Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ДВОРНИК Анатолій Володимирович

УДК 517.9

Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
____________ А. В. Дворник

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор,
академік НАН України
САМОЙЛЕНКО Анатолій Михайлович

Київ — 2019

АНОТАЦІЯ

Дворник А. В. Коливні розв'язки звичайних та імпульсних систем диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — «Диференціальні рівняння» (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, наведено перелік публікацій за темою дисертації.

У розділі 1 розглянуто систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x, \varphi),$$

де λH і μ — сталі матриця й вектор, $\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$, власні числа (2×2)-матриць $H_1, \ldots H_{n_1}$ дорівнюють ± 1, $X(x, \varphi)$ й $F(x, \varphi)$ — достатньо гладкі по $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ 2π-періодичні за φ дійснозначні функції, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Такі системи описують різноманітні коливні процеси, в т. ч. в механіці.

До системи застосовано асимптотичний метод усереднення нелінійних систем, згідно з яким розв'язок шукається за допомогою заміни у вигляді формального степеневого ряду за малим параметром:

$$x = y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} u_{\nu}(y,\, \theta), \;\; \varphi = \theta + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^{\nu} v_{\nu}(y,\, \theta),$$

У нових змінних отримана усереднена система має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} Y_{\nu}(y,\, \theta), \;\; \frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} \Phi_{\nu}(y,\, \theta).$$

Після введення полярних координат і розщеплення права частина перетвореної системи залежить лише від повільних змінних:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} V_{\nu}(h,\, \xi), \;\; \frac{d\xi}{dt} = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} W_{\nu}(h,\, \xi), \;\; \frac{d\zeta}{dt} = \omega + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} Z_{\nu}(h,\, \xi),$$

де ω — базис частот (елементів векторів λ, μ).

Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора для малих ε.

У розділі 2 розглянуто систему диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \;\; t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \;\; k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ — матричнозначні функції $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f і g — функції $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x)\colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відокремлені одна від іншої.

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ й $\gamma(t)$ майже періодичні за Бором, послідовності $(n\times n)$-матриць $\{D_k\}$ й векторів $\{g_k\}$ є майже періодичними, послідовність $\{I_k(x)\}$ вектор-функцій $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ є майже періодичною рівномірно відносно x у деякій кулі $U_\rho \subset \mathbb{R}^n$.

Частинним випадком є системи, що описують математичні моделі нейронних мереж із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії.

Для такої системи встановлено умови, за яких у кулі існує єдиний, причому асимптотично стійкий, кусково-неперервний майже періодичний розв'язок. При цьому через нефіксовані моменти імпульсної дії означення стійкості відмінне від такого для рівнянь із фіксованими моментами імпульсної дії, бо враховує відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння.

У розділі 3 досліджено систему диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерра з дифузією й імпульсною дією, а також еволюційне рівняння з імпульсною дією в абстрактному банаховому просторі.

Зокрема, розглянуто систему диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерра з дифузією

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + \\
&+ u(t,x)\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\right), \\
&\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + \\
&+ v(t,x)\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\right),
\end{aligned}$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, з крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

й загалом нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\begin{aligned}
&u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k}u(t,x) + q_{1k}, \\
&v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k}v(t,x) + q_{2k}, \\
&t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \theta_k + r_k \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою границею $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, які загалом залежать від розв'язків. Ці моменти рівномірно відділені один від іншого.

Система описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t й у просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, функції вважаються невід'ємними. Додатні сталі μ_1 і μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ і $v(a_2 - c_2 v)$ характеризують відтворення першого й другого видів. Члени $-c_1 uv$ й $-b_2 uv$ показують гальмівний вплив виду v на вид u й виду u на вид v відповідно.

У разі фіксованих моментів імпульсної дії ($r_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$) знайдено достатні умови перманентності системи, коли кількість індивідів кожного виду стабілізується в деякій обмеженій області, відділеній від нуля. Знайдено умови існування, єдиності й асимптотичної стійкості кусково-неперервного майже періодичного розв'язку зі значеннями в області перманентності.

У разі нефіксованих моментів імпульсної дії знайдено достатні умови існування, єдиності й асимптотичної стійкості кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

Також отримано умови стійкості обмеженого розв'язку для рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad t \neq \tau_k(u),\\
&u(\tau_k(u)+0) - u(\tau_k(u)) = g_k(u), \quad k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

де $u : \mathbb{R} \to X$, X — банаховий простір, A — секторіальний оператор у X, послідовність $\{\tau_k(u)\}$ функцій $X \to \mathbb{R}$ строго зростає для u з деякої області простору X.

До такої абстрактної постановки можна звести широкий клас параболічних рівнянь у частинних похідних із нефіксованими моментами імпульсної дії.

Отже, в роботі містяться нові наукові результати:

– знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи;

– встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж;

– встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими;

– у абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їх отримання можуть бути використані для вивчення питань існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Також їх може бути використано для дослідження задач механіки, біології та інших галузей науки й техніки, математичними моделями яких є відповідні рівняння.

Ключові слова: інваріантні тори, стійкість, імпульсна дія, майже періодичність, диференціальні рівняння з запізненням, параболічні диференціальні рівняння, система рівнянь Лотки – Вольтерра, перманентність.

ABSTRACT

Dvornyk A. V. Oscillation solutions of ordinary and impulsive systems of differential equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.02 “Differential equations” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of existence and stability of invariant tori for multifrequency systems and piecewise continuous almost periodic solutions for impulsive differential equations.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, outlines the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific projects and the personal contribution of the applicant, lists the publications on the thesis topic.

In Chapter 1 we consider the system of equations

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x,\varphi),$$

where λH and μ are constant matrix a constant vector respectively, $\lambda H = \mathrm{diag}\,(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$, eigenvalues of the (2×2)-matrices $H_1, \ldots H_{n_1}$ are equal to ± 1, $X(x,\varphi)$ and $F(x,\varphi)$ are real-valued functions sufficiently smooth in $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ and $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ and 2π-periodic in φ, $\varepsilon > 0$ is a small parameter.

Such systems describe various oscillatory processes, including in mechanics.

A method of asymptotic integration of nonlinear systems is applied to the system, according to which the solution is searched by means of substitution

in the form of a formal power series by a small parameter:

$$x = y + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} u_{\nu}(y,\,\theta), \;\; \varphi = \theta + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} v_{\nu}(y,\,\theta),$$

In the new variables obtained averaged system has the form

$$\frac{dy}{dt} \;=\; \lambda H y \;+\; \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} Y_{\nu}(y,\,\theta), \;\; \frac{d\theta}{dt} \;=\; \mu \;+\; \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} \Phi_{\nu}(y,\,\theta).$$

After entering polar coordinates and splitting the right part of the transformed system depends only on the slow variables:

$$\frac{dh}{dt} \;=\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} V_{\nu}(h,\,\xi), \;\; \frac{d\xi}{dt} \;=\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} W_{\nu}(h,\,\xi), \;\; \frac{d\zeta}{dt} \;=\; \omega + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} Z_{\nu}(h,\,\xi),$$

where ω is the frequency basis for elements of vectors λ, μ.

We find sufficient conditions of existence and stability of the invariant torus for small ε.

In Chapter 2 we consider a system of differential equations with delay and nonfixed times of impulsive actions

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \;\; t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \;\; k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \text{const} > 0$, $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ are matrix-valued functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f and g are functions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Impulsive actions occur in the case where the solutions reach the surfaces $\Gamma_k = \{(t, x)\colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, that are uniformly separated from each other.

$A(t), B(t)$, $C(t)$ and $\gamma(t)$ are Bohr almost periodic, the sequences of $(n \times n)$-matrices $\{D_k\}$ and vectors $\{g_k\}$ are almost periodic, the sequence $\{I_k(x)\}$ of vector functions $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ is almost periodic uniformly in $x \in U_\rho$, $U_\rho \subset \mathbb{R}^n$ is some ball.

A special case of the system is used to describe the mathematical models of neural networks with delay and nonfixed times of impulsive actions.

For such a system we establish conditions for unique existence and asymptotic stability of a piecewise continuous almost periodic solution in the ball. In this case, due to the nonfixed moments of impulse action, the definition of stability is different from that for equations with fixed moments of impulse action and takes into account the difference between the break points of different solutions of the equation.

In Chapter 3 we investigate Lotka – Volterra systems of differential equations with diffusion and impulse action and the evolution equation with impulse action in abstract Banach space.

In particular, we consider the Lotka – Volterra system of differential equations with diffusion

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + \\
&+ u(t,x)\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\right),\\
&\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + \\
&+ v(t,x)\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\right),
\end{aligned}
$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, with Neumann boundary conditions

$$
\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,
$$

and, in general, nonfixed moments of impulse action

$$
\begin{aligned}
&u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k} u(t,x) + q_{1k},\\
&v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k} v(t,x) + q_{2k},\\
&t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \theta_k + r_k \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ is the derivative along the outer normal, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. The impulse action occurs at times $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, which depend on the solutions and are uniformly separated from each other.

The system describes the interaction of two biological species nonuniformly distributed in the space and subjected to short-term external actions at times τ_k. The functions $u(t,x)$ and $v(t,x)$ specify the densities of two biological species at a space point x at time t. In view of their biological interpretation, the functions are nonnegative. The positive constants μ_1 and μ_2 are the diffusion coefficients of the first and second species, respectively. The logistic expressions $u(a_1 - b_1 u)$ and $v(a_2 - c_2 v)$ characterize reproduction of the first and second species. The terms $-c_1 uv$ and $-b_2 uv$ reflect the inhibiting influence of the species v on the species u and the species u on the species v, respectively.

In the case of fixed moments of impulse action ($r_k = 0,\ k \in \mathbb{Z}$) we find sufficient conditions for the permanence of the system, when the number of individuals of each species stabilizes within a certain bounded domain separated from zero. We find conditions of existence, uniqueness and asymptotic stability of a piecewise continuous almost periodic solution with values in a domain of permanence.

In the case of nonfixed moments of impulse action with surfaces of impulses we find sufficient conditions for the existence, uniqueness, and asymptotic stability of a piecewise continuous almost periodic solution.

We also establish conditions for stability of a bounded solution for the equation with nonfixed moments of impulse action

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad t \neq \tau_k(u),$$
$$u(\tau_k(u)+0) - u(\tau_k(u)) = g_k(u), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $u : \mathbb{R} \to X$, X is a Banach space, A is a sectorial operator in X, and the sequence $\{\tau_k(u)\}$ of functions $X \to \mathbb{R}$ is strictly increasing for u from a certain domain of the space X.

A large class of parabolic equations with nonfixed moments of impulse action can be reduced to such abstract formulation.

Consequently, the work contains the following new scientific results:

We find sufficient conditions for the existence and stability of an invariant torus with a small perturbation of the right-hand side of a weakly nonlinear multi-frequency autonomous system of differential equations in the critical case of the corresponding unperturbed system.

We establish the conditions for the existence and asymptotic stability of piecewise continuous almost periodic solutions of differential systems with delay and nonfixed moments of impulse action, which can be considered as mathematical models of neural networks.

We establish the conditions of existence and asymptotic stability of strongly positive piecewise continuous almost periodic solutions for Lotka – Volterra differential systems with diffusion and moments of impulsive action (both fixed and non-fixed).

In abstract Banach space we find stability conditions for a bounded solution of nonlinear evolution equation with a sectoral operator in the linear part and nonfixed moments of impulse action.

The practical value of the results obtained. The thesis is theoretical. The obtained results and the method of their obtaining can be used to study the questions of existence and stability of invariant tori of multi-frequency systems and piecewise continuous almost periodic solutions of differential equations with impulse action. They can also be used to study the problems of mechanics, biology, and other fields of science and technology, where mathematical models are the corresponding equations.

Key words: invariant tori, stability, impulse action, almost periodicity, delayed differential equations, parabolic differential equations, Lotka – Volterra system, permanence.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Дворник А. В.* Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 314 – 327.
   (English translation: *Dvornyk A. V.*, Asymptotic investigation of a weakly nonlinear multifrequency oscillating system // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, No. 3. — P. 337 – 351. DOI: 10.1007/s11072-011-0117-5, Web of Science, Scopus.)

2. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 475 – 488.
   (English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 4. – P. 425 – 439. DOI: 10.1007/s10958-016-3193-3, Scopus.)

3. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1450 – 1466.
   (English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 11. – P. 1673 – 1693. DOI: 10.1007/s11253-017-1320-z, Web of Science, Scopus.)

4. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 177 – 192.
   (English translation: *Dvornyk A. V., Struk O. O., Tkachenko V. I.*,

Almost periodic solutions of Lotka – Volterra systems with diffusion and pulsed action, Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 2. – P. 197 – 216. DOI: 10.1007/s11253-018-1495-y, Web of Science, Scopus.)

5. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305 – 322. (English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of the Lotka–Volterra systems with diffusion and nonfixed times of pulsed actions // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, № 3. – P. 358 – 380. DOI: 10.1007/s10958-019-04545-x, Scopus.)

Тези конференцій

1. *Дворник А. В.* Інваріантні тори однієї коливної системи // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 92–93.
2. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On stability of evolution equations with state-dependent moments of impulsive action // Труды VII Международной конференции "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры" (8–9 октября 2015 г.), Актобе, Казахстан. – Актобе, 2015. – С 44–47.
3. *Дворник А. В.* Сохранение инвариантного тора одной колебательной системы // Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29–30 октября 2015 г.). – Душанбе, 2015. – С. 94–95.
4. *Дворник А., Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії //

Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936–1992), 28–30 вересня 2016 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – С. 42.

5. *Дворник А. В.*, *Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942–1996): матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2017. – С. 33–35.

6. *Дворник А.*, *Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки системи Лотки–Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 61.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$	множини дійсних, раціональних та цілих чисел відповідно
$\mathcal{T}_k$	k-вимірний тор $(C_1)^k$, де C_1 — коло одиничного радіуса
$\\|.\\|$	норма в $\mathbb{R}^n$ або відповідна норма у просторі матриць
$\\|.\\|_X$	норма відповідного банахового простору $(X, \\|.\\|_X)$
$C(\bar{\Omega})$	простір неперервних функцій на $\bar{\Omega}$, де Ω — область у $\mathbb{R}^n$
$\\|.\\|_C$	норма простору $C(\bar{\Omega})$
$\mathcal{PC}(J, X)$	простір усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x\colon J \to X$ $(J \subset \mathbb{R})$ таких, що множина всіх точок розривів не має скінченних граничних точок, $x(t)$ неперервна зліва
$\\|.\\|_{PC}$	норма $\\|x\\|_{PC} = \sup_{t\in J} \\|x(t)\\|_X$ у просторі $\mathcal{PC}(J, X)$
$\sigma(A)$	спектр лінійного оператора A
$\rho(A)$	резольвентна множина лінійного оператора A

Вступ

Актуальність теми.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Багаточастотні системи моделюють різноманітні коливні процеси в механіці, теорії нейронних мереж та інших галузях науки. Ефективним підходом до дослідження таких систем є поєднання асимптотичного методу усереднення з методом інтегральних многовидів, які розвинули М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко та ін. Цей підхід дає змогу, зокрема, знаходити умови існування і стійкості інваріантних многовидів для слабконелінійних багаточастотних систем у разі негрубості відповідних незбурених систем.

Продовжує активно розвиватися теорія майже періодичних імпульсних систем, які досліджували у своїх роботах А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, Д. Векслер, М. У. Ахмет, В. Ю. Слюсарчук, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук, Г. Т. Стамов та ін. Дослідження таких систем має важливе практичне значення в теорії нейронних мереж і математичній біології, зокрема, при моделюванні еволюції біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткотривалих зовнішніх впливів. Для багатьох застосувань доцільно розглядати імпульсну дію в нефіксовані моменти часу, які залежать від стану системи, а такожураховувати стан у минулому, тобто розглядати системи з запізненням. У таких системах проявляються властивості диференціальних і різницевих систем і виникають специфічні складності, пов'язані з розривністю й непродовжуваністю розв'язків на від'ємну піввісь. Розглядаються кусково-неперервні майже періодичні розв'язки, розриви яких відповідають імпульсній дії. При цьому застосування загальних методів потребує пошуку специфічних підходів для кожної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з темами «Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь» (номер держреєстрації 0105U007978), «Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь» (номер держреєстрації 0111U002035), «Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь» (номери держреєстрації 0116U003121, 0119U001721).

Мета й завдання дослідження. *Об'єкт дослідження* — багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь і диференціальні рівняння з імпульсною дією.

Предмет дослідження — питання існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією, зокрема з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Мета дисертації — знаходження достатніх умов існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

Завдання дослідження:

– знайти достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи;

– встановити умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж;

– знайти умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими;

– отримати умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння в абстрактному банаховому просторі зі секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії імпульсних і функціонально-диференціальних рівнянь і функціонального аналізу, зокрема: асимптотичний метод усереднення, методи теорії стійкості й теорії рівнянь у банаховому просторі.

Наукова новизна одержаних результатів. *Основні результати*, які визначають наукову новизну й виносяться на захист:

1. Знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи.

2. Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж.

3. Встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими.

4. В абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіаль-

ним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для вивчення питань існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Також їх можна використати для дослідження задач механіки, біології та інших галузей науки й техніки, математичними моделями яких є відповідні рівняння.

Особистий внесок здобувача. У розділах 2 і 3 (роботи [2–5]) постановка задач, визначення загальної схеми дослідження, аналіз отриманих результатів належить співавтору — докторові фізико-математичних наук, професору В. І. Ткаченку. У підрозділі 3.1 (робота [4]) співавтору — кандидату фізико-математичних наук, доцентові О. О. Струк — належить перевірка технічних викладок, аналіз і обговорення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися 4 рази на засіданнях семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України, професор А. М. Самойленко), а також на міжнародних наукових конференціях.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 5 роботах (див. Додаток на с. 148 – 150), одну з них опубліковано без співавторів, роботи відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Усі вони перекладені в закордонних виданнях видавництва Springer, переклади присутні в наукометричній базі даних Scopus, 3 з них — у Web of Science Core Collection (Science Citation Index Expanded).

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, списку використаних джерел, що містить 80 найменувань, і додатку. Загальний обсяг дисертації налічує 150 сторінок (із них основної частини — 121 сторінку).

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівникові академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Михайловичу Самойленку за постановку задач, співпрацю й підтримку.

РОЗДІЛ 1

Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи

Багаточастотні системи моделюють різноманітні коливні процеси в механіці, теорії нейронних мереж та інших галузях науки. В цьому розділі досліджено існування інваріантних тороїдальних многовидів для системи рівнянь, до якої зводяться деякі механічні коливально-обертові системи:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x,\varphi), \tag{1.1}$$

де λH і μ — сталі матриця й вектор, $X(x,\varphi)$ й $F(x,\varphi)$ — достатньо гладкі за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ 2π-періодичні за φ дійснозначні функції, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Припускаємо, що

$$\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1}),$$

$$\lambda_\nu > 0, \quad H_\nu = \begin{bmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & -a_\nu \end{bmatrix}, \quad a_\nu^2 + b_\nu c_\nu + 1 = 0, \quad \nu = \overline{1, n_1}.$$

Тоді $\pm i\lambda_\nu$, $\nu = \overline{1, n_1}$, — власні числа матриці λH.

У подальшому позначатимемо $\mathcal{T}_k$ k-вимірний тор $(C_1)^k$, де $C_1 = \mathbb{R}/[0; 2\pi]$ — коло одиничного радіуса. Зокрема, в силу 2π-періодичності $X(x,\varphi)$ й $F(x,\varphi)$ за φ можна вважати, що $\varphi \in \mathcal{T}_{n_2}$. Загальний розв'язок системи (1.1) при $\varepsilon = 0$ є квазіперіодичним на $\mathbb{R}^{2n_1} \times \mathcal{T}_{n_2}$.

Властивості матриці λH ускладнюють дослідження системи (1.1), оскільки перша підсистема відповідної незбуреної системи є негрубою.

Одним із ефективних підходів до дослідження систем вигляду (1.1) є асимптотичний метод усереднення в поєднанні з методом інтегральних многовидів $[4, 17, 60]$, які розвинули М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко та їхні учні, а також В. І. Арнольд, Є. О. Гребеніков та ін. Ці методи було узагальнено для функціонально-диференціальних, різницевих, імпульсних і стохастичних рівнянь, на випадок нескінченновимірних просторів і т. д. (див., наприклад, [3]). У [25] викладено історію розвитку досліджень у цьому напрямку до початку 1990-х, у [62] висвітлено різноманітні методи усереднення.

Для перетворення системи (1.1) застосовано метод, який значною мірою є узагальненням започаткованого Ж. А. Пуанкаре методу нормальних форм [1, гл. 5] для систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{|r| \geq k} X_r x^r, \tag{1.2}$$

де A — стала матриця, $r \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультиіндекс, $|r| = r_1 + \ldots + r_n$ — його порядок, $x^r = x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$, X_r — сталі вектори з координатами $(X_r^1, \ldots, X_r^n)$, $k \geq 2$. Теорема Пуанкаре стверджує, що якщо власні числа матриці A нерезонансні (незалежні над полем $\mathbb{Q}$), то систему (1.2) формальною заміною типу

$$x = y + \sum_{|r| \geq k} v_r y^r \tag{1.3}$$

можна звести до системи

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{1.4}$$

При цьому відповідні доданки-мономи в заміні для обнулення нелінійностей у правій частині є розв'язками гомологічного рівняння

$$L\, u \equiv \frac{\partial u}{\partial y}\, Ay - Au = v(y).$$

У випадку резонансу згідно з теоремою Пуанкаре – Дюлака заміною типу (1.3) можна обнулити всі координати мономів $X_r^j x^r$, окрім резонансних, які задовольняють рівність $(r, \lambda) = \lambda_j$.

У [14, 18] Ю. О. Митропольський і А. М. Самойленко запропонували метод нормальних форм для слабконелінійних систем, а в [15, 16] — певний загальний підхід до побудови асимптотичних розкладів для диференціальних рівнянь із малим параметром. А саме, розглянуто систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x) + \ldots + \varepsilon^k X_k(x) + \ldots, \tag{1.5}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, вектор-функції $X_k(x)$ достатньо гладкі. Задача асимптотичного інтегрування системи (1.5) полягає в побудові розв'язку в вигляді формального ряду за степенями параметра ε:

$$x = y + \varepsilon u_1(y) + \ldots + \varepsilon^k u_k(y) + \ldots, \tag{1.6}$$

де y — розв'язок деякої "усередненої" системи рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = X_0(x) + \varepsilon Y_1(y) + \ldots + \varepsilon^k Y_k(y) + \ldots. \tag{1.7}$$

Система (1.7) є "простішою" за систему (1.5) завдяки "розщеплюваності" її розв'язків на складові з природно і швидко змінним часом:

$$y_t(y_o, \varepsilon) = x_t^0(\bar{y}_{\varepsilon t}(y_o, \varepsilon)), \tag{1.8}$$

де $x_t^0(x)$ — розв'язок системи (1.5) при $\varepsilon = 0$, $x_0^0(x) = x$, $\bar{y}_\tau(x, \varepsilon)$ — розв'язок системи

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = Y_1(\bar{y}) + \varepsilon Y_2(\bar{y}) + \ldots + \varepsilon^{k-1} Y_k(\bar{y}) + \ldots, \tag{1.9}$$

$\bar{y}_0(x, \varepsilon) = x$. (1.8) досягається за певних умов, які було названо аксіомами асимптотичного методу.

I. Функції $X(y)$ належать множині $\mathfrak{M}$ функцій $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яка є кільцем відносно покоординатного додавання і множення. $\mathfrak{M} \subset C^\infty$. Якщо $f \in \mathfrak{M}$, то й $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} \in \mathfrak{M}$, $\nu = \overline{1, n}$.

II. У $\mathfrak{M}$ визначено "усереднюючий" оператор $S: \mathfrak{M} \to S\mathfrak{M}$, $S\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, який є проектором: $S^2 = S$.

III. На множині $\mathfrak{M}_0 = \ker S$ лінійний оператор

$$L\,u = \frac{\partial u}{\partial y} X_0(y) - \frac{\partial X_0(y)}{\partial y} u \tag{1.10}$$

є оборотним, тобто $L: \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_0$ взаємно однозначно й $L\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0$.

IV. $S\mathfrak{M} \subset \ker L$.

Підставляючи (1.6) (або його p-те наближення) у (1.5), враховуючи (1.7) (або його p-те наближення) й розкладаючи $X_k(y + \varepsilon u_1(y) + \ldots + \varepsilon^k u_k(y) + \ldots)$ у ряди Тейлора за ε у околі точки $\varepsilon = 0$, прирівнюємо доданки при однакових степенях ε. Маємо рівняння вигляду

$$\begin{aligned} &L\,u_1 = X_1(y) - Y_1(y), \\ &L\,u_k = X_k(y) - Y_k(y) + F_k(y, u_1, \ldots, u_{k-1}), \quad k = 2, \ldots. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Покладаючи

$$\begin{aligned} &Y_1(y) = S\,X_1(y), \\ &Y_k(y) = S\left[X_k(y) + F_k(y, u_1, \ldots, u_{k-1})\right], \quad k = 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.12}$$

маємо за умовою II $L\,u_k \in \mathfrak{M}_0$, а тому за умовою III на $\mathfrak{M}_0$ існує єдиний розв'язок $u_k(y)$ для кожного гомологічного рівняння (1.11). Умова IV забезпечує розщеплюваність (1.8).

Також знайдено умови, за яких на інтервалі довжини L/ε, де $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$, різниця між точним розв'язком і його p-м асимптотичним наближенням оцінюється зверху степеневою функцією від ε.

Як приклад реалізації загального алгоритму у [15, 16] розглянуто метод нормальних форм для систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu X_\nu(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu F_\nu(x, \varphi), \tag{1.13}$$

де

$$A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} + Z$$

є сталою матрицею в жордановій формі, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — вектор власних чисел матриці A, μ — сталий вектор, $X_\nu(x, \varphi)$ й $F_\nu(x, \varphi)$ — квазіполіноми, тобто поліноми за $x \in \mathbb{R}^n$ і тригонометричні поліноми за $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

$\mathfrak{M}$ визначається як множина скінченних сум вигляду

$$(X(x, \varphi),\, F(x, \varphi)) = \sum_{r,\,k} (X_{rk},\, F_{rk})\, x^r e^{i(k,\varphi)}, \tag{1.14}$$

де $r \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \in \mathbb{Z}^m$ — мультиіндекси, $X_{rk} \in \mathbb{R}^n$, $F_{rk} \in \mathbb{R}^m$ — сталі вектори з координатами відповідно $X_{rk}^j \in \mathbb{R}^n$, $F_{rk}^j \in \mathbb{R}^m$. Оператор $S\,(X(x, \varphi),\, F(x, \varphi))$ визначається шляхом заміни в сумі (1.14) X_{rk}^j й F_{rk} на нулі, окрім таких, що задовольняють умови:

$$\begin{aligned} X_{rk}^j: &\quad (r, \lambda) + i(k, \mu) = \mu_j, \\ F_{rk}: &\quad (r, \lambda) + i(k, \mu) = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Умови I–IV виконано, тому загальний алгоритм асимптотичного методу є застосовним. Зокрема, знайдено формули, що представляють дію оператора усереднення S і розв'язок гомологічного рівняння (1.11) як середні значення деяких квазіперіодичних функцій. Про це детальніше йде мова в підрозділі 1.1. У роботі А. М. Самойленка [24] розглянуто систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x), \tag{1.16}$$

де λH — матриця $(2n \times 2n)$ такого ж вигляду, як у (1.1). У випадку, коли $X(x)$ — поліном, систему зведено до простішої завдяки зведенню до нормальної форми, введенню полярних координат і лінійної заміни, після чого права частина усередненої системи залежить лише від повільних змінних, і перетворена система має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} V_{\nu}(h,\psi),\\
\frac{d\psi}{dt} &= \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} W_{\nu}(h,\psi),\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} Z_{\nu}(h,\psi),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

де ω — базис частот λ.

За відсутності резонансу (та в деяких резонансних випадках) відщеплюються рівняння з "амплітудними" змінними. Відповідне перше наближення має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \varepsilon F(h),\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \lambda + \varepsilon Z(h).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

За допомогою теорії збурення інваріантних торів [26] для малих ε знайдено достатні умови існування інваріантного тора, які безпосередньо пов'язані з існуванням квазістатичних положень рівноваги для першого наближення підсистеми з "амплітудними" змінними системи (1.18):

$$h = h_0 \geq 0: \quad F(h_0) = 0. \tag{1.19}$$

Показано, що завдяки властивостям правої частини усередненої системи можна розглядати квазістатичні положення рівноваги з нульовими координатами — попри введення полярних координат. При цьому $X(x)$ у вихідній системі (1.16) може бути не лише поліномом, а загалом гладкою функцією. Характер стійкості інваріантного тора визначається з дійсних частин власних чисел відповідної матриці у варіаціях розміру $(n \times n)$, що полегшує обчислення.

Викладені в розділі результати, що узагальнюють [24] на випадок системи (1.1), отримано в [9].

1.1. Асимптотичний метод

Для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$, $\mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$ введемо базис частот ω такий, що

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_0 & O \\ O & N_0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} = K\omega, \tag{1.20}$$

або

$$\begin{aligned} &\lambda = K_{10}\omega^{10} = K_1\omega^1 + K_0\omega^0, \quad \mu = N_{20}\omega^{20} = N_2\omega^2 + N_0\omega^0, \\ &\omega^{\nu 0} = \operatorname{colon}(\omega^\nu, \omega^0), \quad \nu = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.21}$$

де K_ν й N_ν — цілочислові матриці розміру відповідно $n_1 \times m_\nu$ й $n_2 \times m_\nu$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank} K = m, \quad \operatorname{rank} K_{10} = m_{10}, \quad \operatorname{rank} N_{20} = m_{20}, \\ &m_{j0} = m_j + m_0, \quad j = 1, 2, \quad m = m_1 + m_0 + m_2, \quad n = n_1 + n_2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

елементи ω лінійно незалежні над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Спочатку розглянемо випадок, коли $X(x, \varphi)$ й $F(x, \varphi)$ — квазіполіноми, тобто поліноми за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і тригонометричні поліноми за $\varphi \in \mathcal{T}_{n_2}$. Застосуємо до системи (1.1) метод нормальних форм, викладений у [15, 16].

Асимптотичний розклад розв'язку $x = x(t, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ шукаємо таким чином:

$$x = y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu u_\nu(y, \theta), \quad \varphi = \theta + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu v_\nu(y, \theta),$$

де $y = y_t(y, \theta)$, $\theta = \theta_t(y, \theta)$ задовольняють усереднену систему

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Y_\nu(y, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(y, \theta). \tag{1.23}$$

Тут u_ν й v_ν — розв'язки системи рівнянь

$$L_1 u_\nu \equiv \mathcal{L} u_\nu - \lambda H u_\nu = X_\nu(y, \theta) - Y_\nu(y, \theta),$$

$$L_2\, v_\nu \equiv \mathcal{L} v_\nu = F_\nu(y,\theta) - \Phi_\nu(y,\theta),$$
$$\mathcal{L} u \equiv \frac{\partial u}{\partial y}\, \lambda H y + \frac{\partial u}{\partial \theta}\, \mu, \tag{1.24}$$

що задовольняють умови

$$S_1\, u_\nu(y,\, \theta) = 0, \quad S_2\, v_\nu(y,\, \theta) = 0,$$

де S_1 і S_2 — усереднюючі оператори;

$$X_1(y,\theta) = X(y,\theta), \quad F_1(y,\theta) = F(y,\theta),$$

$$X_\nu(y,\theta) = -\sum_{j=1}^{\nu-1} \left[\frac{\partial u_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial y} Y_j(y,\, \theta) + \frac{\partial u_{\nu-j}(y,\, \theta)}{\partial \theta} \Phi_j(y,\theta) \right] +$$
$$+ \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{d^{\nu-1}}{d\varepsilon^{\nu-1}} X \left(y + \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^i u_i(y,\theta),\, \theta + \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^i v_i(y,\theta) \right) \Bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$F_\nu(y,\theta) = -\sum_{j=1}^{\nu-1} \left[\frac{\partial v_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial y} Y_j(y,\theta) + \frac{\partial v_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial \theta} \Phi_j(y,\theta) \right] +$$
$$+ \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{d^{\nu-1}}{d\varepsilon^{\nu-1}} F \left(y + \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^i u_i(y,\theta), \theta + \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^i v_i(y,\theta) \right) \Bigg|_{\varepsilon=0},$$
$$\nu = \overline{2,\infty},$$

$$Y_\nu(y,\theta) = S_1 X_\nu(y,\theta), \quad \Phi_\nu(y,\theta) = S_2 F_\nu(y,\theta), \quad \nu = \overline{1,\infty}.$$

Оператори S_1 і S_2 діють таким чином:

$$S_1 X(y,\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\lambda H \tau} X\left(e^{\lambda H \tau} y, \mu\tau + \theta\right) d\tau,$$
$$S_2 F(y,\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F\left(e^{\lambda H \tau} y, \mu\tau + \theta\right) d\tau. \tag{1.25}$$

Обернення операторів L_1 і L_2 для визначення розв'язків рівнянь (1.24) відбувається згідно з формулами

$$
\begin{aligned}
&L_1^{-1}\left[X(y,\theta)-S_1X(y,\theta)\right]=\\
&=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^s\left[e^{-\lambda H\tau}X\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)-S_1X(y,\theta)\right]d\tau ds,\\
&L_2^{-1}\left[F(y,\theta)-S_2\,F(y,\theta)\right]=\\
&=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^s\left[F\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)-S_2F(y,\theta)\right]d\tau ds.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Як видно з (1.25), (1.26), вибір за формулою (1.20) пари (K,ω) не впливає на асимптотичний алгоритм.

Урахувавши (1.21), (1.22), застосуємо до (1.25) формулу середнього значення квазіперіодичної функції:

$$S_1X(y,\theta)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}e^{-HK_{10}\psi^{10}}X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y,N_{20}\psi^{20}+\theta\right)d\psi,$$

$$S_2F(y,\theta)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}\,y,\;N_{20}\psi^{20}+\theta\right)d\psi, \tag{1.27}$$

$$\psi=\mathrm{colon}\,(\psi^1,\psi^0,\psi^2),\quad \psi^{j\,0}=\mathrm{colon}\,(\psi^j,\psi^0),\quad j=1,2,$$

$$\psi^\nu\in\mathcal{T}_{m_\nu},\quad \nu=0,1,2.$$

Далі розглянемо (1.26). Тоді з урахуванням (1.21), (1.27) отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^s\left[e^{-\lambda H\tau}X\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)-S_1X(y,\theta)\right]\,d\tau=\\
&\quad=\int\limits_0^s\left[e^{-HK_{10}\omega^{10}\tau}X\left(e^{HK_{10}\omega^{10}\tau}\,y,\;N_{20}\omega^{20}\tau+\theta\right)-S_1X(y,\theta)\right]\,d\tau=
\end{aligned}
$$

$$= \int\limits_0^s \sum_{k\neq 0} X_k(y,\theta) e^{i(k,\omega)\tau} d\tau = \sum_{k\neq 0} \frac{X_k(y,\theta)}{i(k,\omega)} \left[e^{i(k,\omega)s} - 1 \right], \tag{1.28}$$

де

$$X_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} e^{-HK_{10}\psi^{10}} X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}} y, N_{20}\psi^{20} + \theta \right) e^{-i(k,\psi)}\, d\psi,$$

$$k \in \mathbb{Z}^m. \tag{1.29}$$

Згідно з (1.26), (1.28), (1.29) маємо

$$L_1^{-1}\left[X(y,\theta) - S_1 X(y,\theta) \right] = \sum_{k\neq 0} \frac{X_k(y,\theta)}{i(k,\omega)}.$$

Аналогічно

$$L_2^{-1}\left[F(y,\theta) - S_2 F(y,\theta) \right] = \sum_{k\neq 0} \frac{F_k(y,\theta)}{i(k,\omega)},$$

де

$$F_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}} y, N_{20}\psi^{20} + \theta \right) e^{-i(k,\psi)} d\psi, \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Оскільки розглядувані функції є дійсними, то

$$L_1^{-1}\left[X(y,\theta) - S_1 X(y,\theta) \right] = \sum_{k\neq 0} \frac{X_k^1(y,\theta)}{(k,\omega)},$$

$$L_2^{-1}\left[F(y,\theta) - S_2 F(y,\theta) \right] = \sum_{k\neq 0} \frac{F_k^1(y,\theta)}{(k,\omega)},$$

$$X_k^1(y,\theta) = \operatorname{Im} X_k(y,\theta) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} e^{-HK_{10}\psi^{10}} X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}} y, N_{20}\psi^{20} + \theta \right) \sin(k,\psi)\, d\psi,$$

$$F_k^1(y,\theta) = \operatorname{Im} F_k(y,\theta) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}} y, N_{20}\psi^{20} + \theta \right) \sin(k,\psi)\, d\psi, \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

1.2. Перетворення усередненої системи

Теорема 1.1. *У будь-якій області, що не перетинається з гіперплощинами* $y_{2j-1} = y_{2j} = 0$, $j = 1, \ldots, n_1$, *усереднена система* (1.23) *формально рівносильна системі типу*

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu V_\nu(h, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu W_\nu(h, \psi), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Z_\nu(h, \psi), \end{aligned} \tag{1.30}$$

де $h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathrm{colon}(\psi, \theta) \in \mathcal{T}_n$, *а функції* V_ν, W_ν *й* Z_ν *мають у області таку ж гладкість, що й* Y_ν *й* Φ_ν.

Перехід від системи (1.23) *до* (1.30) *відбувається шляхом введення полярних координат і їхнього лінійного перетворення.*

Доведення. Визначимо γ_ν з рівнянь

$$a_\nu \cos 2\gamma_\nu = \frac{b_\nu + c_\nu}{2} \sin 2\gamma_\nu, \quad \nu = \overline{1, n_1},$$

і покладемо

$$B_\nu = \begin{bmatrix} \sin \gamma_\nu \\ \cos \gamma_\nu \end{bmatrix}, \quad B_\nu^+ = B_\nu^T, \quad \nu = \overline{1, n_1}.$$

$$B = \mathrm{diag}\,(B_1, \ldots, B_{n_1}), \quad B^+ = B^T, \quad H = \mathrm{diag}\,(H_1, \ldots, H_{n_1}),$$
$$e^{H\psi} = \mathrm{diag}\,(e^{H_1\psi_1}, \ldots, e^{H_{n_1}\psi_{n_1}}).$$

Згідно з [24] маємо

$$H^2 = -I,\ B^+HB = 0,\ B^+B = I,\ e^{H\psi} = H \sin\psi + I \cos\psi, \tag{1.31}$$

де I — одинична матриця відповідного розміру.

Згідно з [16] $Y_\nu \in \operatorname{Ker} L_1$, $\Phi_\nu \in \operatorname{Ker} L_2$ і, отже, виконуються рівності

$$\begin{aligned} Y_\nu(y',\,\theta') &= e^{-\lambda Ht} Y_\nu(e^{\lambda Ht} y', \mu t + \theta'), \\ \Phi_\nu(y',\theta') &= \Phi_\nu(e^{\lambda Ht} y', \mu t + \theta'). \end{aligned} \tag{1.32}$$

У квазіперіодичних функціях рівності (1.32) перейдемо до границі при $|t| \to \infty$ і з урахуванням (1.21) отримаємо

$$\begin{aligned} Y_\nu(y',\theta') &= e^{-HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}} Y_\nu(e^{HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}} y', N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0 + \theta'), \\ \Phi_\nu(y',\theta') &= \Phi_\nu\left(e^{HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}} y', N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0 + \theta'\right), \end{aligned} \tag{1.33}$$

де $\widetilde{\psi} \in \mathcal{T}_m$, $\theta' \in \mathcal{T}_{n_2}$, $y' \in \mathbb{R}^{2n_1}$ є довільними.

Введемо полярні координати (ψ, h) :

$$y = e^{H\psi} Bh, \quad h \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \psi \in \mathcal{T}_{n_1}. \tag{1.34}$$

З (1.34) виразимо dy/dt через ψ, h та їхні похідні, підставимо отриманий вираз у (1.23) і, врахувавши (1.31), отримаємо систему, що рівносильна (1.23) (за винятком гіперплощин $h_j = 0$, $j = \overline{1, n_1}$):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu \ge 1} \varepsilon^\nu B^+ e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi} Bh, \theta), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda - \sum_{\nu \ge 1} \varepsilon^\nu B^+ H e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi} Bh, \theta)/h, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + \sum_{\nu \ge 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(e^{H\psi} Bh, \theta). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Під діленням векторів розуміємо покоординатне ділення.

У нерезонансному випадку ($m = n$) (1.33) має простий вигляд

$$\begin{aligned} Y_\nu(y',\theta') &= e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi} y', \theta + \theta'), \\ \Phi_\nu(y',\theta') &= \Phi_\nu(e^{H\psi} y', \theta + \theta'), \end{aligned}$$

або

$$Y_\nu(e^{H\psi} y,\, \theta) = e^{H\psi} Y_\nu(y,\, 0),\ \ \Phi_\nu(e^{H\psi} y,\, \theta) = \Phi_\nu(y,\, 0). \tag{1.36}$$

Покладемо у (1.36) $y = Bh$ і підставимо (1.36) у (1.35):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ Y_\nu(Bh, 0), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ H Y_\nu(Bh, 0)/h, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(Bh, 0). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Тут відокремлено перше рівняння з повільною змінною h, бо права частина системи не залежить від ψ й θ.

У резонансному випадку за допомогою (1.21), (1.22) продовжимо перетворення системи (1.35).

Для будь-якої матриці A розміру $p_1 \times p_2$ за умов $p_2 < p_1$ й $\operatorname{rank} A = p_2$ введемо псевдообернену до неї матрицю A^+ за формулою

$$A^+ = [A^T A]^{-1} A^T.$$

При цьому, вочевидь, виконується рівність

$$A^+ A = I.$$

Виберемо цілочислові матриці K_3 й N_3 відповідно порядків $n_1 \times (n_1 - m_{10})$ і $n_2 \times (n_2 - m_{20})$ з умов

$$\begin{aligned} &K_{10}^T K_3 = 0, \quad \operatorname{rank} K_3 = n_1 - m_{10}, \\ &N_{20}^T N_3 = 0, \quad \operatorname{rank} N_3 = n_2 - m_{20}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Це можна зробити, взявши, наприклад, за K_3 й N_3 матриці, що складаються відповідно з $n_1 - m_{10}$ і $n_2 - m_{20}$ лінійно незалежних стовпчиків матриць

$$d_1(I - K_{10}K_{10}^+) \quad \text{та} \quad d_2(I - N_{20}N_{20}^+),$$

де d_1 і d_2 — деякі цілі числа.

Виконаємо заміну змінних

$$\begin{aligned}
&\psi = K_{10}\psi^{10} + K_3\psi^3 = K_1\psi^1 + K_0\psi^0 + K_3\psi^3,\\
&\psi^{10} = K_{10}^{+}\psi, \quad \psi^3 = K_3^{+}\psi,\\
&\theta = N_{20}\theta^{20} + N_3\theta^3 = N_2\theta^2 + N_0\theta^0 + N_3\theta^3,\\
&\theta^{20} = N_{20}^{+}\theta, \quad \theta^3 = N_3^{+}\theta.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

У (1.33) покладемо

$$y' = e^{HK_3\psi^3}Bh,\ \theta' = N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3,\ \widetilde{\psi}^0 = \psi^0,\ \widetilde{\psi}^1 = \psi^1,\ \widetilde{\psi}^2 = \theta^2,$$

тоді $N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0 + \theta' = \theta$ і згідно з (1.33) й (1.39) маємо

$$\begin{aligned}
&e^{-H\psi}Y_\nu(e^{H\psi}Bh,\theta) = e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right],\\
&\Phi_\nu(e^{H\psi}Bh,\theta) = \Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right].
\end{aligned} \tag{1.40}$$

За допомогою (1.38)–(1.40) перетворимо систему (1.35):

$$\begin{aligned}
&\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu B^{+}e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right],\\
&\frac{d\psi^3}{dt} = -\sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu K_3^{+}B^{+}He^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right]/h,\\
&\frac{d\theta^3}{dt} = \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu N_3^{+}\Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right],\\
&\frac{d\psi^{10}}{dt} = \omega^{10} - \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu K_{10}^{+}B^{+}He^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right]/h,\\
&\frac{d\theta^{20}}{dt} = \omega^{20} + \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu N_{20}^{+}\Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right].
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Продовжимо розщеплення системи (1.41). Для цього позначимо

$$\xi^0 = \theta^0 - \psi^0 \tag{1.42}$$

і, врахувавши (1.21), (1.39) і (1.42), два останніх рівняння (1.41) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi^0}{dt} &= \omega^0 - J_0 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h, \\
\frac{d\theta^0}{dt} &= \omega^0 + P_0 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right], \\
\frac{d\psi^1}{dt} &= \omega^1 - J_1 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h, \\
\frac{d\theta^2}{dt} &= \omega^2 + P_2 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],
\end{aligned} \tag{1.43}$$

де J_i й P_j — блочні матриці відповідного розміру, що складаються з горизонтально розташованих одиничної й нульової матриць.

У (1.43) замість першого (або другого) рівняння візьмемо різницю другого й першого рівнянь і долучимо до (1.43) три перших рівняння (1.41). З урахуванням (1.42) отримаємо розщеплену систему з повільними змінними h, ψ^3, θ^3 й ξ^0 :

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B^+ e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right], \\
\frac{d\psi^3}{dt} &= -\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_3^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h, \\
\frac{d\theta^3}{dt} &= \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_3^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right], \\
\frac{d\xi^0}{dt} &= \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu \Big\{ P_0 N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] + \\
&\quad + J_0 K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h \Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{d\theta^0}{dt} = \omega^0 + \sum_{\nu\ge1} \varepsilon^\nu P_0 N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3\right],$$
$$\frac{d\psi^1}{dt} = \omega^1 - \sum_{\nu\ge1} \varepsilon^\nu J_1 K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3\right]/h,$$
$$\frac{d\theta^2}{dt} = \omega^2 + P_2 \sum_{\nu\ge1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3\right],$$

що й потрібно було довести.

Теорему 1.1 доведено.

Нарешті, вкажемо заміну, що зводить систему (1.23) до отриманого вище вигляду. Враховуючи (1.34), (1.39) і (1.42), маємо

$$y = e^{H\left(K_1\psi^1 + K_0(\theta^0 - \xi^0) + K_3\psi^3\right)}Bh, \quad \theta = N_2\theta^2 + N_0\theta^0 + N_3\theta^3.$$

1.3. Існування і стійкість інваріантного тора

Розглянемо випадок, коли виконується (1.36) (наприклад, коли $m = n$). Тоді $Y_\nu(y,\theta)$ й $\Phi_\nu(y,\theta)$, що фігурують у системі (1.37), не залежать від θ.

Для зручності запишемо змінну y у вигляді

$$y = \mathrm{colon}\left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad y^j = \begin{bmatrix} y_{2j-1} \\ y_{2j} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n_1}.$$

Тоді система (1.23) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dy^j}{dt} &= \lambda_j H_j y^j + \sum_{\nu\ge1} \varepsilon^\nu Y_\nu^j\left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad j = \overline{1, n_1}, \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \mu_k + \sum_{\nu\ge1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu^k\left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad k = \overline{1, n_2}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Диференціюючи (1.36) за ψ_j для компоненти Y_ν^j й покладаючи $\psi = 0$, доводимо, що гіперплощина

$$y^j = 0$$

є інваріантною при $j = \overline{1, n_1}$ для системи (1.23), до того ж у околі гіперплощини

$$y^j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad n' \leq n_1,$$

система (1.44) рівносильна наступній:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu H_j \frac{\partial Y_\nu^j \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1} h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1} h_{n_1}\right)}{\partial y^j} H_j y^j, \\
&j = \overline{1, n'}, \\
&\frac{dh_p}{dt} = -\sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_p^+ H_p \frac{\partial Y_\nu^p \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1} h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1} h_{n_1}\right)}{\partial y^p} H_p B_p h_p, \\
&\frac{d\psi_p}{dt} = \lambda_p + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_p^+ \frac{\partial Y_\nu^p \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1} h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1} h_{n_1}\right)}{\partial y^p} H_p B_p, \\
&p = \overline{n'+1, n_1}, \\
&\frac{d\theta_k}{dt} = \mu_k + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu^k \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1} h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1} h_{n_1}\right), \\
&k = \overline{1, n_2}.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Згідно з [24] матриці рівнянь у варіаціях, що відповідають положенням рівноваги

$$h_j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad h_p = h_p^0 > 0, \quad p = \overline{n'+1, n_1},$$

та

$$y^j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad h_p = h_p^0 > 0, \quad p = \overline{n'+1, n_1}, \tag{1.46}$$

амплітудних рівнянь відповідно систем (1.37) і (1.45), мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left\{\sum_{i \geq 1} \varepsilon^i \alpha_i^j\right\} & O \\ \sum_{i \geq 1} \varepsilon^i C_i^{(2)} & \sum_{i \geq 1} \varepsilon^i C_i \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

та

$$\begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left\{\sum\limits_{i\geq 1}\varepsilon^i\alpha_i^j E + (\lambda_j + \sum\limits_{i\geq 1}\varepsilon^i\beta_i^j)H_j\right\} & O \\ \sum\limits_{i\geq 1}\varepsilon^i C_i^{(1)} & \sum\limits_{i\geq 1}\varepsilon^i C_i \end{bmatrix}, \tag{1.48}$$

де α_i^j й β_i^j — деякі сталі, C_i, $C_i^{(1)}$ й $C_i^{(2)}$ — деякі сталі матриці.

Тому множини дійсних частин власних чисел цих двох матриць збігаються. Така сама властивість є, зокрема, для перших наближень відповідно систем (1.37)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \varepsilon B^+ Y_1(Bh,\, 0) \equiv \varepsilon U(h), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda - \varepsilon B^+ H Y_1(Bh,\, 0)/h, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + \varepsilon\Phi_1(Bh,\, 0). \end{aligned} \tag{1.49}$$

і (1.45). Тоді ряди в (1.47) і (1.48) обірвуться на першому доданку.

Узагальнимо задачу, взявши $X(x,\varphi)$ й $F(x,\varphi)$ з ширшого класу функцій. За умови існування і гладкості $u_1(y,\theta)$ й $v_1(y,\theta)$, визначених за формулами (1.26), зберігаються в першому наближенні всі властивості асимптотичного методу.

Теорема 1.2. *Нехай права частина системи така, що:*

1) для певних цілих s і l, $2 \leq s \leq l$, і для деякої області $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^{2n_1}$ $X(x,\varphi) \in C^l(D)$, $F(x,\varphi) \in C^l(D)$, а також існують визначені за формулами (1.26)

$$u_1(y,\theta) = L_1^{-1}\left[X(y,\theta) - S_1 X(y,\theta)\right] \in C^s(D),$$
$$v_1(y,\theta) = L_2^{-1}\left[F(y,\theta) - S_2 F(y,\theta)\right] \in C^s(D),$$

де $D = \widetilde{D} \times \mathcal{T}_{n_2}$;

2) для $Y_1(y,\theta) = S_1 X(y,\theta)$ й $\Phi_1(y,\theta) = S_2 F(y,\theta)$, визначених за формулами (1.27)*, виконуються співвідношення* (1.36)*:*

$$Y_1(e^{H\psi}y,\, \theta) = e^{H\psi}Y_1(y,\, 0),$$

$$\Phi_1(e^{H\psi}y,\, \theta) = \Phi_1(y,\, 0); \tag{1.50}$$

3) перша підсистема системи (1.49) *має таке положення рівноваги*

$$h = h^0 \geq 0 : U(h^0) = 0,$$

що тор $x = g(\widetilde{\psi})$, *заданий рівностями*

$$\begin{aligned} &x^{j_k} = 0, \quad k = \overline{1, n'}, \\ &x^{j_k} = e^{H_{j_k}\psi_{j_k}} B_{j_k} h^0_{j_k}, \quad \psi_{j_k} \in \mathcal{T}_1, \quad k = \overline{n'+1, n_1}, \end{aligned} \tag{1.51}$$

де n' *— кількість нульових координат вектора* h_0, j_k, $k = \overline{n'+1, n_1}$, *— індекси ненульових координат вектора* h_0, $\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{n_1-n'}})$, *належить області* D, *а власні числа матриці*

$$\widetilde{U} = \frac{\partial U(h^0)}{\partial h} \tag{1.52}$$

не мають нульових дійсних частин.

Тоді можна вказати таке число $\varepsilon_0 > 0$, *що для всіх* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *система рівнянь* (1.1) *має* $(n - n')$*-вимірний інваріантний тор*

$$x = f(\widetilde{\psi}, \varphi, \varepsilon),$$

де $f \in C^{s-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_{n-n'})$.

Цей тор задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f(\widetilde{\psi}, \varphi, \varepsilon) - g(\widetilde{\psi})\|_{s-2} = 0 \tag{1.53}$$

і є експоненціально стійким, якщо дійсні частини власних чисел матриці (1.52) *від'ємні, й експоненціально дихотомічним, якщо є власні числа матриці* (1.52) *як із від'ємними, так і з додатними дійсними частинами.*

Доведення. Обмежимося стислою схемою міркувань.

Використавши заміну

$$x = y + \varepsilon u_1(y, \theta), \quad \varphi = \theta + \varepsilon v_1(y, \theta), \tag{1.54}$$

отримаємо систему, права частина якої містить аналогічні до (1.23) доданки при ε^0 й ε^1, а також додатковий залишок при ε^2, який у загальному випадку залежить від усіх змінних і від ε.

Оскільки виконуються співвідношення (1.50), тобто (1.36) для $\nu = 1$, то перше наближення усередненої системи має всі властивості, досліджені для нерезонансного випадку, в тому числі щодо власних чисел матриць (1.47)–(1.48).

За умовами теореми нам відомі знаки дійсних чисел матриці рівнянь у варіаціях відповідно до (1.46).

Використавши, наприклад, ідею [14], після нескладних лінійних перетворень для отриманої системи за допомогою послідовних наближень і теореми Асколі – Арцела можна довести існування інваріантного тора як нерухомої точки інтегрального оператора. Оцінка його гладкості погіршується внаслідок підстановки (1.54) у (1.1), а також у момент застосування теореми Асколі – Арцела.

Отриманий у процесі доведення вигляд інваріантного тора для перетвореної системи, а також (1.54) свідчать про виконання границі (1.53).

Питання стійкості й дихотомії інваріантного тора можна дослідити, наприклад, застосувавши міркування з доведення леми III гл. V монографії [4], де за допомогою теореми Банаха про нерухому точку знаходяться відповідні односторонньо інваріантні множини.

Теорему 1.2 доведено.

Зауважимо, що умова 2 теореми 1.2 автоматично виконується в нерезонансному випадку, а тор (1.51) є інваріантним многовидом першої підсистеми вихідної системи (1.1) при $\varepsilon = 0$.

Якщо (1.50) не виконується, то для розщепленої усередненої системи загального вигляду (1.43) можна застосувати загальну теорію збурення інваріантних торів [26].

Знайдемо умови, з яких випливає виконання умови 2 теореми 1.2 у випадку, коли може бути резонанс.

Легко бачити, що з рівностей

$$\begin{aligned} Y_1(y,\,\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)\,d\psi, \\ \Phi_1(y,\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)\,d\psi, \quad \psi_1\in\mathcal{T}_{n_1}, \quad \psi_2\in\mathcal{T}_{n_2}, \end{aligned} \tag{1.55}$$

випливає виконання (1.50).

Позначимо

$$\widetilde{X}_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)e^{-i(k,\psi)}d\psi,$$

$$\widetilde{F}_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)e^{-i(k,\psi)}d\psi, \quad k\in\mathbb{Z}^n,$$
$$\psi_1\in\mathcal{T}_{n_1}, \quad \psi_2\in\mathcal{T}_{n_2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{X}_k(y,\theta)e^{i(k,\psi)}, \\ F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{F}_k(y,\theta)e^{i(k,\psi)}. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Для матриці K з (1.20) позначимо

$$Q = \left\{\operatorname{Ker} K^T \bigcap \mathbb{Z}^n\right\} \setminus \{0\}.$$

Із (1.56) і (1.27) отримуємо

$$\begin{aligned} S_1X(y,\theta) &= \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{X}_k(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q} \widetilde{X}_k(y,\theta), \\ S_2F(y,\theta) &= \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{F}_k(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q} \widetilde{F}_k(y,\theta). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Рівності (1.55) у нових позначеннях набувають вигляду

$$Y_1(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta), \quad \Phi_1(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta). \tag{1.58}$$

Взявши до уваги [24], легко показати, що перехід у (1.21) від базиса ω до ω_1 (або навіть перехід від η до η_1) не змінює вигляд (1.57) усереднюючих операторів, якщо

$$K_1 = KR, \quad R = K^+K_1, \quad \det R \neq 0.$$

Позначимо

$$Q_l = \{k \in Q : \ |k| \leq l\}.$$

Нехай $X(x,\, \varphi)$ — квазіполіном:

$$X(x,\varphi) = \sum_{|r|\leq M_1, |k|\leq M_2} X_{rk} x^r e^{i(k,\varphi)}.$$

Тоді $e^{-H\psi_1} X(e^{H\psi_1} y, \psi_2 + \theta)$ є тригонометричним поліномом за ψ, що містить гармоніки $e^{i(k,\varphi)}$ з $|k| \leq M_1 + M_2 + 1$. Тому перший ряд (1.57) зводиться до суми

$$S_1X(y,\theta) = \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{X}_k(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q_{M_1+M_2+1}} \widetilde{X}_k(y,\theta). \tag{1.59}$$

Аналогічно для квазіполінома $F(x,\varphi)$ маємо

$$S_2F(y,\theta) = \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{F}_k(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q_{M_1+M_2}} \widetilde{F}_k(y,\theta). \tag{1.60}$$

Якщо при цьому

$$Q_{M_1+M_2+1} = \varnothing,$$

то згідно з (1.59), (1.60) маємо (1.58), тобто виконується умова 2 теореми 1.2.

Висновки до розділу 1

В даному розділі розглянуто систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x, \varphi),$$

де λH і μ — сталі матриця й вектор, $\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \dots, \lambda_{n_1} H_{n_1})$, власні числа (2×2)-матриць $H_1, \dots H_{n_1}$ дорівнюють ± 1, $X(x, \varphi)$ й $F(x, \varphi)$ — достатньо гладкі за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ 2π-періодичні за φ дійснозначні функції, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Такі системи описують різноманітні коливні процеси, в т. ч. в механіці.

До системи застосовано загальний метод асимптотичного інтегрування нелінійних систем, згідно з яким розв'язок шукається за допомогою заміни у вигляді формального степеневого ряду за малим параметром:

$$x = y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu u_\nu(y,\, \theta), \;\; \varphi = \theta + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu v_\nu(y,\, \theta),$$

У нових змінних отримана усереднена система має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = \lambda Hy + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Y_\nu(y,\, \theta), \;\; \frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(y,\, \theta).$$

Після введення полярних координат і розщеплення права частина перетвореної системи залежить лише від повільних змінних:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu V_\nu(h,\, \xi), \;\; \frac{d\xi}{dt} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu W_\nu(h,\, \xi), \;\; \frac{d\zeta}{dt} = \omega + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Z_\nu(h,\, \xi).$$

За умови відсутності резонансу в наборі частот λ, μ (та в деяких резонансних випадках) знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора для малих ε.

Основний результат:

– знайдено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи.

РОЗДІЛ 2

Майже періодичні розв'язки імпульсних систем із запізненням

При дослідженні різноманітних еволюційних процесів у природі й техніці часто доводиться мати справу з різкими — майже миттєвими — змінами певних характеристик. Зручними математичними моделями для опису таких процесів є диференціальні рівняння з імпульсною дією. В. Д. Мільман, А. Д. Мишкіс і А. М. Самойленко в роботах [13, 19] запропонували узагальнити на випадок рівнянь із імпульсною дією класичні методи дослідження звичайних диференціальних рівнянь. У подальшому нову теорію розвинули представники Київської школи нелінійної механіки: А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, М. У. Ахмет, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук та ін., наслідком чого стала монографія [59]. А. Халанай і Д. Векслер у [27] застосували зведення імпульсних диференціальних рівнянь до дискретних і отримали низку важливих результатів. Було сформовано наукові групи з вивчення імпульсних систем у Болгарії (Д. Д. Баінов та ін., [45]), Чилі, Туреччині, Китаї тощо.

Останнім часом продовжує активно розвиватися теорія майже періодичних імпульсних систем, які досліджували А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, Д. Векслер, М. У. Ахмет, В. Ю. Слюсарчук, В. І. Ткаченко, С. І. Трофимчук, М. Пінто, Г. Т. Стамов та ін. Системи з фіксованими моментами імпульсної дії досліджено, зокрема, в роботах [41,53,61,63,71,72]. Варто окремо відмітити монографії [59,68]. Підвищує інтерес до дослідження майже періодичних розв'язків імпульсних рівнянь їхній зв'язок із майже періодичними розв'язками систем на часових шкалах [50]. Майже періодичні розв'язки моделей нейронних мереж із фіксованими моментами імпульсної дії вивчалися в роботах [49, 55, 66, 80].

Загальні означення розривних майже періодичних функцій (за Степановим, Вейлем, Безіковичем) недостатньо добре відображають специфіку імпульсних систем із неперервними правими частинами. Натомість уведене Д. Векслером означення кусково-неперервних майже періодичних функцій є цілком природним, а тому знайшло подальше використання. Точки розривів таких функцій збігаються з точками імпульсної дії. Якщо вони рівномірно відділені одна від одної, на систему з імпульсами можна поширити класичну теорію майже періодичних систем [10, Дополнение], [12].

У загальному випадку моменти імпульсної дії не є фіксованими й залежать від розв'язків. У таких системах може виникати так званий феномен биття, коли розв'язок перетинає поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [31, 57–59].

Для відшукання майже періодичного розв'язку систем із фіксованими моментами імпульсної дії зазвичай використовується метод, запропонований у [59, теореми 81, 82]. А саме, для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x),\ t \neq \tau_k,$$
$$x(t+0) - x(t) = B_k x(t) + I_k(x(t)),\ t = \tau_k,\ k \in \mathbb{Z},$$

майже періодичний розв'язок шукається як нерухома точка відображення

$$T(\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s) f(s,\varphi(s))ds + \sum_{\tau_k < t} X(t,\tau_k) I_k(\varphi(\tau_k)), \tag{2.1}$$

яке задано на кулі у просторі кусково-неперервних майже періодичних функцій. Тут $X(t,s)$ — матрицант відповідної лінійної імпульсної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq \tau_k,$$

$$x(t+0)-x(t)=B_kx(t),\ t=\tau_k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

У роботах [2, 32, 78] для вивчення існування і стійкості майже періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії застосовано метод зведення до системи з фіксованими моментами імпульсної дії. Зокрема, в [78] розглянуто майже періодичну систему з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}_i(t)=-a_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(t)f_j(x_j(t))+c_i(t),\, t\neq\theta_k+\tau_k(x(t)),\quad (2.2)$$

$$x_i(t+0)-x_i(t)=d_{ik}x_i(t)+I_{ik}(x(t)),\ t=\theta_k+\tau_k(x(t)).\quad (2.3)$$

Поряд із нею розглядають систему з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{y}_i(t)=-a_i(t)y_i(t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(t)f_j(y_j(t))+c_i(t),\, t\neq\theta_k,\quad (2.4)$$

$$y_i(t+0)-y_i(t)=d_{ik}y_i(t)+J_{ik}(y(t)),\ t=\theta_k.\quad (2.5)$$

Функції $J_{ik}(y)$ визначаються таким чином, що для кожного розв'язку $x(t)$ системи (2.2), (2.3) з точками розриву $\{\xi_k\}$ існує розв'язок $y(t)$ системи (2.4), (2.5), який збігається з $x(t)$, окрім інтервалів $(\xi_k,\ t_k]$ або $(t_k,\ \xi_k]$.

Для визначення $J_{ik}(y)$ використовують продовження розв'язків уліво, але, наприклад, розв'язки рівнянь із запізненням не завжди однозначно продовжуються вліво, тому такий метод не є універсальним.

Натомість є можливість використати інший метод зведення до системи з фіксованими моментами імпульсної дії, запропонований у роботі [22] для періодичної системи з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t,x),\ t\neq t_k(x),\quad (2.6)$$

$$x(t+0)-x(t)=I_k(x(t)),\ t=t_k(x),\ k\in\mathbb{Z},\quad (2.7)$$

де A — стала матриця, $f(t,x) = f(t+T,x)$, $I_{k+p}(x) = I_k(x)$, $t_{k+p}(x) = t_k(x) + T$.

Поряд із системою (2.6), (2.7) для довільних $\{y^{(1)},\ldots,\ y^{(p)}\}$ розглядають систему з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x),\ t \neq t_k(y^{(k)}), \tag{2.8}$$

$$x(t+0) - x(t) = I_k(x(t)),\ t = t_k(y^{(k)}). \tag{2.9}$$

За певних умов система (2.8), (2.9) має розв'язок $x_\infty(t, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)})$. Відшукання кусково-гладкого майже періодичного розв'язку рівносильне розв'язанню системи рівнянь

$$y^{(k)} = x_\infty(t_k(y^{(k)}),\ y^{(1)},\ldots,\ y^{(p)}),\ k = \overline{1,p}. \tag{2.10}$$

У роботах [20,57], де розглядаються періодичні системи рівнянь у банахових просторах, аналог системи рівнянь (2.10) розглядається як рівняння для знаходження нерухомої точки відображення S, яке дорівнює відповідній правій частині.

Вказаний підхід було узагальнено для майже періодичних імпульсних систем у роботі [38] (див. також [70]), де розглянуто систему диференціальних рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії:

$$\frac{dx}{dt} + (A + A_1(t))x = f(t,x),\ t \neq \tau_k(x(t)), \tag{2.11}$$

$$x(t+0) - x(t) = g_k(x(t)),\ t = \tau_k(x(t)),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Тут A — секторіальний оператор, $A_1(t)$ — обмежений оператор у банаховому просторі X.

Поряд із системою (2.11), (2.12) у кулі простору майже періодичних послідовностей $y = \{y_k\}$ розглядаються системи з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{dt} + (A + A_1(t))x = f(t,x),\ t \neq \tau_k(y_k), \tag{2.13}$$

$$x(t+0) - x(t) = g_k(x(t)),\ t = \tau_k(y_k),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Доводиться існування для кожної послідовності y кусково-неперервного майже періодичного розв'язку $x^*(t, y)$ відповідної системи (2.13), (2.14). Відповідно в кулі простору майже періодичних послідовностей визначається відображення $S(y) = \{x^*(\tau_k(y_k), y),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Нерухома точка цього відображення відповідає шуканому майже періодичному розв'язку.

Даний метод зведення до систем із фіксованими моментами імпульсної дії застосовано в цьому й наступному розділах.

Диференціальні рівняння з запізненням мають численні застосування у природничих та інших галузях, оскільки дозволяють урахувати залежність від попередніх станів системи. Основу відповідної теорії заклали Р. Беллман, Н. Н. Красовський, А. Д. Мишкіс, Е. Райт, Дж. Хейл [39] та ін. Дослідження диференціальних рівнянь із запізненням має свою специфіку. Зокрема, розв'язки можуть не продовжуватися вліво, а початкові значення шуканого розв'язку потрібно задавати на відрізку, довжина якого дорівнює запізненню. Відповідну теорію й приклади застосування викладено, зокрема, у [28, 39, 44].

Системи з запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії описують деякі математичні моделі нейронних мереж типу Хопфілда:

$$\dot{x}_i(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \Big\{ b_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + \\ + c_{ij}(t) g_j(x_j(t-h)) \Big\} + \gamma_i(t),\ t \neq \tau_k(x(t)), \tag{2.15}$$

$$x_i(t+0) - x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij(k)} x_j(t) + I_{ik}(x(t)),\ t = \tau_k(x(t)). \tag{2.16}$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$, функція $x_i(t)$ відповідає стану i-го нейрона в момент часу t, $a_i(t) > 0$ — коефіцієнт саморегуляції i-го нейрона, невід'ємні функції $b_{ij}(t)$ й $c_{ij}(t)$ визначають ступінь зв'язку між i-м і j-м елементами в момент часу t, зовнішні впливи на i-й елемент визначено функцією $\gamma_i(t)$. Скалярна функція $f_j(x_j(t))$ означає активацію j-го елемента в момент часу t, скалярна функція $g_j(x_j(t-h))$ — активацію, що залежить від дії з запізненням на стан x_j.

У цьому розділі викладено отримані в [7] умови існування і стійкості кусково-неперервного майже періодичного розв'язку для таких систем. Теорема 2.11 частково узагальнює викладені у [66] і [65, Section 5.2] результати для подібних систем із запізненням і фіксованими моментами імпульсної дії.

2.1. Основні означення й попередні результати

Нехай $(X, \|.\|_X)$ — банахів простір із нормою $\|.\|_X$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Z}$ — множини дійсних і цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму у просторі матриць. Розглядатимемо простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x\colon J \to X$, таких, що:

I) множина $T = \{t_j \in J,\ t_{j+1} > t_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

II) функції неперервні зліва: $x(t_j - 0) = x(t_j)$, й існують границі $\lim_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + 0) < \infty$.

Будемо використовувати норму $\|x\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|x(t)\|$ у просторі $\mathcal{PC}(J, X)$.

Означення 2.1. Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in X$, якщо

$$\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon \tag{2.17}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $l > 0$, що на кожному інтервалі дійсної осі довжини l існує ціле число p, яке задовольняє (2.17) для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 2.2. Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.

Як показано у [23], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді й тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 2.3. Неперервна функція $\psi \colon \mathbb{R} \to X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів, таких, що коли $\tau \in \Gamma$, тоді $\|\psi(t+\tau) - \psi(t)\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 2.4 ([59])**.** Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається W-майже періодичною, якщо:

а) послідовність $\{\tau_j\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$, упорядкованих за зростанням, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

б) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що коли точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності та $|t' - t''| < \delta$, тоді $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_X < \varepsilon$;

в) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що коли $\tau \in \Gamma$, тоді $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - \tau_j| \geq \varepsilon$, $j \in \mathbb{Z}$.

Будемо використовувати таку лему з [38], яка є узагальненням леми 7 з [27, с. 288]:

Лема 2.5. *Нехай послідовність дійсних чисел $\{\tau_j\}$ строго зростає й має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{B_j\}, B_j \in X$, майже періодична й функція $\varphi(t) \colon \mathbb{R} \to X$ W-майже періодична. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $l = l(\varepsilon) > 0$, що для* *довільного інтервалу J довжини l існують такі $r \in J$ й ціле $q \in J$, що виконуються нерівності*

$$|\tau_{i+q} - \tau_i - r| < \varepsilon, \qquad \|B_{i+q} - B_i\|_X < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z},$$

і

$$\|\varphi(t+r) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad |t - \tau_j| > \varepsilon, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Сформулюємо означення розв'язку і стійкості для системи диференціальних рівнянь загального вигляду з запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq \tau_j(x(t)), \tag{2.18}$$

$$x(t+0) - x(t) = g_j(x(t)),\ t = \tau_j(x(t)),\ j \in \mathbb{Z}, \tag{2.19}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, f і g_j — векторнозначні функції.

Означення 2.6. Функція $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, де $\alpha > 0$, є розв'язком системи (2.18), (2.19), якщо виконано такі умови:

(I) множина

$$T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha],\ t = \tau_j(x(t)) \text{ для деякого } j\}$$

точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

(II) $x(t)$ неперервна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(III) $x(t)$ неперервно диференційовна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$ за винятком скінченної множини точок;

(IV) похідна зліва функції $x(t)$ існує й задовольняє систему (2.18) для всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(V) для $t \in T$ функція $x(t)$ задовольняє умову (2.19).

Якщо додатково функція $x(t)$ задовольняє умову

$$x(t_0+\theta)=\varphi(\theta), \quad \theta\in[-h,0], \qquad \varphi\in\mathcal{PC}([-h,0],\mathbb{R}^n), \tag{2.20}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (2.18) – (2.20).

Функція $x(t)$ є розв'язком системи (2.18), (2.19) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Означення стійкості для рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії враховує відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння. Ми використовуємо адаптоване до рівнянь із запізненням означення з роботи [45].

Означення 2.7. Розв'язок $x_0(t)$ системи (2.18), (2.19), який при всіх $t\ge t_0-h$ належить U_ρ і для якого $\tau_j(x_0(t_0))\ne t_0,\ j\in\mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільних $\varepsilon>0$ і $\eta>0$ існує таке число $\delta=\delta(\varepsilon,\eta)$, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ й для якого

$$\|x_0(\theta)-x(\theta)\|<\delta, \qquad \theta\in[t_0-h,t_0], \qquad |\theta-\tau_j^0|>\delta,$$

виконується $\|x_0(t)-x(t)\|<\varepsilon$ для всіх таких $t\ge t_0$, що $|t-\tau_j^0|>\eta$, де τ_j^0 — моменти часу, при яких розв'язок $x_0(t)$ перетинає поверхні $t=\tau_j(x)$, $j\in\mathbb{Z}$. Розв'язок $x_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0>0$, що для кожних $\varepsilon>0$, $\eta>0$ існує таке $T=T(\varepsilon,\eta)>0$, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з U_ρ й для якого

$$\|x_0(\theta)-x(\theta)\|<\delta_0, \qquad \theta\in[t_0-h,t_0], \qquad |\theta-\tau_j^0|>\delta_0,$$

виконується $\|x_0(t)-x(t)\|<\varepsilon$ для $t\ge t_0+T$ й $|t-\tau_j^0|>\eta$.

Далі буде доведено допоміжний результат для лінійної однорідної системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_j, \tag{2.21}$$

$$x(\tau_j + 0) - x(\tau_j) = D_j x(\tau_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.22}$$

Позначимо через $X(t, s)$ фундаментальний розв'язок лінійної системи без імпульсів (2.21). Він задовольняє співвідношення $X(\tau, \tau) = I$, $X(t, s)X(s, \tau) = X(t, \tau)$, t, s, $\tau \in \mathbb{R}$.

Означимо еволюційний оператор для системи (2.21), (2.22) як

$$U(t, s) = X(t, s), \quad \text{якщо} \quad \tau_j < s \leq t \leq \tau_{j+1},$$

і

$$U(t, s) = X(t, \tau_j)(I + D_j)X(\tau_j, \tau_{j-1}) \ldots (I + D_m)X(\tau_m, s), \tag{2.23}$$

якщо $\tau_{m-1} < s \leq \tau_m < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_j < t \leq \tau_{j+1}$.

Означення 2.8. Система (2.21), (2.22) називається експоненціально стійкою з показником $\beta > 0$ й коефіцієнтом $M \geq 1$, якщо

$$\|U(t, s)\| \leq M e^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s.$$

Лема 2.9. *Нехай імпульсна система (2.21), (2.22) експоненціально стійка з додатними сталими β й M. Тоді існує таке $\delta_0 > 0$, що збурена система*

$$\frac{du}{dt} = \tilde{A}(t)u, \quad t \neq \tilde{\tau}_j, \tag{2.24}$$

$$\Delta u|_{t=\tilde{\tau}_j} = u(\tilde{\tau}_j + 0) - u(\tilde{\tau}_j) = \tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.25}$$

при

$$\max \left\{ \sup_j |\tau_j - \tilde{\tau}_j|, \ \sup_j \|D_j - \tilde{D}_j\|, \ \sup_t \|A(t) - \tilde{A}(t)\| \right\} = \delta_1 \leq \delta_0$$

є також експоненціально стійкою з деякими сталими $\beta_1 \leq \beta$ й $M_1 \geq M$, а саме еволюційний оператор $\tilde{U}(t, s)$ збуреної системи (2.24), (2.25) задовольняє нерівність

$$\|\tilde{U}(t, s)\| \leq M_1 e^{-\beta_1(t-s)}, \quad t \geq s.$$

Доведення. Позначимо

$$\mathcal{J} = \cup_j \left(\max(\tau_{j-1}, \tilde{\tau}_{j-1}),\, \min(\tau_j, \tilde{\tau}_j)\right].$$

Запишемо систему (2.24), (2.25) у вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = A(t)u + (\tilde{A}(t) - A(t))u, \quad t \neq \tau_j, \quad t \neq \tilde{\tau}_j,\\
&u(\tau_j + 0) = (I + D_j)u(\tau_j) - D_j u(\tau_j),\\
&u(\tilde{\tau}_j + 0) = (I + \tilde{D}_j)u(\tilde{\tau}_j), \quad j \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

За методом варіації довільної сталої

$$\begin{aligned}
u(t) = U(t, t_0)u_0 \; &+ \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)(\tilde{A}(s) - A(s))u(s)ds + \\
+ \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j < t} U(t, \tilde{\tau}_j + 0)\tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j) \; &- \sum_{t_0 < \tau_j < t} U(t, \tau_j + 0) D_j u(\tau_j).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Зауважимо, що $U(t, \tilde{\tau}_j + 0) = U(t, \tilde{\tau}_j)$ й $u(\tau_j) = u(\tau_j + 0)$. Припустимо, що $\tilde{\tau}_j \geq \tau_j$, і перетворимо різницю

$$\begin{aligned}
&U(t, \tilde{\tau}_j + 0)\tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j) - U(t, \tau_j + 0) D_j u(\tau_j) = \\
&= U(t, \tilde{\tau}_j)\left(\tilde{D}_j \tilde{X}(\tilde{\tau}_j, \tau_j) - X(\tilde{\tau}_j, \tau_j) D_j\right) u(\tau_j) = \\
&= U(t, \tilde{\tau}_j)\left(\tilde{D}_j (\tilde{X}(\tilde{\tau}_j, \tau_j) - I) - (X(\tilde{\tau}_j, \tau_j) - I) D_j\right) u(\tau_j) + \\
&+ U(t, \tilde{\tau}_j)(\tilde{D}_j - D_j) u(\tau_j),
\end{aligned}$$

де $\tilde{X}(t, \tau)$ — фундаментальний розв'язок системи без імпульсів (2.24). Аналогічно, якщо $\tilde{\tau}_j < \tau_j$, то

$$\begin{aligned}
&U(t, \tilde{\tau}_j + 0)\tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j) - U(t, \tau_j + 0) D_j u(\tau_j) = \\
&= U(t, \tau_j + 0)\left((D_j + I) X(\tau_j, \tilde{\tau}_j) \tilde{D}_j - D_j \tilde{X}(\tau_j, \tilde{\tau}_j)(I + \tilde{D}_j)\right) u(\tilde{\tau}_j) = \\
&= U(t, \tau_j + 0)\Big((I + D_j)(X(\tau_j, \tilde{\tau}_j) - I)\tilde{D}_j - \\
&- D_j(\tilde{X}(\tau_j, \tilde{\tau}_j) - I)(I + \tilde{D}_j)\Big) u(\tilde{\tau}_j) + U(t, \tau_j + 0)(\tilde{D}_j - D_j) u(\tilde{\tau}_j).
\end{aligned}$$

Позначимо

$$D = \max\left(\sup_j \|D_j\|,\ \sup_j \|\tilde{D}_j\|\right),$$
$$A = \max\left(\sup_t \|A(t)\|,\ \sup_t \|\tilde{A}(t)\|\right),$$
$$\tau'_j = \min\{\tilde{\tau}_j, \tau_j\}, \quad \tau''_j = \max\{\tilde{\tau}_j, \tau_j\},$$

тоді

$$\|U(t, \tilde{\tau}_j + 0)\tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j) - U(t, \tau_j + 0)D_j u(\tau_j)\| \le$$
$$\le M e^{-\beta(t-\tau'_j)} M_* \delta_1 \|u(\tau'_j)\|, \tag{2.27}$$

де $M_* = \left(1 + 2AD(D+1)e^{A\delta_0}\right) e^{\beta\delta_0}$. Ми скористалися оцінкою

$$\|(X(t,t_0) - I)u\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} X(s,t_0) u ds\right\| =$$
$$= \left\|\int_{t_0}^{t} A(s)X(s,t_0) u ds\right\| \le A(t-t_0)e^{A(t-t_0)}\|u\|.$$

За (2.26) і (2.27) маємо для t, $t_0 \in \mathcal{J}$

$$\|u(t)\| \le M e^{-\beta(t-t_0)}\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} M e^{-\beta(t-s)} \|\tilde{A}(s) - A(s)\| \|u(s)\| ds +$$
$$+ \sum_{t_0 < \tau'_j < t} M e^{-\beta(t-\tau'_j)} M_* \delta_1 \|u(\tau'_j)\|.$$

Тоді $v(t) = e^{\beta t}\|u(t)\|$ задовольняє нерівність

$$v(t) \le M v(t_0) + \int_{t_0}^{t} M\delta_1 v(s) ds + \sum_{t_0 < \tau'_j < t} M M_* \delta_1 v(\tau'_j).$$

За узагальненою нерівністю Гронуолла (див. [59, с. 12]) маємо

$$\|u(t)\| \le M\left(1 + M M_* \delta_0\right)^{([(t-t_0)/\theta]+1)} e^{-(\beta - M\delta_0)(t-t_0)} \|u_0\|, \quad t,\ t_0 \in \mathcal{J}.$$

Отже, якщо $\delta_0 > 0$ і $\beta_1 > 0$ задовольняють нерівність

$$\beta - M\delta_0 - \frac{1}{\theta}\ln(1 + MM_*\delta_0) \geq \beta_1,$$

то

$$\|u(t)\| \leq M(1 + MM_*\delta_0)e^{-\beta_1(t-s)}, \quad t,\ t_0 \in \mathcal{J}.$$

Якщо $t \in (\tau_j', \tau_j'']$, то

$$\|u(t)\| \leq \|\tilde{X}(t, \tau_j')\|(1 + D)\|u(\tau_j'\| \leq e^{A\delta_0}(1 + D)\|u(\tau_j')\|.$$

Аналогічно, якщо $t_0 \in (\tau_j', \tau_j'']$, то

$$\|u(\tau_j'' + 0)\| \leq e^{A\delta_0}(1 + D)\|u(t_0)\|.$$

Комбінуючи останні нерівності, отримуємо експоненціальну стійкість збуреної системи (2.24), (2.25) із показником β_1 і коефіцієнтом

$$M_1 = M(1 + MM_*\delta_0)(1 + D)^2 e^{2(A+\beta_1)\delta_0}.$$

Лему 2.9 доведено.

Наслідок 2.10. *При виконанні умов леми 2.9 існують такі $\beta_2 \in (0, \beta_1)$ і $M_2 \geq M_1$, що*

$$\|U(t, s) - \tilde{U}(t, s)\| \leq \delta_1 M_2 e^{-\beta_2(t-s)}, \quad t \geq s, \tag{2.28}$$

для $t,\ s \in \cup_j(\max(\tau_{j-1}, \tilde{\tau}_{j-1}), \min(\tau_j, \tilde{\tau}_j)]$.

Доведення. З (2.26) отримуємо

$$\|(U(t, s) - \tilde{U}(t, s))u_0\| \leq \delta_1 MM_1\|u_0\| \left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}e^{-\beta_1(s-t_0)}ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_j' < t} M_* e^{-\beta(t-\tau_j')}e^{-\beta_1(\tau_j'-t_0)} \right) \leq$$

$$\leq \delta_1 MM_1\|u_0\|e^{-\beta_1(t-t_0)}\left(t - t_0 + \frac{t - t_0}{\theta}M_* + M_*\right) \leq \delta_1 M_2 e^{-\beta_2(t-t_0)}.$$

2.2. Існування і стійкість майже періодичного розв'язку

Розглянемо майже періодичну систему диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + \\ + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t),\ t \neq \tau_j(x(t)), \tag{2.29}$$

$$x(t+0) - x(t) = D_j x(t) + I_j(x(t)) + g_j,\ t = \tau_j(x(t)),\ j \in \mathbb{Z}, \tag{2.30}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $C(t) = \{c_{ij}(t)\}$ — матричнозначні функції $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f і g — функції $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_j = \{(t,x) \colon t = \tau_j(x)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відокремлені одна від іншої.

До систем вигляду (2.29), (2.30) належить згадана вище система (2.15), (2.16).

На систему (2.29), (2.30) накладатимемо такі умови:

(L1) Матричнозначні функції $A(t), B(t), C(t)$ й векторнозначна функція $\gamma(t)$ майже періодичні за Бором. Позначатимемо

$$\sup_t \|A(t)\| = A_0,\ \sup_t \|B(t)\| = B_0,\ \sup_t \|C(t)\| = C_0,\ \sup_t \|\gamma(t)\| = \gamma_0.$$

(L2) Позначимо $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \le \rho\}$, де ρ — деяке додатне число. Припустимо, що послідовність $\{\tau_j\}$ неперервних функцій $\tau_j \colon U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ й існує $\theta > 0$ таке, що

$$\inf_x \tau_{j+1}(x) - \sup_x \tau_j(x) \ge \theta$$

для всіх $x \in U_\rho$ й $j \in \mathbb{Z}$.

(L3) Послідовності $(n\times n)$-матриць $\{D_j\}$ й векторів $\{g_j\}$ майже періодичні, $\sup_j \|g_j\| = g_*$.

(L4) Послідовність $\{I_j(x)\}$ вектор-функцій $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Припускатимемо, що розв'язки системи (2.29), (2.30) неперервні зліва й у множині U_ρ не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(x)$, тобто перетинають кожну поверхню не більш ніж один раз. Достатні умови відсутності биття наведено у [47].

Теорема 2.11. *Нехай у області $U_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le \rho\}$ система (2.29), (2.30) задовольняє умови (L1)–(L4) й додатково:*

1) *усі розв'язки в області U_ρ перетинають кожну поверхню $t = \tau_j(x)$ не більш ніж один раз;*

2) $\|f(x_1)-f(x_2)\|+\|g(x_1)-g(x_2)\|+\|I_j(x_1)-I_j(x_2)\|+|\tau_j(x_1)-\tau_j(x_2)| \le$ $\le N_1\|x_1 - x_2\|$, *рівномірно відносно* $x_1, x_2 \in U_\rho,\ j \in \mathbb{Z}$;

3) $f(0) = g(0) = 0$ *й* $I_j(0) = 0$ *для всіх* $j \in \mathbb{Z}$;

4) *лінійна однорідна система (2.21), (2.22), де $\tau_j = \tau_j(0)$, є експоненціально стійкою з показником β й коефіцієнтом M;*

5) $N_1B_* < 1$ *і* $\rho \ge (1 - N_1B_* - N_1C_*)^{-1}(M_1\gamma_0/\beta_1 + C_*g_*)$, *де*

$$B_* = \frac{M_1}{\beta_1}(B_0 + C_0), \quad C_* = \frac{M_1}{1 - e^{-\beta_1\theta}},$$

а сталі β_1 і M_1 визначено за лемою 2.9.

Тоді для достатньо малих значень сталої Ліпшиця N_1 система (2.29), (2.30) має в U_ρ єдиний W-майже періодичний розв'язок, і він асимптотично стійкий.

Доведення. 1. Спочатку, використовуючи підхід, запропонований у [38], доведемо існування W-майже періодичного розв'язку. Нехай $y = \{y_j\}$ —

майже періодична послідовність елементів $y_j \in \mathbb{R}^n$, $\|y_j\| \le \rho$. Розглянемо систему рівнянь із фіксованими моментами імпульсної дії:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + \\ + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t),\ t \neq \tau_j(y_j), \tag{2.31}$$

$$x(\tau_j(y_j)+0) - x(\tau_j(y_j)) = D_j x(\tau_j(y_j)) + I(y_j) + g_j,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{2.32}$$

Можна перевірити, що послідовність $\{\tau_j(y_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ має рівномірно майже періодичні різниці. За лемою 2.9, при достатньо малій сталій N_1 відповідна до (2.31), (2.32) лінійна система з імпульсами

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_j(y_j), \tag{2.33}$$

$$x(\tau_j(y_j)+0) - x(\tau_j(y_j)) = D_j x(\tau_j(y_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.34}$$

експоненціально стійка. Її еволюційний оператор $U(t,\tau,y)$ задовольняє оцінку

$$\|U(t,\tau,y)x\| \le M_1 e^{-\beta_1(t-\tau)}\|x\|, \quad t \ge \tau,$$

з додатними сталими $M_1 \ge M$, $\beta_1 \le \beta$, які визначено за лемою 2.9.

Покажемо, що система (2.31), (2.32) має єдиний в U_ρ обмежений на осі розв'язок, який задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t,y) = \int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s,y)\Big(B(s)f(x(s,y)) + C(s)g(x(s-h,y)) + \gamma(s)\Big)ds + \\ + \sum_{\tau_j(y_j)<t} U(t,\tau_j(y_j)+0,y)\left(I(y_j)+g_j\right). \tag{2.35}$$

Виберемо $x_0(t,y) \equiv 0$ й побудуємо послідовність W-майже періодичних функцій

$$x_{n+1}(t,y) = \int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s,y)\Big(B(s)f(x_n(s,y)) + C(s)g(x_n(s-h,y)) + \gamma(s)\Big)ds +$$

$$+ \sum_{\tau_j(y_j)<t} U(t, \tau_j(y_j) + 0, y) \left(I(y_j) + g_j\right). \tag{2.36}$$

Аналогічно до [72] доводимо, що $x_{n+1}(t, y)$ є W-майже періодичною, якщо $x_n(t, y)$ є W-майже періодичною.

Якщо $\sup_t \|x_n(t, y)\| \le \rho$, то за умовою 5) теореми

$$\sup_t \|x_{n+1}(t, y)\| \le N_1 B_* \sup_t \|x_n(t, y)\| + \frac{M_1}{\beta_1}\gamma_0 + C_*(N_1\rho + g_*) \le \rho.$$

Оскільки

$$\sup_t \|x_{n+1}(t, y) - x_n(t, y)\| \le \frac{M_1 N_1}{\beta_1}(B_0 + C_0) \sup_t \|x_n(t, y) - x_{n-1}(t, y)\|,$$

то послідовність $\{x_n(t, y)\}$ збігається до W-майже періодичного розв'язку $x^*(t, y) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ рівняння (2.35). Відповідно $x^*(t, y)$ є W-майже періодичним розв'язком системи з імпульсами (2.31), (2.32), й $\sup_t \|x^*(t, y)\| \le \rho$, де ρ задовольняє умову 5).

2. Якщо ми знайдемо таку послідовність $y^* = \{y_j^*\}, y_j^* \in \mathbb{R}^n$, що

$$x^*(\tau_j(y_j^*), y^*) = y_j^*$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}$, то функція $x^*(t, y^*)$ буде шуканим W-майже періодичним розв'язком системи (2.29), (2.30).

Розглянемо простір $\mathfrak{N}$ майже періодичних послідовностей $y = \{y_j\}$, $y_j \in \mathbb{R}^n$, із нормою $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|$ і відображення $S \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$,

$$S(y) = \{x^*(\tau_j(y_j), y)\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

S відображає область $\mathfrak{N}_\rho = \{y \in \mathfrak{N}, \|y\|_S \le \rho\}$ у себе.

Доведемо, що S є відображенням стиску. Візьмемо $y, z \in \mathfrak{N}$ і покладемо $\tilde{\tau}_j^1 = \tau_j(y_j)$, $\tilde{\tau}_j^2 = \tau_j(z_j)$. Маємо

$$\|S(y) - S(z)\|_S = \sup_j \|x^*(\tau_j(y_j), y) - x^*(\tau_j(z_j), z)\|.$$

Оцінимо різницю $\|x^*(\tau_j(y_j), y) - x^*(\tau_j(z_j), z)\|$ для будь-якого фіксованого j. Без обмеження загальності припустимо, що $\tilde{\tau}_j^1 \le \tilde{\tau}_j^2$ для цього конкретного j. Тоді

$$\|x^*(\tau_j(y_j),y)-x^*(\tau_j(z_j),z)\|\le$$
$$\le\|x^*(\tilde\tau_j^1,y)-x^*(\tilde\tau_j^1,z)\|+\|x^*(\tilde\tau_j^1,z)-x^*(\tilde\tau_j^2,z)\|. \qquad (2.37)$$

Позначимо

$$\mathcal{J}=\cup_j\mathcal{J}_j,\qquad \mathcal{J}_j=\Big(\max\{\tilde\tau_{j-1}^1,\tilde\tau_{j-1}^2\},\min\{\tilde\tau_j^1,\tilde\tau_j^2\}\Big]=(\tau''_{j-1},\tau'_j].$$

Для оцінювання різниці $\|x^*(\tilde\tau_j^1,y)-x^*(\tilde\tau_j^1,z)\|$ застосуємо ітераційну формулу (2.36). Покладемо $x_0(t,y)=x_0(t,z)=0$. Тоді для $t\in(\tau''_m,\tau'_{m+1}]$ матимемо

$$i_1=\|x_1(t,y)-x_1(t,z)\|\le\int\limits_{-\infty}^{t}\|(U(t,s,y)-U(t,s,z))\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{j\le m}\|U(t,\tilde\tau_j^1+0,y)\left(I_j(y_j)-I_j(z_j)\right)\|+$$
$$+\sum_{j\le m}\|\left(U(t,\tilde\tau_j^1+0,y)-U(t,\tilde\tau_j^2+0,z)\right)\left(I_j(z_j)+g_j(z_j)\right)\|.$$

Спочатку оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\|(U(t,s,y)-U(t,s,z))\gamma(s)\|ds\le$$
$$\le\int\limits_{\tau''_m}^{t}\|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau''_{j-1}}^{\tau'_j}\|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j}\|U(t,s,y)\gamma(s)\|ds+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j}\|U(t,s,z)\gamma(s)\|ds\le$$
$$\le\Big(\frac{M_2}{\beta_2}+\frac{2M_1}{1-e^{-\beta_1\theta}}\Big)N_1\gamma_0\|y-z\|_S. \qquad (2.38)$$

Покладемо для визначеності $\tilde{\tau}_j^2 \geq \tilde{\tau}_j^1$. Тоді за (2.28) маємо

$$\begin{aligned}
&\left\|(U(t,\tilde{\tau}_j^1+0,y)-U(t,\tilde{\tau}_j^2+0,z))g\right\| \leq \\
&\leq \|(U(t,\tilde{\tau}_j^2+0,y)-U(t,\tilde{\tau}_j^2+0,z))g\| + \\
&+ \|U(t,\tilde{\tau}_j^2+0,y)(X(\tau_j'',\tau_j')-I)g\| \leq \\
&\leq \left(M_2e^{-\beta_2(t-\tau_j'')}+M_1e^{-\beta_1(t-\tau_j'')}A_0e^{2\rho N_1A_0}\right)N_1\|y-z\|_S\|g\|,
\end{aligned}$$

оскільки $\|e^{As}-I\| \leq \|A\|e^{s\|A\|}s$, $s \geq 0$. Отже,

$$\begin{aligned}
&i_1 \leq \frac{M_2N_1}{1-e^{-\beta_2\theta}}\|y-z\|_S\left(1+2\gamma_0+(1+A_0e^{2\rho N_1A_0})(\rho N_1+g_*)\|\right)+ \\
&+\frac{M_2\gamma_0N_1}{\beta_2}\|y-z\|_S = N_1\tilde{K}_1\|y-z\|_S.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Розглянемо $(n+1)$-е наближення:

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}(t,y)-x_{n+1}(t,z)\| \leq \\
&\leq i_1 + \int\limits_{-\infty}^{t}\|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{t}\|U(t,s,y)C(s)(g(x_n(s-h,y))-g(x_n(s-h,z)))\|ds + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{t}\|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\tilde{f}_n(s)\|ds = \\
&= i_1+i_2+i_3+i_4,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

де $\tilde{f}_n(s) = B(s)f(x_n(s,z))+C(s)g(x_n(s-h,z))$.

Для $t \in (\tau_m'',\tau_{m+1}']$ отримуємо

$$i_2 \leq \int\limits_{\tau_m''}^{t}\|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds +$$

$$+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau''_{j-1}}^{\tau'_j}\|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds+$$

$$+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j}\|U(t,s,y)B(s)f(x_n(s,y))\|ds+$$

$$+\sum_{j\le m}\int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j}\|U(t,s,y)B(s)f(x_n(s,z))\|ds\le$$

$$\le\frac{M_1N_1B_0}{\beta_1}\sup_{t\in J}\|x_n(t,y)-x_n(t,z)\|+\frac{2M_1N_1^2B_0\rho}{1-e^{-\beta_1\theta}}\|y-z\|_S. \qquad (2.41)$$

Якщо $t\in(\tau''_m,\tau'_{m+1}]$ і $t-h\in(\tau'_l,\tau''_l]$ для деякого $l\in\mathbb{Z}$, то

$$i_3\le\int\limits_{\tau'_l+h}^{t}\|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,y))\|ds+$$

$$+\int\limits_{\tau'_l+h}^{t}\|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,z))\|ds+$$

$$+\sum_{j\le l}\int\limits_{\tau''_{j-1}+h}^{\tau'_j+h}\|U(t,s,y)C(s)(g(x_n(s-h,y))-g(x_n(s-h,z)))\|ds+$$

$$+\sum_{j<l}\int\limits_{\tau'_j+h}^{\tau''_j+h}\|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,y))\|ds+$$

$$+\sum_{j<l}\int\limits_{\tau'_j+h}^{\tau''_j+h}\|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,z))\|ds\le$$

$$\le\frac{M_1N_1C_0}{\beta_1}\sup_{s\in J}\|x_n(s,y)-x_n(s,z)\|+\frac{2M_1N_1^2C_0\rho}{1-e^{-\beta_1\theta}}\|y-z\|_S. \qquad (2.42)$$

Якщо $t\in(\tau''_m,\tau'_{m+1}]$ і $t-h\in(\tau''_l,\tau'_{l+1}]$ для деякого $l\in\mathbb{Z}$, то інтеграл i_3 оцінюється аналогічно.

Аналогічно (2.38) отримуємо

$$i_4 \le \int\limits_{\tau''_m}^{t} \| \left(U(t,s,y) - U(t,s,z)\right) \tilde{f}_n(s) \| ds +$$

$$+ \sum_{j\le m} \int\limits_{\tau''_{j-1}}^{\tau'_j} \| \left(U(t,s,y) - U(t,s,z)\right) \tilde{f}_n(s) \| ds +$$

$$+ \sum_{j\le m} \int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j} \|U(t,s,y)\tilde{f}(s)\| ds \; + \sum_{j\le m} \int\limits_{\tau'_j}^{\tau''_j} \|U(t,s,z)\tilde{f}_n(s)\| ds \le$$

$$\le \Big(\frac{M_2}{\beta_1} + \frac{2M_1}{1-e^{-\beta_1\theta}}\Big) N_1^2 (B_0 + C_0)\rho \|y-z\|_S = N_1 \tilde{K}_4 \|y-z\|_S. \quad (2.43)$$

Підставляючи (2.39), (2.41) – (2.43) у (2.40), для $t \in J$ отримуємо

$$\|x_{n+1}(t,y) - x_{n+1}(t,z)\| \le$$
$$\le \frac{M_1 N_1}{\beta_1} (B_0 + C_0) \sup_{s\in J} \|x_n(s,y) - x_n(s,z)\| + L_1 N_1 \|y-z\|_S, \quad (2.44)$$

де

$$L_1 = \tilde{K}_1 + \tilde{K}_4 + \frac{2N_1 M_1 \rho (B_0 + C_0)}{1 - e^{-\beta_1\theta}}.$$

Переходячи в (2.44) до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$\|x^*(t,y) - x^*(t,z)\| \le$$
$$\le \frac{M_1 N_1}{\beta_1} (B_0 + C_0) \sup_{s\in J} \|x^*(s,y) - x^*(s,z)\| + L_1 N_1 \|y-z\|_S, \quad t \in J.$$

Отже,

$$\|x^*(t,y) - x^*(t,z)\| \le (1 - N_1 B_*)^{-1} L_1 N_1 \|y-z\|_S, \quad t \in J,$$

і, зокрема,

$$\|x^*(\tau'_j, y) - x^*(\tau'_j, z)\| \le (1 - N_1 B_*)^{-1} L_1 N_1 \|y-z\|_S. \quad (2.45)$$

Тепер оцінимо $\|x^*(\tilde\tau_j^1, z) - x^*(\tilde\tau_j^2, z)\|$. Зауважимо, що за нашим припущенням $\tilde\tau_j^1 < \tilde\tau_j^2$. Маємо

$$\|x^*(\tilde\tau_j^1, z) - x^*(\tilde\tau_j^2, z)\| \le \left\| \int\limits_{\tilde\tau_j^1}^{\tilde\tau_j^2} \frac{d}{d\xi} x^*(\xi, z) d\xi \right\| \le$$

$$\le N_1 \Big(A_0 \rho + (B_0 + C_0) N_1 \rho + \gamma_0 \Big) \|y - z\|_S. \tag{2.46}$$

З нерівностей (2.45) і (2.46) випливає, що

$$\|S(y) - S(z)\|_S \le \Gamma(N_1) \|y - z\|_S,$$

де

$$\Gamma(N_1) = \frac{N_1 L_1}{1 - N_1 B_*} + N_1 \Big(A_0 \rho + (B_0 + C_0) N_1 \rho + \gamma_0 \Big).$$

Отже, $S\colon \mathfrak{N}_\rho \to \mathfrak{N}_\rho$ є відображенням стиску, якщо N_1 достатньо мале. Його нерухомій точці $y^* \in \mathfrak{N}_\rho$ відповідає W-майже періодичний розв'язок $x_0(t) = x^*(t, y^*)$ системи (2.29), (2.30).

3. Доведемо стійкість майже періодичного розв'язку $x_0(t)$. Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ й $\eta > 0$. Нехай $t_0 \in [\tau_0(0) + \eta, \tau_1(0) - \eta]$.

W-майже періодичний розв'язок $x_0(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$x_0(t) = U_0(t, t_0) x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U_0(t, s) \Big(B(s) f(x(s)) + C(s) g(x(s-h)) + \gamma(s) \Big) ds +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_j^0 < t} U_0(t, \tau_j^0 + 0) \left(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j \right), \tag{2.47}$$

де $x_0 = x_0(t_0)$, $\tau_j^0 = \tau_j(x_0(\tau_j^0))$, $U_0(t, s)$ — еволюційний оператор лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x, \qquad x(\tau_j^0 + 0) - x(\tau_j^0) = D_j x(\tau_j^0), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Нехай $x_1(t)$ — інший розв'язок системи (2.29), (2.30) із такою початковою функцією $\varphi \in \mathcal{PC}[t_0 - h, t_0]$, що $\|\varphi\|_{PC} \le \rho$ й $\|\varphi(t) - x_0(t)\| < \delta$

для $t \in [t_0 - h, t_0]$, $|t - \tau_j^0| > \delta$, $t_0 - h < \tau_j^0 < t_0$. Позначимо через τ_j^1 точки перетину розв'язку $x_1(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$. Розв'язок $x_1(t)$ задовольняє систему

$$\dot{x}(t) = A(t)(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \quad t \neq \tau_j^1,$$
$$x(\tau_j^1 + 0) - x(\tau_j^1) = D_j x(\tau_j^1) + I_j(x(\tau_j^1)) + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

За формулою варіації сталих

$$x_1(t) = U_1(t, t_0)\varphi_0 + $$
$$+ \int_{t_0}^{t} U_1(t, s)\Big(B(s)f(x_1(s)) + C(s)g(x_1(s-h)) + \gamma(s)\Big)ds +$$
$$+ \sum_{t_0 < \tau_j^1 < t} U_1(t, \tau_j^1 + 0)\Big(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j\Big), \tag{2.48}$$

де $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $U_1(t, s)$ — еволюційний оператор лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(\tau_j^1 + 0) - x(\tau_j^1) = D_j x(\tau_j^1), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Позначимо $\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j$, $\mathcal{I} = \cup_j \mathcal{I}_j$, де

$$\mathcal{J}_j = \Big(\max\{\tau_{j-1}^0, \tau_{j-1}^1\}, \min\{\tau_j^0, \tau_j^1\}\Big] = (\tau''_{j-1}, \tau'_j],$$
$$\mathcal{I}_j = \Big(\min\{\tau_j^0, \tau_j^1\}, \max\{\tau_j^0, \tau_j^1\}\Big] = (\tau'_j, \tau''_j].$$

Згідно з (2.47) і (2.48) різниця $x_1(t) - x_0(t)$ задовольняє нерівність

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq$$
$$\leq \|U_1(t, t_0)\varphi_0 - U_0(t, t_0)x_0\| + i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + i_4, \tag{2.49}$$

де

$$i_0 = \int\limits_{[t_0 - h, t_0] \cap \mathcal{J}} \|U_1(t, s+h)C(s+h)(g(\varphi(s)) - g(x_0(s)))\| ds +$$
$$+ \int\limits_{[t_0 - h, t_0] \cap \mathcal{I}} \|U_1(t, s+h)C(s+h)(g(\varphi(s)) -$$

$$- U_0(t, s+h)C(s+h)g(x_0(s)))\|ds,$$

$$i_1 = \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} \|U_1(t,s)B(s)(f(x_1(s)) - f(x_0(s)))\|ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t-h]} \|U_1(t, s+h)C(s+h)(g(x_1(s)) - g(x_0(s)))\|ds,$$

$$i_2 = \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} \|(U_0(t,s) - U_1(t,s))(B(s)(f(x_0(s)) +$$

$$+ C(s)g(x_0(s-h)) + \gamma(s))\|ds,$$

$$i_3 = \int\limits_{\mathcal{I}\cap[t_0,t]} \|U_1(t,s)B(s)(f(x_1(s)) + \gamma(s)) -$$

$$- U_0(t,s)B(s)(f(x_0(s)) + \gamma(s))\|ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{I}\cap[t_0,t-h]} \|U_0(t, s+h)C(s)(g(x_0(s)) -$$

$$- U_1(t, s+h)C(s)g(x_1(s)))\|ds,$$

$$i_4 = \left\| \sum_{t_0<\tau_j^1<t} U_1(t, \tau_j^1+0)(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j) - \right.$$

$$\left. - \sum_{t_0<\tau_j^0<t} U_0(t, \tau_j^0+0)(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j) \right\|.$$

Спочатку оцінимо $|\tau_j^1 - \tau_j^0|$ через різницю $\|x_1(\tau_j') - x_0(\tau_j')\|$. Нехай $\tau_j^0 \geq \tau_j^1 = \tau_j'$. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \leq N_1\|x_0(\tau_j'') - x_1(\tau_j')\| \leq N_1\|x_0(\tau_j'') - x_0(\tau_j')\| +$$

$$+ N_1\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \leq N_1\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| + N_1\tilde{K}_1|\tau_j^1 - \tau_j^0|,$$

де $\tilde{K}_1 = A_0\rho + (B_0 + C_0)N_0\rho + \gamma_0$. Випадок $\tau_j^0 \leq \tau_j^1$ розглядається аналогічно. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \leq \frac{N_1}{1 - N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \tag{2.50}$$

і

$$\|x_0(\tau_j^0) - x_1(\tau_j^1)\| \le \|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| + \tilde{K}_1|\tau_j^1 - \tau_j^0| \le$$
$$\le \frac{1}{1 - N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\|.$$

Припустимо, що $t \in (\tau_m'', \tau_{m+1}']$ і $\|x_0(s) - x_1(s)\| \le \eta(1 - N_1\tilde{K}_1)/N_1$ для $s \in [t_0, \tau_{m+1}'] \cap \mathcal{J}$. Нехай також $\eta \le \delta_0$, де δ_0 визначено за лемою 2.9. Тоді

$$\|U_1(t,s)u_0\| \le M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|u_0\|, \quad t_0 \le s \le t \le \tau_{m+1}'.$$

Аналогічно (2.28) можна перевірити, що

$$\|U_0(t,s) - U_1(t,s)\| \le M_2 e^{-\beta_2(t-s)} \max_{k \le j \le m} |\tau_j'' - \tau_j'| \le \eta M_2 e^{-\beta_2(t-s)}$$

для $t \in \mathcal{J}_m$, $s \in \mathcal{J}_k$, $t \ge s$.

За такого припущення оцінимо всі інтеграли у (2.49):

$$\|U_1(t,t_0)\varphi_0 - U_0(t,t_0)x_0)\| \le$$

$$\le \|(U_1(t,t_0) - U_0(t,t_0))\varphi_0\| + \|U_0(t,t_0)(x_0 - \varphi_0)\| \le$$

$$\le M_2 e^{-\beta_2(t-t_0)} \max_{1 \le j \le m} |\tau_j'' - \tau_j'| + M e^{-\beta(t-t_0)}\|\varphi_0 - x_0\|,$$

$$i_0 = \int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{J}} M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} C_0 N_1 \delta ds +$$
$$+ 2\int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{I}} M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} C_0 N_1 \rho ds \le$$
$$\le N_1\left(h + 2\rho\frac{h}{\theta} + 2\rho\right) e^{-\beta_1(t-t_0)} M_1 C_0 \delta,$$
$$i_1 \le \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} M_1 e^{-\beta_1(t-s)} B_0 N_1 \|x_1(s) - x_0(s)\| ds +$$
$$+ \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t-h]} M_1 e^{-\beta_1(t-s-h)} C_0 N_1 \|x_1(s) - x_0(s)\| ds \le$$

$$\le e^{-\beta_1 t} M_1 N_1 (B_0 + C_0 e^{\beta_1 h}) \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} e^{-\beta_1 s} \|x_1(s) - x_0(s)\| ds,$$

$$i_2 \le (B_0 + C_0) N_1 \rho \left(\int\limits_{t_0}^{\tau_1'} \|(U_0(t,s) - U_1(t,s))\| ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^{m+1} \int\limits_{\tau_{j-1}''}^{\tau_j'} \|(U_0(t,s) - U_1(t,s))\| ds \right) \le$$

$$\le (B_0 + C_0) N_1 \rho \sum_{1\le j\le m} \frac{M_2}{\beta_2} e^{-\beta_2 (t-\tau_j')} \max_{j\le i\le m} |\tau_i'' - \tau_i'|,$$

$$i_3 \le \sum_{t_0<\tau_j^0<t} \int\limits_{\tau_j'}^{\tau_j''} 2M_1 e^{-\beta_1 (t-\tau_j'')} \left(N_1 \rho B_0 + \rho + N_1 \rho C_0 e^{\beta_1 h} \right) ds \le$$

$$\le \sum_{t_0<\tau_j^0<t} 2M_1 e^{-\beta_1 (t-\tau_j')} e^{\beta_1 (\tau_j''-\tau_j')} \left(N_1 \rho B_0 + \rho + N_1 \rho C_0 e^{\beta_1 h} \right) |\tau_j'' - \tau_j'|.$$

Для оцінювання i_4 розглянемо різницю

$$i_{4j} = \|U_1(t, \tau_j^1 + 0)(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j) - U_0(t, \tau_j^0 + 0)(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j)\|.$$

Нехай $\tau_j^0 \ge \tau_j^1$ (випадок $\tau_j^0 < \tau_j^1$ розглядається аналогічно). Тоді

$$i_{4j} \le \|(U_1(t, \tau_j^1 + 0) - U_1(t, \tau_j^0 + 0))(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j)\| +$$

$$+ \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)(I_j(x_1(\tau_j^1)) - I_j(x_0(\tau_j^0)))\| +$$

$$+ \|(U_1(t, \tau_j^0 + 0) - U_0(t, \tau_j^0 + 0))(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j)\| \le$$

$$\le \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)\| \|U_1(\tau_j^0 + 0, \tau_j^1 + 0) - I\| (N_1 \rho + g_*) +$$

$$+ \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)\| N_1 \|x_1(\tau_j^1) - x_0(\tau_j^0)\| +$$

$$+ M_2 e^{-\beta_1 (t-\tau_j^0)} (N_1 \rho + g_*) \max_{j\le i\le m} |\tau_i'' - \tau_i'| \le$$

$$\leq M_1 e^{-\beta_1(t-\tau_j'')}\times$$

$$\times \Big(A_0 e^{A_0|\tau_j''-\tau_j'|}(N_1\rho + g_*)|\tau_j''-\tau_j'| + N_1\|x_1(\tau_j^1) - x_0(\tau_j^0)\|\Big) +$$

$$+ M_2 e^{-\beta_2(t-\tau_j'')}(N_1\rho + g_*)\max_{j\leq i\leq m}|\tau_i''-\tau_i'|.$$

Як наслідок при $t \in \mathcal{J}_m$ маємо

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq$$

$$\leq \delta P_1 e^{-\beta_2(t-t_0)} + N_1 P_2 \int\limits_{[t_0,t]\cap\mathcal{J}} e^{-\beta_2(t-s)}\|x(s) - x_0(s)\|ds +$$

$$+ \sum_{1\leq j\leq m} N_1 P_3 e^{-\beta_2(t-\tau_j')}\max_{j\leq i\leq m}\|x_1(\tau_i') - x_0(\tau_i')\|,$$

де P_1, P_2 й P_3 — додатні сталі, незалежні від ε, η.

При $t \in [t_0, \tau_1']$ за нерівністю Гроноулла

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}. \tag{2.51}$$

При $t \in (\tau_1'', \tau_2']$

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}(1 + N_1 P_3).$$

Послідовно застосовуючи аналогічні нерівності на наступних інтервалах, для $t \in \mathcal{J}_m$ отримуємо

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}(1 + N_1 P_3)^m.$$

Для достатньо малого $N_1 > 0$ виконуються нерівності $\beta_2 > N_1 P_1$ і

$$e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)\theta}(1 + N_1 P_3) < 1. \tag{2.52}$$

З (2.51) і (2.50) отримуємо

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \leq \frac{N_1}{1 - N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \leq \frac{N_1 P_1 \delta}{1 - N_1\tilde{K}_1}.$$

Якщо взяти $\delta \leq \min\{\varepsilon/P_1, \eta(1 - N_1\tilde{K}_1)/N_1P_1\}$, то з урахуванням (2.52) отримуємо $\|x_1(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0,\ |t - \tau_j| \geq \eta$, що доводить стійкість розв'язку $x_0(t)$. Границя $e^{-n\theta(\beta_2 - N_1P_2)}(1 + N_1P_3)^n \to 0, n \to \infty$, забезпечує асимптотичну стійкість $x_0(t)$. Теорему доведено.

Висновки до розділу 2

У даному розділі розглянуто систему диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \ t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ — матричнозначні функції $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f і g — функції $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x)\colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відокремлені одна від іншої.

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ й $\gamma(t)$ майже періодичні за Бором, послідовності $(n \times n)$-матриць $\{D_k\}$ й векторів $\{g_k\}$ є майже періодичними, послідовність $\{I_k(x)\}$ вектор-функцій $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ є майже періодичною рівномірно відносно x у деякій кулі $U_\rho \subset \mathbb{R}^n$.

Частинним випадком є системи, що описують математичні моделі нейронних мереж із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії.

Для такої системи встановлено умови, за яких у кулі існує єдиний, причому асимптотично стійкий, кусково-неперервний майже періодичний розв'язок. При цьому через нефіксовані моменти імпульсної дії означення стійкості відмінне від такого для рівнянь із фіксованими моментами імпульсної дії, бо враховує відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння.

Основний результат:

– встановлено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії, які можуть розглядатися як математичні моделі нейронних мереж.

РОЗДІЛ 3

Майже періодичні розв'язки імпульсних систем із дифузією

Останнім часом зростає інтерес до кількісних досліджень біологічних популяцій. Вивчають їхню чисельність і віковий склад, вплив взаємодії кількох біологічних видів на чисельність відповідних популяцій тощо. Математичними моделями популяційної динаміки зазвичай слугують різноманітні системи рівнянь із неперервним або дискретним часом [35, 51, 52].

Першою серед моделей із неперервним часом стала модель Т. Мальтуса (1798), згідно з якою приріст населення за одиницю часу прямо пропорційний кількості населення $x(t)$ на даний момент часу t:

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

де r — темп приросту населення (різниця між народжуваністю і смертністю за одиницю часу). При $r > 0$ населення зростає експоненціально:

$$x(t) = x_0 e^{rt}.$$

Така модель наближено описує чисельність популяції на початковому етапі, але не враховує обмеженість ресурсів.

Цю ваду частково долає модель Ф. Ферхюльста (1838–1845), згідно з якою швидкість розмноження популяції прямо пропорційна її чисельності й наявності ресурсів. Відповідне рівняння названо логістичним:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

де K — максимально можлива чисельність популяції за наявних умов. Розв'язком є логістична функція:

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{rt}}{K - x_0 + x_0e^{rt}} = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = K. \tag{3.3}$$

Модель добре узгоджується з даними лабораторних експериментів, але має обмеження на застосування в реальних умовах.

Першу модель, що описує взаємодію кількох біологічних видів, запропонували А. Дж. Лотка (1925) і В. Вольтерра (1926). У ній розглядають два види — "жертву" й "хижака". Жертва за відсутності хижака й достатньої кількості їжі вільно розмножується за законом Мальтуса, а хижак без жертви гине. Відповідно присутність іншого виду чинить протилежну дію. Найпростіша модель типу "хижак – жертва" має вигляд

$$\frac{du}{dt} = u(a_1 - cv), \qquad \frac{dv}{dt} = v(-a_2 + bu), \tag{3.4}$$

де всі чотири сталі у правій частині є додатними.

Узагальнення системи Лотки – Вольтерра відбуваються за двома напрямками. Перший передбачає моделювання принципово іншого характеру відносин між біологічними видами. Мутуалізм — взаємовигідне співжиття двох видів — може моделюватися системою вигляду

$$\frac{du}{dt} = u(a_1 + cv), \qquad \frac{dv}{dt} = v(a_2 + bu). \tag{3.5}$$

Конкуренція (змагання) двох видів моделюється системою вигляду

$$\frac{du}{dt} = u(a_1 - cv), \qquad \frac{dv}{dt} = v(a_2 - bu). \tag{3.6}$$

Другий підхід полягає у вдосконаленні наявних моделей. Наприклад, у системі (3.6) можна врахувати обмеженість ресурсів:

$$\frac{du}{dt} = u(a_1 - b_1u - c_1v), \qquad \frac{dv}{dt} = v(a_2 - b_2u - c_2v). \tag{3.7}$$

Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ й $v(a_2 - c_2 v)$ у (3.7) характеризують відтворення першого і другого видів. Члени $-c_1 uv$ й $-b_2 uv$ показують гальмівний вплив виду v на вид u й виду u на вид v відповідно.

Згідно з принципом конкурентного витіснення, який приписують екологу Г. Ф. Гаузе (1934), тривале співіснування кількох конкуруючих біологічних видів неможливе, оскільки один із них має перевагу над іншими й витісняє їх зі своєї екологічної ніші. Однак спостереження показали, що це відбувається не завжди. Можливим сценарієм є перманентність, коли чисельність кожного з видів протягом тривалого часу тримається в певних межах, не наближаючись до нуля. Зокрема, за певних умов стан рівноваги системи (3.7)

$$u = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \quad v = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

лежить у першому квадранті й є асимптотично стійким [35].

Для моделювання короткочасних впливів на популяції розглядають системи з імпульсною дією [65, Chapter 4].

При дослідженні конкуруючих популяцій бажано враховувати нерівномірність розподілу в просторі. Один із підходів передбачає дослідження конкуренції декількох популяцій одного виду, між якими відбувається перерозподіл, або дисперсія (див., наприклад, [67]).

У моделях іншого типу вивчається “неперервний” розподіл популяцій у певній просторовій області. Відповідно замість загальної чисельності розглядається щільність популяцій на даний момент часу в кожній точці області, всередині якої відбувається дифузія — розсіювання особин убік вирівнювання їхньої щільності. Врахувати дифузію можна за другим законом Фіка за допомогою оператора Лапласа.

Дослідження імпульсних систем із дифузією, які описують еволюцію біологічних видів, привертає останнім часом велику увагу багатьох авторів (див., наприклад, [30, 37, 46, 56, 69, 77]).

У підрозділах 3.1 і 3.2 розглянуто систему диференціальних рівнянь

Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + \\ + u(t,x)\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + \\ + v(t,x)\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\right), \tag{3.9}$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.10}$$

й загалом нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\begin{aligned} u(t+0,x) - u(t,x) &= d_{1k}u(t,x) + q_{1k}, \\ v(t+0,x) - v(t,x) &= d_{2k}v(t,x) + q_{2k}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \\ = \theta_k + r_k \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.12}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою межею $\partial\Omega$,$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, які залежать від розв'язків і рівномірно відділені один від іншого. Система описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, вважатимемо функції невід'ємними. Додатні сталі μ_1 і μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду.

Систему (3.8) – (3.12) розглянуто з такими умовами:

(H1) Додатнозначні обмежені функції $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ і $c_i(t,x)$, $i = 1,2$, неперервно диференційовні за $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ й майже періодичні за Бором за t рівномірно відносно $x \in \Omega$.

(H2) Виконуються нерівності $d_{ik} > -1$, $q_{ik} \geq 0$, $i = 1,2$, $k \in \mathbb{Z}$, і послідовності дійсних чисел $\{d_{1k}\}, \{d_{2k}\}, \{q_{1k}\}, \{q_{2k}\}$ майже періодичні. Позначимо $d = \sup_{ik} |d_{ik}|$, $q = \sup_{ik} q_{ik}$.

(H3) Позначимо $U_\rho = \{u \in C(\bar{\Omega})\colon \|u\|_C \leq \rho,\ u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$, де ρ — певне додатне число. Послідовність $\{\theta_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, а послідовність $\{r_k\}$ майже періодична. Крім того, існують сталі $\tilde{\Theta} > \tilde{\theta} > 0$ й $\Theta > \theta > 0$, такі, що виконуються нерівності $\tilde{\Theta} \geq \theta_k - \theta_{k-1} \geq \tilde{\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, і

$$\begin{aligned} &\Theta = \tilde{\Theta} + 2r\rho^2|\Omega| \geq \\ &\geq \tau_k(u,v) - \tau_{k-1}(u,v) \geq \theta = \tilde{\theta} - 2r\rho^2|\Omega| > 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

для всіх u, $v \in U_\rho$, $k \in \mathbb{Z}$. Тут $r = \sup_k |r_k|$, $|\Omega|$ — міра множини Ω.

У багатьох питаннях системи вигляду (3.8) – (3.12) зручно розглядати як диференціальне рівняння з необмеженим оператором у банаховому просторі. Дослідження таких рівнянь у значній мірі базується на теорії напівгруп операторів, основи якої заклали Е. Хілле, К. Йосіда, Р. С. Філліпс, Т. Като та ін. Теорію диференціальних рівнянь із секторіальним оператором і застосування до задач математичної фізики викладено, зокрема, в монографії Д. Генрі [42], а також у [11, 54]. У підрозділі 3.3 розглянуто імпульсне рівняння в абстрактному банаховому просторі.

3.1. Майже періодичні розв'язки системи Лотки – Вольтерра з дифузією й фіксованими моментами імпульсної дії

У даному підрозділі досліджено умови існування строго додатного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи (3.8) –

(3.12) у випадку фіксованих моментів імпульсної дії:

$$r_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.14}$$

Тоді в (3.12) $t = \tau_k = \theta_k$, $k \in \mathbb{Z}$, а в умові (Н3) $\Theta = \tilde{\Theta}$, $\theta = \tilde{\theta}$. Спочатку ми доведемо обмеженість розв'язків і вкажемо умови довготривалого виживання кожного з видів у термінах перманентності — коли кількість індивідів кожного виду стабілізується в деякій обмеженій області, відділеній від нуля. Далі отримаємо умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків з області перманентності в нормах просторів $L^p(\Omega)$ інтегровних функцій, означених у області Ω, і нормах інтерполяційних просторів X^α, побудованих для оператора Лапласа Δ і крайових умов (3.10). Використання інтерполяційних просторів X^α дозволяє розглядати розв'язки в сильному і класичному сенсі. За умови рівномірної асимптотичної стійкості на підставі ідей робіт [36, 53, 79] доводиться існування в області перманентності асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку. При цьому використовують узагальнені варіанти нерівності Гронуолла [42].

Лема 3.1. *Нехай $0 \le \alpha < 1$, $M_1 \ge 0$, $M_2 > 0$, $0 < Q < \infty$ і локально інтегровна на $0 \le t \le Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє на цьому інтервалі нерівність*

$$y(t) \le M_1 + M_2 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} y(s)\, ds.$$

Тоді існує така додатна стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, M_2, Q) \in (1, \infty)$, що

$$y(t) \le M_1 \tilde{C}(\alpha, M_2, Q).$$

Викладені у підрозділі результати отримано у [5].

3.1.1. Перманентність і асимптотична стійкість

Означення 3.2. Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, X)$ перебуває в ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, X)$, якщо $\left\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in J$ таких, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$ і $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ й $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно. У цьому випадку будемо писати $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon$, $t \in J$.

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається в W-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, X)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $\left\|f_k(t) - f(t)\right\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

Означення 3.3. Вектор-функція $(u(t, x), v(t, x))$ є класичним розв'язком системи без імпульсів (3.8) – (3.10), якщо вона двічі неперервно диференційовна за $x \in \Omega$, неперервно диференційовна за $x \in \bar{\Omega}$, неперервно диференційовна за $t > 0$ й задовольняє цю систему.

Вектор-функція $(u, v) \colon \Omega \times [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^2$, де $\alpha > 0$, є розв'язком початкової задачі

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad v(t_0, x) = v_0(x) \tag{3.15}$$

імпульсної системи (3.8) – (3.12), якщо функція (u, v) є класичним розв'язком системи без імпульсів (3.8) – (3.10) при $t \neq \tau_k$, задовольняє умови (3.11) при $t = \tau_k$ й виконується умова (3.15).

Означення 3.4. Система називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку системи з невід'ємними початковими функціями $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$ існує таке $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$, що

$$m_0 \leq u(t, x) \leq M_0, \qquad m_0 \leq v(t, x) \leq M_0$$

для $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq \bar{t}$.

У подальшому буде потрібен такий допоміжний результат [30]. Розглянемо логістичне рівняння без запізнення і з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \quad t \neq t_k, \tag{3.16}$$

$$z(t_k + 0) - z(t_k) = dz(t_k) + q, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

де $z \geq 0$, a й b — додатні сталі, $d > -1$, $q \geq 0$, послідовність $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ строго зростає й задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$.

Лема 3.5. *Усі розв'язки $z(t)$, $z(0) = z_0 > 0$ рівняння* (3.16), (3.17) *задовольняють оцінки*

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1+d) + q\}, \qquad A = \frac{a}{b(1 - e^{-a\theta})}$$

для $t \geq 2\theta$.

Також використовуватимемо теорему порівняння з [64].

Теорема 3.6. *Нехай T й ν — додатні числа, а функція $u(t,x)$ неперервна на $[0,T] \times \bar{\Omega}$, неперервно диференційовна за $x \in \bar{\Omega}$, з неперервними похідними $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$, $\partial u/\partial t$ на $(0,T] \times \Omega$ і задовольняє нерівності*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + c(t,x)u \geq 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \Omega, \\
&\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \partial\Omega, \\
&u(0,x) \geq 0, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

де функція $c(t,x)$ обмежена на $(0,T] \times \Omega$.

Тоді $u(t,x) \geq 0$ на $(0,T] \times \bar{\Omega}$. Крім того, $u(t,x)$ строго додатна на $(0,T] \times \bar{\Omega}$, якщо $u(0,x)$ не рівна тотожно нулю.

Для обмеженої функції $g(t,x)$ позначмо

$$g^L = \inf_{t,x} g(t,x), \qquad g^M = \sup_{t,x} g(t,x). \tag{3.18}$$

Лема 3.7. *Для кожного розв'язку системи* (3.8) – (3.12) *з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$ *існує таке* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$, *що*

$$u(t,x) \le M_0, \qquad v(t,x) \le M_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \ge \bar{t},$$

де

$$M_0 = \max\{A, A(1+d)+q\}, \qquad A = \frac{a^M}{b^L(1-e^{-a^M\theta})},$$

$a^M = \max\bigl(a_1^M,\ a_2^M\bigr)$, $b^L = \min\bigl(b_1^L,\ c_2^L\bigr)$.

Доведення. Нехай $\bar{u}(t,x,u_0)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) = 0. \tag{3.19}$$

Використовуючи нерівність

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\,(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v) \ge$$
$$\ge \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1^M - b_1^L u) \ge \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u),$$

отримуємо

$$0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) \ge \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u).$$

Застосовуючи теорему 3.6, одержуємо $u(t,x,u_0,v_0) \le \bar{u}(t,M_u)$, $M_u = \bar{u}(0,M_u)$, де стала M_u така, що $\|u_0(x)\|_C = \max_{x\in\bar{\Omega}} |u_0(x)| \le M_u$. За теоремою єдиності розв'язок рівняння (3.19) з незалежною від x початковою умовою не залежить від x при $t \ge 0$. Тому функція $\bar{u}(t,M_u)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $d\bar{u}/dt = \bar{u}\bigl(a^M - b^L\bar{u}\bigr)$.

З умови (3.11) отримуємо оцінку для імпульсної дії:

$$\bigl\|u(\tau_k+0,x,u_0,v_0)\bigr\|_C \le \bigl\|u(\tau_k,x,u_0,v_0)\bigr\|_C(1+d)+q.$$

За лемою 3.5 усі розв'язки рівняння з імпульсами

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u}(a^M - b^L\bar{u}), \qquad \bar{u}(\tau_k+0) - \bar{u}(\tau_k) = d\bar{u}(\tau_k) + q$$

фінально обмежені сталою A або $(d+1)A+q$.

Аналогічно отримуємо оцінку для $v(t,x,u_0,v_0)$.

Лему 3.5 доведено.

Лема 3.8. *Нехай виконуються нерівності*

$$a_1^L - c_1^M M_0 + \sigma_1 > 0, \qquad a_2^L - b_2^M M_0 + \sigma_2 > 0, \tag{3.20}$$

де

$$\sigma_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<\tau_j\le T} \ln(1+d_{ij}), \quad i=1,2. \tag{3.21}$$

Тоді існує таке $m_0 > 0$*, що для кожного розв'язку системи* (3.8) – (3.12) *із невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$*, існує таке* $t_0 = t_0(u_0, v_0)$*, що*

$$u(t,x) \ge m_0, \qquad v(t,x) \ge m_0, \qquad x \in \bar\Omega, \quad t \ge t_0.$$

Доведення. Для обмежених розв'язків $\|u(t,.)\|_C \le M_0$, $\|v(t,.)\|_C \le M_0$, $t \ge 0$, виконується нерівність

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\big) \le \\ &\le \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0\big), \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \hat u}{\partial t} - \mu_1 \Delta \hat u - \hat u\big(a_1^L - b_1^M \hat u - c_1^M M_0\big) \le \\ &\le \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0\big). \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему 3.6, отримуємо $u(t,x,u_0,v_0) \ge \hat u(t, m_u)$, де стала $m_u > 0$ така, що $\|u_0(x)\| \ge m_u, x \in \bar\Omega$. Зауважимо, що ми можемо припустити, що $m_u > 0$, оскільки за теоремою 3.6 якщо $u_0(x) \ge 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \ge 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, то $u(t,x,u_0,v_0) > 0$, $v(t,x,u_0,v_0) > 0$ для всіх $x \in \bar\Omega$, $t > 0$.

Враховуючи (3.11) і невід'ємність q_{1k}, розв'язок $u(t,x,u_0,v_0)$ оцінюємо знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами

$$\frac{d\hat u}{dt} = \hat u(a_1^L - b_1^M \hat u - c_1^M M_0), \qquad \hat u(\tau_k + 0) - \hat u(\tau_k) = d_{1k} \hat u(t_k). \tag{3.22}$$

Виконуючи в рівнянні (3.22) заміну змінних $\hat{u} = 1/z$, отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = -(a_1^L - c_1^M M_0)z + b_1^M, \qquad z(\tau_k + 0) = (1 + d_{1k})^{-1} z(\tau_k). \quad (3.23)$$

Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$U(t,s) = \prod_{s \le \tau_j < t} \frac{1}{1 + d_{1j}} e^{-(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s)} =$$

$$= \exp\left\{ -(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s) - \sum_{s \le \tau_j < t} \ln(1 + d_{1j}) \right\}.$$

Зазначимо, що для майже періодичної послідовності $\{d_{1j}\}$ і послідовності $\{\tau_j\}$ із рівномірно майже періодичними послідовностями різниць завжди існує границя

$$\sigma_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{s \le \tau_j < s+T} \ln(1+d_{1j}) = \lim_{T\to\infty} \sum_{s \le \tau_j < s+T} \frac{\ln(1 + d_{1j})}{\mathfrak{i}(s, s+T)} \lim_{T\to\infty} \frac{\mathfrak{i}(s, s+T)}{T}.$$

При виконанні нерівності (3.20) для $U(t,s)$ виконується оцінка

$$\left| U(t,s) \right| \le \tilde{K} e^{-\alpha_1 (t-s)}, \quad t \ge s,$$

із деякими додатними сталими $\tilde{K}$ і α_1, а рівняння (3.23) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t-s) b_1^M \, ds \le \frac{\tilde{K} b_1^M}{\alpha_1}.$$

Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) \le 2\tilde{K} b_1^M / \alpha_1$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Відповідно кожен розв'язок рівняння (3.22) оцінюється знизу сталою $\alpha_1 / 2\tilde{K} b_1^M$ починаючи з деякого моменту часу.

Оцінки для розв'язків v аналогічні.

Лему 3.8 доведено.

Лема 3.9. *Нехай виконується нерівність* $q_0 = \inf_{ij} q_{ij} > 0$. *Тоді існує таке* $m_0 > 0$, *що для кожного розв'язку системи* (3.8) – (3.12) *з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, *існує таке* $t_0 = t_0(u_0, v_0)$, *що*

$$u(t,x) \geq m_0, \qquad v(t,x) \geq m_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t_0.$$

Доведення. Як і в випадку рівняння (3.22), показуємо, що розв'язки системи (3.8) – (3.12) оцінюються знизу розв'язками рівняння

$$\frac{dz}{dt} = z(a^L - b^M z - c^M M_0), \quad z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = d_0 u(t_k) + q_0, \quad (3.24)$$

де

$$a^L = \min\left\{a_1^L, a_2^L\right\},\ b^M = \max\left\{b_1^M, c_2^M\right\},\ c^M = \max\left\{c_1^M, b_2^M\right\},\ d_0 = \inf_{jk} d_{jk}.$$

Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tau_k + 0$ не менше за q_0, то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \geq 1$, розв'язок оцінюється знизу величиною

$$z(t) \geq \frac{(c^M M_0 - a^L) q_0}{q_0 b^M (e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tau_k)} - 1) + (c^M M_0 - a^L) e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tau_k)}}.$$

При $a_1^L = c_1^M M_0$ отримуємо

$$z(t) \geq \frac{q_0}{1 + q_0 b^M (t - \tau_k)}, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Лему 3.9 доведено.

Зауваження 3.10. Припустимо, що $d_{ij} = 0$, $i = 1, 2$, $j \in \mathbb{Z}$, і $a_1^L > c_1^M M_0$, $a_2^L > b_2^M M_0$. Лінійне рівняння (3.23) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок $z_* = b_1^M / (a_1^L - c_1^M M_0)$. Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) < 2b_1^M / (a_1^L - c_1^M M_0)$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому розв'язки $\big(u(t,x,u_0,v_0), v(t,x,u_0,v_0)\big)$

з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями задовольняють оцінки

$$u(t,x,u_0,v_0) \geq \frac{a_1^L - c_1^M M_0}{2b_1^M}, \qquad v(t,x,u_0,v_0) \geq \frac{a_2^L - b_2^M M_0}{2c_2^M}, \quad x \in \bar{\Omega},$$

починаючи з деякого моменту часу $t_1 = t_1(u_0, v_0)$.

Теорема 3.11. *Нехай для системи* (3.8) – (3.12) *виконуються умови H1 – H3 і:*

1) система перманентна: існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що кожен розв'язок із невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$ починаючи з деякого моменту часу $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ залишається у множині

$$E_0 = \Big\{(u,v)\colon m_0 \leq u \leq M_0,\ m_0 \leq v \leq M_0\Big\};$$

2) виконується нерівність

$$a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0 + \sigma < 0, \quad \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \tag{3.25}$$

де

$$\begin{aligned} a^M &= \max\big\{a_1^M, a_2^M\big\},\ b^L = \min\big\{b_1^L, c_2^L\big\}, \\ c^L &= \min\big\{c_1^L, b_2^L\big\}, \quad c^M = \max\big\{c_1^M, b_2^M\big\}, \end{aligned}$$

σ_i визначено за (3.21).

Тоді розв'язки системи з початковими функціями зі значеннями у множині E_0 рівномірно асимптотично стійкі. Для двох розв'язків $(u_1(t,x), v_1(t,x))$ і $(u_2(t,x), v_2(t,x))$, які мають значення в множині E_0, виконується нерівність

$$\begin{aligned} &\sup_x \Big(|u_1(t,x) - u_2(t,x)| + |v_1(t,x) - v_2(t,x)|\Big) \leq \\ &\leq M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \sup_x \Big(|u_1(t_0,x) - u_2(t_0,x)| + |v_1(t_0,x) - v_2(t_0,x)|\Big) \end{aligned} \tag{3.26}$$

з деякими додатними сталими M_1 і β_1.

Доведення. Розглянемо два розв'язки $\big(u_1(t,x), v_1(t,x)\big)$ і $\big(u_2(t,x), v_2(t,x)\big)$, які мають значення у множині E_0, і функцію

$$\mathcal{A}_p(t) = \int\limits_{\Omega} \big((u_1(t,x) - u_2(t,x))^p + (v_1(t,x) - v_2(t,x))^p\big) dx,$$

де p — парне натуральне число. Її похідна має вигляд

$$\frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} = p\int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1}\left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right) dx +$$

$$+ p\int\limits_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1}\left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt}\right) dx \ =$$

$$= \ p\mu_1 \int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1}(\Delta u_1 - \Delta u_2)\, dx + p\int\limits_{\Omega} a_1(t,x)(u_1 - u_2)^p\, dx \ -$$

$$- p\int\limits_{\Omega} \big(b_1(t,x)(u_1 - u_2)^p(u_1 + u_2) \ +$$

$$+ \ c_1(t,x)(u_1 - u_2)^{p-1}(u_1v_1 - u_2v_2)\big)\, dx \ +$$

$$+ p\mu_2 \int\limits_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1}(\Delta v_1 - \Delta v_2)\, dx + p\int\limits_{\Omega} a_2(t,x)(v_1 - v_2)^p\, dx \ -$$

$$- p\int\limits_{\Omega} \big(c_2(t,x)(v_1 - v_2)^p(v_1 + v_2) \ +$$

$$+ \ b_2(t,x)(v_1 - v_2)^{p-1}(u_1v_1 - u_2v_2)\big)\, dx.$$

Ураховуючи рівність

$$\int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1}(\Delta u_1 - \Delta u_2)\, dx = -(p-1)\int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-2}|\nabla(u_1 - u_2)|^2\, dx,$$

отримуємо оцінку

$$\frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} \le p\int\limits_{\Omega} \big(a_1^M - (2b_1^L + c_1^L)m_0\big)\,(u_1 - u_2)^p\, dx \ +$$

$$+ p\int\limits_{\Omega} \big(c_1^M M_0\big|(u_1 - u_2)^{p-1}(v_1 - v_2)\big| \ +$$

$$+\ b_2^M M_0\big|(u_1-u_2)(v_1-v_2)^{p-1}\big|\big)\,dx\ +$$
$$+\ p\int\limits_\Omega (a_2-(b_2^L+2c_2^L)m_0)(v_1-v_2)^p\,dx\le$$
$$\le p\left(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^M M_0\right)\mathcal{A}_p(t).$$

У останніх оцінках ми скористалися нерівністю $w^{p-1}z+wz^{p-1}\le w^p+z^p$ для невід'ємних w, z і натурального p.

При $t\in(\tau_{j-1},\tau_j]$ виконується нерівність

$$\mathcal{A}_p(\tau_j)\le\mathcal{A}_p(\tau_{j-1}+0)\exp\left\{p\left(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^M M_0\right)(\tau_j-\tau_{j-1})\right\}.$$

За допомогою формул (3.11) оцінимо $\mathcal{A}_p(\tau_j+0)$:

$$\mathcal{A}_p(\tau_j+0)=\int\limits_\Omega(1+d_{1j})^p\big(u_1(\tau_j,x)-u_2(\tau_j,x)\big)^p\,dx\ +$$
$$+\ \int\limits_\Omega(1+d_{2j})^p\big(v_1(\tau_j,x)-v_2(\tau_j,x)\big)^p\,dx\le$$
$$\le\max\big\{(1+d_{1j})^p,(1+d_{2j})^p\big\}\mathcal{A}_p(\tau_j)=K_j^p\mathcal{A}_p(\tau_j).$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathcal{A}_p(t)\le\prod_{t_0\le\tau_j<t}K_j^p e^{p(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^M M_0)(t-t_0)}\mathcal{A}_p(t_0). \tag{3.27}$$

При виконанні нерівності

$$\prod_{t_0\le\tau_j<t}K_j e^{(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^M M_0)(t-t_0)}\le M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)}$$

з нерівності (3.27) випливає експоненціальна оцінка з показником $-\beta_1$ у всіх просторах $L^p(\Omega)$ з парними p і як наслідок оцінка в sup-нормі

$$\sup_x\left(|u_1(t,x)-u_2(t,x)|+|v_1(t,x)-v_2(t,x)|\right)\le$$
$$\le M_1e^{-\beta_1(t-t_0)}\sup_x\left(|u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x)|+|v_1(t_0,x)-v_2(t_0,x)|\right),$$

що показує рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків у просторі $C(\bar\Omega)$.

3.1.2. Абстрактна постановка

Позначимо $w = (u, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) = X$, де $p > n$ — натуральне число. Норму у просторі $X = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ будемо позначати $\|.\|_0$.

Запишемо систему (3.8) – (3.12), (3.15) у вигляді

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t, w), \quad t \neq \tau_j, \tag{3.28}$$

$$w(\tau_j + 0) = w(\tau_j) + G_j(w(\tau_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.29}$$

$$w(0) = w_0, \tag{3.30}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\mu_1 \Delta + \beta & 0 \\ 0 & -\mu_2 \Delta + \beta \end{pmatrix}, \quad \beta > 0, \tag{3.31}$$

$$F(t, w) = \begin{pmatrix} u(a_1(t,.) + \beta - b_1(t,.)u - c_1(t,.)v) \\ v(a_2(t,.) + \beta - b_2(t,.)u - c_2(t,.)v) \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$$G_j(w(t)) = \begin{pmatrix} d_{1j} u(t,.) + q_{1j} \\ d_{2j} v(t,.) + q_{2j} \end{pmatrix} = D_j w(t) + Q_j, \tag{3.33}$$

β — деяке додатне число, $\beta < \beta_1$. Легко бачити, що $d = \sup_j \|D_j\|$, $q = \sup_j \|Q_j\|$.

Оператор A_1 має область визначення

$$D(A_1) = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2) \colon \xi_i \in W^{2,p}(\Omega), \left. \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \ i = 1, 2 \right\}, \tag{3.34}$$

де $W^{2,p}(\Omega)$ — простір Соболєва функцій з $L_p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні. Оператор A_1 секторіальний з $\operatorname{Re} \xi \geq \beta$ для $\xi \in \sigma(A_1)$, де $\sigma(A_1)$ — спектр оператора A_1. Секторіальність A_1 означає, що він замкнений і щільно визначений, а також для деяких $\varphi \in (0, \pi/2)$, $a \in \mathbb{R}$ сектор

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\}$$

лежить у резольвентній множині $\rho(A_1)$ оператора A_1 і для деякого $M \geq 1$

$$\|(\lambda I - A_1)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \text{для всіх} \quad \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

У даному випадку $a = \beta$.

Для оператора A_1 означаються степені A_1^α, $\alpha \geq 0$, й відповідні їм області означення $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ з нормою $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_0$ [42]. Оператор $-A_1$ є генератором аналітичної напівгрупи $e^{-A_1 t}$, і справджується рівність $e^{-A_1 t} A_1^\alpha x = A_1^\alpha e^{-A_1 t} x$, де $x \in X^\alpha$, $t > 0$. Оскільки $a > 0$, виконуються нерівності [42]

$$\left\|A_1^\alpha e^{-A_1 t}\right\|_0 \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\beta t}, \ t > 0, \ \alpha > 0, \tag{3.35}$$

$$\left\|(e^{-A_1 t} - I)x\right\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \left\|A_1^\alpha x\right\|_0, \ t > 0, \ \alpha \in (0, 1], \ x \in X^\alpha, \tag{3.36}$$

де $C_\alpha > 0$ обмежена при $\alpha \to 0+$. Також виконується нерівність $\|x\|_0 \leq L_0 \|x\|_\alpha$ з деякою сталою $L_0 > 0$ для $x \in X^\alpha$.

Під нерівністю $w_0 \geq 0$ для $w_0 = (u_0, v_0) \in X$ розуміємо $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Виберемо α так, що

$$2\alpha - \frac{n}{p} \geq \nu > 0, \quad \alpha < 1. \tag{3.37}$$

Аналогічно [33] показуємо, що якщо початкова функція задовольняє умову $w_0 \in X^\alpha$, $w_0 \geq 0$, то задача без імпульсів (3.8) – (3.9), (3.10), (3.15) має єдиний класичний розв'язок $(u(t, x), v(t, x))$, який існує для всіх $t > 0$, якщо $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Розв'язок початкової задачі (3.28) – (3.30) задовольняє інтегральне рівняння

$$w(t, w_0) = e^{-A_1 t} w_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))\, ds + \tag{3.38}$$

$$+ \sum_{0 < \tau_j < t} e^{-A_1(t-\tau_j)} G_j(w(\tau_j)), \tag{3.39}$$

тому за означенням норми у просторі X^α

$$\|w(t,w_0)\|_\alpha \le \|e^{-A_1 t}\|_0 \|w_0\|_\alpha + \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s,w(s))\big\|_0\, ds +$$

$$+ \sum_{0<\tau_j<t} \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_j)} \big(D_j w(\tau_j) + Q_j\big)\big\|_0 .$$

Для $t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k]$ виконується $(t-\tau_j)^{-1} \le 2/\theta$, $j < k$. З останньої нерівності й (3.35) отримуємо

$$\big\|w(t,w_0)\big\|_\alpha \le C_0 e^{-\beta t}\|w_0\|_\alpha + C_\alpha F_0 \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\, ds +$$

$$+ C_\alpha (dM_0 + q)(2/\theta)^\alpha \sum_{0<\tau_j<t} e^{-\beta(t-\tau_j)} \le \tilde{C}_0, \quad t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k],$$

де $F_0 = \sup_{w\in E_0} \big\|F(s,w)\big\|_0$. Отже, $\big\|w(\tau_j,w_0)\big\|_\alpha \le \tilde{C}_0$ для всіх натуральних j. З (3.29) одержуємо $\big\|w(\tau_j+0,w_0)\big\|_\alpha \le d\tilde{C}_0 + q$. Звідси випливає, що $\|w(t,w_0)\|_\alpha \le \tilde{C}_1, t \ge 0$, з деякою додатною сталою $\tilde{C}_1$. З обмеженості множини у просторі X^β випливає її компактність у просторі X^α, $\alpha < \beta$. Тому траєкторії $w(t)$ передкомпактні в X^α, $\alpha > 0$.

Норма різниці двох розв'язків $w(t,w_1)$ і $w(t,w_2)$ задовольняє нерівність

$$\begin{aligned}
&\big\|w(t,w_1) - w(t,w_2)\big\|_\alpha \le \big\|A_1^\alpha e^{-A_1 t}(w_1 - w_2)\big\|_0 + \\
&+ \int\limits_0^t \Big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s,w(s,w_1)) - F(s,w(s,w_2))\big)\Big\|_0\, ds + \\
&+ \sum_{0<\tau_j<t} \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_j)} D_j(w(\tau_j,w_1) - w(\tau_j,w_2))\big\|_0 \le \\
&\le C_0 e^{-\beta t}\big\|w_1 - w_2\big\|_\alpha + \int\limits_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} F_w \big\|w(s,w_1) - w(s,w_2)\big\|_0\, ds + \\
&+ \sum_{0<\tau_j<t} \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-\tau_j)}}{(t-\tau_j)^\alpha} d\big\|w(\tau_j,w_1) - w(\tau_j,w_2)\big\|_0\, ds,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

де $F_w = \sup_{w\in E_0}\|\partial_w F\|$. Використовуючи (3.26), отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\big\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\big\|_\alpha \le C_0 e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_\alpha + \\
&+\int\limits_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} F_w M_1 e^{-\beta_1 s}\|w_1-w_2\|_0 ds + \\
&+ C_\alpha d(2/\theta)^\alpha \sum_{0<\tau_j<t} e^{-\beta(t-\tau_j)} M_1 e^{-\beta_1\tau_j}\|w_1-w_2\|_0 \le \\
&\le e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_\alpha \times \\
&\times\left(C_0 + F_w M_1 L_0 \int\limits_0^t \frac{C_\alpha e^{-(\beta_1-\beta)s}}{(t-s)^\alpha} ds + \frac{C_\alpha d M_1 L_0 (2/\theta)^\alpha}{1-e^{-\theta(\beta_1-\beta)}}\right) \le \\
&\le M_2 e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_\alpha, \qquad t\in[\tau_k-\theta/2,\tau_k].
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Тому

$$\big\|w(\tau_k,w_1)-w(\tau_k,w_2)\big\|_\alpha \le M_2 e^{-\beta\tau_k}\|w_1-w_2\|_\alpha,$$

і, враховуючи форму імпульсної дії (3.29), маємо

$$\big\|w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)\big\|_\alpha \le d M_2 e^{-\beta\tau_k}\|w_1-w_2\|_\alpha,\ k=1,2,\ldots$$

Розглядаючи $w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)$ як початкову точку, аналогічно до (3.41) на інтервалі $t\in[\tau_k+0,\tau_{k+1}-\theta/2]$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\big\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\big\|_\alpha \le \\
&\le e^{-\beta(t-\tau_k)}\left(C_0 + F_w M_1 L_0 \int\limits_{\tau_k}^t \frac{C_\alpha e^{-(\beta-\beta_1)s}}{(t-s)^\alpha} ds\right)\times \\
&\times\big\|w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)\big\|_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

З нерівностей (3.41) і (3.42) отримуємо оцінку для всіх $t\ge 0$:

$$\big\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\big\|_\alpha \le M_3\, e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_\alpha \tag{3.43}$$

з деякою додатною сталою $M_3\ge 1$.

3.1.3. Майже періодичні розв'язки

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови теореми 3.11. Тоді система має єдиний асимптотично стійкий кусково-неперервний W-майже періодичний розв'язок зі значеннями у множині E_0.*

Доведення. Розглянемо розв'язок $\xi(t)$ системи (3.28), (3.29) зі значеннями у множині E_0. Він рівномірно асимптотично стійкий у просторі X^α. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ й $T(\varepsilon) > 0$, що для кожного розв'язку $w(t)$ системи (3.28), (3.29) із $\|\xi(0) - w(0)\|_\alpha < \delta$ виконується $\|\xi(t) - w(t)\|_\alpha < \varepsilon/2$ для $t \geq 0$ і $\|\xi(t) - x(t)\|_\alpha < \delta_1/2$ для всіх $t \geq T(\varepsilon)$, $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$.

Нехай $\{\nu_m\}$ — така довільна послідовність дійсних чисел, що $\nu_{m+1} > \nu_m$, $\nu_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Оскільки система майже періодична, існує підпослідовність (яку знову позначимо $\{\nu_m\}$), для якої виконуються такі умови:

- a$_{1)}$ існують послідовність цілих чисел $\alpha(m)$ (див. [61]), майже періодичні послідовності $\{\tilde{D}_i\}$, $\{\tilde{P}_i\}$ й послідовність дійсних чисел із рівномірно майже періодичними різницями $\{\tilde{\tau}_i\}$, такі, що $\lim_{m\to\infty}(\tau_{i+\alpha(m)} - \nu_m) = \tilde{\tau}_i$, $\lim_{m\to\infty} D_{i+\alpha(m)} = \tilde{D}_i$, $\lim_{m\to\infty} P_{i+\alpha(m)} = \tilde{P}_i$ рівномірно відносно $i \in \mathbb{Z}$;
- a$_{2)}$ $F(t + \nu_m, w)$ прямує до деякої функції $\tilde{F}(t, w)$ у W-топології рівномірно відносно w з обмеженої області $\|w\|_\alpha \leq K$;
- a$_{3)}$ $\xi_0^m = \xi(\nu_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента ζ_0 (оскільки траєкторія $\xi(t)$ передкомпактна в X^α).

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t + \nu_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \tag{3.44}$$

$$w(\tau_j - \nu_m + 0) = w(\tau_j - \nu_m) + G_j(w(\tau_j - \nu_m)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.45}$$

і $\xi^m(t)$ рівномірно асимптотично стійкий із тими ж $\delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, як і $\xi(t)$.

Позначимо $\tau_j - \nu_m = \tau^m_{j-\alpha(m)}$. Нехай $j - \alpha(m) = i$, тоді $j = i + \alpha(m)$ і система (3.44), (3.45) набуває вигляду

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \tag{3.46}$$

$$w(\tau^m_i + 0) = w(\tau^m_i) + G_{i+\alpha(m)}(w(\tau^m_i)), \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{3.47}$$

Аналогічно позначимо $\tau_j - \nu_n = \tau^n_{j-\alpha(n)}$. Нехай $j - \alpha(n) = i$, тоді $j = i + \alpha(n)$ і розв'язок $\xi^n(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_n, w), \tag{3.48}$$

$$w(\tau^n_i + 0) = w(\tau^n_i) + G_{i+\alpha(n)}(w(\tau^n_i)), \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{3.49}$$

З умов $\mathrm{a}_{1)} - \mathrm{a}_{3)}$ випливає, що для додатного δ_1 існує таке натуральне N_1, що при $m, n \geq N_1$ виконується

$$\begin{aligned} &\left|\tau^m_i - \tau^n_i\right| < \delta_1, \quad \left\|G_{i+\alpha(m)}(w) - G_{i+\alpha(n)}(w)\right\|_\alpha < \delta_1, \\ &\rho\big(F(. + \nu_m, w), F(. + \nu_n, w)\big) < \delta_1 \end{aligned} \tag{3.50}$$

рівномірно відносно $i \in \mathbb{Z}$ і $\|w\|_\alpha \leq K$ з деяким $K > 0$.

Нехай $\eta(t)$ — розв'язок рівняння (3.46), (3.47) з початковою умовою $\eta(0) = \xi^n(0) = \xi(\nu_n)$. Існує таке $N > 0$, що $\|\xi^m(0) - \xi^n(0)\|_\alpha < \delta$ при $m,\ n \geq N$. Тоді з рівномірної асимптотичної стійкості отримуємо $\big\|\eta(t) - \xi^m(t)\big\|_\alpha < \varepsilon/2$ при $t \geq 0$ і $\|\eta(t) - \xi^m(t)\|_\alpha < \delta/2$ при $t \geq T(\varepsilon)$.

Оцінимо $\eta(t) - \xi^n(t)$ на інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$. Припустимо для визначеності, що $\tau^m_1 < \tau^n_1$. При виконанні (3.50) на інтервалі $[0, \tau^m_1]$ різниця $\eta(t) - \xi^n(t)$ задовольняє оцінки

$$\begin{aligned} &\big\|\eta(t) - \xi^n(t)\big\|_\alpha \leq \\ &\leq \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s + \nu_m, \eta(s)) - F(s + \nu_m, \xi^n(s))\big)\big\|_0\, ds + \\ &+ \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s + \nu_m, \xi^n(s)) - F(s + \nu_n, \xi^n(s))\big)\big\|_0\, ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{F_w L_0 C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} \big\|\eta(s) - \xi^n(s)\big\|_\alpha \, ds + \delta_1 \int\limits_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} \, ds \leq$$

$$\leq F_w L_0 C_\alpha \int\limits_0^t \frac{\big\|\eta(s) - \xi^n(s)\big\|_\alpha}{(t-s)^\alpha} \, ds + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}. \tag{3.51}$$

За лемою 3.1 існує така стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, Q, F_w)$, що

$$\big\|\eta(t) - \xi^n(t)\big\|_\alpha \leq \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha} \tilde{C} = \Lambda_1(\delta_1), \quad t \in [0, \tau_1^m].$$

Оцінимо різницю в точці $t = \tau_1^n + 0$:

$$\big\|\eta(\tau_1^n + 0) - \xi^n(\tau_1^n + 0)\big\|_\alpha \leq \Bigg\| A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)} \big(D_1 \eta(\tau_1^m) + Q_1\big) \; +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s + \nu_m, \eta(s)) \, ds - D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)} \xi^n(\tau_1^m) -$$

$$- A_\alpha Q_1 - \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s + \nu_n, \xi^n(s)) \, ds \Bigg\|_0 \leq$$

$$\leq dC_0 e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)} \big\|\eta(\tau_1^m) - \xi^n(\tau_1^m)\big\|_\alpha +$$

$$+ (1+d) F_0 \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} \frac{C_\alpha e^{-\beta(\tau_1^n - s)}}{(\tau_1^n - s)^\alpha} ds + \big\|A_1^\alpha (e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)} - I) Q_1\big\|_0 \leq$$

$$\leq dC_0 \Lambda_1(\delta_1) + \frac{(1+d) F_0 C_\alpha}{1-\alpha} \delta_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} C_{1-\alpha_1} \delta_1^{\alpha_1} \|Q_1\|_{\alpha+\alpha_1} =$$

$$= \tilde{\Lambda}_2(\delta_1), \tag{3.52}$$

де $\tilde{\Lambda}_2(s) \to 0$ при $s \to 0$.

На інтервалі $t \in \big(\tau_1^n, \min\{\tau_2^m, \tau_2^n\}\big]$ різниця задовольняє нерівність

$$\big\|\eta(t) - \xi^n(t)\big\|_\alpha \leq \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_1^n)} \big(\eta(\tau_1^n + 0) - \xi^n(\tau_1^n + 0)\big)\big\|_0 +$$

$$+ \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} \big(F(s + \nu_m, \eta(s)) - F(s + \nu_n, \xi^n(s))\big)\big\|_0 ds \leq$$

$$\leq C_0\tilde{\Lambda}_2(\delta_1) + F_w L_0 C_\alpha \int\limits_0^t \frac{\left\|\eta(s) - \xi^n(s)\right\|_\alpha}{(t-s)^\alpha} ds + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}$$

і за лемою 3.1 оцінку

$$\left\|\eta(t) - \xi^n(t)\right\|_\alpha \leq \left(C_0\tilde{\Lambda}_2(\delta_1) + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha} \right) \tilde{C} = \Lambda_2(\delta_1).$$

Аналогічно (3.52) отримуємо

$$\left\|\eta(\max\{\tau_2^m, \tau_2^n\} + 0) - \xi^n(\max\{\tau_2^m, \tau_2^n\} + 0)\right\|_\alpha \leq$$
$$\leq dC_0\Lambda_2(\delta_1) + \frac{(1+d)F_0 C_\alpha}{1-\alpha} \delta_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} C_{1-\alpha_1} \delta_1^{\alpha_1} \|Q_2\|_{\alpha+\alpha_1} = \tilde{\Lambda}_3(\delta_1),$$

де $\tilde{\Lambda}_3(s) \to 0$ при $s \to 0$.

На інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$ не більш ніж $T(\varepsilon)/\theta + 1$ точок імпульсної дії. Проводячи аналогічне оцінювання, показуємо, що існують такі функції $\Lambda_j(\delta_1)$, що $\Lambda_j(s) \to 0$ при $s \to 0$ і

$$\left\|\eta(t) - \xi^n(t)\right\|_\alpha \leq \Lambda_j(\delta_1), \quad t \in \left(\max\left\{\tau_{j-1}^m, \tau_{j-1}^n\right\}, \min\left\{\tau_j^m, \tau_j^n\right\}\right],$$

для $j = 1, 2, \ldots, T(\varepsilon)/\theta + 1$. Припускаємо, що $\tau_0^m = \tau_0^n = 0$. Виберемо δ_1 так, щоб $\Lambda_j(\delta_1) < \delta/2$ для всіх j.

Отже, існує таке натуральне N_1, що для всіх $m, n \geq N_1$ виконується $\rho(\eta(.), \xi^n(.)) < \delta/2$ на інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$. Тому $\rho(\xi^m(.), \xi^n(.)) < \varepsilon$ при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ і $\left\|\xi^m(T(\varepsilon)) - \xi^n(T(\varepsilon))\right\|_\alpha < \delta$. Розглядаючи точку $t = T(\varepsilon)$ як початкову й повторюючи наведене вище оцінювання, отримуємо аналогічні нерівності на інтервалі $[T(\varepsilon), 2T(\varepsilon)]$ і в точці $t = 2T(\varepsilon)$. Повторюючи таку ж процедуру на наступних інтервалах $\left[2T(\varepsilon), 3T(\varepsilon)\right]$, $\left[3T(\varepsilon), 4T(\varepsilon)\right]$ і т. д., у підсумку одержуємо $\rho(\xi^m(.), \xi^n(.)) < \varepsilon$ при $t \geq 0$ і $m, n \geq N_1$.

Ми довели збіжність у W-топології на півосі $t \geq 0$ послідовності функцій $\xi(t + \nu_n)$ зі значеннями у просторі X^α. Позначимо через $p(t)$, $t \geq 0$, граничну функцію. Використовуючи стандартний діагональний метод і вибираючи, якщо необхідно, підпослідовності послідовності $\{\nu_n\}$, продовжуємо функцію $p(t)$ на всю вісь так, що $\xi(t+\nu_n)$ збігається до $p(t)$ у W-топології на компактних інтервалах.

Покажемо, що функція $p(t)$ W-майже періодична. За побудовою функція $p(t)$ має послідовність розривів $\{\tilde{\tau}_j\}$, яка має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T_1 = T_1(\varepsilon)$, що множина

$$\left\{\tau\colon \sup_{t\geq T_1(\varepsilon)} \left\|\xi(t+\tau)-\xi(t)\right\|_\alpha < \varepsilon,\ |t-\tau_k| > \varepsilon\right\} \tag{3.53}$$

відносно щільна в $\mathbb{R}$. Дійсно, якщо множина (3.53) не є відносно щільною для деякого $\varepsilon_0 > 0$, то для довільного $T_1(\varepsilon_0)$ існує послідовність таких інтервалів $[h_n - l_n, h_n + l_n]$, що

$$\sup_{t\geq T_1(\varepsilon_0), |t-\tau_k|\geq\varepsilon_0} \left\|\xi(t+\tau)-\xi(t)\right\|_\alpha \geq \varepsilon_0$$

для всіх $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$. Виберемо довільне l_1 і $l_n > \max_{m<n} h_m$, тоді $h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Тому

$$\sup_{t\geq 0, |t+h_m-\tau_k|\geq\varepsilon_0} \left\|\xi(t+h_n)-\xi(t+h_m)\right\|_\alpha = \\ = \sup_{t\geq h_m, |t-\tau_k|\geq\varepsilon_0} \left\|\xi(t)-\xi(t+h_n-h_m)\right\|_\alpha \geq \varepsilon_0. \tag{3.54}$$

За доведеним вище послідовність $\{h_n\}$ має таку підпослідовність $\{h_{n_k}\}$, що послідовність функцій $\{\xi(t+h_{n_k})\}$ збіжна в W-топології на півосі $t \geq 0$. Це суперечить нерівності (3.54).

Тепер покажемо, що гранична функція $p(t)$ задовольняє нерівність $\left\|p(t+\tau)-p(t)\right\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t-\tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Вибираючи ν_n з достатньо великим n, отримуємо нерівність $\left\|\xi(t+\nu_n+\tau)-\xi(t+\nu_n)\right\|_\alpha < \varepsilon$ для $t \geq T(\varepsilon)-\nu_n, t+\tau \geq T_1(\varepsilon)-\nu_n$ і $|t+\theta_n-\tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Зафіксуємо t, τ і виберемо достатньо велике n так, що виконуються останні нерівності. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\left\|p(t+\tau)-p(t)\right\|_\alpha < \varepsilon$. Ця нерівність виконується для $t \in \mathbb{R}$, $|t-\tilde{\tau}_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε-майже періодів τ. Отже, функція $p(t)$ W-майже періодична.

Виберемо таку послідовність дійсних чисел $\{\theta_k\}$, що $\theta_{k+1} > \theta_k$ і $\theta_k \to \infty$, $k \to \infty$, і виконуються умови:

a$'_1$) існує послідовність $\tilde{\alpha}(m)$ така, що $\lim_{m\to\infty}(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m) = \tau_i$, $\lim_{m\to\infty} D_{i+\tilde{\alpha}(m)} = D_i$, $\lim_{m\to\infty} P_{i+\tilde{\alpha}(m)} = P_i$ рівномірно відносно $i \in \mathbb{Z}$;

a$'_2$) $F(t+\theta_m, w)$ прямує до $F(t,w)$ у W-топології рівномірно відносно $w, \|w\|_\alpha \le K$;

a$'_3$) $\xi(\theta_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента $\tilde{\zeta}_0$.

Позначимо через $p_*(t)$ побудовану за цією послідовністю W-майже періодичну функцію $\mathbb{R} \to X^\alpha$. Доведемо, що вона задовольняє рівняння (3.28), (3.29). Функція $p_*(t)$ будується як границя послідовності функцій $\tilde{\xi}(t+\theta_m)$, які задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}
&\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t+\theta_m, w),\\
&w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m + 0) =\\
&= w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m) + G_{i+\tilde{\alpha}(m)}\big(w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m)\big), \quad i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Виберемо відрізок $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, який не містить точок імпульсів τ_i і точок $\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m$ при досить великих m. На відрізку $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ розв'язок $\tilde{\xi}(t+\theta_m)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\tilde{\xi}(t+\theta_m) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)}\tilde{\xi}(\bar{t}_1+\theta_m) + \int\limits_{\bar{t}_1}^{t} e^{-A_1(t-s)} F\big(s+\theta_m, \tilde{\xi}(s+\theta_m)\big)\, ds.$$

Переходячи в останньому рівнянні до границі при $m \to \infty$, отримуємо інтегральне рівняння для $p_*(t)$:

$$p_*(t) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)} p_*(\bar{t}_1) + \int\limits_{\bar{t}_1}^{t} e^{-A_1(t-s)} F(s, p_*(s))\, ds.$$

За лемою 3.3.2 з [8] неперервний розв'язок $(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \to X^\alpha$ цього інтегрального рівняння є класичним розв'язком рівняння (3.28), (3.29) у банаховому просторі X. Аналогічно [33] показуємо, що якщо α задовольняє нерівності

$$2\alpha - n/p \geq \nu > 0, \quad \alpha < 1, \tag{3.55}$$

то задача без імпульсів (3.8), (3.9) із початковою функцією $w_0 \in X^\alpha, w_0(.) \geq 0$, має єдиний класичний розв'язок $(u(t,x), v(t,x))$, який існує для всіх $t > 0$. Імпульсні умови виконано за побудовою. При виконанні нерівностей (3.55) простір X^α неперервно вкладений у простір C^ν. Отже, розв'язок $p_*(t)$ є W-майже періодичним як функція $\mathbb{R} \to C(\Omega)$.

Теорему 3.12 доведено.

3.2. Майже періодичні розв'язки системи Лотки – Вольтерра з дифузією й нефіксованими моментами імпульсної дії

У даному підрозділі знайдено умови існування і стійкості строго додатного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи рівнянь (3.8) – (3.12) із нефіксованими моментами імпульсної дії. Поряд із нею ми розглянемо множину систем із імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Для кожної з таких систем у попередньому підрозділі побудовано строго додатнозначні кусково-неперервні майже періодичні розв'язки. Далі, аналогічно до розділу 2, використовуючи ці майже періодичні розв'язки, буде побудовано деяке відображення у просторі майже періодичних послідовностей зі значеннями у просторі функцій, означених на Ω. Нерухома точка цього відображення відповідає майже періодичному розв'язку системи (3.8) – (3.12). Також ми дослідимо стійкість отриманого майже періодичного розв'язку. З розділу 2 використовуватимемо означення стійкості для розв'язків системи з нефіксованими моментами імпульсної дії, де враховано відмінність точок розриву різних розв'язків системи рівнянь.

Викладені у підрозділі результати отримано в [6].

3.2.1. Означення й допоміжні твердження

Розглядатимемо систему (3.8) – (3.12) із умовами (H1) – (H3).

Вектор-функція $(u(t,x), v(t,x))$ є класичним розв'язком системи без імпульсів (3.8) – (3.10), якщо вона двічі неперервно диференційовна за $x \in \Omega$, неперервно диференційовна за $x \in \bar{\Omega}$, неперервно диференційовна за $t > 0$ й задовольняє систему (3.8), (3.9) і крайові умови (3.10).

Означення 3.13. Вектор-функція $(u, v) \colon \Omega \times [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^2$, де $\alpha > 0$, є розв'язком імпульсної системи (3.8) – (3.12), якщо виконуються такі умови:

а) множина $T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha],\ t = \tau_k(u(t, .), v(t, .))$ для деякого $k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

б) при $t \notin T$ функція (u, v) є класичним розв'язком системи без імпульсів (3.8) – (3.10);

в) для $t \in T$ функція (u, v) задовольняє умови (3.11), (3.12).

Якщо додатково функція (u, v) задовольняє умову

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad v(t_0, x) = v_0(x), \tag{3.56}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (3.8) – (3.12), (3.56).

Перепишемо систему (3.8) – (3.12) у абстрактній формі. Позначимо $w = (u, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) = X$, де $p > n$ — натуральне число. Норму в просторі $X = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ позначатимемо $\|.\|_0$.

Запишемо систему (3.8) – (3.12), (3.56) у вигляді

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t, w), \quad t \neq \tau_j(w(t)), \tag{3.57}$$

$$w(t+0) = w(t) + G_j(w(t)), \qquad t = \tau_j(w(t)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.58}$$

$$w(0) = w_0, \tag{3.59}$$

де A_1, $F(t, w)$ й $G_j(w(t))$ визначено відповідно за (3.31)–(3.33).

Оператор A_1 має область визначення (3.34).

Аналогічно до [33] показуємо, що коли початкова функція задовольняє умову $w_0 \in X^\alpha$, $w_0 \geq 0$, тоді задача без імпульсів (3.8) – (3.10), (3.56) має єдиний класичний розв'язок $(u(t,x), v(t,x))$, який існує для всіх $t > 0$. При виконанні нерівностей (3.37) простір X^α неперервно вкладений у C^ν. Тому якщо $w \in X^\alpha$, $\|w\|_\alpha \leq \rho_1$ для деякого $\rho_1 > 0$, то $w = (u, v) \in C^\nu$ і $\|w\|_C = \max\{\|u\|_C, \|v\|_C\} \leq \rho$.

Розв'язок початкової задачі (3.59) рівняння (3.57), (3.58) задовольняє інтегральне рівняння (3.38).

Означення 3.14. Розв'язок $w_0(t)$ рівняння (3.57), (3.58), означений для всіх $t \geq t_0$, $\tau_j(w_0(t_0)) \neq t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим у просторі X^α, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$, що інший довільний розв'язок $w(t)$ з початковою умовою $\|w_0(t_0) - w(t_0)\|_\alpha < \delta$ задовольняє нерівність $\left\|w_0(t) - w(t)\right\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх таких $t \geq t_0$, що $\left|t - \tau_j^0\right| > \eta$, де τ_j^0 — точки, в яких розв'язок $w_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(w)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $w_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для кожних $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, існує $T = T(\varepsilon, \eta) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $w(t)$ системи з початковими значеннями $\|w_0(t_0) - w(t_0)\|_\alpha < \delta_0$ виконується нерівність $\|w_0(t) - w(t)\| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $\left|t - \tau_j^0\right| > \eta$.

При дослідженні стійкості розв'язків імпульсних еволюційних рівнянь використаємо одну з версій узагальненої нерівності Гронуолла [42].

Лема 3.15. *Нехай $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $b > 0$, α, $\beta \in [0, 1)$, $Q \in (0, \infty)$ і локально інтегровна на $0 \leq t \leq Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє* *на цьому інтервалі нерівність*

$$y(t) \le a_1 + a_2 t^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta} y(s)ds.$$

Тоді існує така додатна стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\beta, b, Q) < \infty$, *що*

$$y(t) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{(1-\alpha)t^\alpha}\right)\tilde{C}(\beta, b, Q) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{t^\alpha}\right)\tilde{C}_1,$$

де $\tilde{C}_1 = \tilde{C}(\beta, b, Q)/(1-\alpha)$.

Доведення. З доведення леми 7.1.1 з [42, с. 188] випливає таке: якщо невід'ємна локально інтегровна на $0 \le t < Q$ функція $y(t)$ задовольняє нерівність

$$y(t) \le a(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)ds$$

із локально інтегровною функцією $a(t) \ge 0$ й додатною сталою b, то $y(t)$ задовольняє також

$$y(t) \le a(t) + \int_0^t \left\{\sum_{n=1}^\infty (b\Gamma(\beta))^n (t-s)^{n\beta-1}/\Gamma(n\beta)\right\} a(s)ds, \tag{3.60}$$

де $\Gamma(\beta)$ — гама-функція.

Якщо $a(t) = a_1 = const$, то, використовуючи (3.60), отримуємо

$$y(t) \le a_1 + a_1\sum_{n=1}^\infty \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} t^{n\beta}(n\beta)^{-1}.$$

Якщо $a(t) = a_2 t^{-\alpha}$, то

$$y(t) \le a_2 t^{-\alpha} + \frac{a_2 t^{-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{n=1}^\infty \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} t^{n\beta} 2^{\alpha-n\beta}\left(1 + \frac{1-\alpha}{n\beta}\right).$$

Отже, в якості функції $\tilde{C}$ можна обрати

$$\tilde{C} = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} Q^{n\beta} \max\{(n\beta)^{-1}, 2^{1-n\beta}(1 + (n\beta)^{-1})\}.$$

Відмітимо також, що нерівність у лемі 3.15 можна переписати так:

$$y(t) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{t^\alpha}\right)\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_1 = \frac{\tilde{C}(\beta, b, Q)}{1-\alpha}. \tag{3.61}$$

Лему доведено.

За означенням норми в просторі X^α з формули (3.38) отримуємо

$$\|w(t,w_0)\|_\alpha \le \left\|e^{-A_1(t-t_0)}\right\|_0 \|w_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s,w(s))\right\|_0 ds +$$
$$+ \sum_{t_0<\theta_j<t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\theta_j)} (D_j w(\theta_j) + Q_j)\right\|_0 .$$

Розв'язок $w(t,w_0)$ з $w_0 = (u_0,v_0) \in X^\alpha$, $\|w_0\|_C = \max\{\|u_0\|_C, \|v_0\|_C\} \le \le M_0$ за лемою 3.7 обмежений у рівномірній нормі $\|w(t,w_0)\|_C \le M_0$, $t \ge t_0$. Покажемо, що він обмежений і в X^α-нормі. Для $t \in [\theta_k - \theta/2, \theta_k]$ виконується $(t-\theta_j)^{-1} \le 2/\theta$, $j<k$. З останньої нерівності й (3.35) отримуємо оцінку для $t \in [\theta_k - \theta/2, \theta_k]$:

$$\|w(t,w_0)\|_\alpha \le C_0 e^{-\beta(t-t_0)} \|w_0\|_\alpha + C_\alpha F_0 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} ds +$$
$$+ C_\alpha (dM_0 + q)(2/\theta)^\alpha \sum_{t_0<\theta_j<t} e^{-\beta(t-\theta_j)} \le \tilde{N}_0,$$

де $F_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}, \|w\|_C \le \rho} \|F(s,w)\|_0$.

Отже, $\|w(\theta_j,w_0)\|_\alpha \le \tilde{N}_0$ для всіх натуральних j. З (3.58) отримуємо $\|w(\theta_j+0,w_0)\|_\alpha \le d\tilde{N}_0 + q$. Звідси випливає $\|w(t,w_0)\|_\alpha \le \tilde{N}_1$, $t \ge t_0$, з деякою додатною сталою $\tilde{N}_1$. З обмеженості множини у просторі X^β випливає її компактність у просторі X^α, $\alpha < \beta$. Тому траєкторії $w(t)$ передкомпактні в X^α, $\alpha > 0$.

Отже, існує таке $\rho_1 > 0$, що $\|w\|_\alpha \le \rho_1$ для всіх $w \in C(\Omega) \cap X^\alpha$ з $\|w\|_C \le \rho$.

Тепер оцінимо розв'язок у нормі $\|.\|_1$. Скористаємося такими оцінками. З [42] (Theorem 3.5.2) випливає, що для кожного $\mu \in [0,1)$ існує додатна стала $\tilde{K}_2$, яка не залежить від $w_0 = w(\theta_j+0)$, $\|w_0\|_\alpha \le \rho_1$, така, що

$$\left\|\frac{d}{ds} w(s,w_0)\right\|_\mu \le \tilde{K}_2 (s-\theta_j)^{\alpha-\mu-1}, \qquad s \in (\theta_j, \theta_{j+1}], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Відповідно для $s \in [\theta_j + \theta/2, \theta_{j+1}]$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{dw(s,w_0)}{ds}\right\|_\alpha \leq \frac{2\tilde{K}_2}{\theta}. \tag{3.62}$$

З (3.57) отримуємо

$$\|w(\theta_j,w_0)\|_1 = \|A_1 w(\theta_j,w_0)\|_0 \leq$$
$$\leq \left\|\frac{dw(\theta_j,w_0)}{dt}\right\|_0 + \sup_{t\in\mathbb{R},\|w\|_C\leq\rho}\|F(t,w)\| \leq \frac{2\tilde{K}_2}{\theta} + F_0 = \tilde{N}_2. \tag{3.63}$$

3.2.2. Існування, єдиність і асимптотична стійкість

Теорема 3.16. *Нехай виконуються умови (H1) – (H3), а також:*

– система з фіксованими моментами імпульсної дії (3.8) – (3.12) при $r_j \equiv 0$, $j \in \mathbb{Z}$, задовольняє умови леми 3.8 і теореми 3.11 і виконується нерівність $\rho \geq M_0$;

– для кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується одна з умов

$$r_k \leq 0, \quad d_{jk} \geq 0, \quad q_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.64}$$

$$r_k \geq 0, \quad d_{jk} \leq 0, \quad q_{jk} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3.65}$$

Тоді при достатньо малому $r = \sup_j |r_j|$ система рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії (3.8) – (3.12) має в області $U_\rho \times U_\rho$ єдиний додатнозначний кусково-неперервний W-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$.

Для кожного $t_0 \in \cup_{j\in\mathbb{Z}}(\theta_j, \theta_j + \theta/2]$ як початкової точки W-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$ асимптотично стійкий.

Доведення. 1. Розглянемо майже періодичну послідовність

$$y_k(x) = (u_k(x), v_k(x))$$

функцій $\|u_k(x)\|_C \leq \rho$, $\|v_k(x)\|_C \leq \rho$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді числова послідовність $\{\tau_k(y_k)\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць і задовольняє умову розділеності (3.13), а система (3.8) – (3.10) з імпульсною дією

$$u(\tau_k(y_k)+0,x)-u(\tau_k(y_k),x)=d_{1k}u(\tau_k(y_k),x)+q_{1k},$$
$$v(\tau_k(y_k)+0,x)-v(\tau_k(y_k),x)=d_{2k}v(\tau_k(y_k),x)+q_{2k},\quad k\in\mathbb{Z},$$

у фіксовані моменти часу $t=\tau_k(y_k)$ задовольняє умови лем 3.7 і 3.8. Тому система перманентна з деякими додатними сталими m_0 і M_0. З доведень лем 3.7 і 3.8 випливає, що сталі m_0 і M_0 можна вибрати однаковими для всіх послідовностей $\{y_k\}$ зі значеннями в $U_\rho\times U_\rho$.

При досить малому $r=\sup_k|r_k|$ для всіх таких $y=\{y_k\}$ виконується також і нерівність (3.25). Тому за теоремою 3.12 для кожного такого $y=\{y_k\}$ система має єдиний додатнозначний кусково-неперервний W-майже періодичний розв'язок $(u^*(t,x,y),v^*(t,x,y))$, такий, що $u^*(t,x,y)\in E_0$, $v^*(t,x,y)\in E_0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$, $x\in\Omega$.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину майже періодичних послідовностей $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, де $w_k=(u_k,v_k)$, $w_k\in D(A_1)$, $u_k,v_k\in E_0$. Позначатимемо норму $\|w\|_{\mathfrak{M}}=\sup_k\|w_k\|_\alpha$ елемента $w\in\mathfrak{M}$.

Для $y=\{y_j\}\in\mathfrak{M}$ розглянемо рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dw}{dt}+A_1w=F(t,w),\qquad w(\tau_k^1+0)=(I+D_k)w(\tau_k^1)+Q_k,\qquad(3.66)$$

де послідовність $\tau_k^1=\tau_k(y_k)$, $k\in\mathbb{Z}$, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. За теоремою 3.12 рівняння (3.66) має рівномірно асимптотично стійкий W-майже періодичний розв'язок $w^*(t,y)$. Крім того, $w^*(t,y)(x)=(u^*(t,x,y),v^*(t,x,y))\in E_0\times E_0$. Послідовність $S(y)=\{w^*(\tau_j(y_j),y)\}$, $j\in\mathbb{Z}$, майже періодична й, за побудовою, $S(y)\in\mathfrak{M}$. Легко бачити, що $w^*(.,y^*)\colon\mathbb{R}\to X^\alpha$ є шуканим W-майже періодичним розв'язком рівняння (3.57) – (3.58) тоді й тільки тоді, коли відсутні биття (кожну поверхню імпульсів розв'язок перетинає не більше одного разу) й

$$w^*\left(\tau_j(y_j^*),y^*\right)=y_j^*,\quad j\in\mathbb{Z},$$

тобто $S(y^*) = y^*$. Покажемо, що при досить малому $r = \sup_j |r_j|$ відображення $S\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є відображенням стиску.

Виберемо дві послідовності $y = \{y_k\}$, $y_k = (y_{k1}, y_{k2})$ і $z = \{z_k\}$, $z_k = (z_{k1}, z_{k2})$, з множини $\mathfrak{M}$ і побудуємо зростаючі послідовності дійсних чисел $\tau_k^1 = \tau_k(y_k)$ і $\tau_k^2 = \tau_k(z_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Послідовності $\left\{\tau_k^1\right\}$ і $\left\{\tau_k^2\right\}$ мають рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Позначатимемо $\tau_k' = \min\left\{\tau_k^1, \tau_k^2\right\}$, $\tau_k'' = \max\left\{\tau_k^1, \tau_k^2\right\}$.

Оцінимо $\left|\tau_k^2 - \tau_k^1\right|$. З умови (H3) (с. 79) випливає

$$\begin{aligned}
&\left|\tau_k^2 - \tau_k^1\right| = |\tau_k(z_k) - \tau_k(y_k)| \le \\
&\le |r_k| \left| \int\limits_\Omega \left(y_{k1}^2(x) + y_{k2}^2(x)\right) dx - \int\limits_\Omega \left(z_{k1}^2(x) + z_{k2}^2(x)\right) dx \right| \le \\
&\le |r_k| \int\limits_\Omega |(y_{k1}(x) - z_{k1}(x))(y_{k1}(x) + z_{k1}(x))|\, dx + \\
&+ |r_k| \int\limits_\Omega |(y_{k2}(x) - z_{k2}(x))(y_{k2}(x) + z_{k2}(x))|\, dx \le \\
&\le |r_k| \left(\|y_{k1} - z_{k1}\|_0 \|y_{k1} + z_{k1}\|_{L^q} + \|y_{k2} - z_{k2}\|_0 \|y_{k2} + z_{k2}\|_{L^q}\right) \le \\
&\le 4|r_k| \rho |\Omega|^{1/q} \|y_k - z_k\|_0 \le \\
&\le 4|r_k| \rho L_0 |\Omega|^{1/q} \|y_k - z_k\|_\alpha = r N_1 \|y - z\|_{\mathfrak{M}}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

з деякою сталою N_1, що не залежить від k й y, z. Через $|\Omega|$ позначено міру множини Ω, $1/p + 1/q = 1$.

Поряд із (3.66) розглянемо рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t, w), \quad w(\tau_k^2 + 0) = (I + D_k) w\left(\tau_k^2\right) + Q_k. \tag{3.68}$$

Рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії (3.66) і (3.68) мають рівномірно асимптотично стійкі W-майже періодичні розв'язки $w^*(t, y) = (u_1^*, v_1^*)$ і $w^*(t, z) = (u_2^*, v_2^*)$ відповідно. Оцінимо

$$\|S(y) - S(z)\|_{\mathfrak{M}} = \sup_j \|w^*(\tau_j(y_j), y) - w^*(\tau_j(z_j), z)\|_\alpha .$$

Різниця $w^*(t,y) - w^*(t,z)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dw}{dt} + (A_1 + \tilde{A}(t))w = 0, \tag{3.69}$$

$$w(\tau_k^1 + 0) = (I + D_k)w(\tau_k^1) + D_k w^*(\tau_k^1, z) + Q_k,$$
$$w(\tau_k^2 + 0) = w\left(\tau_k^2\right) - D_k w^*(\tau_k^2, z) - Q_k, \tag{3.70}$$

де

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \beta - b_1\left(u_1^* + u_2^*\right) - c_1 v_1^* & -c_1 u_2^* \\ -b_2 v_2^* & a_2 + \beta - c_2\left(v_1^* + v_2^*\right) - b_2 u_1^* \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $V(t,s)$, $t \geq s$, еволюційний оператор лінійного однорідного рівняння без імпульсів (3.69). За теоремою 7.1.3 з [42] еволюційний оператор $V(t,s)$ на інтервалі $[t_0, t_1]$ задовольняє оцінки

$$\|V(t,\tau)x\|_\gamma \leq \frac{\tilde{K}_1}{1-\gamma}\,(t-\tau)^{(\gamma_1-\gamma)_-}\|x\|_{\gamma_1},$$
$$\gamma < 1, \quad (\gamma_1 - \gamma)_- = \min\{\gamma_1 - \gamma, 0\}, \tag{3.71}$$

$$\|V(t,\tau)x - x\|_\gamma \leq \frac{\tilde{K}_1}{(1-\gamma)\gamma_1}(t-\tau)^{\gamma_1}\|x\|_{\gamma+\gamma_1},$$
$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma + \gamma_1 \leq 1, \tag{3.72}$$

де стала $\tilde{K}_1$ залежить тільки від A_1, α, $Q \geq t_1 - t_0$ і $\sup \tilde{A}(t)$. Рівняння з імпульсною дією

$$\frac{dw}{dt} + \left(A_1 + \tilde{A}(t)\right)w = 0, \; w(\tau_k^1 + 0) = (I + D_k)w(\tau_k^1), \; k \in \mathbb{Z}, \tag{3.73}$$

має еволюційний оператор

$$U(t,s) = V\left(t, \tau_k^1\right)(I + D_k)V\left(\tau_k^1, \tau_{k-1}^1\right)\ldots(I + D_m)V\left(\tau_m^1, s\right)$$

для $\tau_{m-1}^1 < s \leq \tau_m^1 < \ldots < \tau_k^1 < t \leq \tau_{k+1}^1$.

Оператор $U(t,s)$ задовольняє оцінку

$$\|U(t,s)w\|_0 \leq M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|w\|_0, \quad t \geq s. \tag{3.74}$$

Для доведення розглянемо ненульовий розв'язок $w(t) = U(t,t_0)w_0$ рівняння (3.73). Аналогічно доведенню теореми 3.11 показуємо, що функція $\mathcal{A}_p(t) = \|w(t)\|^p_{L_p(\Omega)}$ задовольняє оцінки

$$\mathcal{A}_p(t) \le \mathcal{A}_p(\tau^1_{j-1}+0)\exp\left\{p\left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0\right)(t-\tau^1_{j-1})\right\},$$
$$t \in (\tau^1_{j-1}, \tau^1_j],$$
$$\mathcal{A}_p(\tau^1_j + 0) \le \max\{(1+d_{1j})^p, (1+d_{2j})^p\}\mathcal{A}_p(\tau^1_j) = K^p_j \mathcal{A}_p(\tau^1_j).$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathcal{A}_p(t) \le \prod_{t_0 \le \tau^1_j < t} K^p_j e^{p\left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0\right)(t-t_0)}\mathcal{A}_p(\tau_0).$$

При виконанні нерівності (3.25) випливає експоненціальна оцінка з показником

$$\beta_1 < -(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0 + \sigma)$$

у всіх просторах $L^p(\Omega)$ з $p > 1$ і як наслідок оцінка в sup-нормі. Додатну сталу β в означенні оператора A_1 вибираємо з умови $\beta < \beta_1$.

З нерівностей (3.71) і (3.74) отримуємо оцінку для $t \in (\tau^1_m, \tau^1_{m+1}]$ у нормах інтерполяційних просторів X^γ :

$$\|U(t,t_0)w_0\|_\gamma \le M_2(t-\tau_m)^{(\gamma_1-\gamma)_-}e^{-\beta_1(t-t_0)}\|w_0\|_{\gamma_1}, \tag{3.75}$$

де $\gamma < 1$, $(\gamma_1 - \gamma)_- = \min\{\gamma_1 - \gamma, 0\}$, M_2 — додатна стала.

Тому рівняння (3.69) – (3.70) має єдиний обмежений на осі розв'язок, який співпадає з $w^*(t,y) - w^*(t,z)$ і задовольняє рівність

$$w^*(t,y) - w^*(t,z) = \sum_{\tau^1_j < t} U(t, \tau^1_j + 0)\left(D_j w^*\left(\tau^1_j, z\right) + Q_j\right) - \\ - \sum_{\tau^2_j < t} U(t, \tau^2_j + 0)\left(D_j w^*\left(\tau^2_j, z\right) + Q_j\right). \tag{3.76}$$

Нехай $t \in (\tau''_m, \tau'_{m+1}]$ для деякого $m \in \mathbb{Z}$. Розглянемо різницю

$$J_j(t) = U\left(t, \tau^1_j + 0\right)\left(D_j w^*(\tau^1_j, z) + Q_j\right) - U\left(t, \tau^2_j + 0\right)\left(D_j w^*(\tau^2_j, z) + Q_j\right)$$

для $j \le m$. Якщо $\tau_j^1 < \tau_j^2$, то

$$\begin{aligned}
&J_j(t) = \\
&= U\left(t, \tau_j^2\right)\left(V\left(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^1, z) + Q_j\right) - D_j w^*(\tau_j^2, z) - Q_j\right) = \\
&= U\left(t, \tau_j^2\right)\left(V\left(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0\right) D_j\left(w^*(\tau_j^1, z) - w^*(\tau_j^2, z)\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(V\left(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0\right) - I\right)\left(D_j w^*(\tau_j^2, z) + Q_j\right)\right).
\end{aligned}$$

З (3.62) і (3.67) випливає оцінка

$$\begin{aligned}
&\left\|w^*(\tau_j^1, z) - w^*(\tau_j^2, z)\right\|_\alpha = \left\| \int\limits_{\tau_j^1}^{\tau_j^2} \frac{d}{ds} w^*(s, z) ds \right\|_\alpha \le \\
&\le \frac{2\tilde{K}_2}{\theta}\left|\tau_j^1 - \tau_j^2\right| \le \frac{2rN_1\tilde{K}_2}{\theta}\|y - z\|_{\mathfrak{M}}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Тому

$$\begin{aligned}
&\|J_j(\tau'_{m+1})\|_\alpha \le \\
&\le \frac{rN_1M_2\tilde{K}_1}{\theta} e^{-\beta_1(\tau'_{m+1} - \tau_j^2)}\left(\frac{2d\tilde{K}_2}{\theta} + d\tilde{N}_2 + \beta q\right)\|y - z\|_{\mathfrak{M}}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Якщо $\tau_j^1 > \tau_j^2$, то

$$\begin{aligned}
&J_j(t) = U\left(t, \tau_j^1 + 0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^1, z) + Q_j - \right. \\
&\left. - (I + D_j)V(\tau_j^1, \tau_j^2)\left(D_j w^*(\tau_j^2, z) + Q_j\right)\right) = \\
&= U(t, \tau_j^1 + 0)\Big(D_j w^*(\tau_j^1, z) - D_j w^*(\tau_j^2 + 0, z) + \\
&+ (I + D_j)(I - V(\tau_j^1, \tau_j^2))(D_j w^*(\tau_j^2, z) + Q_j)\Big).
\end{aligned}$$

Отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|J_j(\tau'_{m+1})\|_\alpha \le \frac{rN_1M_2}{\theta} e^{-\beta_1(\tau'_{m+1} - \tau_j^1)} \times \\
&\times \left(\frac{2d\tilde{K}_2}{\theta} + (1 + d)\tilde{K}_1(d\tilde{N}_2 + \beta q)\right)\|y - z\|_{\mathfrak{M}}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

З (3.76), (3.78) і (3.79) отримуємо

$$\|w^*(\tau'_m, z) - w^*(\tau'_m, y)\|_\alpha \le \frac{r\tilde{K}_4}{1 - e^{-\beta_1\theta}} \|y - z\|_{\mathfrak{M}}$$

і, враховуючи (3.77),

$$\begin{aligned} &\left\|w^*(\tau_m^2, z) - w^*(\tau_m^1, y)\right\|_\alpha \le \\ &\le r\|y - z\|_{\mathfrak{M}} \left(\frac{\tilde{K}_4}{1 - e^{-\beta_1\theta}} + \frac{2\tilde{K}_2 N_1}{\theta}\right) = r\tilde{K}_5 \|y - z\|_{\mathfrak{M}} \end{aligned}$$

з деякими додатними сталими $\tilde{K}_4$ і $\tilde{K}_5$, які не залежать від y і z. При $r\tilde{K}_5 < 1$ $S(z)$ є відображенням стиску й має нерухому точку w^*.

2. Перевіримо, що у множині $U_\rho \times U_\rho$ розв'язки $w(t)$ з початковими значеннями (t_0, w_0), які належать множині

$$W_{j-1}^+ = \{(t, w)\colon w \in U_\rho \times U_\rho, t \in (\tau_{j-1}(w), \tau_{j-1}(w) + \theta/2]\},$$

не мають биття з поверхнею $t = \tau_j(u, v)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо від супротивного, що розв'язок $w(t)$ перетинає поверхню $t = \tau_j(u, v)$ у двох точках t_j^1 і t_j^2, $t_j^1 < t_j^2$. Позначимо $w(t_j^1) = w_1$, $w(t_j^2) = w_2$. Тоді $w(t_j^1 + 0) = w_1 + G_j = w_1 + D_j w_1 + Q_j$, $\tau_j(w_1) = t_j^1$, $\tau_j(w_2) = t_j^2$, і

$$w_2 = e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + G_j) + \int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} e^{-A_1(t_j^2 - s)} F(s, w(s))\, ds.$$

Останню рівність розглядаємо при $p = 2$, тобто у просторі $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Множачи рівняння (3.8) на $u(t, x)$ та інтегруючи, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\right) = \mu_1 \int\limits_\Omega u\Delta u dx + \int\limits_\Omega u^2 (a_1 - b_1 u - c_1 v)\, dx.$$

Тому для невід'ємних розв'язків виконується нерівність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\right) \le a^M \int\limits_\Omega u^2 dx.$$

Як наслідок отримуємо

$$\|w(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{\tilde{a}(t-t_0)}\|w_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \geq 0,$$

де $\tilde{a} = \sqrt{2a^M}$, $a^M = \max\left\{a_1^M, a_2^M\right\}$. Відповідно

$$\|w_2\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{\tilde{a}(t_j^2-t_j^1)}(\|w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|G_j\|_{L^2(\Omega)}).$$

Різниця $t_j^2 - t_j^1$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned}
&t_j^2 - t_j^1 = \tau_j(w_2) - \tau_j(w_1) = \\
&= \tau_j(w_2) - \tau_j\left(e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j)\right) + \\
&+ \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j)\right) - \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)\right) + \\
&+ \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)\right) - \\
&- \tau_j(w_1 + D_j w_1) + \tau_j(w_j + D_j w_1) - \tau_j(w_1). \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

Позначимо $\tilde{w} = e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + G_j)$.

Оцінимо першу різницю в (3.80). Аналогічно (3.67) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left|\tau_j(w_2) - \tau_j(\tilde{w})\right| \leq |r_j| \int\limits_\Omega \left(\|w_2(x)\|^2 - \|\tilde{w}(x)\|^2\right) dx \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/2}\|w_2 - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)} = \\
&= 4r\rho|\Omega|^{1/2}\left\|\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} e^{-A_1(t_j^2-s)}F(s, w(s))ds\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/2}F_0 M_1\left|t_j^2 - t_j^1\right| = r\eta_1\left|t_j^2 - t_j^1\right|,
\end{aligned}$$

де $F_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}, w\in U_\rho\times U_\rho}\|F(t,w)\|_{C(\Omega)}$.

Якщо $w_1 \in D(A_1) \cap (U_\rho \times U_\rho)$, то

$$\begin{aligned}
&\left|\tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}w_1\right) - \tau_j(w_1)\right| \leq |r_j| \int\limits_\Omega \left(\left\|e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}w_1\right\|^2 - \|w_1\|^2\right) dx \leq \\
&\qquad \leq 4r\rho|\Omega|^{1/2}\left\|e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}w_1 - w_1\right\|_{L_2(\Omega)} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq 4r\rho|\Omega|^{1/2}C_0\left|t_j^2-t_j^1\right|\|Aw_1\|_0 \leq$$
$$\leq 4r\rho|\Omega|^{1/2}C_0\tilde{N}_2\left|t_j^2-t_j^1\right| = r\eta_2\left|t_j^2-t_j^1\right|.$$

Позначимо через λ_n і ϕ_n, $n=1,2,\ldots$, власні значення й відповідні власні функції оператора A_1. Тоді $[e^{-A_1 t}u](x)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(u,\phi_k)\phi_k(x)$ і $\|e^{-A_1 t}u\|_{L^2} \leq e^{-\beta t}\|u\|_{L^2}$.

При умові (3.64) виконується

$$\tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1+D_jw_1+Q_j)\right)-\tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1+D_jw_1)\right)\leq 0,$$
$$\tau_j(w_1+D_jw_1)-\tau_j(w_1)\leq 0.$$

При досить малому $r=\sup_j|r_j|$ маємо $r(\eta_1+\eta_2)<1$, а тому

$$0<\left(t_j^2-t_j^1\right)(1-r(\eta_1+\eta_2))\leq \tau_j(w_j+D_jw_1)-\tau_j(w_1)+$$
$$+\tau_j\left(e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}(w_1+D_jw_1+Q_j)\right)-\tau_j(e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}(w_1+D_jw_1))\leq 0.$$

Отримуємо суперечність. При виконанні умов (3.65) отримуємо

$$\tau_j\Big(e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}(w_1+D_jw_1)\Big)-\tau_j(w_1+D_jw_1)=$$
$$=r_j\left(\left\|e^{-A_1\left(t_j^2-t_j^1\right)}(w_1+D_jw_1)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\|w_1+D_jw_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\leq 0,$$
$$\tau_j(w_1+D_jw_1)-\tau_j(w_1)\leq 0,$$

тому $0<(t_j^2-t_j^1)(1-r_j\eta_1)<0$. Суперечність.

3. Тепер покажемо асимптотичну стійкість розв'язку $w^*(t)$ з початковою точкою t_0 з множини $\cup_{j\in\mathbb{Z}}(\tilde{\tau}_j^0,\tilde{\tau}_j^0+\theta/2]$, де $\tilde{\tau}_j^0=\tau_j(w^*(\tilde{\tau}_j^0))$ — моменти перетину розв'язку $w^*(t)$ з поверхнями $\tau_j(w)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $t_0\in(\tilde{\tau}_0^0,\tilde{\tau}_0^0+\theta/2]$. Розглянемо інший розв'язок рівняння $w(t)$ з початковим значенням w_0 з деякого околу точки $w^*(t_0)$, такий, що $w_0\in W_0^+$. За п. 2 доведення розв'язок $w(t)$ не має биття з поверхнями імпульсів.

Виконаємо в рівнянні (3.57), (3.58) заміну змінних $w=w^*+z$. Тоді $z(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dz}{dt}+(A_1+\tilde{A}_1(t))z=\tilde{F}(t,z)$$

й різницеві співвідношення у точках перетину розв'язків $w^*(t)$ і $w(t) = w^*(t) + z(t)$ з поверхнями $\tau_j(w)$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} &z\left(\tilde{\tau}_j^0 + 0\right) = (I + D_j)z(\tilde{\tau}_j^0) - D_j(z(\tilde{\tau}_j^0) + w^*(\tilde{\tau}_j^0)) - Q_j, \\ &z(\tilde{\tau}_j^1 + 0) = z(\tilde{\tau}_j^1) + D_j(z(\tilde{\tau}_j^1) + w^*(\tilde{\tau}_j^1)) + Q_j, \end{aligned} \tag{3.81}$$

де $\tilde{\tau}_j^0 = \tau_j(w^*(\tilde{\tau}_j^0))$, $\tilde{\tau}_j^1 = \tau_j\left(w^*(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1)\right)$,

$$\tilde{A}_1(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \beta - 2b_1u^* - c_1v^* & -c_1u^* \\ -b_2v^* & a_2 + \beta - 2c_2v^* - b_2u^* \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}(t,z) = \begin{pmatrix} -u(b_1(t,.)u + c_1(t,.)v) \\ -v(b_2(t,.)u + c_2(t,.)v) \end{pmatrix}, \qquad w^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що існує неспадна функція K_ξ, $0 \le \xi \le \rho_1$, така, що $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$ й рівномірно за $t \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde{F}(t,z)\|_0 \le K_\xi \|z\|_\alpha, \quad \|z\|_\alpha \le \xi. \tag{3.82}$$

Тому $\sup_{t\in\mathbb{R}, \|z\|_\alpha \le \rho_1} \|\tilde{F}(t,z)\| \le K_{\rho_1}\rho_1 = \tilde{F}_0$.

Позначимо через $\tilde{V}(t,s)$ еволюційний оператор лінійного однорідного рівняння

$$\frac{dw}{dt} + (A_1 + \tilde{A}_1(t))w = 0, \tag{3.83}$$

а через $\tilde{U}(t,s)$ — еволюційний оператор рівняння (3.83) з імпульсною дією (3.81) у точках $\tilde{\tau}_j^0$. Аналогічно до рівняння (3.73) показуємо експоненціальну стійкість рівняння (3.83) з імпульсною дією (3.81). Для спрощення запису вважаємо, що еволюційний оператор $\tilde{U}(t,s)$ задовольняє нерівність (3.74) з тими ж сталими M_1 і β_1. Так само вважаємо, що $\tilde{V}(t,s)$ задовольняє оцінки (3.71) і (3.72) з тією ж сталою $\tilde{K}_1$.

Розв'язок $z(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$z(t) = \tilde{U}(t,t_0)z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\,ds -$$

$$- \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^0 < t} \tilde{U}\left(t, \tilde{\tau}_j^0\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde{\tau}_j^0\right) + w^*(\tilde{\tau}_j^0)\right) + Q_j\right) +$$
$$+ \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^1 < t} \tilde{U}\left(t, \tilde{\tau}_j^1\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde{\tau}_j^1\right) + w^*\left(\tilde{\tau}_j^1\right)\right) + Q_j\right).$$

Позначимо

$$\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j, \qquad \mathcal{J}_j = \left(\max\{\tilde{\tau}_{j-1}^0, \tilde{\tau}_{j-1}^1\}, \min\{\tilde{\tau}_j^0, \tilde{\tau}_j^1\}\right] = \left(\tilde{\tau}_{j-1}'', \tilde{\tau}_j'\right].$$

Для $t \in \left(\tilde{\tau}_i'', \tilde{\tau}_{i+1}'\right]$ маємо

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|\tilde{U}(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} \|\tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\|_\alpha \, ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \int\limits_{\tilde{\tau}_j''}^{\tilde{\tau}_{j+1}'} \|\tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\|_\alpha \, ds + \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{\tilde{\tau}_j'}^{\tilde{\tau}_j''} \|\tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\|_\alpha \, ds +$$
$$+ \int\limits_{\tilde{\tau}_i''}^{t} \|\tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\|_\alpha ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i} \|\tilde{U}(t,\tilde{\tau}_j^0)(D_j(z(\tilde{\tau}_j^0) + w^*(\tilde{\tau}_j^0)) + Q_j) -$$
$$- \tilde{U}\left(t, \tilde{\tau}_j^1\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde{\tau}_j^1\right) + w^*\left(\tilde{\tau}_j^1\right)\right) + Q_j\right)\|_\alpha. \tag{3.84}$$

На інтервалі без імпульсів розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|\tilde{U}(t,t_1)z(t_1)\|_\alpha + \int\limits_{t_1}^{t} \|A^\alpha \tilde{U}(t,s)\tilde{F}(s,z(s))\| ds \leq$$
$$\leq M_1 e^{-\beta_1(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha + \int\limits_{t_1}^{t} \frac{M_2 K_{\rho_1} e^{-\beta_1(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\|z(s)\|_\alpha \, ds.$$

Тоді за лемою 3.15 на інтервалі $[t_0, \tilde{\tau}_1']$ розв'язок $z(t)$ задовольняє оцінку

$$\|z(t)\|_\alpha \leq M_1\tilde{C}_1 e^{-\beta_1(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha, \quad t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']. \tag{3.85}$$

Покажемо, що при достатньо малому $r = \inf_j |r_j|$ різниця $\left|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0\right|$ оцінюється через $z(\tilde{\tau}_j')$ так:

$$\left|\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1\right| \leq \frac{4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0}{1 - 8r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\tilde{K}_2\theta^{-1}}\left\|z(\tilde{\tau}_j')\right\|_\alpha = \tilde{K}_6 r\left\|z(\tilde{\tau}_j')\right\|_\alpha. \tag{3.86}$$

Припустимо, що $\tilde{\tau}_j^0 \geq \tilde{\tau}_j^1 = \tilde{\tau}_j'$. Тоді, використовуючи (3.67) і (3.62), отримуємо

$$\begin{aligned}
|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| &\leq |r_k|\left|\int\limits_\Omega \|w^*(\tilde{\tau}_j^1)(x) + z(\tilde{\tau}_j^1)(x)\|^2 dx - \int\limits_\Omega \|w^*(\tilde{\tau}_j^0)(x)\|^2 dx\right| \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\|w^*(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - w^*(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left(\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + \left\|\int\limits_{\tilde{\tau}_j^1}^{\tilde{\tau}_j^0}\frac{d}{d\xi}w^*(\xi)\,d\xi\right\|_\alpha\right) \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left(\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + \frac{2\tilde{K}_2}{\theta}|\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1|\right).
\end{aligned}$$

Якщо $\tilde{\tau}_j^1 \geq \tilde{\tau}_j^0 = \tilde{\tau}_j'$, то

$$\begin{aligned}
|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| &\leq |r_k|\left|\int\limits_\Omega \|w^*(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1)\|^2 dx - \int\limits_\Omega \|w^*(\tilde{\tau}_j^0)\|^2 dx\right| \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left\|w^*(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - w^*(\tilde{\tau}_j^0) - z(\tilde{\tau}_j^0) + z(\tilde{\tau}_j^0)\right\|_\alpha \leq \\
&\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left(\|z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha + \frac{2\tilde{K}_2}{\theta}\left|\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1\right|\right).
\end{aligned}$$

Для $t \in (\tilde{\tau}_1'', \tilde{\tau}_2']$ виконується оцінка

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|\tilde{U}(t, t_0)z_0\|_\alpha + \|\tilde{U}(t, \tilde{\tau}_1'')\|_\alpha \int\limits_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'}\left\|\tilde{U}(\tilde{\tau}_1'', s)\tilde{F}(s, z(s))\right\|_0 ds +$$

$$+ \int\limits_{\tilde\tau_1''}^{t} \left\|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\right\|_\alpha ds +$$

$$+ \|\tilde U(t,\tilde\tau_1'')\|_\alpha \int\limits_{\tilde\tau_1'}^{\tilde\tau_1''} \left\|\tilde U(\tilde\tau_1'',s)\tilde F(s,z(s))\right\|_0 ds +$$

$$+ \Big\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1) -$$

$$- \tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\Big\|_\alpha =$$

$$= i_1+i_2+i_3+_4+i_5. \tag{3.87}$$

Спочатку оцінимо останній доданок. Якщо $\tilde\tau_1^0 < \tilde\tau_1^1$, то

$$i_5 = \Big\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1) -$$

$$- \tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\Big\|_\alpha =$$

$$= \Big\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)\big((D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1 -$$

$$- \tilde U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)\big)\Big\|_\alpha =$$

$$= \Bigg\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)\Bigg(D_1(U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)-I)w(\tilde\tau_1^0) -$$

$$- (U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)-I)D_1w(\tilde\tau_1^0)+(I-U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0))Q_1 +$$

$$+ D_1\int\limits_{\tilde\tau_1^0}^{\tilde\tau_1^1} \tilde U(\tilde\tau_1^1,s)\tilde F(s,w(s))ds\Bigg)\Bigg\|_\alpha . \tag{3.88}$$

Якщо $\tilde\tau_1^0 > \tilde\tau_1^1$, то

$$i_5 = \Big\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1) -$$

$$- \tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\Big\|_\alpha =$$

$$= \Big\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)\big(D_1w(\tilde\tau_1^0)+Q_1 -$$

$$- \tilde U(\tilde\tau_1^0+0,\tilde\tau_1^1)(D_1w(\tilde\tau_1^1)+Q_1)\big)\Big\|_\alpha =$$

$$= \left\| \tilde{U}(t, \tilde{\tau}_1^0 + 0) \left(D_1(U(\tilde{\tau}_1^0, \tilde{\tau}_1^1) - I)w(\tilde{\tau}_1^1) - \right.\right.$$

$$- (U(\tilde{\tau}_1^0, \tilde{\tau}_1^1) - I)D_1 w(\tilde{\tau}_1^1) + (I - U(\tilde{\tau}_1^0 + 0, \tilde{\tau}_1^1))Q_1 +$$

$$\left.\left. +D_1 \int\limits_{\tilde{\tau}_1^1}^{\tilde{\tau}_1^0} \tilde{U}(\tilde{\tau}_1^0, s)\tilde{F}(s, w(s))ds \right) \right\|_\alpha . \tag{3.89}$$

Застосовуючи нерівності (3.71), (3.72), (3.75) і (3.86), з (3.88) і (3.89) отримуємо оцінку

$$i_4 + i_5 \le M_2 e^{-\beta_1(t-\tilde{\tau}_1'')} \frac{\tilde{\tau}_1'' - \tilde{\tau}_1'}{(t - \tilde{\tau}_1'')^\alpha} \left(2d\tilde{K}_1\tilde{N}_2 + \tilde{K}_1\beta q) + d\tilde{F}_0 M_2 \right) \le$$

$$\le rM_2\tilde{K}_6 e^{-\beta_1(t-\tilde{\tau}_1'')} \left(2d\tilde{K}_1\tilde{N}_2 + \beta q\tilde{K}_1 + d\tilde{F}_0 M_2 \right) \frac{\|z\left(\tilde{\tau}_1'\right)\|_\alpha}{(t - \tilde{\tau}_1'')^\alpha} =$$

$$= rP_1 e^{-\beta_1(t-\tilde{\tau}_1'')} \frac{\|z\left(\tilde{\tau}_1'\right)\|_\alpha}{(t - \tilde{\tau}_1'')^\alpha}. \tag{3.90}$$

Припускаючи, що $\|z(t)\|_\alpha \le \xi$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$, і враховуючи (3.75), (3.82) і (3.90), переписуємо оцінку (3.87) у вигляді

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q} + rP_2)}{(t - \tilde{\tau}_1'')^\alpha} \right) +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\tau}_1''}^{t} \frac{M_2 K_{\rho_1} \|z(s)\|_\alpha e^{-\beta_1(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds,$$

де

$$P_2 = P_1 e^{\beta_1 \sup_j |\tilde{\tau}_j'' - \tilde{\tau}_j'|}, \qquad \tilde{Q} = \max_j \left\{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\right\}.$$

Позначимо також $\tilde{\theta} = \min_j \left\{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\right\}$. З урахуванням перманентності $\|z\|_\alpha \le \rho_1$, $t \ge t_0$. За лемою 3.15 для $t \in (\tau_1'', \tau_2']$ отримуємо

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1\tilde{C}_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q} + rP_2)}{(t - \tilde{\tau}_1'')^\alpha} \right). \tag{3.91}$$

Припустимо, що при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_i']$ розв'язок $w(t)$ задовольняє нерівність $\|w(t)\|_\alpha \le \rho_1$ так, що $\|z(t)\|_\alpha = \|w(t) - w_0(t)\|_\alpha \le \xi$ для $t \in \cup_{j=1}^i \mathcal{J}_j$ з деяким $\xi > 0$.

За методом математичної індукції можна довести, що для $t \in \left(\tilde{\tau}_i'', \tilde{\tau}_{i+1}'\right]$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde{C}_1 \|z_0\|_\alpha e^{-\beta_1(t-t_0)} \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(t - \tilde{\tau}_i'')^\alpha}\right) \mathcal{A}_{\xi,r}^{i-1}, \quad (3.92)$$

де

$$\mathcal{A}_{\xi,r} = \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right).$$

Припускаємо, що нерівність (3.114) виконується для $t \in \cup_{j=1}^n \mathcal{J}_j$, і доводимо її для $t \in (\tilde{\tau}_n'', \tilde{\tau}_{n+1}']$. Для цього у (3.84) потрібно врахувати припущення й застосувати міркування, аналогічні до отримання (3.91).

За формулою (3.85) якщо $\|z_0\|_\alpha \le \delta = \varepsilon/(M_1 \tilde{C}_1)$, то $\|z(t)\|_\alpha \le \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$.

За формулою (3.91) розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [\tilde{\tau}_1'' + \eta, \tilde{\tau}_2']$, якщо

$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1 \tilde{C}_1} \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\varepsilon \tilde{Q} + rP_2)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}. \quad (3.93)$$

Оскільки $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$, то при досить малих $\xi > 0$ і $r > 0$ виконується нерівність $\mathcal{A}_{\xi,r} e^{-\beta_1 \theta} < 1$ і

$$e^{-\beta_1(\tilde{\tau}_i' - t_0)} \mathcal{A}_{\xi,r}^{i-1} \to 0, \quad i \to \infty. \quad (3.94)$$

Отже, для довільних фіксованих $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$, якщо початкове значення задовольняє умову (3.93) і виконується нерівність $\mathcal{A}_{\varepsilon,r} e^{-\beta_1 \theta} < 1$, то $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \in \left[\tilde{\tau}_i'' + \eta, \tilde{\tau}_{i+1}'\right]$, $i = 1, 2, \ldots$. Це й доводить стійкість.

Виберемо $\varepsilon_0 > 0$ і $r_0 > 0$ такими, що $A_{\varepsilon_0, r_0} e^{-\beta_1 \theta} < 1$. Тоді при $r \le r_0$, виходячи з (3.94), для кожних додатних $\varepsilon \le \varepsilon_0$ і η існує таке натуральне i_0, що при всіх $i \ge i_0$ і $t \in [\tilde{\tau}_i'' + \eta, \tilde{\tau}_{i+1}']$ виконується $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$. Отже, W-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$ асимптотично стійкий.

Теорему 3.16 доведено.

3.3. Стійкість розв'язків еволюційних рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії

У даному підрозділі проведено дослідження еволюційного рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u), \quad t \neq \tau_j(u), \tag{3.95}$$

$$u(\tau_j(u) + 0) - u(\tau_j(u)) = g_j(u), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.96}$$

де $u : \mathbb{R} \to X$, X — банаховий простір, A — секторіальний оператор у X, послідовність $\{\tau_j(u)\}$ функцій $X \to \mathbb{R}$ строго зростає для u з деякої області простору X.

Наскільки відомо, першою роботою, присвяченою вивченню імпульсних еволюційних рівнянь із секторіальним оператором, був препринт [20]. Останнім часом еволюційні рівняння в банаховому просторі з фіксованими моментами імпульсної дії привертають увагу багатьох дослідників, відмітимо роботи [29,34,43,48,69,71,73–76]. Дослідження рівняння (3.95), (3.96) є складнішим через нефіксовані моменти імпульсної дії, про що йшлося на початку розділу 2.

Метою цього підрозділу є знаходження умов стійкості обмеженого розв'язку рівняння (3.95), (3.96). При цьому використано деякі підходи з підрозділів 3.1, 3.2. Викладені тут результати отримано у [8].

Нехай $(X, \|.\|)$ — абстрактний банаховий простір.

Припустимо, що рівняння (3.95), (3.96) задовольняє умови:

(**M1**) A — секторіальний оператор у X, $\inf\{\operatorname{Re}\mu : \ \mu \in \sigma(A)\} \geq \delta > 0$, де $\sigma(A)$ — спектр A. Для оператора A означаються степені. Розглядатимемо простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$, утворені областями означення операторів $A^\alpha, \alpha \geq 0$, з нормою $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$.

(**M2**) Позначимо $U^\alpha_\varrho = \{x \in X^\alpha : \ \|x\|_\alpha \leq \varrho\}$. Припускаємо, що функції $\tau_j : U^\alpha_\varrho \to \mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_j(u_1) - \tau_j(u_2)| \leq N_1 \|u_1 - u_2\|_\alpha, \ j \in \mathbb{Z},$$

і рівномірно відносно $u \in U_\varrho^\alpha$ існують такі $\theta > 0$ й $\Theta > 0$, що

$$\inf_u \tau_{j+1}(u) - \sup_u \tau_j(u) \geq \theta > 0, \quad \sup_u \tau_{j+1}(u) - \inf_u \tau_j(u) \leq \Theta \quad \text{для} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

(**M3**) Функція $f(t,u) : \mathbb{R} \times U_\varrho^\alpha \to X$ обмежена й неперервно диференційовна за u, локально гельдерова за t рівномірно відносно $u \in U_\varrho^\alpha$ й має розриви першого роду при $t = \tau_j(u)$.

(**M4**) Функції $g_j(u) : U_\varrho^\alpha \to X^1 = D(A)$ неперервні, рівномірно обмежені й ліпшицеві:

$$\|g_j(u_1) - g_j(u_2)\|_\alpha \leq N_1 \|u_1 - u_2\|_\alpha \ \text{ при } \ u \in U_\varrho^\alpha \ \text{ й } \ j \in \mathbb{Z}.$$

Використовуватимемо оцінки (див. [42]):

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \ t > 0, \ \alpha > 0,$$

$$\|(e^{-At} - I)u\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha u\|, \ t > 0, \alpha \in (0,1], u \in X^\alpha,$$

де $C_\alpha > 0$ обмежена при $\alpha \to +0$.

Під розв'язком рівняння без імпульсної дії (3.95) розуміємо класичний розв'язок, тобто неперервно диференційовну функцію $u(t) \in D(A)$, яка при підстановці у співвідношення (3.95) перетворює його на тотожність. За теоремою 3.3.3 [42] (див. також [54], стор. 196) для кожної початкової точки $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times U_\varrho^\alpha$ рівняння (3.95) має єдиний локальний розв'язок $u(t), u(t_0) = u_0$. Припускаємо, що розв'язки існують для всіх $t \geq t_0$. Це досягається, наприклад, при виконанні умов теореми 3.3.5 [42].

За теоремою 3.5.2 [42] для $\gamma < 1$ і $t_0 < t_1 \leq t_0 + Q$ функція

$$t \to \frac{du}{dt}(t) \in X^\gamma$$

локально гельдерова при $t_0 < t \leq t_1$ і

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_\gamma \leq \tilde{K}_1 (t - t_0)^{\alpha - \gamma - 1}, \tag{3.97}$$

де $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_1(\gamma, Q) > 0$.

Означення 3.17. Функція $u(t) : [t_0, t_1] \to X^\alpha$ є розв'язком початкової задачі $u(t_0) = u_0 \in X^\alpha$ для рівняння (3.95), (3.96) на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо вона:

(I) неперервна на відрізках $[t_0, \tau_k], (\tau_k, \tau_{k+1}], ..., (\tau_{k+s}, t_1]$ з розривами першого роду в моменти $t = \tau_j$ перетину з поверхнями імпульсів, $t_0 < \tau_k < ... < \tau_{k+s} < t_1$;

(II) неперервно диференційовна на інтервалах (t_0, τ_k), $(\tau_k, \tau_{k+1}), ...$ $...(\tau_{k+s}, t_1)$ і задовольняє рівняння (3.95) при $t \in (t_0, t_1), t \neq \tau_j$ й різницеві співвідношення (3.96) при $t = \tau_j$;

(III) задовольняє початкову умову $u(t_0) = u_0$.

Припускаємо, що розв'язки $u(t)$ рівняння (3.95), (3.96) неперервні зліва, тоді $u(\tau_j) = u(\tau_j - 0)$ при всіх точках імпульсної дії.

Також припускаємо, що в області U_ϱ^α розв'язки рівняння (3.95), (3.96) не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(u)$, іншими словами, розв'язки перетинають кожну поверхню $t = \tau_j(u)$ не більше одного разу. Для імпульсних систем у скінченновимірному просторі є кілька достатніх умов відсутності биття ([21, 58]). Деякі з них можна поширити на абстрактні системи (3.95), (3.96). У інших випадках перевірка умов відсутності биття у нескінченновимірному просторі вимагає конкретного дослідження.

Означення 3.18. Розв'язок $u_0(t)$ рівняння (3.95), (3.96), означений для всіх $t \geq t_0$, називається стійким за Ляпуновим у просторі X^α, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$, що довільний інший розв'язок $u(t)$ з початковою умовою $\|u_0(t_0) - u(t_0)\|_\alpha < \delta$ задовольняє нерівність $\|u_0(t) - u(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх таких $t \geq t_0$, що $|t - \tau_j^0| > \eta$, де τ_j^0 — точки, в яких розв'язок $u_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(u)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $u_0(t)$ називається атрактивним, якщо для довільних $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ існують $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ і $T = T(\delta_0, \varepsilon, \eta) > 0$, такі, що для кожного іншого розв'язку $u(t)$ системи з $\|u_0(t_0) - u(t_0)\| < \delta_0$ випливає $\|u_0(t) - u(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ й $|t - \tau_k^0| > \eta$.

Розв'язок $u_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і атрактивний.

Нехай рівняння (3.95), (3.96) має обмежений на осі розв'язок $u_0(t)$. Для дослідження його стійкості зробимо у рівнянні заміну змінних

$$u = u_0(t) + z.$$

Тоді $z(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dt} + (A + A_1(t))z = \tilde{f}(t, z) \tag{3.98}$$

і різницеві співвідношення в точках перетину розв'язків $u_0(t)$ й $u_0(t) + z(t)$ з поверхнями $\tau_j(u)$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$z(\tilde{\tau}_j(z) + 0) - z(\tilde{\tau}_j(z)) = \tilde{g}_j(z), \tag{3.99}$$

$$z(\tilde{\tau}_j^0 + 0) - z(\tilde{\tau}_j^0) = \tilde{g}_j^0, \tag{3.100}$$

де $\tilde{\tau}_j^0 = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j^0)),\ \tilde{\tau}_j(z) = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j(z)) + z(\tilde{\tau}_j(z))),$

$$\tilde{f}(t, z) = f(t, u_0(t) + z) - f(t, u_0(t)) + A_1(t)z, \quad A_1(t)z = -\frac{\partial}{\partial u} f(t, u_0(t))z,$$

$$\tilde{g}_j^0 = -g_j(u_0(\tilde{\tau}_j^0)), \quad \tilde{g}_j(z) = g_j(u_0(\tilde{\tau}_j(z)) + z(\tilde{\tau}_j(z))).$$

Припустимо, що існує неспадна функція $K_\xi, 0 \le \xi \le \varrho$, така, що $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$ і рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde{f}(t, z)\| \le K_\xi \|z\|_\alpha, \ \ \|z\|_\alpha \le \xi. \tag{3.101}$$

Позначимо $M_0 = K_\varrho$, отже, $\sup_{t\in\mathbb{R}, \|z\|_\alpha \le \varrho} \|\tilde{f}(t, z)\| \le M_0 \varrho$.

Поряд із рівнянням (3.95), (3.96) розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$\frac{du}{dt} + (A + A_1(t))u = 0. \tag{3.102}$$

Припускатимемо, що $A_1(t)$ задовольняє умову

(**M5**) функція $A_1(t) : \mathbb{R} \to L(X^\alpha, X)$, $\alpha \ge 0$, локально ліпшицева.

Позначимо через $U(t,s)$ еволюційний оператор лінійного рівняння (3.102). Він задовольняє умови

$$U(\tau,\tau) = I,\ U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau),\ t \geq s \geq \tau.$$

За теоремою 7.1.3 [42, p. 190] функція $U(t,\tau)$ неперервна зі значеннями в $L(X^\gamma)$ для всіх $0 \leq \gamma < 1$ і

$$\|U(t,\tau)x\|_\gamma \leq L_Q(t-\tau)^{(\nu-\gamma)_-}\|x\|_\nu,$$

де $(\nu-\gamma)_- = \min(\nu-\gamma,0),\ t-\tau \leq Q,\ L_Q = L_Q(Q)$. Крім того,

$$\|U(t,\tau)x - x\|_\gamma \leq L_Q(t-\tau)^\nu\|x\|_{\gamma+\nu}, \quad \nu > 0, \gamma+\nu \leq 1.$$

Означення 3.19. Лінійне рівняння (3.102) називається експоненціально стійким у X^α зі сталими $\beta > 0$ і $M \geq 1$, якщо для всіх $u \in X^\alpha$ виконується

$$\|U(t,\tau)u\|_\alpha \leq Me^{-\beta(t-\tau)}\|u\|_\alpha,\ t \geq \tau.$$

Також існує додатна стала M_1 (залежна від α,δ,γ), така, що

$$\|U(t,s)u\|_\gamma \leq M_1e^{-\beta(t-s)}\max\{1,(t-s)^{\delta-\gamma}\}\|x\|_\delta,\ t > s, \tag{3.103}$$

де $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$ (див. [42, p. 226]).

Теорема 3.20. *Припустимо, що рівняння (3.95), (3.96) в області $U^\alpha_\varrho = \{u \in X^\alpha, \|u\|_\alpha \leq \varrho\}$ з деяким фіксованим $\alpha \geq 0$ задовольняє умови (M1) – (M4) і має обмежений на осі розв'язок $u_0(t)$, такий, що виконуються (3.101) і умова (M5). Нехай також:*

1) усі розв'язки в області U^α_ϱ перетинають поверхні $t = \tau_j(u)$ не більш ніж один раз;

2) відповідне лінійне рівняння в варіаціях (3.102) експоненціально стійке в X^α зі сталими $\beta > 0$ й $M \geq 1$.

Тоді при досить малому $N_1 > 0$ розв'язок $u_0(t)$ асимптотично стійкий.

Доведення. Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$. Нехай $t_0 \in [\tilde{\tau}_0^0 + \eta, \tilde{\tau}_1^0 - \eta]$ і $u_0(t_0) = u_0$. Візьмемо таке $u_1 \in X^\alpha$, що $\|u_0 - u_1\|_\alpha < \delta$ з деяким $\delta > 0$. Роз'язок $z(t)$ рівняння (3.98) – (3.100) з початковим значенням

$$z_0 = z(t_0) = u_0 - u_1$$

задовольняє інтегральне рівняння

$$z(t) = U(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)\tilde{f}(s, z(s))ds + \\ + \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^0 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^0)\tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^1 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1)), \tag{3.104}$$

де $\tilde{\tau}_j^1 = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1))$.

На інтервалі без імпульсів розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|U(t, t_1)z_0\|_\alpha + \int_{t_1}^{t} \|A^\alpha U(t, s)\tilde{f}(s, z(s))\|ds \leq \\ \leq M_1 e^{-\beta(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha + \int_{t_1}^{t} \frac{M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\|z(s)\|_\alpha ds.$$

Тоді за лемою 3.15

$$\|z(t)\|_\alpha \leq M_1 \tilde{C} e^{-\beta(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha, \ t - t_1 \leq Q. \tag{3.105}$$

Отже, якщо початкові дані належать до обмеженої області з X^α, то відповідні розв'язки рівномірно обмежені для t з обмеженого інтервалу.

Позначимо

$$\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j, \quad \mathcal{J}_j = (\max\{\tilde{\tau}_{j-1}^0, \tilde{\tau}_{j-1}^1\}, \min\{\tilde{\tau}_j^0, \tilde{\tau}_j^1\}] = (\tilde{\tau}_{j-1}'', \tilde{\tau}_j'].$$

Покажемо, що при достатньо малому N_1 різниця $|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0|$ оцінюється через $z(\tilde{\tau}_j')$ таким чином:

$$|\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1| \leq \frac{N_1}{1 - \tilde{K}_1 N_1 \theta^{-1}}\|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha = \tilde{K}_2 N_1 \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha. \tag{3.106}$$

Припустимо, що $\tilde{\tau}_j^0 \geq \tilde{\tau}_j^1 = \tilde{\tau}_j'$. Тоді, використовуючи (3.97), отримуємо

$$|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| \leq N_1\|u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq$$

$$\leq N_1\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + N_1\Big\|\int_{\tilde{\tau}_j^1}^{\tilde{\tau}_j^0}\frac{d}{d\xi}u_0(\xi)d\xi\Big\|_\alpha \leq N_1\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + \theta^{-1}\tilde{K}_1N_1|\tilde{\tau}_j^0-\tilde{\tau}_j^1|.$$

Отже, виконується (3.106).

Якщо $\tilde{\tau}_j^1 \geq \tilde{\tau}_j^0 = \tilde{\tau}_j'$, то

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\tau}_j^1-\tilde{\tau}_j^0| \leq N_1\|u_0(\tilde{\tau}_j^1)+z(\tilde{\tau}_j^1)-u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \\
&\leq N_1\|u_0(\tilde{\tau}_j^1)+z(\tilde{\tau}_j^1)-u_0(\tilde{\tau}_j^0)-z(\tilde{\tau}_j^0)+z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \\
&\leq N_1\|z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha + N_1\|u(\tilde{\tau}_j^1)-u(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \\
&\leq N_1\|z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha + N_1\Big\|\int_{\tilde{\tau}_j^0}^{\tilde{\tau}_j^1}\frac{d}{d\xi}u(\xi)d\xi\Big\|_\alpha,
\end{aligned}$$

оскільки за означенням $u(\xi)=u_0(\xi)+z(\xi)$. Звідси отримуємо (3.106). З останніх формул також отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\|u_0(\tilde{\tau}_j^1)+z(\tilde{\tau}_j^1)-u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha + \theta^{-1}\tilde{K}_1|\tilde{\tau}_j^1-\tilde{\tau}_j^0| \leq \\
&\leq \left(1+\frac{\theta^{-1}N_1\tilde{K}_1}{1-\theta^{-1}N_1\tilde{K}_1}\right)\|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha \leq \tilde{K}_3\|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha. \qquad (3.107)
\end{aligned}$$

Для $t \in (\tilde{\tau}_i'', \tilde{\tau}_{i+1}']$ маємо

$$\begin{aligned}
&\|z(t)\|_\alpha = \|U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \ + \\
&+ \Big\|\sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^0<t} U(t,\tilde{\tau}_j^0)\tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^1<t} U(t,\tilde{\tau}_j^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1))\Big\|_\alpha \leq \\
&\leq \|U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \ + \\
&+ \sum_{j=1}^{i-1}\int_{\tilde{\tau}_j''}^{\tilde{\tau}_{j+1}'} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds + \sum_{j=1}^{i}\int_{\tilde{\tau}_j'}^{\tilde{\tau}_j''} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds + \\
&+ \int_{\tilde{\tau}_i''}^t \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \ + \\
&+ \|\sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^0<t} U(t,\tilde{\tau}_j^0)\tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^1<t} U(t,\tilde{\tau}_j^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1))\|_\alpha. \qquad (3.108)
\end{aligned}$$

На інтервалі $[t_0, \tilde{\tau}_1']$ розв'язок $z(t)$ задовольняє оцінку

$$\|z(t)\|_\alpha \leq M_1 \tilde{C} e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha, \; t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']. \tag{3.109}$$

Для $t \in (\tilde{\tau}_1'', \tilde{\tau}_2']$ нерівність (3.108) переписується таким чином:

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \; +$$

$$+ \int_{\tilde{\tau}_1'}^{\tilde{\tau}_1''} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds + \int_{\tilde{\tau}_1''}^{t} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \; +$$

$$+ \|U(t,\tilde{\tau}_1^0)\tilde{g}_1^0 + U(t,\tilde{\tau}_1^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_1^1))\|_\alpha. \tag{3.110}$$

Використовуючи (3.103), (3.106) і (3.107), зробимо перетворення

$$\int_{\tilde{\tau}_1'}^{\tilde{\tau}_1''} \|U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))\|_\alpha ds \; + \|U(t,\tilde{\tau}_1^0)\tilde{g}_1^0 + U(t,\tilde{\tau}_1^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_1^1))\|_\alpha \leq$$

$$\leq \|A^\alpha U(t,\tilde{\tau}_1'')\| \int_{\tilde{\tau}_1'}^{\tilde{\tau}_1''} \|U(\tilde{\tau}_1'',s)\tilde{f}(s,z(s))\| ds \; +$$

$$+ \|U(t,\tilde{\tau}_1^1)(\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_1^1)) + \tilde{g}_j^0)\|_\alpha + \|(U(t,\tilde{\tau}_1^0) - U(t,\tilde{\tau}_1^1))\tilde{g}_j^0\|_\alpha \leq$$

$$\leq M_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')} |t-\tilde{\tau}_1''|^{-\alpha} M M_0 \varrho |\tilde{\tau}_1'' - \tilde{\tau}_1'| \; +$$

$$+ N_1 \|U(t,\tilde{\tau}_1^1)\|_\alpha \|u_0(\tilde{\tau}_1^1) + z(\tilde{\tau}_1^1) - u_0(\tilde{\tau}_1^0)\|_\alpha \; +$$

$$+ \|U(t,\tilde{\tau}_1'')(I - U(\tilde{\tau}_1'',\tilde{\tau}_1'))\tilde{g}_j^0\|_\alpha \leq$$

$$\leq M_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')} \left(M M_0 \varrho \frac{|\tilde{\tau}_1'' - \tilde{\tau}_1'|}{|t-\tilde{\tau}_1''|^\alpha} + \tilde{K}_3 N_1 \|z(\tilde{\tau}_1')\|_\alpha + C_0 \frac{|\tilde{\tau}_1'' - \tilde{\tau}_1'|}{|t-\tilde{\tau}_1''|^\alpha} \|\tilde{g}_1^0\|_1 \right) \leq$$

$$\leq M_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')} \left(\tilde{K}_4 + \frac{\tilde{K}_5}{|t-\tilde{\tau}_1''|^\alpha} \right) \|z(\tilde{\tau}_1')\|_\alpha \leq$$

$$\leq P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')} |t-\tilde{\tau}_1''|^{-\alpha} \|z(\tilde{\tau}_1')\|_\alpha, \; t \in (\tilde{\tau}_1'', \tilde{\tau}_2'], \tag{3.111}$$

з деякою додатною сталою P_1. Припускаючи, що $\|z(t)\|_\alpha \leq \xi$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$, і підставляючи (3.108) і (3.111) в (3.110), отримуємо для $t \in (\tilde{\tau}_1'', \tilde{\tau}_2']$:

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha + \frac{M_1 K_\xi L_Q}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha} e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')} \int_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} \|z(s)\|_\alpha ds \ +$$
$$+ \ P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')}(t-\tilde{\tau}_1'')^{-\alpha}\|z(\tilde{\tau}_1')\|_\alpha \ +$$
$$+ \ \int_{\tilde{\tau}_1''}^{t} M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|z(s)\|_\alpha ds \le$$
$$\le M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{C}(M_2 K_\xi \tilde{Q} + P_2 N_1)}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha}\right) \ +$$
$$+ \ \int_{\tilde{\tau}_1''}^{t} \frac{M_1 M_0}{(t-s)^\alpha} e^{-\beta(t-s)}\|z(s)\|_\alpha ds,$$

де

$$M_2 = L_Q M_1 e^{\beta \sup_j |\tilde{\tau}_{j+1}'' - \tilde{\tau}_j'|}, \ P_2 = P_1 e^{\beta \sup_j |\tilde{\tau}_j'' - \tilde{\tau}_j'|}, \ \tilde{Q} = \max_j \{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\}.$$

Позначимо також $\tilde{\theta} = \min_j\{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\}$.

Отже, для $v(t) = e^{\beta t}\|z(t)\|_\alpha$ отримуємо

$$v(t) \le M_1 v(t_0)\left(1 + \frac{\tilde{C}(M_2 K_\xi \tilde{Q} + P_2 N_1)}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha}\right) + \int_{\tilde{\tau}_1''}^{t} \frac{M_2 M_0}{(t-s)^\alpha} v(s) ds.$$

За лемою 3.15 (формула (3.61)) для $t \in (\tilde{\tau}_1'', \tilde{\tau}_2']$

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde{C}_1 \|z_0\|_\alpha e^{-\beta(t-t_0)}\left(1 + \frac{\tilde{C}(M_2 K_\xi \tilde{Q} + P_2 N_1)}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha}\right). \qquad (3.112)$$

Припустимо, що при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_i']$ розв'язок $u(t)$ лежить в U_ϱ^α так, що $\|z(t)\|_\alpha = \|u(t) - u_0(t)\|_\alpha \le \xi$ для $t \in \cup_{j=1}^{i} \mathcal{J}_j$ з деяким $\xi > 0$. Зробивши аналогічні (3.111) перетворення у (3.108), отримуємо для $t \in \mathcal{J}_{i+1}$:

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_1'')}\|z(s)\|_\alpha ds \ +$$
$$+ \ \sum_{j=2}^{i-1} \int_{\tilde{\tau}_{j-1}''}^{\tilde{\tau}_j'} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_j'')}\|z(s)\|_\alpha ds + \sum_{j=1}^{i-1} P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_j'')}\|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha +$$
$$+ \frac{1}{(t-\tilde{\tau}_i'')^\alpha}\left(\int_{\tilde{\tau}_{i-1}''}^{\tilde{\tau}_i'} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_i'')}\|z(s)\|_\alpha ds + P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde{\tau}_i'')}\|z(\tilde{\tau}_i')\|_\alpha\right) +$$

$$+\int_{\tau_i''}^{t} M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|z(s)\|_\alpha ds. \tag{3.113}$$

Аналогічно до міркувань наприкінці доведення теореми 3.16 за методом математичної індукції доведемо, що якщо $\|z(t)\|_\alpha \le \xi$ при $t \in \cup_{j=1}^{i-1}\mathcal{J}_j$, то

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1\tilde{C}_1\|z_0\|_\alpha e^{-\beta(t-t_0)}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(t-\tilde{\tau}_i'')^\alpha}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right)^{i-2}$$

для $t \in (\tilde{\tau}_{i-1}'', \tilde{\tau}_i']$.

Припустимо, що нерівність (3.114) виконується для $t \in \cup_{j=1}^{n}\mathcal{J}_j$, і доведемо її для $t \in (\tilde{\tau}_n'', \tilde{\tau}_{n+1}']$. Підставляючи у (3.113) нерівність (3.109) для $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$ і нерівність (3.114) для $t \in [\tilde{\tau}_{j-1}'', \tilde{\tau}_j'], j = 2, ..., n$, отримуємо для $t \in (\tilde{\tau}_n'', \tilde{\tau}_{n+1}']$:

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \times$$
$$\times\Bigg\{\left(1+\tilde{C}_1(e^{\beta(\tilde{\tau}_1''-t_0)}M_1L_Q\tilde{Q}K_\xi + e^{\beta(\tilde{\tau}_1''-\tilde{\tau}_1')}P_1N_1)\right)+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\int_{\tilde{\tau}_{j-1}''}^{\tilde{\tau}_j'} M_1L_QK_\xi\tilde{C}_1e^{\beta(\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_{j-1}'')}\mathcal{A}_\xi^{j-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(s-\tilde{\tau}_{j-1}'')^\alpha}\right)ds+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}P_1N_1\tilde{C}_1e^{\beta(\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_j')}\mathcal{A}_\xi^{j-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(\tilde{\tau}_j'-\tilde{\tau}_{j-1}'')^\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}\int_{\tilde{\tau}_{n-1}''}^{\tilde{\tau}_n'} M_1L_QK_\xi\tilde{C}_1e^{\beta(\tilde{\tau}_n''-\tilde{\tau}_{n-1}'')}\mathcal{A}_\xi^{n-2}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(s-\tilde{\tau}_{n-1}'')^\alpha}\right)ds+$$
$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}P_1N_1\tilde{C}_1e^{\beta(\tilde{\tau}_n''-\tilde{\tau}_n')}\mathcal{A}_\xi^{n-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(\tilde{\tau}_n'-\tilde{\tau}_{n-1}'')^\alpha}\right)\Bigg\}+\mathcal{B}_n(t)\le$$

$$\leq M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \Bigg\{ \left(1+\tilde{C}_1(e^{\beta(\tilde{\tau}_1''-t_0)}M_1L_Q\tilde{Q}K_\xi + e^{\beta(\tilde{\tau}_1''-\tilde{\tau}_1')}P_1N_1)\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1} M_1L_QK_\xi\tilde{C}_1 e^{\beta(\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_{j-1}'')}\mathcal{A}_\xi^{j-2}\left(\tilde{Q}+\frac{\tilde{Q}\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right)ds +$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1} P_1N_1\tilde{C}_1 e^{\beta(\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_j')}\mathcal{A}_\xi^{j-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{\tilde{\theta}^\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}M_1L_QK_\xi\tilde{C}_1 e^{\beta(\tilde{\tau}_n''-\tilde{\tau}_{n-1}'')}\mathcal{A}_\xi^{n-2}\left(\tilde{Q}+\frac{\tilde{Q}\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}P_1N_1\tilde{C}_1 e^{\beta(\tilde{\tau}_n''-\tilde{\tau}_n')}\mathcal{A}_\xi^{n-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{\tilde{\theta}^\alpha}\right)\Bigg\} + \mathcal{B}_n(t),$$

де

$$\mathcal{A}_\xi = \left(1+\frac{\tilde{C}(M_2\tilde{Q}K_\xi+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right),\ \mathcal{B}_n(t) = \int_{\tilde{\tau}_n''}^{t}\frac{M_2N_1}{(t-s)^\alpha}e^{-\beta(t-s)}v(s)ds.$$

Як і раніше, $M_2 = M_1L_Q e^{\beta\sup_j|\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_{j-1}''|}$, $P_2 = P_1 e^{\beta\sup_j|\tilde{\tau}_j''-\tilde{\tau}_j'|}$. Тому отримуємо

$$\|z(t)\|_\alpha \leq M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \times$$

$$\times\Bigg\{\mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1}\mathcal{A}_\xi^{j-2}M_2K_\xi\tilde{C}_1\tilde{Q}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}P_2N_1\tilde{C}_1\mathcal{A}_\xi^{j-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{\tilde{\theta}^\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}M_2K_\xi\tilde{C}_1\tilde{Q}\mathcal{A}_\xi^{n-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right)ds +$$

$$+\frac{1}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}P_2N_1\tilde{C}_1\mathcal{A}_\xi^{n-2}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q}+P_2N_1)}{\tilde{\theta}^\alpha}\right)\Bigg)\Bigg\} + \mathcal{B}_n(t) \leq$$

$$\leq M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha\Bigg\{\mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1}\mathcal{A}_\xi^{j-1}\left(M_2K_\xi\tilde{C}_1\tilde{Q}+P_2N_1\tilde{C}_1+1-1\right) +$$

$$+ \frac{\mathcal{A}_\xi^{n-1}}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}\left(M_2K_\xi\tilde{C}_1\tilde{Q} + P_2N_1\tilde{C}_1\right)\Bigg\} + \mathcal{B}_n(t) \le$$

$$\le M_1e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha\Bigg\{\mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1}\mathcal{A}_\xi^{j-1}(\mathcal{A}_\xi - 1) \; +$$

$$+ \frac{\mathcal{A}_\xi^{n-1}}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}\left(M_2K_\xi\tilde{C}_1\tilde{Q} + P_2N_1\tilde{C}_1\right)\Bigg\} +$$

$$+ \mathcal{B}_n(t) \le M_1e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha\mathcal{A}_\xi^{n-1}\left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q} + P_2N_1)}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}\right) + \mathcal{B}_n(t).$$

Отже, для $t \in (\tilde{\tau}_n'', \tilde{\tau}_{n+1}']$ функція $v(t) = e^{\beta t}\|z(t)\|_\alpha$ задовольняє нерівність

$$v(t) \le \mathcal{A}_\xi^{n-1}\left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\xi\tilde{Q} + P_2N_1)}{(t-\tilde{\tau}_n'')^\alpha}\right) + M_2N_1\int_{\tilde{\tau}_n''}^{t}(t-s)^{-\alpha}v(s)ds.$$

Застосовуючи (3.61), отримуємо (3.114).

За формулою (3.109), якщо $\|z_0\|_\alpha \le \delta = \frac{\varepsilon}{M_1\tilde{C}}$, то $\|z(t)\|_\alpha \le \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$.

За формулою (3.112) розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [\tilde{\tau}_1'' + \eta, \tilde{\tau}_2']$, якщо

$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1\tilde{C}_1}e^{\beta(\tilde{\tau}_2'-t_0)}\left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\varepsilon\tilde{Q} + P_2N_1)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}.$$

Відповідно розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [\tilde{\tau}_i'' + \eta, \tilde{\tau}_{i+1}']$, якщо

$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1\tilde{C}_1}e^{\beta(\tilde{\tau}_i'-t_0)}\left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2K_\varepsilon\tilde{Q} + P_2N_1)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}\mathcal{A}_\varepsilon^{-i+1}.$$

Оскільки $K_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то при досить малих $\varepsilon > 0$ й $N_1 > 0$ виконується $e^{-\beta(\tilde{\tau}_i'-t_0)}\mathcal{A}_\varepsilon^{i-1} < 1$ при всіх i. Це доводить асимптотичну стійкість розв'язку $u_0(t)$. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо параболічне рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$u_t = u_{xx} + f(t,x), \tag{3.114}$$

$$\Delta u\Big|_{t=\tau_j(u)} = u(\tau_j(u)+0,x) - u(\tau_j(u),x) = c_j u(\tau_j(u,x)) \tag{3.115}$$

з граничними умовами Діріхле

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \tag{3.116}$$

й поверхнями імпульсної дії $\tau_j(u)$ вигляду

$$\tau_j(u) = \sigma j - b_j \int_0^\pi u^2(\xi)d\xi, \tag{3.117}$$

де $x \in [0,\pi],\ t \geq 0$, функція $f(t,x)$ гельдерова, ω-періодична за t й належить до $L_2(0,\pi)$ при кожному фіксованому t, послідовності додатних чисел $\{b_j\}$ і $\{c_j\}$ p-періодичні $b_{j+p} = b_j,\ c_{j+p} = c_j,\ j \in \mathbb{Z}$, додатне число σ задовольняє рівність $\sigma p = \omega$.

Позначимо

$$X = L_2(0,\pi),\ A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ X^1 = D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi).$$

Оператор A є секторіальним із простими власними числами $\lambda_k = k^2$ і відповідними власними функціями

$$\varphi_k(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin kx,\ k = 1,2,....$$

Оператор $(-A)$ генерує аналітичну напівгрупу e^{-At}.

Для функції $v \in X$ є розклад

$$v = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi v(x)\sin kx dx.$$

Тоді

$$Av = \sum_{k=1}^\infty k^2 a_k \sin kx,\ A^\alpha v = \sum_{k=1}^\infty k^{2\alpha} a_k \sin kx,\ e^{-At}v = \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2 t} a_k \sin kx,$$

а також

$$X^{1/2} = D(A^{1/2}) = H_0^1(0,\pi).$$

Розглянемо імпульсне рівняння (3.114)–(3.116) як абстрактне рівняння у просторі $H_0^1(0,\pi)$:

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \tag{3.118}$$

$$v(\tau_j(v)+0) - v(\tau_j(v)) = g_j(v(\tau_j(v))), \tag{3.119}$$

де $f : \mathbb{R} \times X^{1/2} \to X,\ g_j(v) = c_j v.$

Аналогічно [20] перевіряємо, що в області $\mathcal{D} = \{v : \|v\|_{1/2} \le \rho\}$ з деяким $\rho > 0$ відсутнє биття, тобто розв'язки перетинають кожну з поверхонь імпульсів $\tau_j(v)$ не більш ніж один раз.

Розглянемо простір $\mathfrak{N}$ p-періодичних послідовностей $y = \{y_j\}$, $y_j \in X^{1/2}$, $y_{j+p} = y_j$ із нормою $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|_{1/2}$.

Зафіксуємо $y = \{y_j\} \in \mathfrak{N}$, $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|_{1/2} \le \rho$, і розглянемо рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \quad t \ne \tau_j(y_j), \tag{3.120}$$

$$v(\tau_j(y_j)+0) - v(\tau_j(y_j)) = c_j v(\tau_j(y_j)), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.121}$$

Вочевидь, послідовність $\{\tau_j(y_j)\}$ задовольняє умову періодичності $\tau_{j+p}(y_{j+p}) - \tau_j(y_j) = \omega$. Рівняння (3.120), (3.121) має єдиний періодичний розв'язок $v^*(t,y)$, який задовольняє інтегральне рівняння

$$v(t,y) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau)d\tau + \sum_{\tau_j<t} e^{-A(t-\tau_j(y_j))} c_j v(\tau_j(y_j)).$$

Якщо вибрати періодичну послідовність $y^* = \{y_j^*\}, y_j^* \in X^{1/2}$, таку, що

$$u^*(\tau_j(y_j^*), y^*) = y_j^*$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}$, то функція $v^*(t,y^*)$ буде періодичним розв'язком рівняння (3.118), (3.119). Для доведення у просторі $\mathfrak{N}$ розглянемо відображення $S:\ \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$,

$$S(y) = \{v^*(\tau_j(y_j), y)\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Відображення S переводить деяку область $\mathcal{U}_0 = \{y \in \mathfrak{N}, \|y\|_S \leq \rho\}$ в себе. Аналогічно до [20], застосовуючи теорему Шаудера, доводимо, що в області $\mathcal{U}_0$ відображення S має нерухому точку. При достатньо малих $c = \sup_j c_j$ й $b = \sup_j b_j$ нерухома точка єдина. Їй відповідає єдиний у $\mathcal{D}$ періодичний розв'язок рівняння (3.118) – (3.119). За теоремою 3.20 він асимптотично стійкий відповідно до означення 3.18.

Висновки до розділу 3

У даному розділі досліджено систему диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й імпульсною дією, а також еволюційне рівняння з імпульсною дією в абстрактному банаховому просторі.

Зокрема, розглянуто систему диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + \\
&+ u(t,x)\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\right), \\
&\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + \\
&+ v(t,x)\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\right),
\end{aligned}$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, з крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

та загалом нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\begin{aligned}
&u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k}u(t,x) + q_{1k}, \\
&v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k}v(t,x) + q_{2k}, \\
&t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big) = \theta_j + r_j \int\limits_{\Omega} \big(u^2(t,\xi) + v^2(t,\xi)\big)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою границею $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, які в загальному випадку залежать від розв'язків. Ці моменти рівномірно відділені один від іншого.

Система описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі й зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, функції вважаються невід'ємними.

У випадку фіксованих моментів імпульсної дії ($t = \tau_k$) знайдено достатні умови перманентності системи, коли кількість індивідів кожного виду стабілізується в деякій обмеженій області, відділеній від нуля. Знайдено умови існування, єдиності й асимптотичної стійкості кусково-неперервного майже періодичного розв'язку зі значеннями в області перманентності.

У випадку нефіксованих моментів із поверхнями імпульсів знайдено достатні умови існування, єдиності й асимптотичної стійкості кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

Також отримано умови стійкості обмеженого розв'язку для рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad t \neq \tau_j(u),$$
$$u(\tau_j(u)+0) - u(\tau_j(u)) = g_j(u), \quad j \in \mathbb{Z},$$

де $u : \mathbb{R} \to X$, X — банаховий простір, A — секторіальний оператор у X, послідовність $\{\tau_j(u)\}$ функцій $X \to \mathbb{R}$ строго зростає для u з деякої області простору X.

Основні результати:

– встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими;

– у абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією.

У роботі отримано такі наукові результати:

– встановлено достатні умови існування і стійкості інваріантного тора при малому збуренні правої частини слабконелінійної багаточастотної автономної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку відповідної незбуреної системи;

– знайдено умови існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії;

– встановлено умови існування й асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією й моментами імпульсної дії — як фіксованими, так і нефіксованими;

– у абстрактному банаховому просторі отримано умови стійкості обмеженого розв'язку нелінійного еволюційного рівняння з секторіальним оператором у лінійній частині й нефіксованими моментами імпульсної дії.

Одержані в дисертаційній роботі результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для вивчення питань існування і стійкості інваріантних торів багаточастотних систем і кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Також їх може бути використано для дослідження задач механіки, біології й інших галузей науки й техніки, математичними моделями яких є відповідні рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 304 с.
2. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 9. – P. 1475 – 1483.
3. *Бигун Я. И., Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999, **35**, № 1. — С. 8–14.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Москва: Наука, 1974. — 504 с.
5. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 2. — С. 177 – 192.
   Translated in: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Lotka–Volterra systems with diffusion and pulsed action // Ukr. Math. J. — 2018. — **70**, № 2. — P. 197 – 216. DOI: 10.1007/s11253-018-1495-y.
6. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки — Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305 – 322.
   Translated in: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of the Lotka–Volterra systems with diffusion and nonfixed times of pulsed actions // J. Math. Sci. — 2019. DOI: 10.1007/s10958-019-04545-x.

7. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 11. — С. 1450 – 1466.
Translated in: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukr. Math. J. — 2017. — **68**, № 11. — P. 1673 – 1693. DOI: 10.1007/s11253-017-1320-z.

8. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 475 – 488.
Translated in: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // J. Math. Sci. — 2017. — **220**, № 4. — P. 425 – 439. DOI: 10.1007/s10958-016-3193-3.

9. *Дворник А. В.* Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 314 – 327.
Translated in: *Dvornyk A. V.* Asymptotic investigation of a weakly nonlinear multifrequency oscillating system // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, No. 3. — P. 337 – 351. DOI: 10.1007/s11072-011-0117-5.

10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — Москва: Наука, 1967. — 472 с.

11. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1967. — 464 с.

12. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — Москва: Изд-во Московского университета, 1978. — 205 с.

13. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков Сиб. матем. ж. — 1960. — 1, № 2. — С. 233–267.

14. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Асимптотическое исследование слабо нелинейных колебательных систем. — Киев, 1976. — 54 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 76.5).

15. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, № 1. — С. 42–53.

16. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. — Киев, 1987. — 67 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.41).

17. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971. — 440 с.

18. *Митропольський Ю. О., Самойленко А. М.* Про асимптотичне інтегрування слабо нелінійних систем // Укр. мат. журн. — 1976. — **28**, № 4. — С. 482–498.

19. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Матем. сб. – 1967. – **74 (116)**, № 2. — С. 202–208.

20. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость. — Киев, 1986. — 44 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 86.65).

21. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.

22. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 1978. — **14**, № 6. — Р. 1034–1045.

23. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1409 – 1413.

24. *Самойленко А. М.* Асимптотический метод исследования m-частотных колебательных систем // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1366 – 1387.

25. *Самойленко А. М.* Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 5 (299). — С. 103 – 146.

26. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — Москва: Наука, 1987. — 304 с.

27. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — Москва: Мир, 1971. — 310 с.

28. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — Москва: Мир, 1984. — 421 с.

29. *Ahmed N. U.* Some remarks on the dynamics of impulsive systems in Banach spaces // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. — 2001. — **8**, № 2. — P. 261 – 274.

30. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal.: Real World Appl. — 2006. — **7**, № 5. — P. 1255 – 1267.

31. *Akhmet M.* Principles of discontinuous dynamical systems. — New York: Springer, 2010. — xii + 176 pp.

32. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. and Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.

33. *Alikakos N. D.* An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations // J. Different. Equat. — 1979. — **33**, № 2. — P. 201 – 225.

34. *Barreira L., Valls C.* Robustness for impulsive equations // Nonlinear Anal. — 2010. — **72**, № 5. — P. 2542 – 2563.

35. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical models in population biology and epidemiology. — Applied Mathematical Sciences **99**. — New York: Springer-Verlag, 2012. — xxiv+508 pp.

36. *Coppel W. A.* Almost periodic properties of ordinary differential equations // Ann. Mat. Pura ed Appl. Ser. 4. — 1967. — **76**, № 1. — P. 27 – 49.

37. *Dvirnyj A. I., Slyn'ko V. I.* Stability in terms of two measures for a class of semilinear impulsive parabolic equations // Sb. Math. — 2013. — **204**, № 4. — P. 485 – 507.

38. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. and Appl. — 2017. — **446**, № 1. — P. 1030 – 1045.

39. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. — Applied Mathematical Sciences **99**. — New York: Springer-Verlag, 1993. — x+450 pp.

40. *He M., Chen F., Li Z.* Almost periodic solution of an impulsive differential equation model of plankton allelopathy // Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2010. — **11**, № 4. — P. 2296 – 2301.

41. *Henriquez H. R., De Andrade B., Rabelo M.* Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations // ISRN Math. Anal. – 2011. – Article ID 632687. – 21 p.

42. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. — Lect. Notes Math., 840. — Berlin – New York: Springer-Verlag, 1981. — iv + 348 pp.

43. *Hernández E., Aki S. M. T., Henríquez H.* Global solutions for impulsive abstract partial differential equations // Comput. Math. Appl. — 2008. — **56**, № 5. — P. 1206 – 1215.

44. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. — Boston: Academic Press, 1993. — xii + 398 pp.

45. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1989. – XII + 273 p.

46. *Li C., Guo X., He D.* An impulsive diffusion predator-prey system in three-species with Beddington – DeAngelis response // J. Appl. Math. and Comput. — 2013. — **43**, № 1-2. — P. 235 – 248.

47. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Anal.: Theory Math. and Appl. – 2004. – **51**, № 4. – P. 633 – 647.

48. *Liu J. H.* Nonlinear impulsive evolution equations // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. — 1999. — **6**, № 1. — P. 77 – 85.

49. *Li Y., Zhang T.* Existence of almost periodic solutions for Hopfield neural networks with continuously distributed delays and impulses // Electron. J. Different. Equat. – 2009. – **2009**, № 152. – P. 1 – 8.

50. Lizama C., Mesquita J., Ponce R. A connection between almost periodic functions defined on timescales and $\mathbb{R}$. — Appl. Anal. — 2014. — **93**. — P. 2547–2558.

51. *Murray J. D.* Mathematical biology. I. An introduction. Third edition. — Interdisciplinary Applied Mathematics, **17**. — New York: Springer-Verlag, 2002. — xxiv+551 pp.

52. *Murray J. D.* Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications. Third edition. — Interdisciplinary Applied Mathematics, **18**. — New York: Springer-Verlag, 2003. — xxvi+811 pp.

53. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. – **18**, № 3 – 4. – P. 269 – 278.

54. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — Appl. Math. Sci., 44. — New York: Springer-Verlag, 1983. — viii + 279 pp.

55. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. and Comput. – 2010. – **217**, № 8. – P. 4167 – 4177.

56. *Rogovchenko Y. V.* Nonlinear impulse evolution systems and applications to population models // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — **207**, № 2. — P. 300 – 315.

57. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Periodic solutions of abstract impulsive systems with non-fixed moments of impulsive effect // Publ. Univ. Miskolc Ser. D Nat. Sci. Math. — 1995. — **36**, № 1. — P. 91 – 99.

58. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 5. – P. 610 – 615.

59. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1995. – X + 462 p.

60. *Samoilenko A., Petryshyn R.* Multifrequency oscillations of nonlinear systems (Mathematics and Its Applications; No. 567). — Dordrecht: Kluwer, 2004. — vi+317 pp.

61. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Almost periodic impulsive systems // Different. Equat. – 1993. – **29**. – P. 684–691.

62. *Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Second Edition (Applied Mathematical Sciences; No. 59). — New York: Springer, 2007.

63. Slyusarchuk V. Y. A Criterion for the existence of almost periodic solutions of nonlinear differential equations with impulsive perturbation // Ukr. Math. J. — 2015. — **67**, № 6. — P. 948–959.

64. *Smith L. H.* Dynamics of competition // Lect. Notes Math. – 1999. — **1714**. – P. 192 – 240.

65. *Stamova I., Stamov G.* Applied impulsive mathematical models. — CMS Books in Mathematics. — Springer, 2016. — xii+318 pp.

66. *Stamov G. T., Stamova I. M.* Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay // Appl. Math. Modelling. – 2007. – **31**, № 7. – P. 1263 – 1270.

67. *Stamov G. T.* Almost periodic models in impulsive ecological systems with variable diffusion // J. Appl. Math. Comput. — 2008. — **27**. — P. 243 – 255.

68. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. – Heidelberg: Springer, 2012. – **2047**. – XX + 217 p.

69. *Struk O. O., Tkachenko V. I.* On impulsive Lotka – Volterra systems with diffusion // Ukrain. Math. J. — 2002. — **54**, № 4. — P. 629 – 646.

70. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // Math. Modeling and Appl. in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161 – 205.

71. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Differ. Equ. — 2014. — **21**, № 3 – 4. — P. 155 – 169.

72. *Tkachenko V. I.* Exponential dichotomy and existence of almost periodic solutions of impulsive differential equations // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, № 4. – P. 490 – 502.

73. *Tkachenko V. I.* On the exponential dichotomy of pulse evolution systems // Ukrain. Math. J. — 1994. — **46**, № 4. — P. 441 – 448.

74. *Trofimchuk S. I.* Almost periodic solutions of linear abstract impulse systems // Differential Equations. — 1996. — **31**, № 4. — P. 559 – 568.

75. *Vlasenko L. A., Myshkis A. D., Rutkas A. G.* On a class of differential equations of parabolic type with impulse actions // Differ. Equ. — 2008. — **44**, № 2. — P. 231 – 240.

76. *Wang J. R., Xiang X., Peng Y.* Periodic solutions of semilinear impulsive periodic system on Banach space // Nonlinear Anal. — 2010. — **71**, № 12. — P. e1344 – e1353.

77. *Wang X., Li Z.* Global attractivity and oscillations in a nonlinear impulsive parabolic equation with delay // Kyungpook Math. J. — 2008. — **48**, № 4. — P. 593 – 611.

78. *Yilmaz E.* Almost periodic solutions of impulsive neural networks at non-prescribed moments of time // Neurocomputing. – 2014. – **141**. – P. 148 – 152.

79. *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkc. Ekvacioj. — 1969. — **12**, № 1. — P. 23 – 40.

80. *Zhang H.,Xia Y.* Existence and exponential stability of almost periodic solution for Hopfield-type neural networks with impulse // Chaos, Solitons and Fractals. – 2008. – **37**, № 4. – P. 1076 – 1082.

ДОДАТОК

Цей додаток містить перелік публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. *Дворник А. В.* Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 314 – 327.
(English translation: *Dvornyk A. V.* Asymptotic investigation of a weakly nonlinear multifrequency oscillating system // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, No. 3. — P. 337 – 351. DOI: 10.1007/s11072-011-0117-5, Web of Science, Scopus.)

2. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 475 – 488.
(English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 4. – P. 425 – 439. DOI: 10.1007/s10958-016-3193-3, Scopus.)

3. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1450 – 1466.
(English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive

actions // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 11. – P. 1673 – 1693. DOI: 10.1007/s11253-017-1320-z, Web of Science, Scopus.)

4. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 177 – 192. (English translation: *Dvornyk A. V., Struk O. O., Tkachenko V. I.*, Almost periodic solutions of Lotka – Volterra systems with diffusion and pulsed action, Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 2. – P. 197 – 216. DOI: 10.1007/s11253-018-1495-y, Web of Science, Scopus.)

5. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305 – 322. (English translation: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of the Lotka–Volterra systems with diffusion and nonfixed times of pulsed actions // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, № 3. – P. 358 – 380. DOI: 10.1007/s10958-019-04545-x, Scopus.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Дворник А. В.* Інваріантні тори однієї коливної системи. — Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 92–93.

2. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On stability of evolution equations with state-dependent moments of impulsive action. — Труды VII Международной конференции "Проблемы дифференциальных уравне-

ний, анализа и алгебры" (8–9 октября 2015 г.), Актобе, Казахстан. – Актобе, 2015. – 5 с.

3. *Дворник А. В.* Сохранение инвариантного тора одной колебательной системы. — Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29–30 октября 2015 г.). – Душанбе, 2015. – С. 94–95.

4. *Дворник А., Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. — Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936–1992), 28–30 вересня 2016 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – С. 42.

5. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії. — Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942–1996): матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2017. – С. 33–35.

6. *Дворник А., Ткаченко В.* Майже періодичні розв'язки системи Лотки–Вольтерра з дифузією та імпульсною дією. — Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 61.