НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Шпаківський Віталій Станіславович

УДК 517.9

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ В АСОЦІАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико–математичних наук, професор
ПЛАКСА Сергій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук, професор,
член–кореспондент НАН України
ГУТЛЯНСЬКИЙ Володимир Якович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
м. Слов'янськ, радник при дирекції;

доктор фізико–математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей;

доктор фізико–математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей.

Захист відбудеться 15 вересня 2020 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 10 серпня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Природним і напрочуд ефективним засобом дослідження плоских потенціальних полів є аналітичні функції комплексної змінної. Багатство цієї теорії й ефективність її застосувань у різних галузях науки спонукають математиків до розвитку подібних теорій у багатовимірних просторах.

Побудова алгебр, відмінних від алгебри комплексних чисел, розпочалася ще в першій половині XIX ст. Так, 1843 року В. Гамільтон побудував некомутативну чотиривимірну алгебру кватерніонів, а 1844 року Г. Грассман побудував некомутативну алгебру зовнішніх форм. Напевно, першу комутативну алгебру побудував незалежно Ч. Гревс (1847) і О. де Морган (1849). Ця алгебра ізоморфна прямій сумі $\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}$ алгебр дійсних і комплексних чисел. Після цього з'явилися роботи А. Келі, Дж. Гревса, В. Кліффорда і П. Тайта. У 80-ті роки XIX ст. виник інтерес до теорії функцій гіперкомплексної змінної, внаслідок чого було опубліковано кілька робіт видатних математиків, зокрема, Б. Пірса (1881), К. Вейєрштрасса (1883), А. Пуанкаре (1884) і Р. Дедекінда (1885). Варто також відзначити важливі роботи Ф. Моліна (1892), Г. Шефферса (1893), Е. Штуді (1898) і Е. Картана (1898).

Згодом у роботах Ч. Джолі, Ф. Хаусдорфа, Г. Мойсіла і Н. Теодореско, Р. Фуетера, К. Кулліна, А. Садбері, Дж. Раяна, К. Гюрлебека і В. Шпрьоссіга, В. Кравченка й М. Шапіро, Г. Льойтвілера, С. Бернштейн, Ф. Коломбо, І. Сабадіні й Д. Струппи та багатьох інших розроблялися різні напрямки некомутативного гіперкомплексного аналізу як узагальнення результатів теорії функцій комплексної змінної на багатовимірні простори.

Разом із некомутативним аналізом у багатовимірних просторах вивчались також відображення в комутативних алгебрах. Так, наприклад, в роботах П. Кетчума, Д. Вагнера, Дж. Ворда, Е. Лорха, Е. Блюма, М. Рошкулеца, К. Кунца, І. П. Мельниченка, В. Ф. Ковальова, С. А. Плакси та інших розвинено теорію аналітичних функцій у комутативних алгебрах і застосовано такі функції для побудови розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Не зважаючи на значну кількість робіт з гіперкомплексного аналізу, залишається чимало важливих нерозв'язаних проблем. Зокрема, актуальною проблемою є побудова теорії функцій гіперкомплексної змінної в довільній комутативній асоціативній алгебрі й установлення зв'язку таких функцій із рівняннями з частинними похідними. Актуальною проблемою гіперкомплексного аналізу є також розробка методів конструктивного опису класів диференційовних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060, і "Розробка аналітичних та чисельно–аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U004077.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є класи диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних (комутативних і некомутативних) алгебрах і в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

Предметом дослідження є алгебраїчно–аналітичні властивості диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних алгебрах і в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

Метою дисертаційної роботи є встановлення конструктивних описів диференційовних функцій в асоціативних алгебрах і розвиток на їхній основі теорії функцій гіперкомплексної змінної, подібної до теорії функцій комплексної змінної. Під конструктивним описом розуміємо представлення диференційовних функцій за допомогою голоморфних функцій комплексних змінних.

Завдання дослідження:

- розробити метод встановлення конструктивного опису моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної;

- довести аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного й поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі;

- розробити підхід до побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, базуючись на властивостях моногенних функцій зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу;

- дослідити властивості моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах і в нескінченновимірних топологічних векторних просторах, асоційованих з просторовими потенціальними полями;

- визначити класи кватерніонних відображень, до яких застосовна методика встановлення їх конструктивних описів, розроблена для комутативних алгебр;
- встановити співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій і функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також установити зв'язок між відомими означеннями похідних і похідною за Хаусдорфом;
- побудувати в явному вигляді гіперголоморфні функції (тобто такі, що належать ядру оператора Дірака) в узагальнених алгебрах Келі–Діксона;

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи комплексного, гіперкомплексного й функціонального аналізу.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати є новими і полягають в наступному:

- отримано конструктивний опис моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної;
- доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі, а також в нескінченновимірній комутативній алгебрі й топологічному векторному просторі з комутативним множенням, асоційованих із тривимірним рівнянням Лапласа;
- встановлено співвідношення між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу. Вказані моногенні функції застосовано для побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;
- введено клас кватерніонних G-моногенних відображень і отримано їхній конструктивний опис за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної; доведено аналоги інтегральних теорем для відображень цього класу;

- встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних і похідною за Хаусдорфом;
- розроблено алгоритм побудови функцій, що належать ядру оператора Дірака в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й розвинені в ній методи можуть бути використані насамперед у комплексному й гіперкомплексному аналізі, а також при розв'язанні диференціальних рівнянь із частинними похідними і крайових задач математичної фізики, що знаходять застосування у гідродинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статтях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: із робіт [3,8] до дисертації увійшли результати, які отримано особисто здобувачем; у роботах [16,20] здобувачеві належить постановка задач, формулювання основних гіпотез, ідеї доведень, побудова схем доведень, контроль за правильністю викладення матеріалу, співавтори брали участь у перевірці робочих гіпотез; у роботах [2,4,5,6,14,17] визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить С. А. Плаксі, а перевірка основних гіпотез і повне доведення всіх тверджень належить здобувачеві; в роботі [7] К. Флаут належить ідея застосувати алгоритм Бейлса до побудови правил множення базисних векторів узагальненої алгебри Келі–Діксона, решту досліджень виконав здобувач.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- IX міжнародній науковій конференції "Кліффордові алгебри та їх застосування" (Веймар, Німеччина, 2011);
- XVI міжнародній науковій конференції з аналітичних функцій і суміжних питань (Хелм, Польща, 2011);
- VIII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Москва, РФ, 2011);
- VIII міжнародній науковій конференції "Фінслерові продовження теорії відносності" (Фрязіно, РФ, 2012);

- міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха (Львів, 2012);
- міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Function Theory, Regression, (Crystal) Lattices, Fractals, Chaos, and Physics", присвяченій пам'яті П. М. Тамразова та 20-річній співпраці Лодзь–Київ (Бендлево, Польща, 2012);
- міжнародній науковій конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування" (Київ, 2013);
- міжнародному колоквіумі з диференціальної геометрії та її застосувань (Дебрецен, Угорщина, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Нові підходи в теоретичних та прикладних методах алгебри і аналізу" (Констанца, Румунія, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", присвяченній 100-річчю Г. М. Положого (Київ, 2014);
- XIII міжнародній науково–практичній конференції "Шевченківська весна — 2015" (Київ, 2015);
- X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Макао, Китай, 2015);
- X Літній школі "Алгебра, топологія, аналіз" (Одеса, 2015);
- XI конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Векше, Швеція, 2017);
- міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications" (Бендлево, Польща, 2018);
- XII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Авейро, Португалія, 2019);

на Вченій раді Інституту математики НАН України та на семінарах:

- відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса)
- відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України А. Г. Нікітін);
- Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кор. НАН України А. Н. Кочубей);
- семінарах "Спектральні і крайові задачі" в Інституті математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор В. А. Михайлець);
- кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А. О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус);
- Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О. Б. Скасків);
- Загальноінститутському семінарі Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України В. Я. Гутлянський);
- Харківському міському семінарі з теорії функції (керівник: доктори фіз.-мат. наук, професори С. Ю. Фаворов та Л. Б. Голінський);
- "Сучасний аналіз" при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор П. В. Задерей);
- "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, професори О. О. Курченко, В. М. Радченко, І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 21 науковій роботі [1—21], внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук, 10 із них [3–5,7,8,11,12,14,20,21] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus і Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [1—9].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 214 найменувань) і додатка. Повний обсяг роботи становить 357 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру подяку доктору фізико–математичних наук, професору Плаксі Сергію Анатолійовичу за постійну увагу до роботи, корисні поради й підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи і її основний зміст.

У **розділі 1** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Виклад *основних результатів* дисертації починається з **розділу 2**, в якому вивчаються моногенні функції у скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і їхнє застосування до побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Нехай $\mathbb{A}$ — довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан довів, що в алгебрі $\mathbb{A}$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s$, такі, що виконуються наступні правила множення:

1. $\forall\, r,s \in [1,m]\cap\mathbb{N}$: $$I_rI_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$$

2. $\forall\, r,s \in [m+1,n]\cap\mathbb{N}$: $$I_rI_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^s I_k\,;$$

3. $\forall\, s \in [m+1,n]\cap\mathbb{N}\ \exists!\ u_s \in [1,m]\cap\mathbb{N}\ \ \forall\, r \in [1,m]\cap\mathbb{N}$:

$$I_rI_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq u_s\,, \\ I_s & \text{при} \quad r = u_s\,, \end{cases}$$

де $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру S алгебри $\mathbb{A}$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. Надалі алгебру $\mathbb{A}$ з базисом Картана позначатимемо $\mathbb{A}_n^m$. Із правил множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ випливає, що $\mathbb{A}_n^m$ є напівпрямою сумою m-вимірної напівпростої підалгебри S і $(n-m)$-вимірної нільпотентної підалгебри N, тобто $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$. Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1 = \sum_{u=1}^m I_u$.

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \Bigg\{ \sum_{k=1,\, k\neq u}^{n} \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \Bigg\}, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R} := \Big\{ \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Визначимо m лінійних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0 \;\; \forall\, \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Оскільки ядрами функціоналів f_u є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_u$, то ці функціонали також неперервні й мультиплікативні.

Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=1}^{n} a_r I_r, \quad e_3 = \sum_{r=1}^{n} b_r I_r \tag{1}$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Норма елемента алгебри $v = \sum\limits_{r=1}^{n} v_r I_r$ визначається рівністю

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{r=1}^{n} |v_r|^2}.$$

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u,\; u = 1, 2, \ldots, m$. Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 :\; x, y, z \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами e_1, e_2, e_3.

Далі істотним є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, де $f_u(E_3)$ — образ множини E_3 при відображенні f_u. Очевидно, що це виконується тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{2}$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ у точці ζ.

З означення моногенності функції Φ в області Ω_ζ випливає виконання наступних умов:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_2\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_3 \tag{3}$$

в кожній точці області Ω_ζ.

Доведено наступне подання резольвенти:

$$(te_1-\zeta)^{-1}=\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{t-\xi_u}\,I_u+\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=2}^{s-m+1}\frac{Q_{k,s}}{\left(t-\xi_{u_s}\right)^k}\,I_s \tag{4}$$

$$\forall\, t\in\mathbb{C}:\ t\neq\xi_u,\quad u=1,2,\ldots,m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені такими рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s}:=T_s\,,\quad Q_{k,s}=\sum_{r=k+m-2}^{s-1}Q_{k-1,r}\,B_{r,\,s}\,,\quad k=3,4,\ldots,s-m+1.$$

при

$$T_s:=ya_s+zb_s\,,\ \ B_{r,s}:=\sum_{k=m+1}^{s-1}T_k\Upsilon_{r,s}^{k}\,,\quad s=m+2,\ldots,n,$$

а натуральні числа u_s визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Зі співвідношень (4) випливає, що точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta\in\mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u:\quad\begin{cases} x+y\,\mathrm{Re}\,a_u+z\,\mathrm{Re}\,b_u=0,\\ \qquad y\,\mathrm{Im}\,a_u+z\,\mathrm{Im}\,b_u=0\end{cases} \tag{5}$$

у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

Принциповою є наступна лема.

Лема 2.1.4. *Нехай область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3)=\mathbb{C}$ для всіх $u=1,2,\ldots,m$. Крім того, нехай функція $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ. Якщо для деякого $u\in\{1,2,\ldots,m\}$ точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_2-\zeta_1\in\{\zeta=xe_1+ye_2+ze_3:(x,y,z)\in L_u\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2)\in\mathcal{I}_u\,.$$

Нехай область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u, $u=1,2,\ldots,m$. Позначимо через D_u область комплексної площини $\mathbb{C}$, на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_u.

Лема 2.1.4 дає можливість визначити лінійні оператори A_u, $u = 1, 2, \ldots, m$, які кожній моногенній функції Φ ставлять у відповідність функції комплексної змінної $F_u : D_u \to \mathbb{C}$ за правилом $F_u\big(f_u(\zeta)\big) := f_u(\Phi(\zeta))$. З використанням теореми Ю. Ю. Трохимчука[1] доведено, що функція F_u голоморфна в області D_u, $u = 1, 2, \ldots, m$.

Далі побудовано в явному вигляді оператори $A_u^{(-1)}$, які є узагальнено оберненими до A_u, $u = 1, 2, \ldots, m$ (тобто такі, що $A_u A_u^{(-1)} A_u = A_u$), і які голоморфним функціям комплексної змінної ставлять у відповідність моногенні функції. При цьому різниця $\Phi - A_u^{(-1)} A_u \Phi$ належить максимальному ідеалу $\mathcal{I}_u$.

Нарешті, проінтегровано умови (3) для моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_u$ і описано в явному вигляді всі моногенні функції зі значеннями в максимальному ідеалі $\mathcal{I}_u$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. У такий спосіб отримано основний результат розділу 2 у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.1.3. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt, \quad (6)$$

де F_u — певна голоморфна функція в області D_u і G_s — певна голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m, \ell \neq q$.

З теореми 2.1.3 випливає, що в розкладі моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\, I_k \quad (7)$$

компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, тобто для довільної точки $(x, y, z) \in \Omega$ виконуються співвідношення

$$U_k(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\,\Delta z +$$

$$+\, o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \qquad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0\,.$$

[1] Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. — М.: Физматгиз, 1963. – 212 с. (теорема 21).

З іншого боку, якщо компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними, то умови (3) є не лише необхідними, але й достатніми умовами моногенності функції (7) в області Ω_ζ , тобто рівності (3) є аналогами класичних умов Коші–Рімана.

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівності (6), права частина якої є моногенною функцією в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u,\, u = 1, 2, \dots, m\}\,.$$

Теорема 2.1.4. *Якщо область Ω є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$, то кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ продовжується до функції, моногенної в області Π_ζ.*

Принциповим наслідком рівності (6) є наступне твердження, яке справедливе для довільної області Ω_ζ.

Теорема 2.1.5. *Нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$. Тоді для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ в довільній області Ω_ζ похідні Гато $\Phi^{(r)}$ є моногенними функціями в Ω_ζ для всіх r.*

Встановлено також аналог теореми 2.1.3 для моногенних функцій змінної вигляду $\sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, де $2 \le k \le 2n$.

У пункті 2.1.6 досліджується зв'язок моногенних функцій із рівняннями з частинними похідними.

Розглянемо наступне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_N U(x, y, z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Зауважимо, що кожна N разів диференційовна за Гато в Ω_ζ функція Φ задовольняє рівняння $\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = 0$ скрізь в Ω_ζ, якщо

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^\beta\, e_3^\gamma = 0\,. \tag{9}$$

Відповідно, за виконання умови (9) дійснозначні компоненти $\mathrm{Re}\, U_k(x, y, z)$ і $\mathrm{Im}\, U_k(x, y, z)$ розкладу (7) є розв'язками рівняння (8).

Отже, для побудови розв'язків рівняння (8) у вигляді компонент моногенної функції необхідно знайти трійку лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (1), які задовольняють характеристичне рівняння (9), і перевірити умову: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \dots, m$.

У наступній теоремі вказано спеціальний клас рівнянь вигляду (8), для яких $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ для всіх $u = 1, 2, \dots, m$. Введемо до розгляду поліном

$$P(a,b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}\,.$$

Теорема 2.1.6. *Нехай існують лінійно незалежні над $\mathbb{R}$ вектори e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{A}_n^m$ вигляду (1), які задовольняють рівність (9). Якщо $P(a,b) \neq 0$ при всіх дійсних $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$.*

Очевидно, що рівняння вигляду (8), які є рівняннями еліптичного типу, завжди задовольняють умову $P(a,b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Водночас існують рівняння (8), для яких $P(a,b) > 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$, але які не є еліптичними. Наприклад, такими є рівняння

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} = 0$$

у просторі $\mathbb{R}^3$.

У підрозділі 2.2 для моногенних функцій доведено аналоги інтегральної теореми Коші, теореми Морера й інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла.

Наступна теорема є аналогом інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла і є основним результатом пункту 2.2.1.

Теорема 2.2.2. *Нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої γ, яка гомотопна точці з Ω, справедлива рівність*

$$\int_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta) d\zeta = 0.$$

Далі в теоремі 2.2.3 за звичною схемою доводиться аналог теореми Морера.

У пункті 2.2.3 встановлено аналог інтегральної формули Коші.

Нехай $\zeta_0 := x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3$ — довільна точка області $\Omega_\zeta \subset E_3$. В околі точки ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ радіуса ε з центром в ζ_0. Через $C_u(\xi_u^{(0)}, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ позначимо образ $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ при відображенні f_u, $u = 1, 2, \dots, m$. Припустимо, що коло $C_\zeta(\zeta_0, \varepsilon)$ *охоплює множину* $\{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$. Це означає, що крива $C_u(\xi_u^{(0)}, \varepsilon)$ обмежує деяку область D'_u, таку, що $f_u(\zeta_0) = \xi_u^{(0)} \in D'_u$, $\;u = 1, 2, \dots, m$.

Скажемо, що крива $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *один раз охоплює множину* $\{\zeta - \zeta_0 : (x, y, z) \in$

$\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, якщо існує коло $C_\zeta(\zeta_0,\varepsilon)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне γ_ζ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta-\zeta_0 : (x,y,z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$.

Теорема 2.2.4. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\Phi(\zeta_0) = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta-\zeta_0)^{-1}\,d\zeta,$$

де γ_ζ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка один раз охоплює множину $\{\zeta-\zeta_0 : (x,y,z) \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, а λ — деяка стала.

У теоремах 2.2.5 – 2.2.10 встановлено достатні умови того, що $\lambda = 2\pi i$.

Наступна теорема містить критерії моногенності функції в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ і доводиться з використанням теорем 2.1.3, 2.1.5, 2.2.2, 2.2.3 і 2.2.4.

Теорема 2.2.11. *Функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (7) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови (3) в кожній точці області Ω_ζ.*

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, то функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є також моногенною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:

1) *для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ знайдеться окіл, в якому функція Φ розкладається у степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta-\zeta_0)^k;$$

2) *функція Φ неперервна в області Ω_ζ і задовольняє умову $\int_{\partial\triangle_\zeta} \Phi(\zeta)d\zeta = 0$ для кожного трикутника $\triangle_\zeta$, такого, що його замикання $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$.*

Якщо $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$ і, крім того, область Ω є опуклою в напрямку прямих L_u, то функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною тоді і тільки тоді, коли існує єдиний набір із m голоморфних в області D_u функцій F_u, $u = 1, 2, \ldots, m$, і єдиний набір із $n-m$ голоморфних в області D_{u_s} функцій G_s, $s = m+1, \ldots, n$, таких, що в області Ω_ζ функція Φ подається у вигляді (6).

У підрозділі 2.3 доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла.

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину $\Sigma^\varepsilon := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \le \varepsilon,\ (x_1,y_1,z_1)\in\Sigma\}$.

Відстанню Фреше $d(\Sigma,\Lambda)$ між поверхнями Σ і Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma \subset \Lambda^\varepsilon$, $\Lambda \subset \Sigma^\varepsilon$. Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n,\Sigma)\to 0$ при $n\to\infty$.

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ, а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ — площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега, тобто $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$. Тоді за теоремою Л. Чезарі існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \bigl\{ f(u,v) := \bigl(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\bigr) : (u,v)\in G \bigr\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

існують м.в. на квадраті $G := [0;1]\times[0;1]$ і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int_G \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv. \tag{10}$$

У разі, коли $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$ і рівність (10) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ називатимемо *квадровною*. Далі *замкнену поверхню* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ розумітимемо як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрялювану криву*.

Скажемо, що функція вигляду (7) є *гіперголоморфною* в області Ω_ζ, якщо її комплекснозначні компоненти U_k є $\mathbb{R}$-диференційовними в Ω і виконується наступна умова в кожній точці області Ω_ζ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, e_3 = 0.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon}\,,$$

де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм $\partial\Omega^\varepsilon$.

Теорема 2.3.2. *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є замкнена квадровна поверхня, для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, і Ω має квадровні перетини із площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ є гіперголоморфною в області Ω_ζ і неперервною в замиканні $\overline{\Omega}_\zeta$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

У підрозділі 2.4 встановлено відповідність між моногенною функцією в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ і скінченним набором моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Для диференціального рівняння (8) алгебраїчне рівняння (9) називається *характеристичним*.

На вектори вигляду

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}_1(u) = 1, \\ &\widetilde{e}_2(u) := a_u + I_u \sum_{r=m+1}^{n} a_r I_r\,, \\ &\widetilde{e}_3(u) := b_u + I_u \sum_{r=m+1}^{n} b_r I_r \end{aligned} \tag{11}$$

алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ натягнемо лінійний простір $\widetilde{E}_3(u) := \{\widetilde{\zeta}(u) = x + y\widetilde{e}_2(u) + z\widetilde{e}_3(u) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Трійка векторів (11) визначає одну пряму $\widetilde{L}(u)$ вигляду (5), яка відповідає множині необоротних елементів $\widetilde{\zeta}(u)$ простору $\widetilde{E}_3(u)$. Нехай $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)}$ — деякий нескінченний циліндр в $\widetilde{E}_3(u)$, твірні якого паралельні прямій $\widetilde{L}(u)$.

Теорема 2.4.2. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (9), і нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ є моногенною в області $\Pi_\zeta \subset E_3$. Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та сама, що й в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$) для кожного $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ існує трійка векторів (11), яка задовольняє рівність $\mathcal{X}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$, і існує функція $\widetilde{\Phi}_u : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} \to \mathbb{A}_{n-m+1}^1$ змінної $\widetilde{\zeta}(u)$, яка моногенна в циліндрі*

$$\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} = \Big\{\widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u)\ :\ f_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big) = f_u(\zeta)\,,\ \zeta \in \Pi_\zeta(u)\Big\}$$

і така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u\, \widetilde{\Phi}_u\big(\widetilde{\zeta}(u)\big).$$

З теореми 2.4.2 випливає, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (8) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись моногенними функціями в алгебрах із базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — нільпотенти.

Теорема 2.4.2 залишається справедливою у випадку, коли розглядаються функції $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta := \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, $2 \leq k \leq 2n$, які є моногенними в області $\Pi_\zeta \subset E_k$.

У підрозділі 2.5 показано, що для побудови розв'язків рівняння (8) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями у скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду.

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}^1$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, \widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n\}$, для елементів якого справедливі правила множення Картана:

$$\widetilde{I}_r \, \widetilde{I}_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \widetilde{\Upsilon}_{r,k}^s \, \widetilde{I}_k \qquad \forall \, r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Як і раніше, $\mathbb{A}_n^1$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}\}$ і таблицею множення вигляду (12).

Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}^1$ називається *розширенням алгебри* $\mathbb{A}_n^1$, якщо справедливі рівності

$$\widetilde{\Upsilon}_{r,k}^s = \Upsilon_{r,k}^s$$

$$\forall \, k \in \{2, \ldots, n-1\} \quad \forall \, r, s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n^1$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$.

У теоремі 2.5.1 доведено, що в кожній алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ характеристичне рівняння (9) має розв'язки.

На алгебрі $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ визначимо лінійний оператор $\widetilde{P} : \mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1) \mapsto \mathbb{A}_n^1$ рівностями

$$\widetilde{P}(1) = 1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_k) = I_k \qquad \forall \, k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \widetilde{P}(\widetilde{I}_n) = 0.$$

У наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ і моногенними функціями в її довільному розширенні $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

Нехай вектори $1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ задовольняють характеристичне рівняння (9). На ці вектори натягнемо лінійний простір

$$\widetilde{E}_3 := \{\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

В алгебрі $\mathbb{A}_n^1$ розглядатимемо трійку $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ і лінійний простір

$$\widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) := \{\zeta = x + y\widetilde{P}(\tilde{e}_2) + z\widetilde{P}(\tilde{e}_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 2.5.6. *Нехай вектори* 1, $\tilde{e}_2 = a_0 + \sum\limits_{r=1}^{n} a_r \widetilde{I}_r$, $\tilde{e}_3 = b_0 + \sum\limits_{r=1}^{n} b_r \widetilde{I}_r$ *алгебри* $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ *задовольняють характеристичне рівняння (9) і нехай хоча б одне з чисел* a_0 *чи* b_0 *належить* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Крім того, нехай функція* $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \to \mathbb{E}(\mathbb{A}_n^1)$ *змінної* $\widetilde{\zeta} = x + y\tilde{e}_2 + z\tilde{e}_3$ *моногенна в деякому циліндрі* $\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}} \subset \widetilde{E}_3$. *Тоді в алгебрі* $\mathbb{A}_n^1$ *трійка векторів* $1, \widetilde{P}(\tilde{e}_2), \widetilde{P}(\tilde{e}_3)$ *також задовольняє характеристичне рівняння (9) і функція* $\Phi(\zeta) := \widetilde{P}\big(\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta})\big)$ *є моногенною в циліндрі* $\Pi_\zeta := \{\zeta \in \widetilde{P}\big(\widetilde{E}_3\big) : \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}}\}$ *алгебри* $\mathbb{A}_n^1$.

Із теореми 2.5.6 випливає, що клас розв'язків рівняння (8), які подаються у вигляді компонент моногенних функцій, принаймні не звужуються при переході до розширення алгебри.

У підрозділі 2.6 застосовано результати попередніх підрозділів розділу 2 до побудови розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Зокрема, запропоновано процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків заданих рівнянь із частинними похідними, при якій використовуються моногенні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр.

Розглянемо загальне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{13}$$

де

$$E_k(u) := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}\,, \quad C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \in \mathbb{R}.$$

Розглядатимемо також частинний вигляд рівняння (13), а саме, рівняння

$$E_p(u) = 0. \tag{14}$$

У пункті 2.6.2 отримано нескінченновимірну сім'ю розв'язків рівняння (14):

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t) A_k \, dt \right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{15}$$

де F_k — довільні голоморфні функції комплексної змінної, а A_k визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0 := \frac{1}{t - \xi}\,, \quad A_1 := \frac{\xi_1}{(t - \xi)^2}\,, \;\; \xi_1 := x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_d a_{d1},$$

$$A_s = \frac{\xi_s}{(t-\xi)^2} + \frac{1}{t-\xi}\sum_{r=1}^{s-1} A_r\, B_{r,s}$$

при

$$\xi_s := x_1 a_{1s} + x_2 a_{2s} + \cdots + x_d a_{ds}\,, \quad B_{r,s} := \sum_{k=1}^{s-1} \xi_k \Upsilon_{r,s}^k\,, \quad s = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Для рівняння (13) отримано таку нескінченновимірну сім'ю розв'язків:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^t A_k\, dt \right\}_{k=0}^{\infty}. \qquad (16)$$

У пункті 2.6.3 сім'ї розв'язків (15) і (16) виписані на конкретній послідовності розширень. Як приклади, у пункті 2.6.4 розв'язки виглядів (15) і (16) виписані для одного рівняння гідродинаміки, для тривимірного рівняння Лапласа, для рівняння поперечних коливань пружного стержня, для узагальненого бігармонічного рівняння, для двовимірного рівняння Гельмгольца.

У **розділі 3** досліджуються моногенні функції зі значеннями в нескінченновимірних топологічних векторних просторах (ТВП) й нескінченновимірних комутативних асоціативних банахових алгебрах. Мотивацією для цього слугує той факт, що у скінченновимірних алгебрах не можна описати усі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій. Для цього потрібно розглядати нескінченновимірні простори.

Розглянемо нескінченновимірну комутативну асоціативну банахову алгебру

$$\mathbb{F} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \right\}$$

над полем $\mathbb{R}$ із нормою $\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення для елементів базису має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \frac{1}{2}\, e_{4n} \quad \forall\, n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m}\Big) \quad \forall\, n > m \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n}\Big) \quad \forall\, m > n \geq 1\,,$$

$$e_{2n+1} e_{2m+1} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,,$$

$$e_{2n}e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,.$$

Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють *гармонічну трійку* векторів, тобто таку, що задовольняє умову $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$.

Помістимо алгебру $\mathbb{F}$ у ТВП

$$\widetilde{\mathbb{F}} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

із топологією покоординатної збіжності. Моногенні функції зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}$ і ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$ досліджував С. А. Плакса. Зокрема, для моногенних функцій зі значеннями в $\widetilde{\mathbb{F}}$ він встановив критерій моногенності, зв'язок із гармонічними векторами та просторовими гармонічними функціями.

У пункті 3.1.2 ми встановили аналогічні результати в іншому ТВП, а саме: в топологічному векторному просторі

$$\widetilde{\mathbb{G}} := \left\{ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

із топологією покоординатної збіжності й базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для якого таблиця множення має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_{2n+1}e_m = e_{2n+m}, \quad e_{2n}e_{2m} = -e_{2n+2m-3} - e_{2n+2m+1}$$

для всіх цілих n і m. Очевидно, що тут e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів.

Нехай Ω і Ω_ζ позначають ті самі області, що й раніше. Розглянемо функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(x,y,z)\; e_k\,,$$

де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ є диференційовними в Ω. Тоді функція Φ називається *моногенною* в Ω_ζ, якщо $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ в рівності (2). Для моногенних функцій зі значеннями в $\widetilde{\mathbb{G}}$ встановлено критерій моногенності (теорема 3.1.1) і показано, що кожна просторова гармонічна в однозв'язній області функція є першою компонентою деякої моногенної функції зі значеннями в $\widetilde{\mathbb{G}}$ (теорема 3.1.3).

Вектор-функція $\mathbf{V}$ називається *гармонічним вектором*, якщо $\mathbf{V}$ задовольняє систему рівнянь $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$.

Теорема 3.1.6. *Кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{G}}$ породжує гармонічні вектори $\mathbf{V} := (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ в області Ω для всіх цілих чисел m.*

У підрозділі 3.2 розглядаються моногенні функції зі значеннями у комплексифікаціях $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ й $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ відповідно алгебри $\mathbb{F}$ і ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$. Причому досліджуються моногенні функції, визначені в областях певного чотиривимірного дійсного підпростору $E_4 \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Це дає змогу довести для таких моногенних функцій аналоги основних інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера). Більше того, встановлюючи зв'язок між моногенними функціями, визначеними в областях просторів E_3 й E_4, в теоремі 3.2.8 показано, що кожна моногенна функція $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ з області $\Omega_\zeta \subset E_3$ може бути продовжена до моногенної функції в деякій області $Q_\xi \subset E_4$.

Розглянемо комплексифікацію $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} := \mathbb{F} \oplus i\mathbb{F} \equiv \{a + ib : a, b \in \mathbb{F}\}$ алгебри $\mathbb{F}$, таку, що норма в $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ визначається рівністю $\|c\| := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, де $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, а також комплексифікацію $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}} := \widetilde{\mathbb{F}} \oplus i\widetilde{\mathbb{F}} \equiv \{a + ib : a, b \in \widetilde{\mathbb{F}}\}$ ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}$.

Вивчаються моногенні функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$), задані на підмножині лінійного многовиду $E_4 := \{\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3 : x, s, y, z \in \mathbb{R}\}$. Області $Q \subset \mathbb{R}^4$ поставимо у відповідність область $Q_\xi := \{\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3 : (x, s, y, z) \in Q\}$ в E_4. Під *моногенними* розуміються неперервні функції $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$), які задовольняють рівність (2) при $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (або, відповідно, $\Phi'(\zeta) \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$) і всіх $h \in E_4$.

У теоремі 3.2.1 отримано явний вигляд розкладу за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ головного продовження голоморфної функції комплексної змінної в алгебру $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Основні результати розділу 3 отримано в пунктах 3.2.2 і 3.2.4. Зокрема, в теоремі 3.2.3 встановлено аналог інтегральної теореми Коші для моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Нехай $\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3$, де $w \in \mathbb{C}$ і $\hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що для кожного $\xi = xe_1 + s\,ie_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, s, y, z \in \mathbb{R}$, елемент $\big(\tau - \xi\big)^{-1}$ існує при всіх

$$\tau \notin S(\xi) := \Big\{\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3 :$$
$$\operatorname{Re} w = x,\ |\operatorname{Im} w - s| \le \sqrt{(y - \hat{y})^2 + (z - \hat{z})^2}\,\Big\}.$$

Теорема 3.2.5. *Нехай область $Q \subset \mathbb{R}^4$ є опуклою в напрямку осей Oy, Oz. Крім того, нехай функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ є моногенною в області Q_ξ і функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ з розкладу*

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, s, y, z)\ e_k \tag{17}$$

мають неперервні частинні похідні у Q. Тоді для кожної точки $\xi \in Q_\xi$

справедлива рівність:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\xi} \Phi(\tau)\big(\tau - \xi\big)^{-1} d\tau\,,$$

де Γ_ξ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива у Q_ξ, яка один раз охоплює множину $S(\xi)$ і гомотопна колу $\{\tau = we_1 + \hat{y}e_2 + \hat{z}e_3 : |w - x - is| = R,\ \hat{y} = y, \hat{z} = z\}$, яке повністю міститься в Ω_ξ.

Підсумком пункту 3.2.2 є наступна теорема.

Теорема 3.2.6. *Нехай функція $\Phi : Q_\xi \to \mathbb{F}_\mathbb{C}$ неперервна в області Q_ξ і функції $U_k : Q \to \mathbb{C}$ з розкладу (17) мають неперервні частинні похідні в Q. Тоді функція Φ моногенна в Q_ξ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *виконуються умови*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,i\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_2\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_3$$

у Q_ξ і у Q виконуються співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\right| < \infty, \tag{18}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| U_k(x+\varepsilon h_1, s+\varepsilon h_2, y+\varepsilon h_3, r+\varepsilon h_4) - U_k(x,s,y,r) -$$
$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial s}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial y}\,\varepsilon h_3 -$$
$$-\frac{\partial U_k(x,s,y,r)}{\partial r}\,\varepsilon h_4 \Bigg|\, \varepsilon^{-1} = 0 \qquad \forall\, h_1\,, h_2\,, h_3\,, h_4 \in \mathbb{R}\,; \tag{19}$$

(II) *функція Φ задовольняє рівність $\int_{\partial\triangle_\xi} \Phi(\xi)d\xi = 0$ для кожного трикутника $\triangle_\xi$, такого, що $\overline{\triangle_\xi} \subset Q_\xi$;*

(III) *в околі кожної точки з Q_ξ функція Φ подається у вигляді збіжного степеневого ряду.*

Зазначимо, що умови (18) і (19) зумовлені нормою абсолютної збіжності в алгебрі $\mathbb{F}_\mathbb{C}$. Водночас аналогічне твердження для функцій $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$, доведене в теоремі 3.2.7, не містить цих умов.

У пункті 3.2.3 досліджено зв'язок між моногенними функціями зі значеннями в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_\mathbb{C}$ і просторовими потенціальними полями, а в пункті 3.2.4 для моногенних функцій $\Phi : Q_\xi \to \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ доведено аналоги інтегральної теореми Коші та інтегральної формули Коші.

Варто відзначити, що питання про поширення більшості тверджень, доведених для моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ чи в ТВП $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$, на моногенні функції, що приймають значення в комплексифікації розглянутого вище ТВП $\widetilde{\mathbb{G}}$, залишається нерозв'язаною проблемою.

У **розділі 4** вивчаються алгебраїчно–аналітичні властивості спеціальних класів відображень зі значеннями в некомутативних алгебрах.

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

,

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$.

Зазначимо, що комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ — це алгебра бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре.

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Введемо до розгляду лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2 = 1\,, \quad i_u = a_u e_1 + b_u e_2\,, \quad a_u, b_u \in \mathbb{C}, \tag{20}$$

де $u = 2, 3, \ldots, m$ при $m \in \{2, 3, 4\}$, — лінійно незалежні вектори над полем $\mathbb{R}$. Зауважимо, що скрізь у підрозділах 4.1 — 4.3 $m \in \{2, 3, 4\}$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку

$$E_m := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : \; x_u \in \mathbb{R}\Big\}$$

над полем $\mathbb{R}$, породжену векторами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Множині $S \subset \mathbb{R}^m$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \Big\{\zeta = \sum_{u=1}^{m} x_u i_u : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S\Big\} \subset E_m.$$

Позначимо

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} a_u\, x_u,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = x_1 + \sum_{u=2}^{m} b_u\, x_u.$$

Тоді елемент $\zeta \in E_m$ подається у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. Позначимо через $f_1(E_m)$, $f_2(E_m)$ образи простору E_m при відображенні функціоналами f_1, f_2. Далі істотним є припущення: $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Очевидно, що воно виконується тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній із пар $(a_1, b_1), ..., (a_m, b_m)$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Означення 4.1.3. *Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називатимемо право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_m.$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо правою похідною Гато відображення Φ в точці ζ.

Означення 4.1.4. *Неперервне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називатимемо ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon} = \widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h \in E_m.$$

При цьому $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ *назвемо лівою похідною Гато відображення* $\widehat{\Phi}$ *в точці* ζ.

Означення 4.3.5. *Неперервне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{q=1}^{4} U_q(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, e_q\,. \tag{21}$$

називатимемо H*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_m$, *якщо* Φ *диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці* $\zeta \in \Omega_\zeta$, *тобто якщо компоненти відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними* $x_1, x_2, ..., x_m$, *і формальний диференціал відображення*

$$d\Phi := \sum_{q=1}^{4} \sum_{u=1}^{m} \frac{\partial U_q}{\partial x_u}\, dx_u e_q$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} dx_u i_u$, *тобто*

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s\, d\zeta\, B_s\,,$$

де A_s, B_s *— деякі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$*–значні функції.*

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ називається *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ в точці ζ.

Означення 4.3.6. H*-моногенне відображення* Φ, *диференціал якого подається у вигляді*

$$d\Phi = d\zeta\, \Phi'_H(\zeta),$$

називатимемо право-H*-моногенним в області* Ω_ζ.

Точки $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = \sum\limits_{u=1}^{m} x_u i_u \in E_m$, утворюють дві множини

$$M^1 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Re} a_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Im} a_u = 0, \end{cases} \qquad M^2 : \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Re} b_u = 0, \\ \sum\limits_{u=2}^{m} x_u \operatorname{Im} b_u = 0 \end{cases}$$

в m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$.

Кілька основних результатів підрозділів 4.1 — 4.3 можна сформулювати у вигляді наступного твердження, яке сформулюємо тут для право-G-моногенних відображень.

Теорема 4.3.5. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_m$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(1) *компоненти $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (21) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_u} = i_u \, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,, \quad u = 1, 2, ..., m$$

у кожній точці області Ω_ζ;

(2) *компоненти $U_q : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу (21) є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і відображення Φ є право-H-моногенним в області Ω_ζ.*

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$, то відображення Φ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

(3) *для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ знайдеться окіл, у якому відображення Φ розкладається у степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n\,;$$

(4) *відображення Φ неперервне і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial \triangle_\zeta} d\zeta \, \Phi(\zeta) = 0$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$, такого, що $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$.

Якщо $f_1(E_m) = f_2(E_m) = \mathbb{C}$ і, крім того, область $\Omega_\zeta \subset E_m$ є опуклою в напрямку множин M_ζ^1, M_ζ^2, то відображення Φ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли

(5) *існують єдина пара голоморфних в області $D_1 := f_1(\Omega_\zeta)$ функцій F_1, F_3 і єдина пара голоморфних в області $D_2 := f_2(\Omega_\zeta)$ функцій F_2, F_4, таких, що в області Ω_ζ відображення Φ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4\,.$$

Крім цього, в пункті 4.2.1 доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла для G-моногенного відображення, а в пункті 4.2.2 — аналог інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла. В пункті 4.2.4 доведено аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла.

У підрозділі 4.4 вивчаються кватерніонні функції, аналітичні в сенсі Хаусдорфа (H–аналітичні) й встановлюються співвідношення між H–аналітичними функціями та іншими відомими класами кватерніонних функцій. Позначимо через $e_1 = 1$, e_2, e_3, e_4 вектори канонічного базису дійсних кватерніонів $\mathbb{H}$, тобто $e_1 = 1$, $e_2 = i$, $e_3 = j$, $e_4 = k$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{H}$. Розглядаємо функцію $f : \Omega \to \mathbb{H}$ змінної $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ наступного вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} f_k(x)\, e_k\,. \tag{22}$$

Означення 4.4.2. *Функція $f : \Omega \to \mathbb{H}$ вигляду (22) називається H–аналітичною в області Ω, якщо f є аналітичною за Хаусдорфом у кожній точці $x \in \Omega$, тобто, якщо дійснозначні компоненти f_k є диференційовними функціями чотирьох дійсних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 і якщо диференціал $df_x = \sum\limits_{k=1}^{4} df_k(x_1, x_2, x_3, x_4)e_k$ є лінійним однорідним поліномом диференціала $dx := dx_1e_1 + dx_2e_2 + dx_3e_3 + dx_4e_4$, тобто*

$$df_x = \sum_{s=1}^{16} A_s(x)\, dx\, B_s(x)\,,$$

де A_s і B_s — деякі $\mathbb{H}$–значні функції змінної x.

У цьому випадку для кожного $x \in \Omega$ кватерніон

$$f'_H(x) := \sum_{s=1}^{16} A_s(x)\, B_s(x) \tag{23}$$

називається *похідною Хаусдорфа* (або коротко H–похідною) функції f в точці x.

Теорема 4.4.1. *Кожна кватерніонна функція з диференційовними дійснозначними компонентами є H–аналітичною, причому $f'_H(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$.*

У пунктах 4.4.2 — 4.4.6 встановлено, що на класі $\mathcal{C}^1(\Omega)$ наступні множини функцій є підмножиною множини H–аналітичних у Ω функцій: множина ліво-диференційовних функцій (функцій вигляду $f(x) = a + xb$, $a, b \in \mathbb{C}$), множина F–гіперголоморфних функцій (функцій, з ядра оператора Фуетера $\sum\limits_{r=1}^{4} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$), множина MT–гіперголоморфних функцій (функцій із ядра оператора Мойсіла–Теодореско $\sum\limits_{k=2}^{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$), множина s–регулярних функцій (функцій, що подаються у вигляді збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n\,,\ a_n \in \mathbb{H}$). При цьому показано, що H–похідна співпадає з відомими похідними для відповідних класів функцій.

У підрозділі 4.5 вивчаються класи диференційовних функцій в узагальнених алгебрах Келі–Діксона.

Нехай $A_t = \left(\frac{-1,\ldots,-1}{\mathbb{R}}\right)$ — алгебра Келі-Діксона і задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^{2^t}$. Позначимо через $\Omega_\zeta := \{\zeta = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1} : (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega\}$ область в A_t.

Розглянемо функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to A_t$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) e_k, \tag{24}$$

де $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$ і $\Phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Означення 4.5.3. *Функцію вигляду (24) називатимемо ліво-A_t-гіперголоморфною в області Ω_ζ, якщо частинні похідні першого порядку $\partial\Phi_k/\partial x_k$ існують у Ω і в кожній точці області Ω_ζ виконуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{2^t-1} e_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0.$$

Введемо позначення

$$\phi_1 = x_0 + e_1 x_1, \quad \phi_2 = \frac{1}{e_1}(x_0 + e_1 x_1),$$

$$\rho_{2s-1} = x_{2s} - e_1 x_{2s+1}, \quad \rho_{2s} = -\frac{1}{e_1}(x_{2s} - e_1 x_{2s+1}),\ \ s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}.$$

Позначимо через $\mathbb{C}_{2s}$ площини $\{x_{2s} + e_1 x_{2s+1} : x_{2s}, x_{2s+1} \in \mathbb{R}\}$ і через $D_{2s} := \{(x_{2s},\, x_{2s+1}) : x_{2s} + e_1 x_{2s+1} \in \mathbb{C}_{2s}\}$, $s \in \{0, 1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$ евклідові площини. Нехай G_{2s} — області в $\mathbb{C}_{2s}$ і $\widetilde{G}_{2s}$ — відповідні області в D_{2s}.

Теорема 4.5.9. *Нехай $v\,(\phi_1, \phi_2)$ і $v\,(\rho_{2s-1}, \rho_{2s})$ — раціональні функції, визначені у відповідних областях $G_0 \subset \mathbb{C}_0$ і $G_{2s} \subset \mathbb{C}_{2s}$, $s \in \{1, 2, ..., 2^{t-1} - 1\}$. Тоді відображення*

$$F_t\,(\zeta) = v\,(\phi_1, \phi_2) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{t-1} \Big(\sum_{k=1}^{i} \Big(\sum_{r=1}^{k-1} v\,(\rho_{M_{rki}-1}, \rho_{M_{rki}})\, e_{2^r}) e_{2^{r+1}} \ldots) e_{2^k}) e_{2^i} \Big) + \sum_{i=1}^{t-1} \left(v\,(\rho_{2^i-1}, \rho_{2^i})\, e_{2^i} \right),$$

де $M_{rki} = 2^r + 2^{r+1} + ... + 2^k + 2^i$, буде ліво-$A_t$-гіперголоморфною функцією в області $\Theta \subset A_t$, яка конгруентна до області $\widetilde{G}_0 \times \widetilde{G}_2 \times \widetilde{G}_4 \times \ldots \times \widetilde{G}_{2^{t-1}-1} \subset \mathbb{R}^{2^t}$ при $t \geq 1$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії функцій гіперкомплексної змінної у скінченновимірних алгебрах (комутативних і некомутативних) і в нескінченновимірних просторах із комутативним множенням.

Основні результати дисертації такі:

1. Отримано представлення (конструктивний опис) моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем $\mathbb{C}$, зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

2. Доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі.

3. Встановлено зв'язок між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу, й запропоновано підхід до побудови нескінченновимірних сімей розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами за допомогою вказаних моногенних функцій.

4. Доведено аналоги інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірній комутативній алгебрі і топологічному векторному просторі з комутативним множенням, асоційованих із тривимірним рівнянням Лапласа.

5. Введено клас кватерніонних G-моногенних відображень і отримано їх представлення (конструктивний опис) за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем для відображень цього класу.

6. Встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій і функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних і похідною за Хаусдорфом.

7. Розроблено метод побудови A_t-гіперголоморфних функцій, що належать ядру оператора Дірака, в узагальнених алгебрах Келі–Діксона

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шпаковский В. С. Об изоморфизме функциональных алгебр в гармонической алгебре с двумерным радикалом // Зб. праць Інституту матема-

тики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 384 – 391.

2. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2012. — **62**, № 2. — P. 55 – 65.
3. Flaut C., Shpakivskyi V. Some identities in algebras obtained by the Cayle-Dickson process // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2013. — **23**, № 1. — P. 63 – 76.
4. Плакса С. А., Шпаковский В. С. О логарифмическом вычете моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с двумерным радикалом // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 7. — С. 967 – 973.

   (переклад англійською: Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. On the logarithmic residues of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with two-dimensional radical // Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (7). — P. 1079 – 1086.)
5. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, № 1. — P. 110 – 119.
6. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. — 2014. — **1**. — P. 1 – 13.
7. Flaut C., Shpakivskyi V. Holomorphic functions in generalized Cayley-Dickson algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 1. — P. 95 – 112.
8. Flaut C., Shpakivskyi V. An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2015. — **25**, № 2. — P. 337 – 350.
9. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 3. — P. 251 – 268.
10. Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, № 4. — P. 313 – 328.
11. Shpakivskyi V. S. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. — 2016. — **7**, № 1. — P. 63 – 75.

12. Shpakivskyi V. S. Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2016. — **26**, № 1. — P. 417 – 434.

13. Шпаковский В. С. Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2016. — **30**. — С. 155 – 164.

14. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. An extension of monogenic functions and spatial potentials // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, № 2. — P. 330 – 337.

15. Шпаковский В. С. Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 262 – 274.

16. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. Quaternionic G-monogenic mappings in E_m // Int. J. Adv. Res. Math. — 2018. — **12**. — P. 1 – 34.

17. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Ser. Rech. Déform. — 2018. — **68**, № 2. — P. 25 – 36.

18. Шпаківський В. С. Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геом. центру. — 2018. — **11**, № 3. — P. 1 – 18.

19. Шпаківський В. С. Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Труды ИПММ НАН Украины. — 2018. — **32**. — С. 147 – 168.

20. Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M. and Shpakivskyi V. On the Hausdorff analyticity for quaternion-valued functions // Complex Analysis and Operator Theory. — 2019. – **13**, № 6. — P. 2863 – 2880.

21. Шпаківський В. С. Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — P. 272 – 294.
(переклад в англійському виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 92 – 109.)

Тези доповідей на конференціях

1. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with a two-dimensional radical //

Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 151.

2. Shpakivskyi V. S. On logarithmic residue of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with the two-dimensional radical // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ ∼ complex/conf2013/abstracts.html)
3. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a harmonic algebra // Abstract of Joint events of Colloquium on Differential Geometry and its Applications and IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, Debrecen, Hungary, August 26 – 30, 2013. — P. 33.
4. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra // Abstracts of Workshop "A New Approach in Theoretical and Applied Methods in Algebra and Analysis April 4 – 6, 2013, Constanta, Romania (режим доступу: http://amaa-2013.wikispaces.com/file/view/Abstract-Shpakivskyi.pdf/399910248/Abstract-Shpakivskyi.pdf)
5. Shpakivskyi V. S. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras // Матер. конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-ччя Г. М. Положого, 23 – 24 квітня 2014 р., Київ. — С. 152.
6. Шпаківський В. С. Конструктивний опис моногенних функцій у скінченновимірних комутативних алгебрах // Матер. XIII міжнар. наук.-практич. конф. "Шевченківська весна — 2015 1 – 3 квітня 2015 р., КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, 2015. — С. 65 – 69.
7. Shpakivskyi V. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 10th ISAAC Congress. — University of Macau, Macau, China, August 3 – 8, 2015. — P. 69.
8. Shpakivskyi V. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Abstract of 11th ISAAC Congress, Linnaeus University, Sweden, 2019. — P. 45.
9. Shpakivskyi V. Hypercomplex method for solving linear PDEs // Abstract of 12th ISAAC Congress, Aveiro University, Portugal, 2019. — P. 34 – 35.

АНОТАЦІЇ

Шпаківський В. С. Моногенні функції в асоціативних алгебрах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 ”Математичний аналіз” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

У дисертації розвивається теорія функцій гіперкомплексної змінної в скінченновимірних алгебрах (комутативних і некомутативних) і в нескінченновимірних просторах із комутативним множенням. Зокрема, отримано конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Для згаданих моногенних функцій доведено аналоги класичних інтегральних теорем із комплексного аналізу (теореми Коші для криволінійного і поверхневого інтеграла, теореми Морера, аналог інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла). Вивчаються моногенні функції зі значеннями в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, який є розширенням деякої нескінченновимірної комутативної асоціативної банахової алгебри $\mathbb{F}$, асоційованої із тривимірним рівнянням Лапласа. Встановлено інтегральні теореми для моногенних функцій зі значеннями у згаданих вище алгебрі й топологічному векторному просторі. Введено нові класи моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, так звані право-G-моногенні відображення й ліво-G-моногенні відображення, і вивчаються основні їхні алгебраїчно–аналітичні властивості. Встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій та функцій, аналітичних за Хаусдорфом. Вивчаються ліво-A_t-гіперголоморфні функції (тобто такі, що належать ядру оператора Дірака) в узагальнених алгебрах Келі–Діксона. Запропоновано алгоритм конструювання таких функцій.

Ключові слова: скінченновимірна комутативна асоціативна алгебра, алгебра комплексних кватерніонів, G-моногенні відображення, умови Коші–Рімана, теорема Коші, інтегральна формула Коші, теорема Морера, H–моногенні відображення, H–аналітична функція, алгебри Келі–Діксона, нескінченновимірний векторний топологічний простір.

Шпаковский В. С. Моногенные функции в ассоциативных алгебрах. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 ”Математический анализ” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

В диссертации развивается теория функций гиперкомплексной переменной в конечномерных алгебрах (коммутативних и некоммутативных) и в бесконечномерных пространствах с коммутативным умножением. В частности, получено конструктивное описание моногенных функций со значениями в произвольной конечномерной коммутативной ассоциативной алгебре над полем $\mathbb{C}$ при помощи голоморфных функций комплексной переменной. Для упомянутых моногенных функций доказаны аналоги классических интегральных теорем комплексного анализа (теоремы Коши для криволинейного и поверхностного интеграла, теоремы Морера, аналог интегральной формулы Коши для криволинейного интеграла). Изучаются моногенные функции со значениями в топологическом векторном пространстве $\widetilde{\mathbb{F}}$, являющемся расширением некоторой бесконечномерной коммутативной ассоциативной банаховой алгебры $\mathbb{F}$, ассоциированной с трёхмерным уравнением Лапласа. Получены интегральные теоремы для моногенных функций со значениями в упомянутых выше алгебре и топологическом векторном пространстве. Введены новые классы моногенных отображений в алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, так называемые право-G-моногенные отображения и лево-G-моногенные отображения, и изучены их основные алгебраично–аналитические свойства. Устанавливаются соотношения между известными классами кватернионных дифференцируемых функций и функций, аналитических по Хаусдорфу. Изучаются лево-A_t-гиперголоморфные функции (то есть принадлежащие ядру оператора Дирака) в обобщённых алгебрах Кели–Диксона. Предложен алгоритм конструирования таких функций.

Ключевые слова: конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра, алгебра комплексных кватернионов, G-моногенные отображения, условия Коши–Римана, теорема Коши, интегральная формула Коши, теорема Морера, H–моногенные отображения, H–аналитическая функция, алгебры Кели–Диксона, бесконечномерное векторное топологическое пространство.

Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in commutative algebras. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to development of the functions theory of the hypercomplex variable in finite-dimensional algebras (commutative and non-commutative) and in infinite-dimensional spaces with commutative multiplication develops in the thesis.

An arbitrary n-dimensional ($2 \le n < \infty$) commutative associative algebra $\mathbb{A}_n^m$ with unit over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ is considered in the thesis. Let $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \le k \le 2n$, be the elements of $\mathbb{A}_n^m$, which are linearly independent over the field of real numbers $\mathbb{R}$. We study monogenic (i.e., continuous and differentiable in the sense of Gâteaux) functions of the variable $\zeta = \sum\limits_{r=1}^{k} x_r e_r$, where $x_r \in \mathbb{R}$, with values in the algebra $\mathbb{A}_n^m$. We obtain a constructive description of monogenic functions with values in the algebra $\mathbb{A}_n^m$ by means of holomorphic functions of a complex variable. For the mentioned monogenic functions we prove analogues of classical integral theorems of complex analysis (the Cauchy theorem for a curvilinear and for a surface integrals, Morera theorem). For an arbitrary linear partial differential equation with constant coefficients, we propose a procedure for constructing an infinite-dimensional family of solutions.

Monogenic functions with values in the topological vector space $\widetilde{\mathbb{F}}$, which is an extension of some infinite-dimensional commutative associative Banach algebra $\mathbb{F}$ associated with the three-dimensional Laplace equation, are considered. It is known that each spatial harmonic function is a component of a corresponding monogenic function. We consider the complexifications $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ and $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ of $\widetilde{\mathbb{F}}$ and $\mathbb{F}$, respectively. Integral theorems for monogenic functions with values in the algebra $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ and the topological vector space $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ are established. The relations to the spatial potentials are investigated.

New classes of monogenic mappings in the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, so-called right-G-monogenic mappings and left-G-monogenic mappings are introduced. The constructive descriptions of all G-monogenic mappings are established by means four corresponding analytic functions of a complex variable. For such mappings we proved analogues of classical integral theorems of complex analysis (the Cauchy theorem for a curvilinear and for a surface integrals, Morera, Taylor and Laurent theorems). The main algebraic–analytic properties of H-monogenic (i.e., continuous and differentiable in the sense of Hausdorff) mappings with values in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ and its relations to G-monogenic mappings are investigated. The theorem on the equivalence of various definitions of right-G-monogenic and left-G-monogenic mappings is proved. We consider the concept of the Hausdorff analyticity for functions ranged in the real quaternion algebra $\mathbb{H}$ and the corresponding notion of the Hausdorff derivative. We compare them with the well-known classes of $\mathbb{H}$-valued functions which have their own definitions of the derivative. Also we study the left-A_t-hyperholomorphic (belonging to the kernel of Dirac operator) functions in the generalized of Cayley–Dickson algebras.

The algorithm of construction of such functions is offered.

Key words: finite-dimensional commutative associative algebra, algebra of complex quaternions, G-monogenic mappings, Cauchy–Riemann conditions, Cauchy theorem, Cauchy integral formula, Morera theorem, H-monogenic mappings, H-analytic function, Cayley–Dickson algebra, infinite-dimensional vector topological space.

Підписано до друку 14.07.2020. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,18. Умов. друк. арк. 2,3. Тираж 120 пр. Зам. 28.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.