

## ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук, професора  
Бігуна Ярослава Йосиповича  
на дисертаційну роботу Дворника Анатолія Володимировича  
**«Коливні розв'язки звичайних та імпульсних  
систем диференціальних рівнянь»**,  
подану на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Аналіз дисертаційної роботи Дворника Анатолія Володимировича «Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь» дозволяє зробити висновки щодо актуальності теми, обґрунтованості основних наукових положень та їхньої достовірності, наукової новизни, практичного значення, а також загальної оцінки роботи.

**Актуальність теми дисертаційного дослідження.** Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Метод усереднення є ефективною і результативною процедурою дослідження коливних систем нелінійної механіки. Хоча основи цього методу закладено ще в працях П. Лапласа і Ж. Лагранжа, коректне формулювання і строге математичне обґрунтування методу усереднення для систем стандартного вигляду вперше дано М. М. Боголюбовим у середині ХХ століття. Надалі асимптотичні методи й метод усереднення розвивали представники київської школи нелінійної механіки Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, О. Б. Ликова, Д. І. Мартинюк, В. І. Фодчук, М. І. Шкіль та їхні учні, а також В. І. Арнольд, Д. В. Аносов, В. М. Волосов, Є. О. Гребеніков, Ю. О. Рябов, В. О. Плотніков, О. М. Філатов та інші.

Для знаходження інваріантного многовиду збуреного лінійного розширення динамічної системи на торі А. М. Самойленко запропонував застосувати функцію Гріна лінеаризованої задачі. У поєднанні з методом усереднення це розширило можливості для дослідження інваріантних многовидів.

Попри значне число праць, які присвячено цій теорії, на даний час залишилася низка нерозв'язаних задач, до яких застосовний згаданий метод, — як тих, що стосуються нових класів рівнянь (функціонально-диференціальних, стохастичних, рівнянь в абстрактних просторах тощо), так і деяких задач класичної теорії звичайних диференціальних рівнянь, з них розглянуто в дисертаційній роботі А. В. Дворника.

Побудову теорії систем із імпульсною дією розпочали А. Д. Мишкіс, А. М. Самойленко, А. Халанай, Д. Векслер, а продовжили у значній мірі представники згаданої вище київської школи: М. О. Перестюк, М. У. Ахметов, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук та інші. Теорія на даний час продовжує активно розвиватися, зокрема, для майже періодичних імпульсних систем. Активне дослідження таких систем проводили А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, Д. Векслер, М. У. Ахметов, В. Ю. Слюсарчук, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук, М. Пінто, Г. Т. Стамов та інші. Важливе практичне значення теорії пов'язане насамперед із застосуванням у різноманітних галузях науки й техніки, зокрема в теорії нейронних мереж і популяційній динаміці.



На даний час ще недостатньо досліджено майже періодичні системи з нефіксованими моментами імпульсної дії. Саме їм присвячено більшу частину дисертаційної роботи А. В. Дворника «Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь»

Враховуючи наведене вище, тема даного дисертаційного дослідження є актуальною.

**Структура і зміст дисертації.** Дисертація загальним обсягом 150 с. складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 80 найменувань.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, відзначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, а також подано інформацію про апробацію та публікацію результатів дисертації.

Аналіз робіт, які безпосередньо стосуються предмету досліджень, зроблено на початку кожного розділу, а також на початку підрозділу 3.3. Загалом даному питанню відведено близько 15 сторінок із посиланням на 67 робіт.

У першому розділі знайдено умови існування і стійкості інваріантних торів для слабконелінійної системи рівнянь (1.1):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x, \varphi),$$

де  $\lambda H = \text{diag}(\lambda_1 H_1, \dots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$ , власні числа сталих  $(2 \times 2)$ -матриць  $H_1, \dots, H_{n_1}$  дорівнюють  $\pm i$ ,  $\mu$  — сталий вектор,  $\varepsilon > 0$  — малий додатний параметр,  $X(x, \varphi)$ ,  $F(x, \varphi)$  — достатньо гладкі  $2\pi$ -періодичні за  $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$  функції.

Для дослідження системи використано ідеї, запропоновані А. М. Самойлевком у роботі [24] для системи без змінної  $\varphi$ .

У випадку, коли  $X(x, \varphi)$  і  $F(x, \varphi)$  — квазіполіноми, до системи застосовано асимптотичний метод, який є узагальненням методу нормальних форм. Усереднену систему шляхом розщеплення фактично зведено до системи меншої розмірності з повільними змінними, причому зменшення числа рівнянь дорівнює розмірності базису частот  $\lambda$ ,  $\mu$ . Результат сформульовано у вигляді теореми 1.1, і саме в ньому вбачається головна новизна розділу 1.

У нерезонансному випадку для функцій  $X(x, \varphi)$  і  $F(x, \varphi)$  загального вигляду для досить малого параметра  $\varepsilon$  сформульовано достатні умови існування інваріантного тора, а також його експоненціальної стійкості й експоненціальної дихотомії. Характер стійкості залежить від матриці у варіаціях першого наближення відщепленої підсистеми усередненої системи.

У другому й третьому розділах розглянуто переважно питання існування і стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Особливістю більшості розглянутих задач є те, що моменти імпульсної дії  $\tau_k(x)$  не фіксовані й залежать від значення розв'язку в даний момент часу. Для таких систем ужито специфічні означення стійкості розв'язків, оскільки різні розв'язки мають різні точки розриву. Для знаходження єдиного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи з нефіксованими моментами імпульсів застосовано запропонований уперше в роботі [38] (R. Nakl, M. Pinto, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук) метод зведення до систем із фіксованими моментами імпульсної дії, для якого непотрібна продовжуваність вліво розв'язків системи.



У другому розділі досліджено існування і стійкість кусково-неперервних майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, яка може слугувати математичною моделлю для опису нейронних мереж.

У підрозділах 3.1 і 3.2 досліджено майже періодичну систему диференціальних рівнянь типу Лотки – Вольтерра з дифузиею й імпульсною дією. Система описує конкурентну взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткочасного зовнішнього впливу. Для системи з фіксованими моментами імпульсної дії в підрозділі 3.1 знайдено умови перманентності, отримано умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків із області перманентності. При виконанні цих умов доведено існування єдиного асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку. Для системи з нефіксованими моментами імпульсної дії у підрозділі 3.2 знайдено умови існування й асимптотичної стійкості єдиного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку. При цьому в обох випадках для доведення існування шуканого розв'язку було здійснено перехід до абстрактної постановки з секторіальним оператором.

У підрозділі 3.3 отримано умови стійкості обмеженого розв'язку для еволюційного рівняння в абстрактному банаховому просторі з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії. Наведено приклад.

**Наукова новизна та значимість отриманих результатів.** Основні результати дисертації А. В. Дворника полягають у тому, що одержано:

1) умови існування й експоненціальної стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи;

2) умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, що можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж;

3) умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерра з дифузиею й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими;

4) умови асимптотичної стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння в абстрактному банаховому просторі з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

**Практична цінність.** Дисертаційна робота А. В. Дворника має насамперед теоретичний характер. Проте отримані результати можуть бути використані для вивчення питань існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Також їх можна застосувати у прикладних задачах механіки, динаміки популяцій та в інших областях науки й техніки.

**Повнота викладення основних матеріалів дисертації в опублікованих працях.** Основні результати дисертації опубліковано в 11 наукових працях, серед яких 5 статей у фахових виданнях, які реферуються в НМБ Scopus, та 6 тез доповідей, у матеріалах міжнародних наукових конференцій. Результати дисертації мають достатній рівень апробації й на наукових семінарах у Інституті математики НАН України.

**Відповідність автореферату змісту дисертації.** Автореферат із достатньою повнотою відображає зміст, структуру та основні положення дисертації.

**Оцінка змісту дисертаційної роботи, її завершеність і відповідність встановленим вимогам.** Дисертаційна робота А. В. Дворника є завершеною науковою ро-



ботою й має вагому теоретичну і практичну цінність. Усі наукові результати дисертації в розділах 1–3 чітко сформульовано і строго доведено.

Дисертацію написано професійною науковою мовою з використанням правильної української наукової термінології. За своєю структурою, обсягом і оформленням дисертаційна робота відповідає вимогам МОН України.

**Зауваження та побажання до дисертаційної роботи.** Суттєвих зауважень щодо змісту дисертації та її оформлення немає, але можна відзначити таке:

1) Доведення теореми 1.2 варто викласти детальніше або вказати, що воно є аналогічним до доведення теореми в роботі [24].

2) Результати підрозділу 1.3 дисертації доцільно продемонструвати на конкретних прикладах.

3) Варто узгодити в тексті індекси в позначеннях моментів імпульсної дії, оскільки в розділах 2 й 3 вживається як  $\tau_k$ , так і  $\tau_j, \tau_i$ , причому інколи — в межах одного підрозділу (наприклад, 3.1.1).

4) У тексті дисертаційної роботи наявні деякі описки, наприклад, на с. 47 написано прізвище Баїнов замість Байнов, пропущено символи в описі [13].

5) Нерівність, наведена у лемі 3.1, впливає з інтегральної нерівності на с. 19 в монографії В. Pachatte (1998 р.).

Однак зазначені зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи, яку виконано на високому науковому рівні, містить низку нових й оригінальних результатів.

## ВИСНОВОК

Дисертаційна робота А. В. Дворника «Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь» задовольняє вимоги пп. 9, 11–14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року зі змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року, № 1159 від 30 грудня 2015 року, № 567 від 27 липня 2016 року, № 943 від 20 листопада 2019 року, щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Дворник Анатолій Володимирович, заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Офіційний опонент:  
завідувач кафедри прикладної математики  
та інформаційних технологій  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федьковича  
доктор фізико-математичних наук, професор



Бігун Я. Й.

