

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
Приставки Юлії Василівни  
«Симетрійні властивості та точні розв'язки  
рівнянь реакції-конвекції-дифузії»,  
поданої на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.02—диференціальні рівняння

У сучасних наукових дослідженнях вивчення багатьох фізичних, біохімічних, екологічних процесів проводиться на основі аналізу відповідних математичних моделей. Значну кількість фундаментальних законів природи можна описати диференціальними рівняннями чи системами диференціальних рівнянь. Тому природньо, що в якості математичних моделей як у фундаментальних фізико-хімічних дослідженнях, так і при вивченні біологічних процесів та суспільних явищ часто використовуються диференціальні рівняння або їх системи. Оскільки системи диференціальних рівнянь, які мають прикладне значення, часто є нелінійними, то при їх інтегруванні не можна використовувати класичні методи. При побудові точних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними часто використовують сучасні теоретико-групові методи, в основі яких лежить метод, започаткований у кінці ХІХ століття видатним норвезьким математиком Софусом Лі. Оскільки теоретико-групові методи дають можливість інтегрування диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації певних класів диференціальних рівнянь, яка дозволяє із заданого класу рівнянь виділити ті, які володіють широкими симетрійними властивостями. Ще однією з найбільш важливих задач є задача виділення з заданого класу таких рівнянь, які допускають в якості групи інваріантності деяку відому групу. У дисертаційній роботі Приставки Ю.В. розв'язані саме такі задачі, які без сумніву є актуальними.

Дисертаційна робота Приставки Ю.В. присвячена дослідженню симетрійних властивостей та побудові точних розв'язків нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

Коротко зупинюся на змісті дисертаційної роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатка.

У вступі автор обґрунтував актуальність задач, які досліджуються в дисертації, зупинився на науковій новизні одержаних результатів, їх апробації та особистому внеску в їх отримання.

Перший розділ дисертації присвячений аналізу літератури за темою досліджень. В огляд включені роботи, в яких проведені дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь параболічного типу. Автором обґрунтовано вибір напрямку досліджень та здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації.

У другому розділі дисертації з точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Виписано систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності даного рівняння. Знайдено основну групу перетворень еквівалентності рівняння реакції-конвекції-дифузії. Одержано необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності даного рівняння. Зображення одержаних виглядів нелінійностей рівняння дещо спрощено за допомогою неперервних перетворень еквівалентності. Для кожного з нееквівалентних виглядів функцій, при яких допускається розширення основної алгебри інваріантності, побудовано максимальну алгебру інваріантності  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. За допомогою прямого методу знайдено всі можливі локальні перетворення еквівалентності, які зводять довільне рівняння класу реакції-конвекції-дифузії до рівняння цього ж класу. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності частину одержаних рівнянь зведено до інших, еквівалентних рівнянь, які також допускають розширення основної алгебри інваріантності. Таким чином, одержано нееквівалентні зображення нелінійностей та відповідних максимальних алгебр інваріантності  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії в найбільш спрощеному вигляді. За знайденими операторами інваріантності побудовано нееквівалентні ліівські анзаци та проведено симетрійну редукцію рівнянь зі степеневими нелінійностями. Побудовано точні розв'язки досліджених рівнянь, вивчено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

У третьому розділі дисертації розв'язано задачу знаходження нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. Знайдені нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для побудови нелокальних анзацив, проведення редукції і знаходження точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії, та досліджено симетрійні властивості цих образів. Ліівську симетрію образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса використано для побудови їх нееквівалентних

ліївських анзаців. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії використані для побудови нелокальних анзаців та проведення редукції системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. В окремих випадках знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію. Знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Наявність нелокальних анзаців означає наявність нелокальних симетрій даної системи. Кожному нелокальному анзацу відповідає нелокальний оператор. Знайдено оператори, які породжують ліївські анзаци першого та другого образу. Побудовано нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

У висновку дисертант коротко сформулював основні положення дисертаційної роботи.

Слід відзначити, що всі результати, отримані в дисертації є новими. Обґрунтованість і достовірність положень та висновків забезпечуються коректною постановкою задач, строгим доведенням усіх тверджень із застосуванням методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь та класичних методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. У більшості випадків автором наведено порівняння одержаних результатів із раніше відомими.

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у дев'ятнадцяти роботах. Серед них 5 статей у провідних наукових фахових виданнях, що затверджені Міністерством освіти і науки України; 2 статті в журналах, які індексуються міжнародними наукометричними базами даних Scopus та Web of Science. Основні результати дисертації додатково відображено у матеріалах 11 наукових конференцій.

Особливу увагу, на мою думку, заслуговують такі результати:

- Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
- Проведено повну групову класифікацію  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
- Проведено симетрійну редукцію та знайдено деякі точні розв'язки  $(1+2)$ -вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями.
- Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

- Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, які використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків системи Ван-дер-Ваальса.
- Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.
- Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам даної системи.

У той же час є такі зауваження та побажання:

- Отримані симетрії рівняння реакції-конвекції-дифузії можна було б використати для знаходження точних розв'язків не тільки рівнянь зі степеневими нелінійностями, а й для інших рівнянь даного класу, особливо тих, які описують конкретні фізичні процеси.
- Було б цікаво з'ясувати, чи описують якісь конкретні фізичні процеси отримані образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Це б спонукало дисертанта до більш детального їх дослідження.
- Стр.42. Автор перераховує методи отримання точних розв'язків диференціальних рівнянь. Але не додає, що вони не є універсальними, а працюють лише за певних умов. Навіть той же метод варіації довільної сталої дає необхідний результат, коли відома відповідна фундаментальна система.
- Не завжди зрозуміло, особливо в огляді літератури, про які рівняння йде мова: звичайні диференціальні чи у частинних похідних.
- В роботі значна увага приділяється знаходженню заміни, що зводять рівняння до більш простого вигляду, але такі заміни часто не є ляпуновського типу, тобто не зберігають якісні характеристики розв'язків, наприклад у теоремі 2.6 рівняння  $u_0 = \Delta u - u$ , всі розв'язки якого в  $R^n$  за часом експоненційно спадають, зведено до рівняння  $v_0 = \Delta v$  розв'язки якого в  $R^n$  лише обмежені за  $L^2(R^n)$  – нормою.
- Є деякі орфографічні описки. Наприклад: стр.41 «підход» замість «підхід», стр.81 «задовольняють наступним умовам» замість «задовольняють наступні умови», стр.104 «вирішуючи» замість «розв'язуючи».

Проте ці зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертації. У цілому можна констатувати, що дисертація Приставки Ю.В. виконана на

високому науковому рівні. Виклад результатів є послідовним і чітким. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

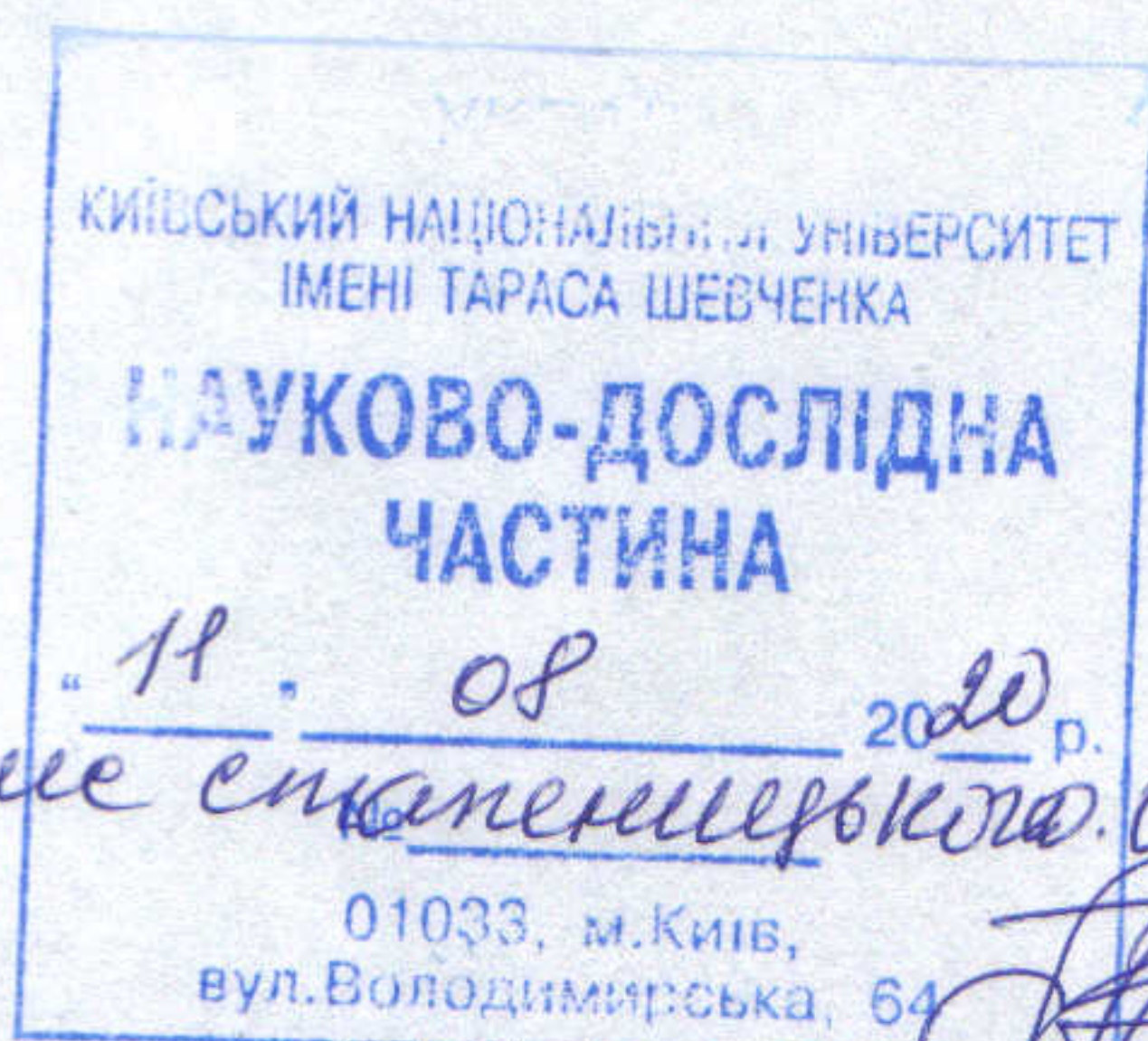
Вважаю, що дисертаційна робота Приставки Ю.В. «Симетрійні властивості та точні розв'язки рівнянь реакції-конвекції-дифузії», подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук є завершеним науковим дослідженням та задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12, 13, «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами, внесеними згідно з постановами КМУ №656 від 19.08.2015 року та № 1159 від 30.12.2015 р. і № 567 від 27.07.2016 р.), а її автор – Приставка Юлія Василівна заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико –математичних наук за спеціальністю 01.01.02 –диференціальні рівняння.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри загальної математики  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка



Станжицький О.М.



*Підписе степенешерка О.М. заведуча*

*Толеша*



*am*