НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Дворник Анатолій Володимирович

УДК 517.9

Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Самойленко Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
директор.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Бігун Ярослав Йосипович
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри прикладної математики
та інформаційних технологій;

доктор фізико-математичних наук, професор
Журавльов Валерій Пилипович,
Поліський національний університет,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

Захист відбудеться *8 вересня 2020 р. о 14 годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *4 серпня 2020 р.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **В. Б. Василик**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Багаточастотні системи моделюють різноманітні коливні процеси в механіці, теорії нейронних мереж та інших галузях науки. Ефективним підходом до дослідження таких систем є поєднання асимптотичного методу усереднення з методом інтегральних многовидів, які розвинули М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко та ін. Цей підхід дає змогу, зокрема, знаходити умови існування і стійкості інваріантних многовидів для слабконелінійних багаточастотних систем у разі негрубості відповідних незбурених систем.

Продовжує активно розвиватися теорія майже періодичних імпульсних систем, які досліджували у своїх роботах А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, Д. Векслер, М. У. Ахмет, В. Ю. Слюсарчук, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук, Г. Т. Стамов та ін. Дослідження таких систем має важливе практичне значення в теорії нейронних мереж і математичній біології, зокрема при моделюванні еволюції біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткотривалих зовнішніх впливів. Для багатьох застосувань доцільно розглядати імпульсну дію в нефіксовані моменти часу, які залежать від стану системи, а також ураховувати стан у минулому, тобто розглядати системи з запізненням. У таких системах проявляються властивості диференціальних і різницевих систем і виникають специфічні складності, пов'язані з розривністю й непродовжуваністю розв'язків на від'ємну піввісь. Розглядаються кусково-неперервні майже періодичні розв'язки, розриви яких відповідають імпульсній дії. При цьому застосування загальних методів потребує пошуку специфічних підходів для кожної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з темами «Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь» (номер держреєстрації 0105U007978), «Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь» (номер держреєстрації

0111U002035), «Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь» (номери держреєстрації 0116U003121, 0119U001721).

Мета й завдання дослідження. *Мета* дисертації — знаходження достатніх умов існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Об'єкт дослідження — багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь і диференціальні рівняння з імпульсною дією.

Предмет дослідження — питання існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією, зокрема з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії імпульсних і функціонально-диференціальних рівнянь і функціонального аналізу, зокрема: асимптотичний метод усереднення, методи теорії стійкості й теорії рівнянь у банаховому просторі.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи.
2. Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж.
3. Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими.
4. В абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для вивчення питань існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Також їх можна використати для дослідження задач механіки, біології та інших галузей науки і техніки, математичними моделями яких є відповідні рівняння.

Особистий внесок здобувача. У розділах 2 і 3 (роботи [2–5]) постановка задач, визначення загальної схеми дослідження, аналіз отриманих результатів належить співавтору — докторові фізико-математичних наук, професору В. І. Ткаченку. У підрозділі 3.1 (робота [4]) співавтору — кандидату фізико-математичних наук, доцентові О. О. Струк — належить перевірка технічних викладок, аналіз і обговорення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на засіданнях семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор А. М. Самойленко), а також на міжнародних наукових конференціях.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–5], що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Одну зі вказаних робіт опубліковано без співавторів. Англомовні версії всіх статей опубліковано в закордонних наукових періодичних виданнях видавництва Springer, [1–5] присутні в наукометричній базі даних Scopus, [1, 3, 4] — у Web of Science Core Collection (Science Citation Index Expanded).

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 80 найменувань, і додатку. Загальний обсяг дисертації налічує 150 сторінок (із них основної частини — 121 сторінку).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** знайдено умови існування і стійкості інваріантних торів для слабконелінійної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x,\varphi), \tag{1}$$

де λH і μ — сталі матриця й вектор, $\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$, власні числа (2×2)-матриць $H_1, \ldots H_{n_1}$ дорівнюють $\pm i$, $X(x,\varphi)$, $F(x,\varphi)$ — достатньо гладкі за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ 2π-періодичні за φ дійснозначні функції, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

У разі, коли $X(x,\varphi)$ і $F(x,\varphi)$ — квазіполіноми, тобто поліноми за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і тригонометричні поліноми за $\varphi \in \mathcal{T}_{n_2}$, до системи (1) застосовано метод асимптотичного інтегрування нелінійних систем. Розв'язок шукається за допомогою заміни як формальний степеневий ряд за малим параметром:

$$x = y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} u_{\nu}(y,\, \theta), \;\; \varphi = \theta + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} v_{\nu}(y,\, \theta).$$

У нових змінних отримана "усереднена" система така:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} Y_{\nu}(y,\, \theta), \;\; \frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} \Phi_{\nu}(y,\, \theta). \tag{2}$$

Після введення у (2) замість y полярних координат h, ψ:

$$y^j = e^{H_\nu \psi_j} B_j h_j, \; j = \overline{1,\, n_1}, \; h \in \mathbb{R}^{n_1}, \;\; \psi \in \mathcal{T}_{n_1},$$

де $y^j = (y_{2j-1}, y_{2j})$, B_j — двовимірні вектори, елементи яких визначаються через елементи матриць H_j, маємо формально рівносильну (за винятком гіперплощин $h_j = 0, \; j = \overline{1,\, n_1}$) систему:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} B^{+} e^{-H\psi} Y_{\nu}(e^{H\psi} Bh,\, \theta),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ H e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi} Bh,\, \theta)/h, \tag{3}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(e^{H\psi} Bh,\, \theta).$$

За допомогою лінійної заміни кутових змінних систему (3) можна звести до простішої форми:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu V_\nu(h,\, \xi),\ \ \frac{d\xi}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu W_\nu(h,\, \xi),\ \ \frac{d\zeta}{dt} = \omega + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Z_\nu(h,\, \xi),$$

де ω — базис частот (елементів векторів λ, μ).

Якщо для будь-яких $y \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $\psi \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\theta \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$Y_1(e^{H\psi} y,\, \theta) = e^{H\psi} Y_1(y,\, 0),\ \ \Phi_1(e^{H\psi} y,\, \theta) = \Phi_1(y,\, 0), \tag{4}$$

перше наближення усередненої системи в полярних координатах (3) має форму

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon B^+ Y_1(Bh,\, 0) \equiv \varepsilon U(h),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda - \varepsilon B^+ H Y_1(Bh,\, 0)/h, \tag{5}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \mu + \varepsilon \Phi_1(Bh,\, 0).$$

Зокрема, (4) виконується за відсутності резонансу, коли частоти λ, μ лінійно незалежні над полем $\mathbb{Q}$. За певних умов можна застосувати асимптотичний метод і отримати (5), коли $X(x,\ \varphi)$ і $F(x,\ \varphi)$ не квазіполіноми.

Теорема 1.2. *Нехай права частина системи (1) така, що:*

1) Для певних цілих s і l, $2 \leqslant s \leq l$, та для певної області $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^{2n_1}$ $X(x,\ \varphi) \in C^l(D)$, $F(x,\ \varphi) \in C^l(D)$, $u_1(y,\ \theta) \in C^s(D)$, $v_1(y,\ \theta) \in C^s(D)$, де $D = \widetilde{D} \times \mathcal{T}_{n_2}$.

2) Для $Y_1(y,\, \theta)$ і $\Phi_1(y,\, \theta)$ виконується співвідношення (4).

3) Перша підсистема у (5) має таке положення рівноваги

$$h = h^0 \geq 0 :\ U(h^0) = 0,$$

що тор $x = g(\widetilde{\psi})$, *заданий рівностями*

$$x^{j_k} = 0,\ k = \overline{1,\, n'},\ \ x^{j_k} = e^{H_{j_k}\psi_{j_k}} B_{j_k} h^0_{j_k},\ \psi_{j_k} \in \mathcal{T}_1,\ k = \overline{n'+1,\, n_1},$$

де n' — *кількість нульових координат вектора* h_0, j_k, $k = \overline{n'+1,\, n_1}$, — *індекси ненульових координат вектора* h_0, $\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1},\, \ldots,\, \psi_{j_{n_1-n'}})$, *належить області* D, *а власні числа матриці*

$$\widetilde{U} = \frac{\partial U(h^0)}{\partial h} \tag{6}$$

не мають нульових дійсних частин.

Тоді можна вказати таке число $\varepsilon_0 > 0$, *що для всіх* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *система рівнянь (1) має* $(n_1 + n_2 - n')$*-вимірний інваріантний тор*

$$x = f(\widetilde{\psi},\, \varphi,\, \varepsilon),$$

де $f \in C^{s-2}_{\mathtt{Lip}}(\mathcal{T}_{n_1+n_2-n'})$. *Цей тор задовольняє умову*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| f(\widetilde{\psi},\, \varphi,\, \varepsilon) - g(\widetilde{\psi}) \|_{s-2} = 0 \tag{7}$$

і є експоненціально стійким, якщо дійсні частини власних чисел матриці (6) від'ємні, й експоненціально дихотомічним, якщо є власні числа матриці (6) як із від'ємними, так і з додатними дійсними частинами.

У **другому розділі** досліджено існування і стійкість кусково-неперервних майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t),\ t \ne \tau_k(x(t)), \tag{8}$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \quad t = \tau_k(x(t)),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ — матричнозначні функції $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f і g — функції $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x)\colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відокремлені одна від одної.

Такі системи описують математичні моделі нейронних мереж із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії.

На систему (8), (9) накладено умови:

(L1) Матричнозначні функції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і векторнозначна функція $\gamma(t)$ майже періодичні за Бором.

(L2) Послідовність $\{\tau_k\}$ неперервних функцій $\tau_k\colon U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$, й існує таке $\theta > 0$, що $\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \geq \theta$ для всіх $x \in U_\rho$ й $k \in \mathbb{Z}$. Тут $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| \leq \rho\}$, ρ — певне додатне число.

(L3) Послідовності $(n \times n)$-матриць $\{D_k\}$ і векторів $\{g_k\}$ майже періодичні.

(L4) Послідовність $\{I_k(x)\}$ вектор-функцій $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Припускається, що у множині U_ρ розв'язки системи (8), (9) не мають биття з поверхнями $t = \tau_k(x)$, тобто розв'язки перетинають кожну поверхню не більш як один раз.

Нехай X — банахів простір із нормою $\|.\|$. Розглядатимемо простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x\colon J \to X$, таких, що множина моментів розривів x не має скінченних граничних точок і $x(t)$ неперервна зліва. Використовуватимемо норму $\|x\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|x(t)\|$.

Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається W-майже періодичною, якщо:

I) послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$, упорядкованих за зростанням, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$;

II) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалові неперервності й $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$;

III) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів, таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - \tau_k| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Через нефіксовані моменти імпульсної дії означення стійкості й асимптотичної стійкості відмінні від таких означень для рівнянь із фіксованими моментами імпульсної дії, оскільки враховують відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння.

Розв'язок $x_0(t)$ системи (8), (9), який при всіх $t \geq t_0 - h$ належить U_ρ і для якого $\tau_k(x_0(t_0)) \neq t_0,\ k \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ й для якого

$$\|x_0(\theta) - x(\theta)\| < \delta, \qquad \theta \in [t_0 - h, t_0], \qquad |\theta - \tau_k^0| > \delta,$$

виконується $\|x_0(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всіх таких $t \geq t_0$, що $|t - \tau_k^0| > \eta$, де τ_k^0 — моменти часу, при яких розв'язок $x_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $x_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для кожних $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ існує таке $T = T(\varepsilon, \eta) > 0$, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з U_ρ й для якого

$$\|x_0(\theta) - x(\theta)\| < \delta_0, \qquad \theta \in [t_0 - h, t_0], \qquad |\theta - \tau_k^0| > \delta_0,$$

виконується $\|x_0(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ й $|t - \tau_k^0| > \eta$.

Поряд із системою (8), (9) розгляньмо лінійну однорідну систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_k, \tag{10}$$

$$x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = D_k x(\tau_k), \quad \tau_k = \tau_k(0), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Система (10), (11) називається експоненціально стійкою з показником $\beta > 0$ й коефіцієнтом $M \geq 1$, якщо

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s,$$

де $U(t,s)$ — еволюційний оператор для системи (10), (11).

Теорема 2.11. *Припустімо, що в області $U_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \rho\}$ система (8), (9) задовольняє умови (L1)–(L4) і додатково:*

1) *усі розв'язки в області U_ρ перетинають кожну поверхню $t = \tau_k(x)$ не більш ніж один раз;*

2) $\|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|I_k(x_1) - I_k(x_2)\| + |\tau_k(x_1) - \tau_k(x_2)| \leq N_1 \|x_1 - x_2\|$ *рівномірно відносно* $x_1,\ x_2 \in U_\rho,\ k \in \mathbb{Z}$;

3) $f(0) = g(0) = 0$, $I_k(0) = 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$;

4) *лінійна однорідна система* (10), (11) *експоненціально стійка.*

5) ρ *більше за певне число, що визначається з системи.*

Тоді для достатньо малих значень сталої Ліпшиця N_1 *система* (8), (9) *має в* U_ρ *єдиний* W*-майже періодичний розв'язок, і він асимптотично стійкий.*

Доведення існування і єдиності W-майже періодичного розв'язку зводиться до шукання такого розв'язку $x^*(\tau_k(y_k), y)$ для системи (8) із фіксованими моментами імпульсної дії, які визначаються для кожної майже періодичної послідовності $y = \{y_k\}$ таким чином:

$$x(\tau_k(y_k) + 0) - x(\tau_k(y_k)) = D_k x(\tau_k(y_k)) + I(y_k) + g_k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

У просторі майже періодичних послідовностей визначається відображення $S(y) = \{x^*(\tau_k(y_k), y)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Воно є стискуючим, і шуканий розв'язок вихідної системи відповідає його нерухомій точці.

У **третьому розділі** проведено дослідження системи диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й імпульсною дією, а також еволюційного рівняння з імпульсною дією в абстрактному банаховому просторі.

У **підрозділах 3.1 – 3.2** досліджено існування і стійкість кусково-гладких майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu_1 \Delta u + u\big(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\big), \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu_2 \Delta v + v\big(a_2(t,x) - b_2(t,x)u - c_2(t,x)v\big), \tag{13}$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, зі крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{14}$$

й загалом нефіксованими моментами імпульсної дії

$$u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k} u(t,x) + q_{1k},$$

$$v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k} v(t,x) + q_{2k}, \tag{15}$$

$$t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \\ = \theta_k + r_k \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область зі гладкою межею $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, які в загальному випадку залежать від розв'язків. Ці моменти рівномірно відділені один від іншого.

Система описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і у просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, функції вважають невід'ємними. Додатні сталі μ_1 і μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ і $v(a_2 - c_2 v)$ характеризують відтворення першого й другого видів. Члени $-c_1 uv$ й $-b_2 uv$ показують гальмівний вплив виду v на вид u й виду u на вид v відповідно.

Розглядатимемо систему (12)–(16) із такими умовами:

(H1) Додатнозначні обмежені функції $a_j(t,x)$, $b_j(t,x)$ і $c_j(t,x)$, $j = 1,2$, неперервно диференційовні за $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ й майже періодичні за Бором за t рівномірно відносно $x \in \Omega$.

(H2) Виконуються нерівності $d_{jk} > -1$, $q_{jk} \geq 0$, $j = 1,2$, $k \in \mathbb{Z}$, і послідовності дійсних чисел $\{d_{1k}\}, \{d_{2k}\}, \{q_{1k}\}, \{q_{2k}\}$ майже періодичні. Позначмо $d = \sup_{jk} |d_{jk}|$, $q = \sup_{jk} q_{jk}$.

(H3) Позначмо $U_\rho = \{u \in C(\bar{\Omega})\colon \|u\|_C \leq \rho,\ u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$, де ρ — певне додатне число. Послідовність $\{\theta_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, а послідовність $\{r_k\}$ майже періодична. Крім того, існують сталі $\tilde{\Theta} > \tilde{\theta} > 0$ й $\Theta > \theta > 0$, такі, що виконуються нерівності $\tilde{\Theta} \geq \theta_k - \theta_{k-1} \geq \tilde{\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, і

$$\Theta = \tilde{\Theta} + 2r\rho^2|\Omega| \geq \tau_k(u,v) - \tau_{k-1}(u,v) \geq \theta = \tilde{\theta} - 2r\rho^2|\Omega| > 0$$

для всіх $u, v \in U_\rho$, $k \in \mathbb{Z}$. Тут $r = \sup_k |r_k|$, $|\Omega|$ — міра множини Ω.

Для обмеженої функції $g(t,x)$ позначмо

$$g^L = \inf_{t,x} g(t,x), \qquad g^M = \sup_{t,x} g(t,x).$$

У **підрозділі 3.1** досліджено систему (12) – (16) для фіксованих моментів імпульсної дії ($r_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$).

Система (12) – (16) називається перманентною, якщо існують додатні такі сталі m_0 і M_0, що кожен розв'язок із невід'ємними й не тотожними нулю початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$ з певного моменту часу $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ залишається у множині

$$E_0 = \big\{(u,v)\colon m_0 \le u \le M_0,\ m_0 \le v \le M_0\big\}.$$

Лема 3.7. *Для кожного розв'язку системи* (12) – (16) *із невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$ *існує таке* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$, *що*

$$u(t,x) \le M_0, \qquad v(t,x) \le M_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \ge \bar{t},$$

де

$$M_0 = \max\{A, A(1+d)+q\}, \qquad A = \frac{a^M}{b^L(1-e^{-a^M\theta})},$$

$a^M = \max\big\{a_1^M, a_2^M\big\}$, $b^L = \min\big\{b_1^L, c_2^L\big\}$.

Лема 3.8. *Нехай виконуються нерівності*

$$a_1^L - c_1^M M_0 + \sigma_1 > 0, \qquad a_2^L - b_2^M M_0 + \sigma_2 > 0, \tag{17}$$

де

$$\sigma_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<\theta_k\le T} \ln(1+d_{jk}), \quad j = 1,2.$$

Тоді існує таке $m_0 > 0$, *що для кожного розв'язку системи* (12) – (16) *із невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, *існує таке* $t_0 = t_0(u_0, v_0)$, *що*

$$u(t,x) \ge m_0, \qquad v(t,x) \ge m_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \ge t_0.$$

Теорема 3.11. *Нехай для системи* (12) – (16) *виконуються такі умови:*

1) система перманентна;

2) виконується нерівність

$$a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0 + \sigma > 0, \tag{18}$$

$$\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\},\ c^L = \min\left\{c_1^L, b_2^L\right\},\ c^M = \max\left\{c_1^M, b_2^M\right\}.$$

Тоді розв'язки системи з початковими функціями зі значеннями у множині E_0 рівномірно асимптотично стійкі.

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови теореми 3.11, тоді система* (12) – (16) *має єдиний асимптотично стійкий кусково-неперервний майже періодичний розв'язок зі значеннями у множині E_0.*

У **підрозділі 3.2** розглянуто випадок нефіксованих моментів імпульсної дії з поверхнями імпульсів за таких умов:

Теорема 3.16. *Нехай виконуються умови (H1) – (H3), а також:*
– система (12) – (16) із фіксованими моментами імпульсної дії $t = \theta_k$ при $r_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, задовольняє умови леми 3.8 і теореми 3.11, і виконується нерівність $\rho \geq M_0$;
– для кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується одна з умов:

$$\begin{aligned} &r_k \leq 0, \quad d_{jk} \geq 0, \quad q_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, \\ &r_k \geq 0, \quad d_{jk} \leq 0, \quad q_{jk} = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Тоді при достатньо малому $r = \sup_k |r_k|$ система рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії (12) – (16) має в області $U_\rho \times U_\rho$ єдиний додатнозначний кусково-неперервний W-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$.

Для кожного $t_0 \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(\theta_k, \theta_k + \theta/2]$ як початкової точки W-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$ асимптотично стійкий.

У **підрозділі 3.3** отримано умови стійкості обмеженого розв'язку для рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u), \quad t \neq \tau_k(u), \tag{19}$$

$$u(\tau_k(u) + 0) - u(\tau_k(u)) = g_k(u), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

де $u : \mathbb{R} \to X$, X — банаховий простір, A — секторіальний оператор у X, послідовність $\{\tau_k(u)\}$ функцій $X \to \mathbb{R}$ строго зростає для u з певної області простору X.

До такої абстрактної постановки можна звести широкий клас параболічних рівнянь у частинних похідних із нефіксованими моментами імпульсної дії.

Припустімо, що рівняння (19), (20) задовольняє умови:

(**M1**) A — секторіальний оператор у X, $\inf\{Re\,\mu : \ \mu \in \sigma(A)\} \geq \delta > 0$, де $\sigma(A)$ — спектр A. Для оператора A означаються степені. Розглядатимемо простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$, утворені областями означення операторів A^α, $\alpha \geq 0$, з нормою $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$.

(**M2**) Позначмо $U_\varrho^\alpha = \{x \in X^\alpha : \ \|x\|_\alpha \leq \varrho\}$. Припускатимемо, що функції $\tau_k : U_\varrho^\alpha \to \mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_k(u_1) - \tau_k(u_2)| \leq N_1 \|u_1 - u_2\|_\alpha, \ k \in \mathbb{Z},$$

і рівномірно відносно $u \in U_\varrho^\alpha$ існують $\theta > 0$ й $\Theta > 0$ такі, що $\inf_u \tau_{k+1}(u) - \sup_u \tau_k(u) \geq \theta > 0$ й $\sup_u \tau_{k+1}(u) - \inf_u \tau_k(u) \leq \Theta$ для $k \in \mathbb{Z}$.

(**M3**) Функція $f(t, u) : \mathbb{R} \times U_\varrho^\alpha \to X$ обмежена й неперервно диференційовна за u, локально гельдерова за t рівномірно відносно $u \in U_\varrho^\alpha$ й має розриви першого роду при $t = \tau_k(u)$.

(**M4**) функції $g_k(u) : U_\varrho^\alpha \to X^1 = D(A)$ неперервні, рівномірно обмежені й ліпшицеві: $\|g_k(u_1) - g_k(u_2)\|_\alpha \leq N_1 \|u_1 - u_2\|_\alpha$ при $u \in U_\varrho^\alpha$ і $k \in \mathbb{Z}$.

Під розв'язком рівняння без імпульсної дії (19) мається на увазі класичний розв'язок, тобто неперервно диференційовна функція $u(t) \in D(A)$, яка при підстановці у співвідношення (19) перетворює його на тотожність. Припустімо, що розв'язки існують для всіх $t \geq t_0$.

Подібно до означення стійкості для рівнянь із запізненнямураховано те, що різні розв'язки перетинають поверхні імпульсів у різні моменти часу.

Нехай рівняння (19), (20) має обмежений на осі розв'язок $u_0(t)$. Для дослідження його стійкості зробімо в рівнянні заміну змінних $u = u_0(t) + z$. Тоді $z(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dt} + (A + A_1(t))z = \tilde{f}(t, z)$$

і різницеві співвідношення у точках перетину розв'язків $u_0(t)$ і $u_0(t)+z(t)$ з поверхнями $\tau_k(u)$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$z(\tilde{\tau}_k(z) + 0) - z(\tilde{\tau}_k(z)) = \tilde{g}_k(z),$$
$$z(\tilde{\tau}_k^0 + 0) - z(\tilde{\tau}_k^0) = \tilde{g}_k^0,$$

де $\tilde{\tau}_k^0 = \tau_k(u_0(\tilde{\tau}_k^0))$, $\tilde{\tau}_k(z) = \tau_k(u_0(\tilde{\tau}_k(z)) + z(\tilde{\tau}_k(z)))$,

$$\tilde{f}(t, z) = f(t, u_0(t)+z) - f(t, u_0(t)) + A_1(t)z, \quad A_1(t)z = -\frac{\partial}{\partial u} f(t, u_0(t))z,$$

$$\tilde{g}_k^0 = -g_k(u_0(\tilde{\tau}_k^0)), \quad \tilde{g}_k(z) = g_k(u_0(\tilde{\tau}_k(z)) + z(\tilde{\tau}_k(z))).$$

Припустімо, що існує неспадна функція K_ξ, $0 \le \xi \le \varrho$, така, що $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$ рівномірно за $t \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde{f}(t, z)\| \le K_\xi \|z\|_\alpha, \quad \|z\|_\alpha \le \xi. \tag{21}$$

Позначмо $M_0 = K_\varrho$, отже, $\sup_{t\in\mathbb{R}, \|z\|_\alpha \le \varrho} \|\tilde{f}(t, z)\| \le M_0 \varrho$.

Поряд із рівнянням (19), (20) розгляньмо лінійне однорідне рівняння

$$\frac{du}{dt} + (A + A_1(t))u = 0. \tag{22}$$

Припускатимемо, що $A_1(t)$ задовольняє умову

(**M5**) функція $A_1(t) : \mathbb{R} \to L(X^\alpha, X), \alpha \ge 0$, локально ліпшицева.

Теорема 3.20. *Припустімо, що рівняння (19), (20) у області* $U_\varrho^\alpha = \{u \in X^\alpha, \|u\|_\alpha \le \varrho\}$ *з деяким фіксованим* $\alpha \ge 0$ *задовольняє умови (M1) – (M4) й має обмежений на осі розв'язок* $u_0(t)$*, такий, що виконуються (21) і умова (M5). Нехай також*

1) *усі розв'язки в області* U_ϱ^α *перетинають поверхні* $t = \tau_k(u)$ *не більш ніж один раз;*

2) *відповідне лінійне рівняння у варіаціях (22) експоненціально стійке в* X^α *зі сталими* $\beta > 0$ *й* $M \ge 1$.

Тоді при досить малому $N_1 > 0$ *розв'язок* $u_0(t)$ *асимптотично стійкий.*

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Основні результати дисертаційної роботи можна сформулювати таким чином:

- Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи.
- Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж.
- Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими.
- В абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Дворник А. В.* Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 314 – 327.
   (English translation: *Dvornyk A. V.*, Asymptotic investigation of a weakly nonlinear multifrequency oscillating system // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, No. 3. — P. 337 – 351. DOI: 10.1007/s11072-011-0117-5, Web of Science, Scopus.)

2. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 453 – 464.
   (English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 4. – P. 425 – 439. DOI: 10.1007/s10958-016-3193-3, Scopus.)

3. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1450 – 1466.
(English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 11. – P. 1673 – 1693. DOI: 10.1007/s11253-017-1320-z, Web of Science, Scopus.)

4. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 177 – 192.
(English translation: *Dvornyk A. V., Struk O. O., Tkachenko V. I.*, Almost periodic solutions of Lotka – Volterra systems with diffusion and pulsed action, Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 2. – P. 197 – 216. DOI: 10.1007/s11253-018-1495-y, Web of Science, Scopus.)

5. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305 – 322.
(English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of the Lotka–Volterra systems with diffusion and nonfixed times of pulsed action // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, № 3. – P. 358 – 380. DOI: 10.1007/s10958-019-04545-x, Scopus.)

6. *Дворник А. В.* Інваріантні тори однієї коливної системи // Міжнародна математична конференція “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 92–93.

7. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On stability of evolution equations with state-dependent moments of impulsive action // Труды VII Международной конференции “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры” (8–9 октября 2015 г.), Актобе, Казахстан. – Актобе, 2015. – С. 44–47.

8. *Дворник А. В.* Сохранение инвариантного тора одной колебательной системы // Материалы международной научной конференции, посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29–

30 октября 2015 г.). – Душанбе, 2015. – С. 94–95.

9. *Дворник А.*, *Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936–1992), 28–30 вересня 2016 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – С. 42.
10. *Дворник А. В.*, *Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942–1996): матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2017. – С. 33–35.
11. *Дворник А.*, *Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки системи Лотки–Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 61.

АНОТАЦІЇ

Дворник А. В. Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи. Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж. Установлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими. В абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Ключові слова: інваріантні тори, стійкість, імпульсна дія, майже періодичність, диференціальні рівняння з запізненням, параболічні диференціальні рівняння, система рівнянь Лотки – Вольтерра, перманентність.

Дворник А. В. Колебательные решения обычных и импульсных систем дифференциальных уравнений. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 "Дифференциальные уравнения" (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию существования и устойчивости инвариантных торов многочастотных систем и кусочно-непрерывных почти периодических решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Найдены достаточные условия существования и устойчивости инвариантного тора с малым возмущенем правой части слабонелинейной многочастотной автономной системы дифференциальных уравнений в критическом случае соответствующей невозмущённой системы. Установлены условия существования и асимптотической устойчивости кусочно-непрерывных почти периодических решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и нефиксированными моментами импульсного воздействия, которые могут рассматриваться как

математические модели нейронных сетей. Установлены условия существования и асимптотической устойчивости строго положительных кусочно-непрерывных почти периодических решений систем дифференциальных уравнений Лотки – Вольтерра с диффузией и моментами импульсного воздействия — как фиксированными, так и нефиксированными. В абстрактном банаховом пространстве получены условия устойчивости ограниченного решения нелинейного эволюционного уравнения с секториальным оператором в линейной части и нефиксированными моментами импульсного воздействия.

Ключевые слова: инвариантные торы, устойчивость, импульсное воздействие, почти периодичность, дифференциальные уравнения с запаздыванием, параболические дифференциальные уравнения, система уравнений Лотки – Вольтерра, перманентность.

Dvornyk A. V. Oscillation solutions of ordinary and impulsive systems of differential equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.02 “Differential equations” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of the existence and stability of invariant tori for multifrequency systems and piecewise continuous almost periodic solutions for impulsive differential equations.

We consider the system of equations

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x,\varphi),$$

where λH and μ are a constant matrix and a constant vector respectively, $\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$, the (2×2)-matrices $H_1, \ldots H_{n_1}$ have eigenvalues $\pm i$, functions $X(x,\varphi)$ and $F(x,\varphi)$ are sufficiently smooth in $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ and 2π-periodic in φ, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. We find sufficient conditions of existence and stability of the invariant torus for small ε.

We consider a system of differential equations with delay and nonfixed times of impulsive actions

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \; t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \text{const} > 0$, $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ are matrix-valued functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(x)$ and $g(x)$ are functions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Impulsive actions occur in the case where the solutions reach the surfaces $\Gamma_k = \{(t,x)\colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. For such a system we establish conditions for unique existence and asymptotic stability of a piecewise continuous almost periodic solution in the ball.

We consider the Lotka – Volterra system of differential equations with diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu_1 \Delta u \ + \ u\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu_2 \Delta v \ + \ v\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u - c_2(t,x)v\right),$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, with Neumann boundary conditions

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

and, in general, nonfixed moments of impulse action

$$u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k}u(t,x) + q_{1k},$$
$$v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k}v(t,x) + q_{2k},$$
$$t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \theta_j + r_j \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $\partial/\partial n$ is the derivative along the outer normal, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$.

We find conditions of existence, uniqueness and asymptotic stability of a piecewise continuous almost periodic solution in the case of nonfixed moments of impulse action with surfaces of impulses and in the case of fixed moments of impulse action ($r_j = 0$).

We establish conditions for stability of a bounded solution for the equation with nonfixed moments of impulse action

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad t \neq \tau_j(u),$$
$$u(\tau_j(u)+0) - u(\tau_j(u)) = g_j(u), \quad j \in \mathbb{Z},$$

where $u : \mathbb{R} \to X$, X is a Banach space, A is a sectorial operator in X.

Key words: invariant tori, stability, impulse action, almost periodicity, delayed differential equations, parabolic differential equations, Lotka – Volterra system, permanence.

Підписано до друку 24.07.2020. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,25. Умов. друк. арк. 1,16.
Наклад 100 пр. Зам. 30.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.