

ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук, професора
Журавльова Валерія Пилиповича
на дисертаційну роботу Дворника Анатолія Володимировича
**«Коливні розв'язки звичайних та імпульсних
систем диференціальних рівнянь»**,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота Дворника Анатолія Володимировича присвячена дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Багаточастотні системи слугують моделями для опису коливних процесів у механіці, біології та інших галузях. Для дослідження таких систем Київською школою математики було розроблено ефективний асимптотичний метод усереднення. При цьому в багатьох задачах розглядаються не окремі розв'язки, а інтегральні многовиди (для автономних систем — інваріантні многовиди) таких систем. В теорії збурення інваріантних многовидів А. М. Самойленко запропонував використати функцію Гріна для лінеаризованої задачі. Методи й ідеї цієї теорії використовують для вивчення більш широких класів систем, а також удосконалюють для розглядуваних раніше.

Теорія систем із імпульсною дією має важливе значення для дослідження еволюційних процесів із різкими змінами зовнішніх умов. Зокрема, імпульсні системи моделюють нейронні мережі, взаємодію біологічних популяцій тощо. На імпульсні системи вдається у значній мірі поширювати як класичну теорію звичайних диференціальних рівнянь, так і узагальнення для абстрактних просторів, що дозволяє розглядати рівняння з частиними похідними.

Важливим об'єктом для вивчення є системи з нефіксованими моментами імпульсної дії. Їхня специфіка полягає в тому, що моменти розриву залежать від значення розв'язку в даний момент часу й є загалом різними для різних розв'язків. Це ускладнює дослідження розв'язності та стійкості розв'язків. Для майже періодичних імпульсних систем нещодавно запропоновано новий спосіб зведення до систем із фіксованими моментами імпульсної дії, що дає

можливість отримати умови розв'язності для багатьох конкретних систем. Такі дослідження активно продовжуються, підтвердженням чому є значна кількість нових публікацій. Незважаючи на це тема дисертаційної роботи А. В. Дворника є актуальною й важливою.

Зміст дисертації. Дисертаційна робота Дворника Анатолія Володимировича складається з переліку основних позначень, анотації, вступу, трьох розділів, висновків, переліку використаних джерел, що містить 80 найменувань і додатку, в якому вказані опубліковані праці та апробація результатів дисертаційного дослідження. Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок друкованого тексту, з яких основна частина — 121 сторінка.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, розкрито наукову новизну та практичне значення отриманих результатів зв'язок роботи з науковими темами, відзначено особистий внесок здобувача, вказано також, де було апробовано й опубліковано результати дисертації.

Огляд результатів інших авторів, що стосуються предмету досліджень, зроблено на початку кожного розділу.

У *першому* розділі знайдено умови існування, експоненціальної стійкості та експоненціальної дихотомії інваріантного тора для слабконелінійної системи рівнянь із малим параметром. Для перетворення системи застосовано асимптотичний метод усереднення, який розвинуто А. М. Самойленком. Як наслідок доведено теорему 1.2, що поєднує квазістатичні положення рівноваги усередненої системи з інваріантними многовидами вихідної системи.

У *другому* розділі досліджено існування і стійкість кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії $t = \tau_k(x)$, яка може описувати математичну модель нейронної мережі. Для цього використано метод, який запропоновано в роботах співавтора дисертанта В. І. Ткаченка. Поряд із вихідною системою для довільної обмеженої послідовності $y = \{y_k\}$ розглядається система з фіксованими моментами імпульсної дії $\tau_k(y_k)$, що має періодичний розв'язок $x^*(t, y)$. Розглядаючи $x^*(t_k(y_k), y)$ як відображення від y , доводиться існування єдиної нерухомої точки, якій відповідає шуканий розв'язок.

У *третьому* розділі досліджено систему диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерра з дифузиею й імпульсною дією, що відповідає моделі конкуренції двох видів у просторовій області, а також еволюційне рівняння з імпульсною дією в абстрактному банаховому просторі.

У підрозділах 3.1, 3.2 для системи Лотки–Вольтерра з дифузиею й ім-

пульсною дією знайдено умови існування та асимптотичної стійкості єдиного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку: у 3.1 — для системи з фіксованими, у 3.2 — з нефіксованими моментами імпульсної дії. При цьому для отримання результатів підрозділу 3.2 використано результати підрозділу 3.1. Для відшукування умов розв'язності, а в 3.2 — і для знаходження умов асимптотично стійкості зроблено перехід до абстрактної постановки з секторіальним оператором у банаховому просторі. У підрозділі 3.3 для рівняння з секторіальним оператором у абстрактному банаховому просторі знайдено умови асимптотичної стійкості обмеженого розв'язку. Теорема 3.20 розглядається як допоміжне твердження для одержання майбутніх результатів цієї теорії та для застосувань, що і зроблено на прикладі рівняння дифузії на відрізку з періодичною за t зовнішньою дією й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Основні наукові результати. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими й полягають у наступому:

- Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи.
- Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, що можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж.
- Одержано умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерра конкурентного типу з дифузією й імпульсною дією як у фіксовані, так і в нефіксовані моменти часу.
- У абстрактному банаховому просторі встановлено умови асимптотичної стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Достовірність результатів узгоджено з відомими раніше. Основні результати в цілому вдало порівняно з результатами інших авторів із зазначенням отриманої новизни. Використання результатів інших авторів завжди має посилання на відповідне джерело.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота А. В. Дворника має теоретичний характер. Її результати й методика їхнього отримання можуть бути використані в подальшому для розвитку теорії диференціальних рівнянь, а також у прикладних задачах механіки, біології та інших галузей.

Обґрунтування результатів дисертаційної роботи Всі результати дисертації є новими та строго обґрунтованими. Вони сформульовані у вигляді теорем, що супроводжуються повними доведеннями. Матеріали дисертації були висвітлені у фахових журналах та на наукових конференціях, а саме, було опубліковано 11 праць, серед яких 5 статей у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, та 6 тез доповідей. Дисертаційна робота написана грамотною мовою, а оформлення рукопису відповідає чинним вимогам. Автореферат відповідає змісту дисертації та відображає її основні положення.

Зауваження та побажання.

- 1) Доцільно було б більш детально провести доведення теореми 1.2 (с. 40).
- 2) У прикладі на с. 133 у формулах (3.115) і (3.117) варто було б підкреслити, що τ_j залежать від u як функції від x , аналогічно до (3.12).
- 3) У тексті дисертації недостатня кількість прикладів, які ілюструють теорію.
- 3) Деякі формули пронумеровані, але посилання на них не використовується.

Вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Висновки. Дисертаційне дослідження Дворника Анатолія Володимировича складає враження ґрунтовно підготовленої, ретельно виконаної й завершені наукової роботи з теорії диференціальних рівнянь. Наукова новизна й теоретичне значення роботи не викликають сумніву й визначаються перш за все колом конкретних завдань, а саме: знаходження достатніх умов існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Предмет, мета й завдання дослідження логічно пов'язані між собою.

Вважаю, що дисертаційна робота Дворника Анатолія Володимировича «Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь» за актуальністю й одержаними науковими результатами відповідає

сучасному рівню розвитку математики та задовольняє всі вимоги до кандидатських дисертацій із математики, зокрема, пп. 9, 11–14 чинного «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року зі змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету міністрів № 656 від 19 серпня 2015 року, № 1159 від 30 грудня 2015 року, № 567 від 27 липня 2016 року, № 943 від 20 листопада 2019 року, щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Дворник Анатолій Володимирович, заслугоує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор

завідувач кафедри вищої

та прикладної математики

Поліського національного університету

В. П. Журавльов

