. On the hyperderivatives of Dirac-hyperholomorphic functions of Clifford analysis // Operator Theory: Advances and Applications **220** (2012), 179—195.

121. Luna-Elizarrarás M. E., Macias-Cedeño M. A., Shapiro M. On the hyperderivatives of Moisil-Théodoresco hyperholomorphic functions // Hypercomplex Analysis and Applications. Series: Trends in Math., Sabadini and Sommen (Eds.) (2011), 181—194.

122. Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M. A Survey on the $(Hyper-)$ Derivatives in Complex, Quaternionic and Clifford Analysis // Milan J. Math., **79**(2) (2011), 521–542.

123. Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M., Shpakivskyi V. On the Hausdorff analyticity for quaternion-valued functions // Complex Anal. Oper. Theory, **13**(6) (2019), 2863–2880.

124. Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A. Bicomplex holomorphic functions: the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. — Birkhäuser, 2015. — 231 p.

125. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier Grenoble, **6** (1956), 271 – 355.

126. Martin M. E. Four-dimensional Jordan algebras // Int. J. Math. Game Theory Algebra, **20** (4) (2013), 41–59.

127. Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. — Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

128. Mazzola G. Generic finite schemes and Hochschiid cocycles // Comment. Math. Helvetici, **55**(1980), 267–293.

129. Mel'nichenko I. P. Algebras of functionally invariant solutions of the three-dimensional Laplace equation // Ukr. Math. J., **55** (2003), no. 9, 1551–1557.

130. Mel'nichenko I. P. The representation of harmonic mappings by monogenic functions // Ukr. Math. J., **27** (1975), no. 5, 499–505.

131. Мельниченко И. П., Плакса С. А. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т матем. НАН Украины, 2008. — 226 с.

132. Mierzejewski D. A. Linear manifolds in sets of solutions of quaternionic polynomial equations of several types // Adv. Appl. Clifford Alg., **21** (2011), 417–428.

133. Mierzejewski D. Spheres in sets of solutions of quadratic quaternionic equations of some types // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź, Ser. Rech. Déform., **60**(1)(2010), 49–58.

134. Mierzejewski D. A., Szpakowski V. S. On solutions of some types of quaternionic quadratic equations // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź **58**, Ser. Rech. Déform., **55** (2008), 49—58.

135. Mitelman I. M., Shapiro M. Differentiation of the Martinelli-Bochner Integrals and the Notion of Hyperderivability // Math. Nachr. **172** (1995), 211–238.

136. Moisil Gr., Théodoresco N. Functions holomorphes dans l'espace // Mathematica (Cluj), **5**(1931), 142–159.

137. Morin U. Bicomplex algebra // Memorie Accademia d'Italia. — 1935. — **6**. — P. 1241 – 1250.

138. Niven I. Equations in Quaternions // Amer. Math. Monthly, **48**(1941), 654–661.

139. Özdemir M. The roots of a split quaternion // Appl. Math. Lett., **22** (2009) 258-263.

140. Peirce B. Linear associative algebras // American J. Math. – 1881. — **4**. — P. 97 – 221.

141. Perotti A. Quaternionic regularity and the $\bar{\partial}$-Neumann problem in $\mathbb{C}^2$ // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — **52** (5). — P. 439 – 453.

142. Pinotsis D. A. Quaternionic Analysis, Elliptic Problems and a Physical Application of the Dbar Formalism // Adv. Appl. Clifford Alg. — 2010. — **20**. — P. 819 – 836.

143. Plaksa S. A. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics. — Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics, Springer, Basel, 2012, 177–223.

144. Plaksa S. A. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. **10**, no. 4–5 (2013), 306–319.

145. Plaksa S. A., Pukhtaevich R. P. Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical // Ukr. Math. J., **65** (2013), no. 5, 740–751.

146. Plaksa S. A., Pukhtaievych R. P. Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **22**(2014), no. 1, 221–235.

147. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2012. — **62**, № 2. — P. 55 – 65.

148. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. An extension of monogenic functions and spatial potentials // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, № 2. — P. 330 – 337.

149. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2018. — **68**, № 2. — P. 25 – 36.

150. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, № 1. — P. 110 – 119.

151. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc., **1** (2014), 1–13.

152. Plaksa S. A., Shpakovskii V. S. Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J., **62** (2011), no. 8, 1251–1266.

153. Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R. M., Shapiro M. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras // Math. Meth. Appl. Sci., **37**(17) (2014), 2799–2810.

154. Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R. M. Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions // J. Math. Sci. — 2017. — **220**, No. 5. — P. 624 – 632.

155. Pogoruy A., Rodrigues-Dagnino R. M. Some algebraic and analytical properties of coquaternion algebra // Adv. Appl. Clifford Alg., **20** (2010), 79–84.

156. Poincaré H. Sur les nombres complexes // Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — 1884. — T. 99. — P. 740 – 742.

157. Polyanin A. D., Nazaikinskii V. E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. — Second Edition, Updated, Revised and Extended, 2016, 1632 p.

158. Poonen B. Isomorphism types of commutative algebras of nite rank over an algebraically closed field // Contemp. Math., **463**(2008), 111–120.

159. Portman W. O. A derivative for Hausdorff-analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc., **V**(10) (1959), 101–105.

160. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1984. — 432 с.

161. Pukhtaievych R. P. Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **10** (2013), no. 4–5, 352–361.

162. Radó T. Length and area, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., N. Y., 1948.

163. Ramirez J. L. Some combinatorial properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas quaternions // An. St. Univ. Ovidius Constanta, Mat. Ser., **2**(2015).

164. Riley J. D. Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable // Tohoku Math. J., **5** (1953), no. 2, 132–165.

165. Rinehart R. F., Wilson J. C. Two types of differentiability of functions on algebras // Rend. Circ. Matem. Palermo, **II** (11) (1962), 204–216.

166. Ringleb F. Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen, I. // Rend. Circ. Mat. Palermo, **57**(1) (1933), 311–340.

167. Rochon D.,Shapiro M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers // An. Univ. Oradea Fasc. Mat. — 2004. — **11**. — P. 71 – 110.

168. Rönn S. Bicomplex algebra and function theory // arXiv: math/0101200v1 [math.CV] 24 Jan 2001.

169. Roşculeţ M. N. Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare // Studii şi Cercetări Matematice, **6** (1955), nr. 3–4, 567–643.

170. Roşculeţ M. N. Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale // Studii şi Cercetări Matematice, **7** (1956), nr. 3–4, 321–371.

171. Roşculeţ M. N. Algebre liniare asociative şi comutative şi funcţii monogene ataşate lor // Studii şi Cercetări Matematice, **6**, nr. 1–2 (1955), 135–173.

172. Roşculeţ M. N. O teorie a funcţiilor de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu trei dimensiuni // Studii şi Cercetări Matematice, **5**, nr. 3–4 (1954), 361–401.

173. Rosenfeld B. A. A history of non-Euclidean geometry. — Springer-Verlag, 1988.

174. Rost M. On the dimension of a composition algebra // Doc. Math. J., 1(1996), 209–214.

175. Ryan J. Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis // J. Lie Theory, **8**(1998), 67–82.

176. Saks S. Theory of the integral, 2nd English edition, Warsaw, 1937.

177. Schafer R. D. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process // Amer. J. Math., **76**(1954), 435–446.

178. Scheffers G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewohnlich complexen Funktionen // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Mat.-Phys. Kl., **45** (1893), 828–848.

179. Schneider B. Some properties of a Cauchy-type integral for the Moisil–Theodoresco system of partial differential equations // Ukr. Math. J. — 2006. — **58** (1). — P. 105 – 112.

180. Scorza-Dragoni G. The analytic functions of a bicomplex variable // Memorie Accademia d'Italia. — 1934. — **5**. — P. 597 – 607.

181. Segre C. The real representations of complex elements and extentions to bicomlex systems // Math. Ann., **40** (1892), 413–467.

182. Shirota T. On solutions of a partially differential equation with a parameter // Proc. Japan. Acad. **32**, no. 6 (1956), 401 – 405.

183. Shpakivskyi V. S. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. **7**(1) 2016, 63–75.

184. Shpakivskyi V. S. Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2016. — **26**, № 1. — P. 417 – 434.

185. Shpakivskyi V. S. Hypercomplex method for solving linear PDEs // Abstract of 12th ISAAC Congress, Aveiro University, Portugal, 2019. — P. 34 – 35.

186. Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 4. — P. 313 – 328.

187. Shpakivskyi V. S. Linear quaternionic equations and their systems // Adv. Appl. Clifford Alg., **21**(2011), 637 — 645.

188. Shpakivskyi V. Monogenic functions in commutative algebras // Analysis, Probability, Applications, and Computation, Trends in Mathematics (Eds. K.-O. Lindahl et al.). — Springer, 2019. — P. 171 – 178.

189. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **12**(3) (2015), 251–268.

190. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2016. — **24** (2). — P. 271 – 281.

191. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. Quaternionic G-monogenic mappings in E_m // Int. J. Adv. Res. Math. — 2018. — **12**. — P. 1 – 34.

192. Shpakivskyi V. S., Plaksa S. A. Integral theorems and a Cauchy formula in a commutative three-dimensional harmonic algebra // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lódź, **60** (2010), 47–54.

193. Siciak J. Holomorphic continuation of harmonic functions // Ann. Polon. Math.**29**, 67-–73 (1974).

194. Smith T. L. Decomposition of Generalized Clifford Algebras // Quart. J. Math. Oxford, 42 (1991), pp. 105–112.

195. Smith W. D. Quaternions, octonions, and now, 16-ons, and 2n-ons; New kinds of numbers // www. math. temple.edu/ 2dc wds/homepage/nce2.ps, 2004.

196. Sprößig W. Eigenvalue problems in the framework of Clifford analysis // Adv. Appl. Cliff. Alg. 11 (2001), pp. 301–316.

197. Sprössig W. Quaternionic analysis and Maxwell's equations // CUBO A Math. J., **7**(2005), no. 2, 57–67.

198. Study E. Theorie der gemeiner und höherer komplexen Crößen // Enzyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd. 1, Teil 1. — Leipzig: Teubner. — 1898 – 1904. — S. 147–183.

199. Sudbery A. Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85**(1979), 199–225.

200. Su Jin Lim, Kwang Ho Shon, Hyperholomorphic functions and hyper-conjugate harmonic functions of octonion variables // J. Inequal. Appl. 2013:77.

201. Szpakowski V. Solution of general quadratic quaternionic equations // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź, Ser. Rech. Déform., **58**(2009), 45 — 58.

202. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions. — Cambridge University Press, 1867. — 422 p.

203. Tian Y. Similarity and cosimilarity of elements in the real Cayley-Dickson algebras // Adv. Appl. Clifford Alg., **9** (1) (1999), 61—76.

204. Толстов Г. П. О криволинейных и повторных интегралах // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. — 1950. — **35**. — С. 3–101.

205. Trampus A. Differentiability and analyticity of functions in linear algebras // Duke Math. J. — 1960. — **27**, № 4. — P. 431 – 441.

206. Vignaux J., Duranona Y., Vedia A. Sobre la teoria de las funciones de una variable compleja hiperbolica // Univ. Nac. La Plata. Publ. Fac. Ci. fis. mat. — 1935. — **104**. — P. 139 – 183.

207. Воловельская С. Н. Аналитические функции в неполупростых ассоциативных линейных алгебрах // Записки науч.-исследов. Ин-та матем. и механ. и Харьковс. мат. общества. — 1948. — **19** (4). — С. 153–159.

208. Воловельская С. Н. Опыт построения елементов теории функций в коммутативной ассоциативной системе с тремя единицами // Записки науч.-исследов. Ин-та матем. и механ. и Харьковс. мат. общества. — 1939. — **16**. — С. 143–157.

209. Wagner R. D. The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras // Duke Math. J. — 1948. — **15**. — P. 455 – 461.

210. Ward J. A. A theory of analytic functions in linear associative algebras // Duke Math. J. — 1940. — **7**. — P. 233 – 248.

211. Ward J. A. From generalized Cauchy – Riemann equations to linear algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1953. — **4**. — P. 456 – 461.

212. Weierstrass K. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebitdeten Größen (der Brief zu Schwarz H. A.) // Mathematische Werke. Bd. 2. Olms – New York: Hilcteskeim-Johnsen, 1970. – S. 311 – 322.

213. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. — Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge (1927).

214. Xing-min Li, Zhao Kai, Li-zhong Peng, Characterization of octonionic analytic functions // Complex Variables, Theory and Appl., **50**(13)(2005), 1031–1040.

ДОДАТОК

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. **Шпаковский В. С.** Об изоморфизме функциональных алгебр в гармонической алгебре с двумерным радикалом // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 384 – 391.
2. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2012. — **62**, № 2. — P. 55 – 65.
3. Flaut C., **Shpakivskyi V.** Some identities in algebras obtained by the Cayle-Dickson process // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2013. — **23**, № 1. — P. 63 – 76.
4. Плакса С. А., **Шпаковский В. С.** О логарифмическом вычете моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с двумерным радикалом // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 7. — С. 967 – 973.

   (переклад англійською: Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. On the logarithmic residues of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with two-dimensional radical // Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (7). — P. 1079 – 1086.)
5. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, № 1. — P. 110 – 119.

6. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. — 2014. — **1**. — P. 1 – 13.

7. Flaut C., **Shpakivskyi V.** Holomorphic functions in generalized Cayley-Dickson algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 1. — P. 95 – 112.

8. Flaut C., **Shpakivskyi V.** An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 2. — P. 337 – 350.

9. **Shpakivskyi V. S.** Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 3. — P. 251 – 268.

10. **Shpakivskyi V. S.** Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 4. — P. 313 – 328.

11. **Shpakivskyi V. S.** Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. — 2016. — **7**, № 1. — P. 63 – 75.

12. **Shpakivskyi V. S.** Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2016. — **26**, № 1. — P. 417 – 434.

13. **Шпаковский В. С.** Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2016. — **30**. — С. 155 – 164.

14. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** An extension of monogenic functions and spatial potentials // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, № 2. — P. 330 – 337.

15. **Шпаковский В. С.** Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 262 – 274.

16. **Shpakivskyi V. S.**, Kuzmenko T. S. Quaternionic G-monogenic mappings in E_m // Int. J. Adv. Res. Math. — 2018. — **12**. — P. 1 – 34.

17. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2018. — **68**, № 2. — P. 25 – 36.

18. **Шпаківський В. С.** Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геом. центру. — 2018. — **11**, № 3. — P. 1 – 18.

19. **Шпаківський В. С.** Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Труды ИПММ НАН Украины. — 2018. — **32**. — С. 147 – 168.

20. Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M. and **Shpakivskyi V.** On the Hausdorff analyticity for quaternion-valued functions // Complex Analysis and Operator Theory. — 2019. – **13**, № 6. — P. 2863 – 2880.

21. **Шпаківський В. С.** Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — P. 272 – 294.

    (переклад в англійському виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 92 – 109.)

22. Plaksa S. A., **Shpakivskyi V. S.** On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with a two-dimensional radical // Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 151.

23. **Shpakivskyi V. S.** On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with the two-dimensional radical // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ $\sim$ complex/conf2013/abstracts.html)

24. **Shpakivskyi V. S.** Monogenic functions in a harmonic algebra // Abstract of Joint events of Colloquium on Differential Geometry and its Applications and IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, Debrecen, Hungary, August 26 – 30, 2013. — P. 33.

25. **Shpakivskyi V. S.** Monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra // Abstracts of Workshop "A New Approach in Theoretical and Applied Methods in Algebra and Analysis", April 4 – 6, 2013, Constanta, Romania (режим доступу: http://amaa-2013.wikispaces.com/file/view/Abstract-Shpakivskyi.pdf/399910248/Abstract-Shpakivskyi.pdf)

26. **Shpakivskyi V. S.** Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Матер. конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-ччя Г. М. Положого, 23 – 24 квітня 2014 р., Київ. — С. 152.

27. **Шпаківський В. С.** Конструктивний опис моногенних функцій у скінченновимірних комутативних алгебрах // Матер. XIII міжнар. наук.-практич. конф. "Шевченківська весна — 2015", 1 – 3 квітня 2015 р., КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, 2015. — С. 65 – 69.

28. **Shpakivskyi V.** Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 10th ISAAC Congress. — University of Macau, Macau, China, August 3 – 8, 2015. — P. 69.

29. **Shpakivskyi V.** Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 11th ISAAC Congress, Linnaeus University, Sweden, 2017. — P. 45.

30. **Shpakivskyi V.** Hypercomplex method for solving linear PDEs // Abstract of 12th ISAAC Congress, Aveiro University, Portugal, 2019. — P. 34 – 35.

Відомості про апробацію результатів

Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- IX міжнародній науковій конференції "Кліффордові алгебри та їх застосування" (Веймар, Німеччина, 2011);
- XVI міжнародній науковій конференції з аналітичних функцій і суміжних питань (Хелм, Польща, 2011);
- VIII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Москва, РФ, 2011);
- VIII міжнародній науковій конференції "Фінслерові продовження теорії відносності" (Фрязіно, РФ, 2012);
- міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха (Львів, 2012);
- міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Function Theory, Regression, (Crystal) Lattices, Fractals, Chaos, and Physics", присвяченій пам'яті П. М. Тамразова та 20-річній співпраці Лодзь–Київ (Бендлево, Польща, 2012);
- міжнародній науковій конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування" (Київ, 2013);
- спільному колоквіумі з диференціальної геометрії та її застосувань та міжнародної конференції "Фінслерові продовження теорії відносності" (Дебрецен, Угорщина, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Нові підходи в теоретичних та прикладних методах в алгебрі і аналізі" (Констанца, Румунія, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", присвяченній 100-річчю Г. М. Положого (Київ, 2014);

- XIII міжнародній науково-практичній конференції "Шевченківська весна — 2015" (Київ, 2015);
- X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Макао, Китай, 2015);
- X Літній школі "Алгебра, топологія, аналіз" (Одеса, 2015);
- XI конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Векше, Швеція, 2017);
- міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications" (Бендлево, Польща, 2018);
- XI конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Авейро, Португалія, 2019);

на Вченій раді Інституту математики НАН України та на семінарах:

- відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса)
- відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);
- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України А. Г. Нікітін);
- Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кор. НАН України А. Н. Кочубей);
- семінарах "Спектральні і крайові задачі" в Інституті математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор В. А. Михайлець);
- кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А. О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус);

- Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О. Б. Скасків);
- Загальноінститутському семінарі Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України В. Я. Гутлянський);
- Харківському міському семінарі з теорії функції (керівник: доктори фіз.-мат. наук, професори С. Ю. Фаворов та Л. Б. Голінський).