Міністерство освіти і науки України
Національний університет "Полтавська політехніка
імені Юрія Кондратюка"
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Приставка Юлія Василівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________ Ю.В. Приставка

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
СЄРОВ Микола Іванович

Полтава — 2020

Анотація

Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та точні розв'язки рівнянь реакції-конвекції-дифузії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують у якості математичних моделей різноманітних процесів у природі та суспільстві.

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей та побудові точних розв'язків нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. У дисертаційній роботі для рівняння реакції-конвекції-дифузії проведено класифікацію ліївських симетрій та знайдено деякі точні розв'язки рівнянь зі степеневими нелінійностями. Для системи рівнянь конвекції-дифузії побудовано нелокальні анзаци та нелокальні оператори, які їм відповідають. За допомогою знайдених анзаців проведено редукцію даних рівнянь, а також знайдено деякі їх точні розв'язки.

Рівняння реакції-конвекції-дифузії має широке застосування у фізиці, біології, хімії, екології та інших галузях науки. Воно використовується для опису різних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції. Дане рівняння застосовується для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. Так модифікації рівняння реакції-конвекції-дифузії використовуються для

моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших біохімічних процесів. При конкретних значеннях нелінійностей рівняння реакції-конвекції-дифузії використовується у біології, зокрема при описі переносу кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань даного рівняння в екології є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, і описується рівнянням реакції-конвекції-дифузії, зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п.

Система нелінійних рівнянь конвекції–дифузії з конкретними нелінійностями знаходить широке застосування для опису різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій. Розв'язання широкого кола науково–технічних проблем передбачає дослідження явища вільної конвекції. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації теплоенергетичних і хіміко-технологічних процесів у різних сферах промисловості. Системи рівнянь конвекції-дифузії широко застосовуються в біологічних науках для моделювання процесів та явищ живої природи, зокрема для опису явища хемотаксису мікроорганізмів, для опису конкуренції тварин на певній території та інших. Системи даного класу описують рух рідини у пористому середовищі, перенос енергії в плазмі, розподіл речовин у ґрунті та багато інших процесів. У нашій роботі досліджується система рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії. Система рівнянь Ван-дер-Ваальса широко використовується у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин. Вона описує процеси, які пов'язані з переходом газу у рідину, і навпаки.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел та одного додатку.

У **вступі** зроблено опис основних характеристик дисертаційного дослідження.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження.

У **другому розділі** дисертації з точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u),$$

де $u = u(x_0, \ x_1, \ x_2)$, x_0 — часова змінна, $x_1, \ x_2$ — просторові змінні, $f^0(u), \quad f^1(u), \quad f^2(u), \quad h(u)$ — довільні гладкі функції.

Виписано систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності даного рівняння. Знайдено основну групу перетворень еквівалентності рівняння реакції-конвекції-дифузії. Одержано необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності даного рівняння. Зображення одержаних нелінійностей рівняння дещо спрощено за допомогою неперервних перетворень еквівалентності. Для кожного з нееквівалентних виглядів функцій, що допускають розширення основної алгебри інваріантності, побудовано максимальну алгебру інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. За допомогою прямого методу знайдено всеможливі локальні перетворення еквівалентності, які зводять довільне рівняння класу реакції-конвекції-дифузії до рівняння цього ж класу. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності частину одержаних рівнянь зведено до інших, еквівалентних рівнянь, які також допускають розширення основної алгебри інваріантності.

Таким чином, одержано нееквівалентні зображення нелінійностей та відповідних максимальних алгебр інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії в найбільш спрощеному вигляді. За знайденими операторами інваріантності побудовано нееквівалентні ліївські анзаци та проведено симетрійну редукцію рівнянь зі степеневими нелінійностями.

Серед рівнянь даного класу було виділено рівняння, яке володіє найширшим класом симетрії. Це рівняння є узагальненням відомого двовимірного рівняння Фішера для пористих областей. У випадку, коли деяка область переповнена населенням, дане рівняння описує швидкість його розсіювання в область більш низької щільності. Також дане рівняння можна розглядати як узагальнення рівняння Мюррея, яке описує біологічні процеси, пов'язані з процесами ангіогенезу, заживлення ран, динаміки взаємодії популяцій та ін. Побудовано точні розв'язки досліджених рівнянь, вивчено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

У **третьому розділі** дисертації розв'язано задачу знаходження нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x,$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2$, $u^a = u^a(t,\ x)$, t — часова змінна, x — просторова змінна, $F(U)$ та $K(U)$ – довільні гладкі функціональні матриці розмірності 2×2 та 2×1 відповідно.

Знайдені нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції і знаходження точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$u^1_t = \lambda_1 u^1_{xx} - u^1 u^1_x + \mu u^2 u^2_x,$$

$$u^2_t = \lambda_2 u^2_{xx} - u^1 u^2_x - u^2 u^1_x,$$

де $u^a = u^a(t,\ x)$, λ_1 — коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 — коефіцієнт дифузії, μ — коефіцієнт конвекції, $a \in \{1, 2\}$.

Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем рівнянь конвекції–дифузії, та досліджено симетрійні властивості цих образів. Ліївську симетрію образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса використано для побудови їх нееквівалентних ліївських анзаців.

Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції–дифузії використані для побудови нелокальних анзаців та проведення редукції системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. В окремих випадках знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію. Знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Наявність нелокальних анзаців означає наявність нелокальних симетрій даної системи. Кожному нелокальному анзацу відповідає нелокальний оператор. Знайдено оператори, які породжують ліївські анзаци першого та другого образу. Побудовано нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Основні результати, які визначають **наукову новизну дисертації**, виносяться на захист і отримані вперше, є такі:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. Проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

3. Проведено симетрійну редукцію та знайдено деякі точні розв'язки (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями.

4. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

5. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Це використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

6. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

7. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам даної системи.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії теплопровідності, проникання, дифузії, гідродинаміки, газової динаміки та деяких інших. Точні розв'язки, отримані для окремих систем рівнянь, зокрема системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та деяких рівнянь реакції-конвекції-дифузії, можуть знайти практичне застосування при моделюванні відповідних біофізичних процесів, а також вони можуть бути вибраними в якості еталонних розв'язків при розв'язуванні даних рівнянь та систем рівнянь числовими методами.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, алгебра Лі, група еквівалентності, рівняння реакції-конвекції-дифузії, система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, нелокальний анзац, точні розв'язки.

Abstract

Prystavka Yu.V. Symmetry properties and exact solutions of the reaction-convection-diffusion equations. – Manuscript.

Thesis for a Candidate degree in Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 – differential equations. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The study of diffusion equations and their various modifications with additional terms corresponding to reaction or convection is an urgent task of mathematical physics since these equations are often used as mathematical models of various processes in the nature and society.

The thesis is devoted to the study of symmetry properties and the construction of exact solutions of nonlinear reaction-convection-diffusion equations and systems of nonlinear convection-diffusion equations. In the thesis work, for classification of reaction-convection-diffusion equations, we classified Lie symmetries and found some exact solutions of equations with power nonlinearities. The nonlocal ansätze and nonlocal operators corresponding to them are constructed for the system of convection-diffusion equations. With the help of the found ansätze, the data of the equations were reduced and some exact solutions of them were found.

The reaction-convection-diffusion equation is widely used in physics, biology, chemistry, ecology and other fields of science. It is used to describe various physical processes, including thermal conductivity, diffusion, and convection. This equation is used to model the motion of particles, energy or other physical quantities in a particular physical system. Thus, modifications of the reaction-convection-diffusion equation are used to model the transfer of energy in plasma, the distribution of solutions in soil, movement of liquids in a porous medium,

processes of chemotaxis and other biochemical processes. At specific values of nonlinearities, the reaction-convection-diffusion equation is used in biology, in particular when describing oxygen transfer in circulatory system, for modelling the growth of a blood clot in the parietal flow. One of the applications of this equation in ecology is to study the processes of propagation of substance which contaminates water basins. Hydrodynamic instability, which occurs near the surface of the distribution of two immiscible liquids and is described by the reaction-convection-diffusion equation, is found in such fields as oil refining, combustion processes, ore separation, etc.

The system of nonlinear convection-diffusion equations with specific nonlinearities is widely used to describe various physical, chemical and biological processes. Thus, mathematical models based on this system are used in macrokinetics, the main subject matter of which is to study the role of diffusion, heat transfer and convection in the course of chemical reactions. Solution of a wide range of scientific and technical problems involves the study of the phenomenon of free convection. The process of heat and mass transfer is of great practical importance for intensification of thermal energy and chemical-technological processes in various fields of the industry. Systems of convection-diffusion equations are widely used in the biological sciences for modelling processes and phenomena of wildlife, in particular for describing the phenomenon of chemotaxis of microorganisms, for describing competition of animals in a particular territory and others. Systems of this class describe the movement of fluid in porous medium, transfer of energy in plasma, distribution of substances in soil and many other processes. In our work, we study the van der Waals equation system, which is a class of the convection-diffusion equation systems. The van der Waals equation system is widely used in the molecular kinetic theory of gases and liquids. It describes the processes related to the passage of gas into liquid and vice versa.

The thesis comprises the abstracts in Ukrainian and English, list of symbols, introduction, three sections, conclusions and list of sources used and one addendum.

The introduction describes the main characteristics of the dissertation research.

The first section contains an overview of the literature on the subject of the dissertation research.

In **the second section** of the thesis, a complete group classification of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation is performed with the accuracy of equivalence transformations

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u),$$

where $u = u(x_0,\ x_1,\ x_2)$, x_0 is a time variable, $x_1,\ x_2$ are space variables, $f^0(u)$, $f^1(u)$, $f^2(u)$, $h(u)$ are arbitrary smooth functions.

The system of determining equations and the form of the basic algebra of invariance of this equation are set forth. The main group of transformations of equivalence of reaction-convection-diffusion equation is found. The necessary conditions for extending the basic algebra of the invariance of this equation are obtained. The image of the obtained nonlinearities of the equation is somewhat simplified by means of the continuous equivalence transformations. For each of the nonequivalent types of functions that allow extension of the basic algebra of invariance, the maximum algebra of invariance of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation is constructed. Using the direct method, we found the all-purpose local transformations of equivalence which reduce an arbitrary equation of the reaction-convection-diffusion class to an equation of the same class. With the help of the additional equivalence transformations, some of the obtained equations are reduced to other equivalent equations, which also allow extension of the basic algebra of invariance.

Thus, non-equivalent images of nonlinearities and corresponding maximum algebras of invariance of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation in the simplest form are obtained. According to the invariance operators found, non-equivalent Lie ansätze are constructed and symmetric reduction of the equations with the power nonlinearities is performed.

Among the equations in this class, the equation with the broadest class of symmetry was singled out. This equation is generalization of the well-known two-dimensional Fisher equation for porous regions. In case if a region is crowded with population, this equation describes the rate of its dispersion into a lower density region. Also this equation can be considered as generalization of the Murray equation which describes the biological processes associated with the processes of angiogenesis, wound healing, dynamics of interaction of populations, etc. The exact solutions of the equations studied are constructed, the properties of some of the obtained solutions are studied and their geometrical interpretation is given.

In **the third section** of the thesis the problem of finding nonlocal transformations of equivalence of the system of nonlinear convection-diffusion equations is solved

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x,$$

where $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2, \quad u^a = u^a(t,\ x),$ t is a time variable, x is a space variable, $F(U)$ and $K(U)$ are arbitrary smooth functional matrices of the 2×2 and 2×1 dimension respectively.

The found nonlocal transformations of equivalence are used for constructing nonlocal ansätze, performing reduction and finding exact solutions of the van der Waals equation system

$$u_t^1 = \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1 u_x^1 + \mu u^2 u_x^2,$$

$$u_t^2 = \lambda_2 u_{xx}^2 - u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1,$$

where $u^a = u^a(t,\ x),$ λ_1 is a coefficient of kinematic viscosity, λ_2 is a diffusion coefficient, μ — is a convection coefficient, $a \in \{1, 2\}$.

The two images of the van der Waals equation system, which is a class of the convection-diffusion equation systems, are found, and the symmetry properties of these images are researched. The Lie symmetry of the images of the van der Waals equation system was used to construct their non-equivalent Lie ansätze.

Nonlocal transformations of equivalence of the system of convection-diffusion equations were used to construct nonlocal ansätze and to reduce the van der Waals equation system. Nonlocal ansätze were constructed and both images of the van der Waals equation system were reduced. In some cases, exact solutions of the van der Waals equation system are found, properties of some of the obtained solutions are researched, and their geometrical interpretation is given. Nonlocal ansätze were found and both images of the van der Waals equation system were reduced.

The presence of nonlocal ansätze means the presence of nonlocal symmetries of this system. Each nonlocal ansatz is met by nonlocal operator. The operators, which generate Lie ansätze of the first and second images, are found. Nonlocal operators corresponding to the nonlocal ansätze of the van der Waals equation system are constructed.

The main results which determine the scientific novelty of the thesis, presented for the defense and obtained for the first time, are as follows:

1. The basic and additional transformations of equivalence of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation are established.

2. The complete group classification of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation is performed.

3. The symmetric reduction is performed and some exact solutions of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation with power nonlinearities are found.

4. Nonlocal transformations of equivalence of the system of nonlinear convection-diffusion equations are found.

5. The two images of the van der Waals equation system are found. That is used for constructing nonlocal ansätze, performing reduction and finding some exact solutions of the van der Waals system.

6. Nonlocal ansätze were constructed and both images of the van der Waals equation system were reduced.

7. Nonlocal operators of invariance, which correspond to the nonlocal ansätze of this system, are constructed.

The thesis work is of the theoretical nature. The obtained results are new and can be used to solve a number of specific problems of the partial derivative differential equation theory, thermal conductivity theory, penetration, diffusion, hydrodynamics, gas dynamics and some others. The exact solutions obtained for individual systems of equations, in particular the van der Waals equation system and some reaction-convection-diffusion equations, can find practical application in modelling the relevant biophysical processes, and they can also be selected as reference solutions in solving these equations and systems of equations by numerical methods.

Keywords: symmetry, invariance, Lie algebra, equivalence group, reaction-convection-diffusion equation, system of convection-diffusion equations, nonlocal transformations of equivalence, the van der Waals equation system, nonlocal ansatz, exact solutions.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Про розширення основних симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія. Математика. Механіка. 2015. Випуск 1(33). С. 38-44.

2. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія. Фізико-математичні науки. 2016. Випуск 14. С. 132-139.

3. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Прикарпатський вісник НТШ. 2017. Випуск 1(37). С. 42-52.

4. Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Приставка Ю.В. Застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії до знаходження її точних розв'язків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2017. Випуск 83. С. 123-138.

5. Сєров М.І., Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Нелінійні коливання. 2019. Т. 22, № 1. С. 98-117.

6. Serov M., Prystavka Yu. Nonlocal ansätze, reduction and some exact solutions for the system of the van der Waals equations. Journal of

Mathematical Analysis and Applications. 2020. V. 481, № 1. P. 98-117. doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123442.

Статті в інших наукових виданнях

1. Приставка Ю.В. Точні розв'язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Системи управління, навігації та зв'язку, 2018. Випуск 3(49). С. 78-82.

Тези наукових доповідей, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Приставка Ю.В. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 15-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р. Київ: Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2014. С. 256-257.

2. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Точні розв'язки двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 16-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р. Київ: Т.1. Диференціальні інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2015. С. 207-208.

3. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції "Прикладні задачі математики" , присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р. Івано-Франківськ: Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 2016. С. 92-94.

4. Serov M., Serova M., Omelyan O., Prystavka Yu. Application of non-local conversions of equivalence of the system of convection-diffusion equations to the finding of exact solutions. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky: book of abstracts, 20-24 September 2016. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. P. 105-107.

5. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" , 21-22 квітня 2016 р. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 204-205.

Тези наукових доповідей, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Приставка Ю.В. Перетворення еквівалентності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 66-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 15 квітня – 15 травня 2014 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2014. С. 178-179.

2. Приставка Ю.В. Додаткові перетворення двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 67-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 2 квітня – 22 травня 2015 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2015. — С. 198-199.

3. Приставка Ю.В. Симетрійні властивості двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 68-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ,

19 квітня – 13 травня 2016 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2016. — С. 185-187.

4. Приставка Ю.В. Знаходження точних розв'язків системи рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень еквівалентності. Тези 69-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 19 квітня – 13 травня 2017 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2017. — С. 185-187.

5. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні анзаци та редукція системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Тези 70-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 23 квітня – 18 травня 2018 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2018. С. 173-174.

6. Приставка Ю.В. Ліївські анзаци, редукція та точні розв'язки нелінійного (1+2)–вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 71-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 22 квітня – 17 травня 2019 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2019. С. 143-144.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими — від 0 до n. За індексами, що повторюються, проводиться підсумовування. Нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною, а верхній індекс — номер функції, нижні індекси сталих та незалежних змінних також означають їх номери.

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел

$\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір

МАІ — максимальна алгебра інваріантності

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_{u^a} = \dfrac{\partial}{\partial u^a}$ — оператори диференціювання, відповідно, за змінними x_μ та u^a

$\epsilon = (\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — антисиметричний тензор 2-го порядку

δ_{ab} — символ Кронекера

$(\delta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$u_{(n)}$ — сукупність всіх похідних функції u по змінній x_1 до порядку n

Вступ

Актуальність теми. При дослідженні багатьох фізичних, хімічних, біологічних, біохімічних, екологічних процесів часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. Проте, на сьогоднішній день не існує загальних методів точного розв'язання таких рівнянь. Саме тому, задача відшукання точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними дала поштовх до розвитку нових методів інтегрування диференціальних рівнянь.

До сьогодні було розроблено цілу низку методів розв'язання диференціальних рівнянь: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, Метод Д'аламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуассона, метод Фур'є та багато інших. Одним із таких методів є метод оберненої задачі теорії розсіяння (та ряд споріднених з ними методів), який було запропоновано у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) та Р. Міури (R. Miura) [114] на прикладі інтегрування нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза. Великий внесок у розвитку методів оберненої задачі теорії розсіювання та створення на його основі нових методів належить українським математикам, зокрема, Ю. М. Березанському [8, 9], В. О. Марченку [32], Л. П. Нижнику [36, 37], Є. Д. Білоколосу [5, 6], Є. Я. Хруслову [85] та ін.

Серед методів, які з'явилися нещодавно, слід відзначити також асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, важливу роль у розвитку яких відіграли праці А. М. Самойленка, Ю. О. Митропольського, О. М. Станжицького та ін.([33]- [35], [48]-[51], [66], [67], [157]); варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І. О. Луковським ([27]-[30]); алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, запропоновані М. О. Перестюком ([14], [42], [43]); асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М. І. Портенком ([2], [44], [45]); чисельно-аналітичний метод знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В. Л. Макаровим ([25], [31]), та інші.

При побудові точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними часто використовують сучасні теоретико-групові методи, в основі яких лежить метод видатного норвезького математика Софусом Лі ([127]-[132]). Даний метод ґрунтується на знаходженні та застосуванні операторів алгебри інваріантності (симетрій Лі) нелінійного рівняння для теоретико-групової редукції та знаходження його точних розв'язків.

Багато науковців продовжили дослідження у цьому напрямку використовуючи і розвиваючи теорію С. Лі. Так, у 1905 р. Пуанкаре застосував ідеї Лі до системи рівнянь Максвела, у 1909 році Г. Бейтман [95] використав симетрійні властивості лінійного хвильового рівняння для побудови його точних розв'язків. Е. Ньотер у 1918 році довела важливі теореми, які пов'язали групи симетрії із законами збереження. Результати С. Лі щодо групового аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними тривалий час залишалися маловідомими. Г. Біркгоф [11] вперше наголосив на важливості цих результатів і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці.

Новий етап розвитку метод Лі отримав у роботах Л. В. Овсяннікова і його школи [39, 40, 148], якими була створена теорія інваріантних і частковоінваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. В Україні перші роботи з цієї тематики наприкінці 50-х років XX століття були опубліковані В. Г. Костенком [22].

У середині 70-х років років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В. І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено суттєвий внесок як у класичні, так і в нові методи дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних досягнень необхідно відзначити розроблений В. І. Фущичем і А. Г. Нікітіним [69]-[73] новий метод дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, який дістав назву неліївського методу дослідженння симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна відмінність цього методу від методу С. Лі полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності відповідних диференціальних рівнянь є, як правило, інтегро-диференціальними (псевдо-диференціальними) операторами. За допомогою даного методу вдалося знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака, Максвела [70], Ламе [79], тощо.

У 80-х роках XX століття очевидною стала обмеженість класичного підходу Лі, оскільки існували приклади редукцій диференціальних рівнянь, які не можна було отримати в рамках даного підходу. Крім того, при всіх безперечних перевагах класичного підходу Лі знаходження розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, клас розв'язків рівнянь, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо ж рівняння має бідну ліївську симетрію, або не має її взагалі, то застосування даного методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату. Ці та деякі інші проблем стимулювали пошук нових підходів до побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Основою ряду з числа таких підходів постає ідея пошуку додаткових (неліївських) операторів симетрії. Так, у 1969 р. Дж. Блумен та І. Д. Коул ввели поняття некласичної симетрії [97] і запропонували новий метод для пошуку анзаців і точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Що дозволило знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, які неможливо отримати в рамках класичного методу С. Лі. Цей напрям розвивали в своїх роботах П. Олвер та Розенау [146], [147]. У 80-х роках минулого століття Н. Х Ібрагімовим та Р. Л. Андерсоном було відкрито узагальнені симетрії диференціальних рівнянь, які одержали назву груп Лі-Беклунда [91].

Новим етапом розвитку симетрійних методів стала розробка В. І. Фущичем разом зі своїми учнями: В. І. Чопиком, І. М. Цифрою та М. І. Сєровим [73], [69], [81], [76], [80], [82] методу умовної симетрії. За допомогою цього методу вдалося побудувати нові розв'язки низки відомих нелінійних рівнянь, які неможливо знайти методами Лі та методом оберненої задачі розсіяння. Дослідження в цьому напрямку плідно провадили українські математики Р. М. Черніга, П. І. Миронюк, Р. О. Попович, В. М. Бойко ([111, 110, 78, 12, 84]) та ін.

Інший напрям розв'язання проблеми пошуку додаткових розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, які неможливо одержати стандартним ліївським методом, був запропонований В. І. Фущичем, М. І. Сєровим, Т. К. Амеровим. Вони використали одержане Дж. Кінгом перетворення годографа, яке разом з деякими нелокальними замінами, перетворює нелінійне рівняння теплопровідності в рівняння того ж самого типу, для лінеаризації, побудови нелокальних анзаців, та знаходження нелокальних формул розмноження розв'язків даного рівняння.

Таким чином, розвиток методів теоретико-групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення при знаходженні розв'язків тих диференціальних рівнянь чи систем, для яких інші методи є неефективними. Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Однією з основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача знаходження найширшої (максимальної) групи симетрії, яку допускає диференціальне рівняння, і не менш важливою є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, яку започаткував С. Лі. Сучасне формулювання задачі групової класифікації було запропоноване Л. В. Овсянніковим, який вперше здійснив повну групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Дослідженнями в цьому напрямку займалося багато українських математиків: А. Г. Нікітін, М. І. Сєров, Р. М. Черніга, В. М. Бойко, А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик ([139]-[141], [108], [112], [104]-[106], [86]) та ін.

Важливою також є задача відшукання групи перетворень еквівалентності заданого класу диференціальних рівнянь. Знаходження групи перетворень еквівалентності даного рівняння дає можливість записати його у найбільш простій для дослідження формі. Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквівалентності було внесено І. Ахатовим, Р. Газізовим та Н. Ібрагімовим. Подальший розвиток ці ідеї одержали в роботах В. І. Лагна, С. В. Спічака та В. І. Стогнія, де описано новий підхід до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі-Овсяннікова, результатом класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності. Із наведеного вище стає очевидним, що однією із актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь є побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, зокрема, задача повної групової класифікації диференціальних рівнянь, що дозволяє із заданого класу рівнянь виділити такі, які володіють широкими симетрійними властивостями. Ще однією важливою задачею теоретико-групового аналізу є розробка ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Розв'язанню таких актуальних задач стосовно нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії і присвячена дана дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано згідно з загальним планом досліджень кафедри вищої та прикладної математики Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка".

Мета дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є застосування лііввського методу до повної групової класифікації (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії та побудова точних розв'язків даного рівняння, а також застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків даної системи.

Завдання дослідження.

1. Знайти основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. Провести повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії з точністю до перетворень еквівалентності.

3. Побудувати точні розв'язки (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

4. Знайти нелокальні перетворення еквівалентності системи неліній-них рівнянь конвекції-дифузії.

5. Побудувати нелокальні анзаци, провести редукцію та знайти точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

6. Знайти нелокальні анзаци та провести редукцію образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

7. Побудувати нелокальні оператори інваріантності які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Об'єкт дослідження. *Об'єктом дослідження* є рівняння реакції–конвекції–дифузії та системи рівнянь конвекції–дифузії.

Предмет дослідження. *Предметом дослідження* є класифікація лiївських симетрiй рiвнянь реакцiї–конвекцiї–дифузiї та знаходження нелокальних анзацiв i побудова нелокальних операторiв системи рiвнянь конвекцiї–дифузiї.

Методи дослідження. Сформулюємо основнi поняття та визначення, що використовуються в дисертацiйнiй роботi.

Розглядаємо клас систем диференцiальних рiвнянь з частинними похiдними m – го порядку

$$S(x, u_{(m)}, F_{(s)}) = 0, \tag{0.1}$$

де $S \in R^k$, $x = (x_0, \overrightarrow{x}) \in R^{1+n}$, $u = u(x) \in R^k$, $F = F(x, u_{(r)}) \in R^l$ — довiльнi гладкi функцiї, $u_{(r)} = (u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u})$, $\underset{r}{u}$ — сукупнiсть всеможливих похiдних r–го порядку функцiй u за змiнними x, $F_{(s)} = (F, \underset{1}{F}, \ldots, \underset{s}{F})$, $\underset{s}{F}$ — сукупнiсть всеможливих похiдних s–го порядку функцiй F за змiнними $y = (x, u_{(r)})$.

Наведемо основнi поняття методу С. Лi згiдно [148], [41].

Означення 0.1. *Група Лi локальних перетворень вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \widetilde{u} = g(x, u, \theta), \tag{0.2}$$

де θ — довiльнi параметри, $\theta \in R^l$, називається l–параметричною групою точкових симетрiй рiвняння (0.1), якщо множина розв'язкiв (0.1) iнварiантна вiдносно перетворень (0.2).

Означення 0.2. *Алгеброю Лi групи (0.2) називається лiнiйний векторний простiр, базисом якого є диференцiальнi оператори першого порядку*

$$X_b = \xi^b(x, u)\partial_x + \eta^b(x, u)\partial_u, \tag{0.3}$$

де

$$\xi^b = \frac{\partial f^b}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0}, \eta^b = \frac{\partial g^b}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} \tag{0.4}$$

зi стандартною операцiєю комутування.

Між групами Лі перетворень (0.2) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Якщо відомі перетворення (0.2), то координати інфінітезімальних операторів (0.3) знаходяться з умов (0.4). Щоб відновити групу Лі, знаючи її алгебру Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \theta} = \xi(f,g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f,g), \\ &f\Big|_{\theta=0} = x, \qquad g\Big|_{\theta=0} = u. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.1).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u \tag{0.6}$$

є оператором інваріантності системи (0.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\widetilde{X} S(x, u_{(m)}) \Bigg|_{S=0} = 0, \tag{0.7}$$

де $\widetilde{X}$ *— продовження інфінітезимального оператора* X*, яке визначається наступним чином*

$$\widetilde{X} = X + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \ldots, \tag{0.8}$$

причому

$$\begin{aligned} &\underset{k}{\eta} = D\underset{k-1}{\eta} - \underset{k}{u}D\xi, \\ &D = \partial_x + \underset{1}{u}\partial_u + \underset{2}{u}\partial_{\underset{1}{u}} + \ldots + \underset{k}{u}\partial_{\underset{k-1}{u}} + \ldots, \\ &\underset{0}{\eta} = \eta. \end{aligned}$$

Записавши (0.7) у розгорнутому вигляді, після розщеплення за похідними, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівнянь (0.1). Використовуючи формули (0.5), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Означення 0.3. *Перетворення вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \widetilde{u} = g(x, u, \theta), \quad \widetilde{F} = \Phi(x, u, F, \theta), \tag{0.9}$$

де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називаються перетвореннями еквівалентності системи (0.1), якщо дія перетворень (0.9) перетворює систему (0.1) в іншу систему S', яка належить до того ж класу систем, що й система (0.1).

Нехай, функції F задовольняють деякі додаткові умови

$$Q(x, u_{(m)}, F_{(q)}(x, u_{(m)})) = 0, \quad Q \in R^r. \tag{0.10}$$

Ці умови складаються з r диференціальних рівнянь для функцій F, де $F_{(q)}(x, u_{(m)})$ — множина всіх частинних похідних функцій F порядку не вище q.

Позначимо кожний клас систем рівнянь вигляду (0.1), в якому функції F задовольняють умові (0.10), як $S|_Q$.

Кожній однопараметричній групі локальних точкових перетворень, що залишає систему $S|_Q$ інваріантною, відповідає інфінітезимальний оператор (0.8). Повний набір таких груп генерує **максимальну групу** $G^{max} = G^{max}(S|_Q)$ з відповідною алгеброю Лі $A^{max} = A^{max}(S|_Q)$ інфінітезимальних операторів системи $S|_Q$.

Основною групою інваріантності системи (0.1) назвемо групу:

$$G^{bas} = G^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} G^{max}(S|_Q)$$

з відповідною алгеброю Лі

$$A^{bas} = A^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} A^{max}(S|_Q).$$

Групу перетворень вигляду (0.9) системи (0.1) позначимо

$$G^{equiv} = G^{equiv}(S|_Q).$$

Тоді задача групової класифікації системи (0.1) полягає у знаходженні всіх нееквівалентних випадків розширення A^{bas}, тобто у знаходженні всіх G^{equiv} — нееквівалентних виглядів функцій F, які задовольняють рівняння (0.10) і умову $A^{max}(S|_Q) \neq A^{bas}$.

Повна група еквівалентності G^{equiv} класу систем $S|_Q$ складається з групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} та з групи точкових перетворень екввалентності G^{equiv}_{point}.

Детальніше зупинимося на відшуканні групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

Для відшукання G^{equiv}_{cont} можна застосувати інфінітезимальний підхід, згідно якого G^{equiv}_{cont} породжується інфінітезимальним оперетором еквівалентності, який шукатимемо у вигляді

$$E = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u + \zeta(x,u_{(m)},F)\partial_F. \tag{0.11}$$

Умову еквівалентності системи $S|_Q$ відносно перетворень, породжених оператором еквівалентності E, можна записати у вигляді

$$\widetilde{E}S\Bigg|_{\begin{array}{l}S=0,\\ Q=0\end{array}} = 0, \quad \widetilde{E}Q\Bigg|_{\begin{array}{l}S=0,\\ Q=0\end{array}} = 0, \tag{0.12}$$

де $\widetilde{E}$ — продовження оператора E, яке визначається за правилом:

$$\widetilde{E} = E + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{1}{\zeta}\partial_{\underset{1}{F}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \underset{2}{\zeta}\partial_{\underset{2}{F}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \underset{k}{\zeta}\partial_{\underset{k}{F}} + \ldots, \tag{0.13}$$

$$\underset{k}{\zeta} = \mathcal{D}\underset{k-1}{\zeta} - \underset{k}{F}\mathcal{D}\chi,$$

$$\mathcal{D} = \partial_y + \underset{1}{F}\partial_F + \underset{2}{F}\partial_{\underset{1}{F}} + \ldots + \underset{k}{F}\partial_{\underset{k-1}{F}} + \ldots,$$

$$y = (x, u_{(m)}), \qquad \chi = (\xi, \eta_{(m)}), \qquad \eta_{(m)} = (\eta, \underset{1}{\eta}, \underset{2}{\eta}, \ldots, \underset{m}{\eta}).$$

Розщепивши за похідними функцій u та F умови (0.12), одержуємо систему визначальних рівнянь, загальний розв'язок якої визначає координати оператора еквівалентності E.

Коли координати оператора E встановлені, перетворення еквівалентності можна визначити, розв'язавши наступну задачу Коші (систему рівнянь типу Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \theta} = \xi(f,g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f,g), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \zeta(f,g,\Phi), \\ &f\Big|_{\theta=0} = x, \qquad g\Big|_{\theta=0} = u, \qquad \Phi\Big|_{\theta=0} = F. \end{aligned} \tag{0.14}$$

На алгоритм Лі та алгоритм знаходження перетворень еквівалентності, описані вище, спирається доведення ряду основних результатів даної дисертаційної роботи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. Проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

3. Проведено симетрійну редукцію та знайдено деякі точні розв'язки (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями.

4. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

5. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, які використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходжен-ня деяких точних розв'язків системи Ван-дер-Ваальса.

6. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

7. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам даної системи

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії теплопровідності, проникання, дифузії, гідродинаміки, газової динаміки та деяких інших. Точні розв'язки, отримані для окремих систем рівнянь, зокрема системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та деяких рівнянь реакції-конвекції-дифузії, можуть знайти практичне застосування при моделюванні відповідних біофізичних процесів, а також при розв'язуванні цих рівнянь та систем рівнянь числовими методами.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — М. І. Сєрову. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

У роботах [60], [59], [56], [58] дисертанту належить формулювання та доведення всіх теорем. У роботі [57] дисертанту належить доведення теореми про розширення основних симетрій (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. У роботі [55] дисертанту належить застосування нелокальних перетворень еквівалентності до знаходження точних розв'язків системи рівнянь конвекції-дифузії. У роботі [160] дисертанту належить застосування нелокальних перетворень еквівалентності до знаходження точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. У роботі [62] дисертанту належить побудова нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, а також побудова нелокальних анзаців та проведено редукції обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. У роботі [63] дисертанту належить доведення теорем про необхідні та достатні умови розширення основної алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. У роботі [159] дисертанту належить побудова нелокальних анзаців та нелокальних операторів, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, а також проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків даної системи. У роботах [60], [57], [55], [59], [160], [56], [58], [62], [63], [159] М. І. Сєрову належить загальна постановка задач і аналіз отриманих результатів. У роботах [57], [160], [62], [63] М. М. Сєровій належить уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів з попередніми дослідженнями. У роботі [160] О. М. Омеляну належить проведення лінеаризації системи рівнянь конвекції-дифузії $U_t = \partial_x [F(U)U_x + G(U)]$. У роботі [62] О. М. Омеляну належить побудова нелокальних анзаців, проведення редукції та побудова нелокальних формул розмноження розв'язків для образу лінеаризованої системи $U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x$.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах кафедри вищої та прикладної математики Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка" , на наукових конференціях науково-педагогічного колективу Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка"(м. Полтава, 2014-2019 р.), на 15-й та 16-й Міжнародних наукових конференціях імені акад. Михайла Кравчука (м. Київ, 2014 р., 2015 р.), на VII міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"(м. Кам'янець-Подільський, 2016 р.), на міжнародній конференції диференціальних рівнянь, присвяченій 110-річчю Я.Б. Лопатинського (International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky) (м. Львів, 2016 р.), на Другій Всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (м. Івано-Франківськ, 2016 р.), на наукових семінарах відділу математичної фізики і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на науково-практичній конференції-семінарі, присвяченій 70-ій річниці від дня народження професора Г.М. Губреєва, на науковому семінарі ”Нелінійні моделі математичної фізики та математичної біології: симетрії, інтегровність, точні та наближені розв'язки” (м.Київ, 2018 р.), на міжнародному семінарі ”Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, присвяченому сороковій річниці створення відділу прикладних досліджень (зараз відділ математичної фізики) Інституту математики НАН України (м. Київ, 2018 р.), на науковому семінарі кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2019 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в дванадцяти роботах [46], [47], [55]-[60], [62], [63], [159], [160], з них: 2 роботи [46], [47] опублікована без співавторів; 5 статей [55], [57], [58], [62], [63] у провідних наукових фахових виданнях, що затверджені Міністерством освіти і науки України; 4 тези доповідей [46], [60], [160], [56] на міжнародних та 1 тези доповідей [59] на всеукраїнській конференціях, а також 1 стаття [159] в журналі, який індексується в бібліографічній базі даних Scopus та Web of Science.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 172 найменування та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 175 сторінок, з них список використаних джерел займає 20 сторінку. Коротко опишемо структуру та зміст даної дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано наукову новизну, проведено короткий огляд робіт за темою дисертації, сформульовано основні поняття та визначення, що використовуються в роботі, зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

У першому розділі обгрунтовано вибір напрямку досліджень і здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації. Також описано основні етапи розвитку наукової думки щодо групового аналізу диференціальних рівнянь та подано огляд праць, які стосуються цієї проблеми, зокрема включено роботи, що стосуються симетрій Лі рівнянь реакції-конвекції-дифузії і систем рівнянь конвекції-дифузії.

У другому розділі проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \tag{0.15}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ – довільні гладкі функції, $a \in \{1, 2\}$.

У першому підрозділі виписано систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} системи (0.15).

У другому підрозділі на основі алгоритму, описаного вище, знайдено основну групу перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

У третьому підрозділі одержано необхідні умови розширення алгебри A^{bas}. Зображення одержаних нелінійностей f^0, f^a, h дещо спрощено за допомогою неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

У четвертому підрозділі для кожного з нееквівалентних виглядів функцій f^0, f^a, h, що допускають розширення A^{bas}, побудовано максимальну алгебру інваріантності $A^{max}(S|_Q)$.

У п'ятому підрозділі за допомогою прямого методу знайдено всеможливі локальні перетворення, які зводять довільне рівняння класу (0.15) до рівняння цього ж класу. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності частину одержаних рівнянь зведено до інших, еквівалентних рівнянь, які також допускають розширення A^{bas}. Таким чином, одержано нееквівалентні зображення нелінійностей f^0, f^a, h та відповідних максимальних алгебр інваріантності рівняння (0.15) в найбільш спрощеному вигляді.

У шостому підрозділі за знайденими операторами інваріантності побудовано нееквівалентні ліївські анзаци та проведено симетрійну редукцію деяких рівнянь класу (0.15). В окремих випадках знайдено точні розв'язки рівняння (0.15), досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

У третьому розділі розв'язано задачу знаходження нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x, \tag{0.16}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $K(U) = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\,(t,\ x)$, t — часова змінна, x — просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\,(U)$, $k^{ab} = k^{ab}\,(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1, 2}$. Знайдені нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції і знаходження точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

У першому підрозділі знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії (0.16) .

У другому підрозділі знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем рівнянь (0.16), та досліджено симетрійні властивості цих образів.

У третьому підрозділі побудовано нееквівалентні ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та її образів.

У четвертому підрозділі нелокальні перетворення еквівалентності системи (0.16) використані для побудови нелокальних анзаців та проведення редукції системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

У п'ятому підрозділі побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

У шостому підрозділі в окремих випадках знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх інтерпретацію.

У сьомому підрозділі знайдено нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

У кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки, де підбито підсумки роботи автора.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико–математичних наук **Сєрову Миколі Івановичу** за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу до роботи, всебічну підтримку та допомогу.

Також автор висловлює вдячність А.Г. Нікітіну та всім учасникам наукового семінару відділу математичної фізики Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів роботи.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури за темою дисертації та вибір напрямку досліджень

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, в якій досліджуються симетрійні властивості нелінійних диференціальних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, а також здійснено постановку задач, що розглядаються в наступних розділах.

Дослідження багатьох фізичних, біохімічних, екологічних, економічних та інших процесів потребує побудови математичних моделей. У багатьох випадках такими моделями є диференціальні рівняння. Найчастіше математичні моделі є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, що притаманні даному процесу.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують у якості математичних моделей різноманітних процесів у природі та суспільстві. Наприклад, у біології розглядають клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин тощо як частинки, кожна з яких рухається хаотично. Тоді систематичний рух їх групи вважається процесом дифузії, і зазвичай це не проста дифузія, оскільки береться до уваги взаємодія між частинками. Для простоти біологи використовують (1+1)-вимірне неперервне модельне рівняння для опису глобальної поведінки в термінах густини чи концентрації частинок.

Оскільки моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеарізованими, то симетрійні методи, в силу своєї універсальності, є важливими для їх дослідження. Тому невипадково, що сучасний розвиток групового аналізу розпочався з групової класифікації Л.В. Овсянніковим класу (1+1)-вимірного нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x). \tag{1.1}$$

У роботі [129], [39] було прокласифіковано симетрійні властивості рівняння (1.1) у залежності від вигляду нелінійності $f(u)$, яка стала класичною, оскільки в ній вперше було розв'язано задачу групової класифікації для нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними.

Дослідженням симетрійних властивостей нелінійних рівняннь дифузії займалося багато науковців, як українських, так і зарубіжних.

У своїх дослідженнях [20] В.Л. Катков провів групову класифікацію рівняння:

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x). \tag{1.2}$$

У роботі [68] В.А. Тичиніним досліджено симетрійні властивості і знайдено точні розв'язки рівняння

$$u_t = h(u)u_{xx}.$$

В.А. Дородніцин, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский у роботах [15], [16] провели повну групову класифікацію рівняння дифузії з джерелом (стоком), яке використовується для моделювання біологічних і фізико–хімічних процесів

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u), \tag{1.3}$$

та його узагальнень у випадку двох і трьох змінних. Зауважимо, що це було зроблено через 33 роки після роботи Л.В. Овсяннікова, що пов'язано зі складністю реалізації алгоритму Лі для розв'язання таких задач у випадку, коли рівняння містить дві і більше довільні функції. А. Орон, Ф. Розенау [147], С.М. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє [170] та М.П. Едвардс [116] досліджували симетрійні властивості рівнянь дифузії–конвекції

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x. \tag{1.4}$$

У 1987 році І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов в роботі [3] провели групову класифікацію симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{1.5}$$

У роботі [150] Р.О. Попович і Н.М. Іванова вивчили симетрійні властивості та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{1.6}$$

У роботах [1], [23] А.М. Самойленко та В.І. Лагно; у роботі [24] В.І. Лагно, С.В. Спічак і В.І. Стогній; а також Р.З. Жданов [94], [171] і П. Басараб-Горват [94] провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x). \tag{1.7}$$

У роботах [162], [65] С.В. Спічак, В.І. Стогній знайшли максимальні групи перетворень і побудували деякі класи точних розв'язків для одновимірного рівняння Фокера–Планка з довільними достатньо гладкими функціями $A(t, x), B(t, x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t, x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t, x)u]. \tag{1.8}$$

У роботах [64], [112], [109], [108] з точністю до перетворень еквівалентності проведено вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u) \tag{1.9}$$

у випадку однієї просторової змінної. У роботах А.Ф. Баранника, Т.А. Баранника, І.І Юрика [4], [86] побудовані деякі класи точних розв'язків рівняння (1.9).

Таким чином, протягом останніх років багато уваги приділялось дослідженню класичних симетрій рівняння реакції–конвекції–дифузії, оскільки рівняння цього класу займають вагоме місце серед рівнянь математичної фізики. Воно узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, що описують різноманітні процеси у фізиці [26, 90], біології [136]-[138], медицині [144], екології [143] та хімії [92, 93].

Зважаючи на її актуальність, однією з задач, що визначили напрямок проведених у дисертації досліджень, стала задача *групової класифікації нелінійних рівнянь та систем рівнянь параболічного типу.* Зокрема,в другому розділі розв'язана задача повної групової класифікації скалярного рівняння реакції-конвекції-дифузії, яке узагальнює рівняння (1.1), (1.4), (1.9).

У даному випадку задача групової класифікації формулюється наступним чином: дослідити симетрійні властивості рівняння вигляду (1.9) при довільних нелінійностях $D(u), f(u), g(u)$. Дана задача розв'язана з точністю до перетворень еквівалентності. Очевидно, що знання перетворень еквівалентності значно полегшує задачу групової класифікації диференціальних рівнянь. Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквіваленності було внесено І. Ахатовим, Р. Газізовим та Н. Ібрагімовим. Подальший розвиток ці ідеї одержали в роботах В.І. Лагна, С.В. Спічака та В.І. Стогнія, де описано новий підход до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі-Овсяннікова, результатом класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності.

Точні розв'язки диференціальних рівнянь відіграють важливу роль в теоретичних і прикладних дослідженнях. Вони є ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей, ефективності наближених методів. Відомо багато методів для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, Метод Д'аламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуассона, метод Фур'є, метод оберненої задачі розсіювання та багато інших.

Особливе місце серед методів розв'язування диференціальних рівнянь належить методу Лі [129], оскільки значна кількість названих методів явно чи неявно спирається на симетрійні властивості відповідних диференціальних рівнянь. Згідно з цим методом диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліїівською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок (анзаців) [39], [38]. Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними (див. [38], [77], [83]). Але при всіх перевагах класичного підходу Лі знаходження розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, клас розв'язків рівнянь, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо рівняння має бідну ліївську симетрію або не має її взагалі, то застосування цього методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату.

Ці та деякі інші проблем стимулювали пошук нових підходів до побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Основою ряду з числа таких підходів постає ідея пошуку додаткових (неліївських) операторів симетрії. У рамках цієї ідеї В. І. Фущичем і А. Г. Нікітіним [70] розроблено новий метод дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, який дістав назву неліївського методу дослідженння симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна відмінність цього методу від методу С. Лі полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності відповідних диференціальних рівнянь є, як правило, інтегро-диференціальними (псевдодиференціальними) операторами.

Одним із цікавих методів пошуку розв'язків диференціальних рівнянь є метод додаткових умов, з яким можна познайомитися в роботах [154], [153], [87], [108].

У роботах [97] та [121] запропоновані методи дослідження некласичних та порушених симетрій, які пізніше переросли у метод умовних симетрій (див., наприклад, [73], [120], [80], [76], [82]). Даний метод отримав широке застосування в роботах багатьох авторів [108], [172], [12] та інших. За допомогою цього методу вдалося отримати додаткові оператори симетрії, що значно розширило можливість пошуку класів розв'язків диференціальних рівнянь.

Іншим напрямом реалізації ідеї пошуку неліївських симетрій є метод нелокальних симетрій диференціальних рівнянь. Ще Е. Нетер у своїй роботі [142] запропонувала знаходження нелокальних перетворень інваріантності диференціальних рівнянь. Її ідеї були розвинуті в роботах ряду авторів. Так у роботах Дж. Блумана, С. Кумея [100], [101] запропоновано алгоритми знаходження таких перетворень та метод лінеаризації нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними за допомогою нелокальних перетворень.

При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас диференціальних рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу. Роботу у цьому напрямку розпочав

Овсянніков ([148]). Метод пошуку перетворень еквівалентності розглядали у своїх роботах П. Олвер [145], І. Ахатов, Р. Газізов, Н. Ібрагімов [88], В. Лагно, С. Спічак, В. Стогній [24]. Дана ідея отримала розвиток в роботі Я. Лісла [133], в якій він застосував перетворення еквівалентності для дослідження ряду конкретних нелінійних рівнянь математичної фізики. У роботі Дж. Блумана, А. Чевякова, С. Анко [96] запропоновані результати дослідження нелокальних зв'язків систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. А. Чевяков у роботі [113] запопонував практичний алгоритм обчислення груп Лі перетворень точкової еквівалентності та узагальнених перетворень еквівалентності сімейств диференціальних рівнянь, а також символьну реалізацію цього алгоритму в пакеті GeM для Maple. У роботах М. Гасемі, М. Нуссі [123], Р. Поповича, О. Ванеєвої, Н. Іванової [152] цей метод застосовано до дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. У роботі [109] перетворення еквівалентності використані для повної групової класифікації нелінійного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

У роботах [156], [102] наведені нелокальні перетворення, які нелінійне рівняння дифузії $u_t = \partial(u^{-2}u_x)$ зводять до лінійного $z_t = z_{xx}$. У роботі [125] ці перетворення узагальнені і показано, що за допомогою даних перетворень нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{1.10}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ — довільна гладка функція, зводиться до рівняння того ж класу.

У роботі [74] дані перетворення використані для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (1.10) до звичайних диференціальних рівнянь, лінеаризації рівняння (1.10), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

У роботах [54], [53] поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів робіт [125], [74] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії:

$$U_t = \partial_x[f(U)U_x],$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $f(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

У роботі [163] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x + g(u)],$$

де $g(u)$ — довільна гладка функція.

У роботі [52] досліджено максимальну алгебру інваріантності та знайдені деякі розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка належить до класу систем конвекції-дифузії.

Роботи, наведені вище, спонукали нас до узагальнення їх результатів для системи рівнянь конвекції-дифузії. Ця система використовується в якості моделі опису різноманітних процесів у математичній фізиці, хімії та біології. У класі систем рівнянь конвекції-дифузії містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури та густини в термоядерній плазмі. Вона описує рух рідини у пористому середовищі, перенос енергії в плазмі, розподіл речовин у ґрунті та багато інших фізичних та біохімічних процесів. Тому її дослідження не втрачає актуальності і на сьогоднішній день.

РОЗДІЛ 2

Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

Розглянемо (1+2)-вимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \tag{2.1}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 — часова змінна, x_1, x_2 — просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ — коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1, 2\}$.

Рівняння (2.1) використовується для опису різних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції (див., наприклад, [17], [21] [89], [90]). Воно застосовується для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. Так модифікації рівняння (2.1) використовуються для моделювання переносу енергії в плазмі [13], [169], розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів. При конкретних значеннях нелінійностей $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ рівняння (2.1) використовується при описі переносу кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань даного рівняння також є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми [17]. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, і описується рівнянням (2.1), зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Рівняння (2.1) має широке застосування також у біології [117], [136], у хімії [92], [93] та інших галузях науки [107], [115], [126], [134], [135], [143], [161], [168].

У цьому розділі знайдено неперервні та дискретні перетворення еквівалентності даного рівняння, які застосовано для виділення нееквівалентних підкласів рівняння (2.1), проведено повну групову класифікацію рівняння (2.1) в залежності від значень нелінійностей f^0, f^a, h та знайдено деякі класи точних розв'язків даного рівняння.

2.1. Система визначальних рівнянь. Основна алгебра інваріантності

Означення 2.1. Основною алгеброю інваріантності рівняння (2.1) назвемо алгебру, відносно якої рівняння (2.1) інваріантне при довільних виглядах нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.1. *Основною алгеброю інваріантності рівняння (2.1) є алгебра*

$$A^{bas} =< \partial_0 = \tfrac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \tfrac{\partial}{\partial x_2} > . \tag{2.2}$$

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (2.1) будемо знаходити у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{2.3}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2), \quad \mu = \overline{0,2}, \quad \xi^\mu,\ \eta$ – шукані функції.

Застосувавши до рівняння (2.1) алгоритм С. Лі (див., наприклад, [148], [41]) одержимо систему визначальних рівнянь відносно нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$ та координат ξ^μ, η оператора (2.3) :

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \tag{2.4}$$

$$\xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{2.5}$$

$$\eta \dot{f}^0 = (2\xi^1_1 - \xi^0_0) f^0, \tag{2.6}$$

$$\eta \dot{f}^a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}] f^b - 2a_a f^0 - 2(a_a u + b_a)\dot{f}^0 - \xi^a_0, \tag{2.7}$$

$$\eta \dot{h} = (a - \xi^0_0) h - (\triangle a u + \triangle b) f^0 - (a_a u + b_a) f^a + a_0 u + b_0, \tag{2.8}$$

якщо функція залежить лише від однієї змінної, то крапка над нею означає диференціювання за даною змінною.

У формулах (2.7), (2.8), як випливає з рівнянь (2.4)

$$\eta = au + b, \tag{2.9}$$

де $a = a(x_0, \vec{x})$, $b = b(x_0, \vec{x})$ – довільні гладкі функції.

Для того, щоб знайти основну алгебру інваріантності рівняння (2.1) припускаємо, що f^0, f^a, h – довільні гладкі функції. Це дає можливість "розчепити" систему (2.6)-(2.8) за цими функціями та їх похідними. У результаті розчеплення одержимо систему визначальних рівнянь відносно функцій ξ^μ і η:

$$\xi^\mu_\nu = \xi^\mu_u = 0, \quad \eta = 0. \tag{2.10}$$

Загальним розв'язком системи (2.10) є функції

$$\xi^\mu = c_\mu, \quad \eta = 0, \tag{2.11}$$

де c_μ – довільні сталі. Оператор (2.3) з функціями (2.11) породжує алгебру (2.2).

Теорема 2.1 доведена.

2.2. Неперервні перетворення еквівалентності

Так як рівняння (2.1) містить довільні функції f^0, f^a, h, то воно описує деякий клас рівнянь. При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас диференціальних рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Знайдемо перетворення еквівалентності рівняння (2.1), які будемо використовувати при проведенні повної групової класифікації цього рівняння.

Теорема 2.2. *Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (2.1) є група перетворень, суперпозиція яких має вигляд*

$$\begin{aligned}
&x_0' = e^{\theta_0}x_0 + m_0,\\
&x_a' = e^{\theta_1}(\delta_{ab}cos\theta_2 + \epsilon_{ab}sin\theta_2)x_b + q_a x_0 + m_a,\\
&u' = e^{\theta}u + m,\\
&f^{0'} = e^{2\theta_1-\theta_0}f^0,\\
&f^{a'} = e^{-\theta_0}[e^{\theta_1}(\delta_{ab}cos\theta_2 + \epsilon_{ab}sin\theta_2)f^b - q_a],\\
&h' = e^{\theta-\theta_0}h,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

де $q_a,\ \theta_0,\ \theta_a,\ \theta,\ m_0,\ m_a,\ m$ *— довільні групові параметри.*

Доведення. Застосуємо метод, запропонований у роботах [24], [88]. Інфінітезимальний оператор групи перетворень еквівалентності будемо шукати у вигляді

$$E = \xi^\mu\partial_\mu + \eta\partial_u + \zeta^0\partial_{f^0} + \zeta^a\partial_{f^a} + \zeta^3\partial_h, \tag{2.13}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$, $\zeta^0 = \zeta^0(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$, $\zeta^a = \zeta^a(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$, $\zeta^3 = \zeta^3(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$ – шукані функції.

Із вигляду рівняння (2.1) випливає наступна система обмежень для нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$

$$f^0_{x_\mu} = 0, \quad f^0_{u_\mu} = 0, \quad f^a_{x_\mu} = 0, \quad f^a_{u_\mu} = 0, \quad h_{x_\mu} = 0, \quad h_{u_\mu} = 0, \tag{2.14}$$

яку позначимо S_1.

Застосувавши критерій еквівалентності

$\widetilde{E}S|_{S=0,S_1=0}=0, \quad \widetilde{E}S_1|_{S=0,S_1=0}=0,$

отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат $\xi^0,\ \xi^a,\ \eta,\ \zeta^0,\ \zeta^a,\ \zeta^3$ оператора (2.13)

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \tag{2.15}$$

$$\zeta^0_\mu = \zeta^a_\mu = \zeta^3_\mu = \zeta^0_{u_\mu} = \zeta^a_{u_\mu} = \zeta^3_{u_\mu} = 0, \tag{2.16}$$

$$\xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{2.17}$$

$$\zeta^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)f^0, \tag{2.18}$$

$$\zeta^a = \xi^a_0 f^0 - 2\xi^1_1 f^a + \xi^a_b f^b, \tag{2.19}$$

$$\zeta^3 = (\eta_u - 2\xi^1_1)h. \tag{2.20}$$

Розв'язком системи (2.15)-(2.20) є функції

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \kappa_0 x_0 + d_0,\\
&\xi^a = \kappa_1 x_a + c\epsilon_{ab}x_b + g_a x_0 + d_a,\\
&\eta = \kappa u + d,\\
&\zeta^0 = (\kappa_0 - 2\kappa_1)f^0,\\
&\zeta^a = g_a f^0 - \kappa_1 f^a + c\varepsilon_{ab} f^b,\\
&\zeta^3 = (\kappa - 2\kappa_1)h.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

де $c,\ \kappa,\ \kappa_0,\ \kappa_1,\ g_a,\ d_0,\ d_a,\ d$ — довільні сталі.

Оператор (2.13) з функціями (2.21) породжує групу перетворень (2.12). Теорема 2.2 доведена.

2.3. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності рівняння (2.1)

Встановимо необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії (2.1). Тобто, вкажемо вигляд нелінійностей f^0, f^a, h , при яких рівняння (2.1) може бути інваріантне відносно алгебри, ширшої, ніж алгебра (2.2).

Теорема 2.3. *Для того, щоб рівняння (2.1) допускало розширення основної алгебри інваріантності (2.2) необхідно, щоб нелінійності f^0, f^a, h, з точністю до перетворень еквівалентності (2.12), мали вигляд, наведений у таблиці 2.1.*

Таблиця 2.1: Вигляд нелінійностей, при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності рівняння (2.1)

№ п/п	f^0	f^a	h	Умови
1	$\forall$	0	$\forall$	
2	e^{su}	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u)$	$re^{(2m-s)u}$	$(m,p) \neq (0,0)$, $m \neq s$
3	e^u	$\lambda_a u$	re^{-u}	
4	e^u	$\lambda_b e^u K_{ab}(u)$	$re^u + \lambda_3$	
5	u^k	$\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)$	ru^{2m-k+1}	$(m,p) \neq (0,0)$, $m \neq k$
6	u^k	$\lambda_a \ln u$	ru^{-k+1}	$k \neq 0$
7	u^k	$\lambda_b u^k K_{ab}(\ln u)$	$u(\lambda_3 u^k + \lambda_4)$	$k \neq 0$
8	1	$\lambda_a u$	$ru + \lambda_3$	
9	1	$\lambda_a \ln u$	$u(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)$	

У таблиці 2.2 $K_{ab}(u) = \delta_{ab} cospu + \varepsilon_{ab} sinpu$, λ_a, λ_3, λ_4, λ_5, k, m, p — довільні сталі, $\vec{\lambda}^2 \neq 0$, $r \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$.

Доведення. Визначальну систему (2.6)-(2.8) будемо розв'язувати методом введення структурних сталих (див. [61], [83]). У нашому випадку структурні зв'язки мають вигляд

$$\begin{aligned}
&a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ 2\xi_1^1 - \xi_0^0 = k\varphi,\ \xi_1^1 - \xi_0^0 = m\varphi,\ \xi_1^2 = p\varphi,\\
&a_a = \alpha_a\varphi,\ b_a = \beta_a\varphi,\ \xi_0^a = \gamma_a\varphi,\ a - \xi_0^0 = (2m + k_1 - k)\varphi,\\
&\triangle a = r_1\varphi,\ \triangle b = q_1\varphi,\ a_0 = r_2\varphi,\ b_0 = q_2\varphi,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

де $k,\ m,\ p,\ k_a,\ q_a,\ r_a,\ \alpha_a,\ \beta_a,\ \gamma_a$ — довільні сталі, які назвемо структурними константами, $\varphi = \varphi(x)$ – довільна гладка функція.

Підставивши умови (2.22) в систему (2.6)-(2.8) в силу довільності функції $\varphi(x)$, одержимо

$$\begin{aligned}
&(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0,\\
&(k_1u + k_2)\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b - 2\alpha_a f^0 - 2(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0 - \gamma_a,\\
&(k_1u + k_2)\dot{h} = (2m - k + k_1)h - (r_1u + q_1)f^0 - (\alpha_a u + \beta_a)f^a +\\
&+r_2u + q_2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Система (2.23) називається структурною для функцій $f^0,\ f^a,\ h$.

Для спрощення структурної системи (2.23) застосуємо перетворення еквівалентності вигляду

$$x_0' = x_0,\ x_a' = x_a + \theta_a x_0,\ u' = u,\ f^{0'} = f^0,\ f^{a'} = f^a - \theta_a,\ h' = h. \tag{2.24}$$

Переписавши систему (2.23) в штрихованих змінних та підставивши в неї формули (2.24), одержимо

$$\begin{aligned}
&(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0,\\
&(k_1u + k_2)\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b - 2\alpha_a f^0 - 2(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0 - \Gamma_a,\\
&(k_1u + k_2)\dot{h} = (2m - k + k_1)h - (r_1u + q_1)f^0 - (\alpha_a u + \beta_a)f^a +\\
&+R_2u + Q_2,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

де

$$\Gamma_a = [m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}]\theta_b + \gamma_a, \tag{2.26}$$

$$R_2 = \theta_a \alpha_a + r_2, \quad Q_2 = \theta_a \beta_a + q_2. \tag{2.27}$$

Якщо

$$m^2 + p^2 \neq 0, \tag{2.28}$$

то параметри θ_a можна підібрати так, щоб $\Gamma_a = 0$. Тому у випадку (2.28) з точністю до перетворень (2.24) можна вважати $\gamma_a = 0$.

Розв'язок системи (2.23) залежить від значень сталих $k_1,\ k_2,\ k$. Мають місце п'ять нееквівалентних випадків:

1)$k_1 = 0, k_2 = 0, k = 0,$

2)$k_1 = 0, k_2 \neq 0, k \neq 0,$

3)$k_1 \neq 0, k_2 = 0, k \neq 0,$

4)$k_1 = 0, k_2 \neq 0, k = 0,$

5)$k_1 \neq 0, k_2 = 0, k = 0.$

1) Нехай $k_1 = 0, k_2 = 0, k = 0$. Тоді система (2.23) має вигляд

$$(m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b = 0, \quad 2mh = 0. \tag{2.29}$$

У даному випадку виконується умова (2.28), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$. Із системи рівнянь (2.29) випливає, що рівняння при $m = 0,\ p \neq 0$ (2.1) допускає розширення алгебри інваріантності (2.2) у випадку, коли

$$f^0 = \forall, \quad f^a = 0, \quad h = \forall. \tag{2.30}$$

Отже, ми одержали випадок 1 з таблиці 1.

2) Нехай $k_1 = 0, k_2 \neq 0, k \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати $k = k_2 = 1$). З умови (2.22) випливає, що $a = 0,\ b = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = r_a = 0 \tag{2.31}$$

та

$$b = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\ mb = \xi^1_1 - \xi^0_0,\ pb = \xi^2_1, \gamma_a b = \xi^a_0. \tag{2.32}$$

Із рівнянь (2.32) маємо

$$(2m-1)\xi_1^1 = (m-1)\xi_0^0. \tag{2.33}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (2.32) за змінними x_1 та x_2 та використавши (2.5), отримаємо

$$m(2m-1)b_a = 0. \tag{2.34}$$

Продиференціцювавши останнє рівняння (2.32) за змінними x_a та використавши рівність (2.34), маємо

$$m(m-1)(2m-1)b_0 = 0. \tag{2.35}$$

З умов (2.34) та (2.35) випливають наступні нееквівалентні випадки: а)$m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$; б)$m = 0$; в)$m = \frac{1}{2}$; г)$m = 1$.

Розглянемо кожен із них окремо.

а)$m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

З умов (2.34) та (2.35) маємо $b - const$. Тоді

$$\beta_a = q_a = 0. \tag{2.36}$$

У даному випадку виконується умова (2.28), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{2.37}$$

Загальним розв'язком системи (2.37) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{mu} K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^{(2m-1)u}, \tag{2.38}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$.

Отже, ми одержали випадок 2 з таблиці 1 при $s = 1$.

б)$m = 0$.

Із умов (2.22) маємо

$$\beta_a = q_a = 0. \tag{2.39}$$

Тоді система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = p\varepsilon_{ab}f^b - \gamma_a, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{2.40}$$

Розв'язок системи (2.40) залежить від сталої p.

б$_1$)$p \neq 0$ (з умови (2.28) $\gamma_a = 0$).

Загальним розв'язком системи (2.40) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює формули (2.38) при $m = 0$.

б$_2$)$p = 0$.

Загальним розв'язком системи (2.40) із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) будуть нелінійності

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_a u, \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$. Отже, справедливий випадок 3 із таблиці 1.

в)$m = \frac{1}{2}$.

Аналогічно до випадку б$_1$) отримуємо

$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{\frac{1}{2}u}(\delta_{ab} cospu + \varepsilon_{ab} sinpu), \quad h = \lambda_3$. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює формули (2.38) при $m = \frac{1}{2}$.

г)$m = 1$ (з умови (2.28) $\gamma_a = 0$).

Тоді система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = (\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = h + q_2. \tag{2.41}$$

Загальним розв'язком системи (2.41) із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) будуть наступні функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^u K_{ab}(u), \quad h = \lambda_4 e^u + \lambda_3,$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_4 = r$ Отже, маємо випадок 4 з таблиці 1.

3) Нехай $k_1 \neq 0, k_2 = 0, k \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $k_1 = 1$). З умови (2.22) випливає, що $b = 0,\ a = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\beta_a = q_a = 0 \tag{2.42}$$

та

$$a = 2\xi_1^1 - \xi_0^0,\ ma = \xi_1^1 - \xi_0^0,\ pa = \xi_1^2, \gamma_a a = \xi_0^a. \tag{2.43}$$

Проаналізувавши рівняння (2.43) маємо наступні нееквівалентні випадки:

а)$m \neq 0, \frac{k}{2}, k$; б)$m = 0$; в)$m = \frac{k}{2}$; г)$m = k$.

Розглянемо кожен із них окремо.

а)$m \neq 0, \frac{k}{2}, k$.

З умов (2.43) маємо $a - const$. Тоді

$$\alpha_a = r_a = 0. \tag{2.44}$$

У даному випадку виконується умова (2.28), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$. Таким чином, система (2.23) має вигляд

$$u\dot{f^0} = kf^0, \quad u\dot{f^a} = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad u\dot{h} = (2m - k + 1)h. \tag{2.45}$$

Загальним розв'язком системи (2.45) є функції

$$\begin{aligned} &f^0 = \lambda_0 u^k, \quad f^a = \lambda_b u^m(\delta_{ab} cosp \ln u + \varepsilon_{ab} sinp \ln u), \\ &h = \lambda_3 u^{(2m-k+1)}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$.

Отже, ми одержали випадок 5 з таблиці 1.

б)$m = 0$.

Із умов (2.43) маємо

$$\alpha_a = r_a = 0. \tag{2.47}$$

Тоді система (2.23) має вигляд

$$u\dot{f^0} = kf^0, \quad u\dot{f^a} = p\varepsilon_{ab}f^b - \gamma_a, \quad u\dot{h} = (-k+1)h. \tag{2.48}$$

Розв'язок системи (2.48) залежить від сталої p.

б$_1$)$p \neq 0$ (з умови (2.28) $\gamma_a = 0$).

Загальним розв'язком системи (2.48) є функції

$$f^0 = \lambda_0 u^k, \quad f^a = \lambda_b K_{ab}(\ln u), \quad h = \lambda_3 u^{-k+1},$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює випадок 5 при $m = 0$.

б$_2$)$p = 0$.

Загальним розв'язком системи (2.48) із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) будуть нелінійності

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_a \ln u, \quad h = ru^{-k+1},$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2$ – довільні сталі. Тобто справедливий випадок 6 із таблиці 1.

в)$m = \frac{k}{2}$.

Аналогічно до випадку б$_1$) отримуємо

$f^0 = \lambda_0 u^k, \quad f^a = \lambda_b u^{\frac{k}{2}}(\delta_{ab} cosp \ln u + \varepsilon_{ab} sinp \ln u), \quad h = \lambda_3 u$. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює випадок 5 при $m = \frac{k}{2}$.

г)$m = k$ (з умови (2.28) $\gamma_a = 0$).

Тоді система (2.23) має вигляд

$$u\dot{f^0} = kf^0, \quad u\dot{f^a} = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad u\dot{h} = (k+1)h + r_2. \tag{2.49}$$

Загальним розв'язком системи (2.49) із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) будуть наступні функції

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_b u^k K_{ab}(\ln u), \quad h = u(\lambda_3 u^k + \lambda_4),$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ — довільні сталі. Отже, маємо випадок 7 з таблиці 1.

4) Нехай $k_1 = 0, k_2 \neq 0, k = 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати $k_2 = 1$). З умови (2.22) випливає, що $a = 0,\ \ b = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = r_a = 0 \tag{2.50}$$

та

$$2\xi_1^1 = \xi_0^0,\ mb = -\xi_1^1,\ pb = \xi_1^2, \gamma_a b = \xi_0^a. \tag{2.51}$$

Із рівнянь (2.51) маємо

$$p\xi_1^1 + m\xi_1^2 = 0. \tag{2.52}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (2.52) за змінними x_1 та x_2 та використавши (2.5), отримаємо систему

$$\begin{aligned} &p\xi_{11}^1 - m\xi_{12}^1 = 0,\\ &m\xi_{11}^1 + p\xi_{12}^1 = 0. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Проаналізуємо головний визначник системи (2.53)

$$\triangle = \begin{vmatrix} p & -m \\ m & p \end{vmatrix} = p^2 + m^2$$

.

Маємо два випадки: а)$|m|+|p|\neq 0$; б)$m=p=0$.

а)$|m|+|p|\neq 0$.

Якщо головний визначник системи (2.53) відмінний від нуля, то дана система має лише нульовий розв'язок

$$\xi^1_{11}=\xi^1_{12}=0. \tag{2.54}$$

З рівнянь (2.51), (2.54) отримаємо

$$\xi^a_{bc}=0, \tag{2.55}$$

де $a,b,c=\overline{1,2}$. Із (2.51), (2.55) випливає, що $b-const$, тому

$$r_a=\beta_a=0. \tag{2.56}$$

У даному випадку виконується умова (2.28), з якої випливає, що $\gamma_a=0$.

Таким чином, система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0=0, \quad \dot{f}^a=(m\delta_{ab}+p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h}=2mh. \tag{2.57}$$

Загальним розв'язком системи (2.59) є функції

$$f^0=\lambda_0, \quad f^a=\lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}cospu+\varepsilon_{ab}sinpu), \quad h=\lambda_3 e^{2mu}, \tag{2.58}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0=1,\ \lambda_3=r$.

Отже, ми одержали випадок 2 з таблиці 1 при $s=0$.

б)$m=p=0$.

У даному випадку система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0=0, \quad \dot{f}^a=-\gamma_a, \quad \dot{h}=-q_1 f^0+q_2. \tag{2.59}$$

Загальним розв'язком системи (2.59) є функції

$$f^0=\lambda_0, \quad f^a=\lambda_a u, \quad h=\lambda_4 u+\lambda_3, \tag{2.60}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_4 = r$.

Отже, ми одержали випадок 8 з таблиці 1.

5) Нехай $k_1 \neq 0, k_2 = 0, k \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати $k_1 = 1$). З умови (2.22) випливає, що $b = 0,\ \ a = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\beta_a = q_a = 0 \tag{2.61}$$

та

$$2\xi_1^1 = \xi_0^0,\ ma = -\xi_1^1,\ pa = \xi_1^2, \gamma_a a = \xi_0^a. \tag{2.62}$$

Проаналізувавши умови (2.62) аналогічно до попереднього випадку маємо випадки: а)$|m| + |p| \neq 0$; б)$m = p = 0$.

а)$|m| + |p| \neq 0$.

З умов (2.62) маємо $a - const$. Тоді

$$\alpha_a = r_a = 0. \tag{2.63}$$

У даному випадку виконується умова (2.28), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0 = 0, \quad u\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad u\dot{h} = (2m+1)h. \tag{2.64}$$

Загальним розв’язком системи (2.64) є функції

$$f^0 = \lambda_0, \quad f^a = \lambda_b u^m(\delta_{ab} cosp \ln u + \varepsilon_{ab} sinp \ln u), \quad h = \lambda_3 u^{(2m+1)}, \tag{2.65}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$.

Отже, ми одержали випадок 5 з таблиці 1 при $k = 0$.

б)$m = p = 0$.

У даному випадку система (2.23) має вигляд

$$\dot{f}^0 = 0, \quad u\dot{f}^a = -\gamma_a, \quad u\dot{h} = h - r_1 u f^0 - \alpha_a u f^a + r_2 u. \tag{2.66}$$

Загальним розв'язком системи (2.66) є функції

$$f^0 = \lambda_0, \quad f^a = \lambda_a \ln u, \quad h = u(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5), \tag{2.67}$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_0 = 1$.

Отже, ми одержали випадок 9 з таблиці 1.

Теорема 2.3 доведена.

2.4. Достатні умови розширення основної алгебри інваріантності рівняння (2.1)

Теорема 2.4. *Для того, щоб максимальні алгебри інваріантності рівняння (2.1) були ширшими порівняно з алгеброю (2.2) необхідно і достатньо, щоб рівняння (2.1) мало один з нееквівалентних відносно перетворень (2.12) виглядів, записаних у другій колонці таблиці 2.2, при цьому відповідні максимальні алгебри інваріантності наведено в третій колонці даної таблиці.*

Таблиця 2.2: Максимальні алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + h(u)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12} >$	$f^0 - \forall, h - \forall$
2	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D >$	$f^0 - \forall$
3	$u_0 = \triangle u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a,$ $Q, D, \Pi, Q_\infty >$	
4	$u_0 = \triangle u \pm 1$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $G_a \pm \frac{1}{2}x_0 x_a \partial_u,$ $Q \pm \frac{1}{2}x_0\partial_u, D \pm 2x_0\partial_u,$	

		$\Pi \pm x_0(2x_0 + \frac{\vec{x}^2}{4})\partial_u, Q_\infty >$	
5	$u_0 = \triangle u \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $G_a, Q, D \pm 2x_0 u\partial_u,$ $\Pi \pm x_0^2 u\partial_u, \widehat{Q}_\infty >$	
6	$u_0 = \triangle u \pm u \ln u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, \widehat{Q}, H_a >$	
7	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D, \mathcal{D}_0 >$	$s = 1$
8	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) \pm e^{mu}$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(s-m)D - 2\mathcal{D}_0 >$	$m \neq 0$
9	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm 1$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $D - 2\mathcal{D}_0, \mathcal{T} >$	$s = 1$
10	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm e^u \pm 1$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, \mathcal{T} >$	
11	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D, D_0 >$	$k \neq -1; 0$
12	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u^m$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(k-m+1)D - 2D_0 >$	$k \neq -1; 0$ $m \neq 1$
13	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $kD - 2D_0, T >$	$k \neq -1; 0$
14	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm$ $\pm u^{k+1} \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, T >$	$k \neq 0$
15	$u_0 = \partial_a(u^{-1} u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D_0, X_\infty >$	$k = -1$
16	$u_0 = \partial_a(u^{-1} u_a) \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, T, X_\infty >$	$k = -1$
17	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) +$ $+\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u) u_a +$ $+ r e^{(2m-s)u}$	$< \partial_0, \partial_a, (m-s)D +$ $+\mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$	$m \neq s$ $(m,p) \neq (0,0)$
18	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + \lambda_a u u_a +$ $+ r e^{-u}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $D - \mathcal{D}_0 - x_0 \lambda_a \partial_a >$	$s = 1$
19	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) +$ $+\lambda_b e^u K_{ab}(u) u_a + r e^u$	$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$	$s = 1$
20	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + e^u \lambda_a u_a +$	$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{T} >$	

	$+re^u \pm 1$		
21	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(lnu)u_a+$ $+ru^{2m-k+1}$	$< \partial_0, \partial_a, (m-k)D+$ $+D_0 + pJ_{12} >$	$m \neq k,$ $(m,p) \neq (0,0)$
22	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\ln u\lambda_a u_a + ru^{-k+1}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $kD - D_0 - x_0\lambda_a\partial_a >$	$k \neq 0$
23	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(lnu)u_a+$ $+ru^{k+1}$	$< \partial_0, \partial_a, D_0 + pJ_{12} >$	$k \neq 0, p \neq 0$
24	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k\lambda_a u_a+$ $+ru^{k+1}$	$< \partial_0, \partial_a, D_0 >$	$k \neq 0,$ $k^2\lambda_3 \neq 4(k+1)$
25	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k\lambda_a u_a+$ $+ru^{k+1} \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, T >$	$k \neq 0,$ $k^2\lambda_3 \neq 4(k+1)$
26	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+4\frac{k+1}{k}u^k u_1+$ $+4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}$	$< \partial_0, \partial_a, D_0, Q_a >$	$k \neq -1; 0$
27	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+4\frac{k+1}{k}u^k u_1+$ $+4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1} \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, T, Q_a >$	$k \neq -1; 0$
28	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a \pm u$	$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{H} >$	
29	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a + r$	$< \partial_0, \partial_a, D - u\partial_u-$ $-\frac{3}{2}rx_0(\mathcal{G} - \partial_u), \mathcal{G} >$	
30	$u_0 = \triangle u + \ln u\lambda_a u_a + ru$	$< \partial_0, \partial_a, G >$	
31	$u_0 = \triangle u + \lambda_a \ln u u_a\pm$ $\pm u \ln u$	$< \partial_0, \partial_a, H >$	
32	$u_0 = \triangle u \pm 2\ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2 u(\ln^2 u + q)$	$< \partial_0, \partial_a, Y >$	

У таблиці 2.2 введені наступні позначення

$J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a,$
$G_a = x_0\partial_a + x_aQ, \quad Q = -\frac{1}{2}u\partial_u,$
$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - (x_0 + \frac{\overrightarrow{x}^2}{4})u\partial_u,$
$H_a = e^{\pm x_0}(\partial_a \mp \frac{1}{2}x_au\partial_u), \quad \widehat{Q} = e^{\pm x_0}u\partial_u,$
$\mathcal{D}_0 = sx_0\partial_0 - \partial_u, \quad D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u,$
$\mathcal{T} = e^{\mp x_0}(\partial_0 \pm \partial_u), \quad T = e^{\mp kx_0}(\partial_0 \pm u\partial_u),$
$\mathcal{G}_a = e^{\pm x_0}(\partial_a \mp \frac{\lambda_a}{\overrightarrow{\lambda}^2}\partial_u), \mathcal{H} = e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_a \mp \partial_u), \quad H = e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_a \mp u\partial_u),$
$\mathcal{G} = x_0\lambda_a\partial_a - \partial_u, \quad G = x_0\lambda_a\partial_a - u\partial_u,$
$Y = e^{\overrightarrow{\lambda}^2 x_0 \mp \overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{x}}u\partial_u,$
$Q_1 = e^{-x_1}(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\cos x_2u\partial_u),$
$Q_2 = e^{-x_1}(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\sin x_2u\partial_u),$
$Q_\infty = b(x_0, \overrightarrow{x})\partial_u, \quad b(x_0, \overrightarrow{x})$ — довільний розв'язок рівняння $b_0 = \triangle b,$
$\widehat{Q}_\infty = \beta(x_0, \overrightarrow{x})\partial_u, \quad \beta(x_0, \overrightarrow{x})$ — довільний розв'язок рівняння $\beta_0 = \triangle\beta \pm \beta,$
$X_\infty = A(\overrightarrow{x})\partial_1 + B(\overrightarrow{x})\partial_2 - 2uC(\overrightarrow{x})\partial_u,$ функції $A(\overrightarrow{x}), \quad B(\overrightarrow{x}), \quad C(\overrightarrow{x})$ пов'язані співвідношеннями $A_1 = B_2 = C, \quad A_2 = -B_1,$ $k, \quad m, \quad p, \quad q, \quad \lambda_1, \lambda_2,$ — довільні сталі, $r \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$, $\vec{\lambda}^2 \neq 0$.

Доведення. Зауважимо, що у випадку $f^a = 0$ (відсутність конвективних доданків) результати класифікації рівняння (2.1) наведені в роботах [15], [40]. Ці результати поміщені в таблиці 2.2 в перших шістнадцяти випадках. Тому основну увагу звернемо на доведення випадків 17-32.

Для встановлення достатніх умов розширення основної алгебри інваріантності рівняння (2.1) потрібно використати результати теореми 3, тобто дослідити симетрійні властивості рівняння (2.1) для кожного набору нелінійностей з таблиці 1.

Нехай $f^0 = e^{su}$, $f^a = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}cospu + \varepsilon_{ab}sinpu)$, $h = re^{(2m-s)u}$, $(m, p) \neq (0, 0), m \neq s$. Підставивши дані функції у рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned}
&(au+b)se^{su} = (2\xi_1^1 - \xi_0^0)e^{su},\\
&(au+b)\lambda_b e^{mu}[m(\delta_{ab}cospu + \varepsilon_{ab}sinpu) + p(-\delta_{ab}sinpu + \varepsilon_{ab}cospu) =\\
&= [(\xi_1^1 - \xi_0^0)\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab}]\lambda_c e^{mu}(\delta_{bc}cospu + \varepsilon_{bc}sinpu) - 2a_a e^{su} -\\
&-2(a_a u + b_a)se^{su} - \xi_0^a,\\
&r(2m-s)(au+b)e^{(2m-s)u} = r(a-\xi_0^0)e^{(2m-s)u} - (\triangle au + \triangle b)e^{su} -\\
&-(a_a u + b_a)\lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}cospu + \varepsilon_{ab}sinpu) + a_0 u + b_0.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Розчепивши систему (2.68) за різними функціями змінної u отримаємо

$$a = 0, \tag{2.69}$$

$$sb = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \tag{2.70}$$

$$\xi_0^a = 0, \tag{2.71}$$

$$mb = \xi_1^1 - \xi_0^0,\ pb = \xi_1^2, \tag{2.72}$$

$$(2m-s)b + \xi_0^0 = 0, \tag{2.73}$$

$$b_0 = b_a = 0. \tag{2.74}$$

Із рівнянь (2.70), (2.72), (2.73) одержимо

$$\xi_{bc}^a = 0. \tag{2.75}$$

Із (2.71), (2.75) та (2.5) маємо

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = (m-s)c_1x_1 + c_1px_2 + d_1,\\
&\xi^2 = -c_1px_1 + (m-s)c_1x_2 + d_2.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Врахувавши (2.70),(2.72), (2.73), (2.76), (2.5) отримаємо

$$\xi^0 = 2(m-s)c_1x_0 + sc_1x_0 + d_0,\ \eta = -c_1, \tag{2.77}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.76), (2.77) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, (m-s)D + \mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$.

Тобто має місце випадок 17 із таблиці 2.

Нехай $f^0 = e^u,\ f^a = \lambda_a u,\ h = re^{-u}$.

Підставивши дані функції у рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned}&(au+b)e^u = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^u,\\&(au+b)\lambda_a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_a u - 2a_a e^u - 2(a_a u + b_a)e^u - \xi^a_0,\\&-r(au+b)e^{-u} = r(a - \xi^0_0)e^{-u} - (\triangle au + \triangle b)e^u - (a_a u + b_a)\lambda_a u +\\&+a_0 u + b_0.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Розчепивши систему (2.78) за різними функціями змінної u отримаємо

$$a = 0, \tag{2.79}$$

$$b = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \tag{2.80}$$

$$\xi^1_1 - \xi^0_0 = 0,\ \xi^2_1 = 0, \tag{2.81}$$

$$\lambda_a b = -\xi^a_0, \tag{2.82}$$

$$r(b - \xi^0_0) = 0, \tag{2.83}$$

$$b_0 = b_a = 0. \tag{2.84}$$

Із рівнянь (2.80), (2.81), (2.82), (2.84) та (2.5) маємо

$$\xi^a = -c_1(\lambda_a x_0 - x_a) + d_1,\ b = c_1. \tag{2.85}$$

Врахувавши (2.80), (2.81), (2.82), (2.85), (2.5) та (2.9) отримаємо

$$\xi^0 = c_1 x_0 + d_0,\ \eta = c_1, \tag{2.86}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ — довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.85), (2.86) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, D - \mathcal{D}_0 - x_0\lambda_a\partial_a >$.

Тобто має місце випадок 18 із таблиці 2.

Нехай $f^0 = e^u,\ f^a = \lambda_b e^u(\delta_{ab} cospu + \varepsilon_{ab} sinpu),\ h = re^u + \lambda_3$. Підставивши дані функції у рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned}
&(au+b)e^u = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^u,\\
&(au+b)\lambda_b e^u[(\delta_{ab} cospu + \varepsilon_{ab} sinpu) + p(-\delta_{ab} sinpu + \varepsilon_{ab} cospu) =\\
&= [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_c e^u(\delta_{bc} cospu + \varepsilon_{bc} sinpu) - 2a_a e^u -\\
&-2(a_a u + b_a)e^u - \xi^a_0,\\
&r(au+b)e^u = (re^u + \lambda_3)(a - \xi^0_0)e^u - (\triangle au + \triangle b)e^u -\\
&-(a_a u + b_a)\lambda_b e^u(\delta_{ab} cospu + \varepsilon_{ab} sinpu) + a_0 u + b_0.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Розчепивши систему (2.87) за різними функціями змінної u отримаємо

$$\begin{aligned}
&a = b_a = \xi^a_0 = 0, b = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\\
&b = \xi^1_1 - \xi^0_0,\ pb = \xi^2_1,\\
&r(b + \xi^0_0),\ b_0 = \lambda_3\xi^0_0.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Розв'язок системи (2.88) залежить від сталої λ_3. Можливі наступні нееквівалентні випадки:

1)$\lambda_3 = 0$;

2)$\lambda_3 \neq 0$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1)$\lambda_3 = 0$.

Із (2.88) маємо

$b_0 = 0$.

Тоді $b - const$. Із (2.88), (2.5) та (2.9) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = c_1 x_0 + d_0,\\
&\xi^1 = pc_1 x_2 + d_1,\\
&\xi^2 = -pc_1 x_1 + d_2,\\
&\eta = -c_1,
\end{aligned} \tag{2.89}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ — довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.89) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$.

Тобто має місце випадок 19 із таблиці 2.

2)$\lambda_3 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (2.12) можна вважати $\lambda_3 = \pm 1$).

Із (2.88), (2.5) та (2.9) отримаємо

$$\begin{aligned} &\xi^0 = c_1 e^{\mp x_0} + d_0, \\ &\xi^1 = d_1, \\ &\xi^2 = d_2, \\ &\eta = \pm c_1 e^{\pm x_0}. \end{aligned} \tag{2.90}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ — довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.90) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{T} >$.

Тобто справедливий випадок 20 із таблиці 2.

Нехай

$f^0 = u^k,\ f^a = \lambda_b u^m(\delta_{ab}\cos p\ln u + \varepsilon_{ab}\sin p\ln u),\ h = ru^{2m-k+1},\ (m,p) \neq (0,0), m \neq k$.

Запишемо рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи для цього випадку

$$\begin{aligned} &(au+b)ku^{k-1} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)u^k, \\ &(au+b)\lambda_b u^{m-1}[m(\delta_{ab}cosplnu + \varepsilon_{ab}sinplnu) + p(-\delta_{ab}sinplnu + \\ &+\varepsilon_{ab}cosplnu)] = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_c u^m(\delta_{bc}cosplnu + \\ &+\varepsilon_{bc}sinplnu) - 2a_a u^k - 2(a_a u + b_a)ku^{k-1} - \xi^a_0, \\ &r(au+b)(2m-k+1)u^{2m-k} = r(a-\xi^0_0)u^{2m-k+1} - (\triangle au + \triangle b)u^k - \\ &-(a_a u + b_a)\lambda_b u^m(\delta_{ab}cosplnu + \varepsilon_{ab}sinplnu) + a_0 u + b_0. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Із рівнянь (2.91) маємо

$$\begin{aligned} &ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad ma = \xi^1_1 - \xi^0_0, \quad pa = \xi^2_1, \\ &b = a_0 = a_a = \xi^a_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Розв'язком системи (2.92) є функції

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = (2m-k)c_1x_0 + d_0,\\
&\xi^1 = (m-k)c_1x_1 + pc_1x_2 + d_1,\\
&\xi^2 = -pc_1x_1 + (m-k)c_1x_2 + d_2,\\
&\eta = -c_1u.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ — довільні сталі. Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.93) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, (m-k)D + D_0 + pJ_{12} >$.

Тобто має місце випадок 21 із таблиці 2.

Нехай

$f^0 = u^k,\ f^a = \lambda_a \ln u,\ h = ru^{-k+1}, k \neq 0.$

Запишемо рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи для цього випадку

$$\begin{aligned}
&(au+b)ku^{k-1} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)u^k,\\
&(au+b)\lambda_a \tfrac{1}{u} = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b \ln u - 2a_a u^k -\\
&-2(a_a u + b_a)ku^{k-1} - \xi^a_0,\\
&r(au+b)(-k+1)u^{-k} = r(a - \xi^0_0)u^{-k+1} - (\triangle a u + \triangle b)u^k -\\
&-(a_a u + b_a)\lambda_a \ln u + a_0 u + b_0.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Із рівнянь (2.94) маємо

$$\begin{aligned}
&ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad \xi^1_1 = \xi^a_0, \quad \xi^2_1 = 0, \quad \lambda_a a = -\xi^a_0\\
&b = a_0 = a_a = 0.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Розв'язком системи (2.95) є функції

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = kc_1x_0 + d_0,\\
&\xi^1 = c_1(-\lambda_a x_0 + kx_1) + d_1,\\
&\xi^2 = c_1(-\lambda_a x_0 + kx_1) + d_2,\\
&\eta = c_1u.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ — довільні сталі. Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.93) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, kD - D_0 - x_0\lambda_a\partial_a >$.

Тобто має місце випадок 22 із таблиці 2.

Нехай

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_a u^k K_{ab}(\ln u), \quad h = u(\lambda_3 u^k + \lambda_4), k \neq 0. \tag{2.97}$$

Підставивши функції (2.97) в рівняння (2.6)-(2.8), одержимо

$$b = 0, ka = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \quad \xi_0^a = 0, \tag{2.98}$$

$$\lambda_b a(kK_{ab} + \dot{K}_{ab}) - [(\xi_1^1 - \xi_0^0)\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab}]\lambda_c K_{bc} = 2(k+1)a_a, \tag{2.99}$$

$$\lambda_3(ka + \xi_0^0) = -\lambda_b K_{ab} a_a, \tag{2.100}$$

$$a_0 = \lambda_4\xi_0^0. \tag{2.101}$$

Розв'язок системи (2.98)-(2.101) залежить від значень сталої p.

Якщо $p \neq 0$, то з рівнянь (2.98)-(2.101) одержимо

$$b = 0, \quad a_a = 0, \quad \xi_0^a = 0, \quad \xi_1^1 = 0, \quad \xi_1^2 = pa, ka + \xi_0^0 = 0, \tag{2.102}$$

$$\lambda_4\xi_0^0 = 0. \tag{2.103}$$

Розв'язок системи (2.102)-(2.103) залежить від значень сталої λ_4.

1)$\lambda_4 \neq 0$.

Тоді з рівнянь (2.102)-(2.103) отримаємо

$a = b = 0, \quad \xi_0^0 = \xi_0^a = \xi_b^a = 0$, що приводить до A^{bas}.

2)$\lambda_4 = 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_3 = r$, де $r \in \{-1, 0, 1\}$).

У цьому випадку загальним розв'язком системи рівнянь (2.102), (2.103), (2.4), (2.5), є функції

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0, \quad \xi^a = -pc_0\varepsilon_{ab}x_b + d_a, \quad \eta = -c_0u. \tag{2.104}$$

Формули (2.104) задають наступну максимальну алгебру інваріатності рівняння (2.1) $< \partial_0, \partial_a, D_0 + pJ_{12} >$. Тобто справедливий випадок 23 з таблиці 2.

Якщо $p = 0$, то рівняння (2.1) з нелінійностями (2.97) має вигляд

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k u_1 + u(\lambda_3 u^k + \lambda_4). \tag{2.105}$$

Із рівнянь (2.98)-(2.101) отримаємо

$$b = \xi^a_0 = 0, \tag{2.106}$$

$$ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \tag{2.107}$$

$$2(k+1)a_a = -\lambda_a \xi^1_1 + \lambda^{\perp}_a \xi^2_1, \tag{2.108}$$

$$(\overrightarrow{\lambda}^2 - 4(k+1)\lambda_3)\xi^1_1 = 0, \tag{2.109}$$

$$\xi^0_{00} + k\lambda_4 \xi^0_0 = 0. \tag{2.110}$$

Розв'язок системи (2.106)-(2.110) залежить від сталих λ_3, λ_4. Можливі наступні нееквівалентні випадки:

1)$4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 = 0;$
2)$4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 \neq 0;$
3)$4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 = 0;$
4)$4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 \neq 0.$

Розглянемо кожен випадок окремо.

1)$4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 = 0.$

Загальним розв'язком системи рівнянь (2.106)-(2.110), (2.4), (2.5) будуть наступні функції

$$\xi^0 = kc_0 x_0 + d_0, \quad \xi^a = d_a, \quad \eta = c_0 u. \tag{2.111}$$

Формули (2.111) породжують алгебру

$< \partial_0, \partial_a, D_0 = kx_a\partial_a - u\partial_u >$, що співпадає з випадком 24 таблиці 2.

2)$4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2, \lambda_4 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_3 = r, \lambda_4 = \pm 1$). Загальним розв'язком системи рівнянь (2.106)-(2.110), (2.4), (2.5) будуть наступні функції

$$\xi^0 = c_0 e^{\mp k x_0} + d_0, \quad \xi^a = d_a, \quad \eta = \pm c_0 e^{\mp k x_0} u. \tag{2.112}$$

Формули (2.112) породжують алгебру

$< \partial_0,\ \partial_a,\ T >$. Тобто справедливий випадок 25 таблиці 2.

3)$4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2,\ \lambda_4 = 0.$

Із (2.107)-(2.109) маємо

$$\frac{4(k+1)}{k}\lambda_a\xi^1_{1a} + \overrightarrow{\lambda}^2\xi^1_1 = 0. \tag{2.113}$$

Загальним розв'язком рівняння (2.113) буде функція

$$\xi^1_1 = e^w\psi(\omega), \tag{2.114}$$

де $\psi = \psi(\omega)$ — довільна гладка функція, $\omega = -\frac{k}{4(k+1)}\overrightarrow{\lambda}^{\perp}\overrightarrow{x},\ w = -\frac{k}{4(k+1)}\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\lambda}^{\perp} = (-\lambda_2, \lambda_1)$ — вектор, перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{\lambda}$.

Врахувавши (2.5), із (2.114) маємо

$$\xi^2_1 = e^w\dot{\psi}. \tag{2.115}$$

Із сумісності системи (2.114),(2.115) випливає, що

$$\ddot{\psi} + \psi = 0. \tag{2.116}$$

Загальним розв'язком рівняння (2.116) буде

$$\psi = c_1 cos\omega + c_2 sin\omega,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Тоді

$$\begin{aligned} \xi^1_1 &= e^w(c_1 cos\omega + c_2 sin\omega),\\ \xi^1_2 &= e^w(c_1 sin\omega - c_2 cos\omega). \end{aligned} \tag{2.117}$$

Використавши формули (2.5), отримаємо також

$$\begin{aligned} \xi^2_1 &= e^w(-c_1 sin\omega + c_2 cos\omega),\\ \xi^2_2 &= e^w(c_1 cos\omega + c_2 sin\omega). \end{aligned} \tag{2.118}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (2.117), (2.118) є функції

$$\xi^1 = -\frac{4(k+1)}{k\overrightarrow{\lambda}^2}e^w(\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{c}\cos\omega + \overrightarrow{\lambda}^{\perp}\overrightarrow{c}\sin\omega) + d_1, \tag{2.119}$$

$$\xi^2 = -\frac{4(k+1)}{k\overrightarrow{\lambda}^2}e^w(\overrightarrow{\lambda}^{\perp}\overrightarrow{c}\cos\omega - \overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{c}\sin\omega) + d_2, \tag{2.120}$$

де $d_1,\ d_2$ — сталі інтегрування.

Загальним розв'язком рівняння (2.110) при $\lambda_4 = 0$ буде функція

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0. \tag{2.121}$$

Із (2.107) з урахуванням (2.121) отримаємо

$$\eta = [\tfrac{2}{k}e^w(c_1cos\omega + c_2sin\omega) - c_0)]u. \tag{2.122}$$

Рівняння (2.105) заміною

$$\frac{\vec{\lambda}^2k^2}{16(k+1)^2}x_0 \longrightarrow x_0,\ \frac{k}{4(k+1)}\lambda_ax_a \longrightarrow x_1,\ \frac{k}{4(k+1)}\lambda_a^{\perp}x_a \longrightarrow x_2,\ u \longrightarrow u \tag{2.123}$$

зводиться до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^ku_a) + 4\frac{k+1}{k}u^ku_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}. \tag{2.124}$$

Формули (2.116), (2.119), (2.121), (2.126) з урахуванням заміни (2.123) задають наступну максимальну алгебру рівняння (2.1).

$<\ \partial_0,\ \partial_a,\ Q_1,\ Q_2,\ D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u\ >$, тобто маємо випадок 26 із таблиці 2.

4)$4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2, \lambda_4 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (2.12) $\lambda_4 = \pm 1$).

Із рівняння (2.110) отримаємо

$$\xi^0 = c_0e^{\mp kx_0} + d_0. \tag{2.125}$$

Із (2.125) маємо

$$\eta = [\tfrac{2}{k}e^w(c_1cos\omega + c_2sin\omega) - c_0e^{\mp kx_0})]u. \tag{2.126}$$

Рівняння (2.105) заміною (2.123) зводиться до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\tfrac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\tfrac{k+1}{k^2}u^{k+1} \pm u. \tag{2.127}$$

Формули (2.116), (2.119), (2.121), (2.126) з урахуванням заміни (2.123) задають алгебру $< \partial_0,\ \partial_a,\ Q_a,\ T >$, що співпадає з випадком 27 із таблиці 2.

Нехай $f^0 = 1,\ f^a = \lambda_a u,\ h = ru + \lambda_3.$

Запишемо рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи для даного випадку

$$\begin{aligned}
&\xi^0_0 = 2\xi^1_1,\\
&(au+b)\lambda_a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b u - 2a_a - \xi^a_0,\\
&\lambda_3(au+b) = (a-\xi^0_0)(ru+\lambda_3) - (\triangle au + \triangle b) -\\
&-(a_a u + b_a)\lambda_a u + a_0 u + b_0.
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Розчепивши систему (2.128) за різними функціями u отримаємо

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \tag{2.129}$$

$$a = -\xi^1_1, \tag{2.130}$$

$$\xi^2_1 = 0, \tag{2.131}$$

$$\lambda_a b = -\xi^a_0 - 2a_a, \tag{2.132}$$

$$\lambda_a a_a = 0, \tag{2.133}$$

$$a_0 = \lambda_3\xi^0_0 + \lambda_a b_a + \triangle a, \tag{2.134}$$

$$b_0 = \lambda_3 b - \lambda_4(a - \xi^0_0) + \triangle b. \tag{2.135}$$

Із (2.129), (2.131) маємо

$$\xi^0 = 2A(x_0), \tag{2.136}$$

$$\xi^a = \dot{A}(x_0)x_a + B^a(x_0). \tag{2.137}$$

Врахувавши (2.136), із рівняння (2.130) одержимо

$$a_a = 0. \tag{2.138}$$

Із (2.138) випливає, що

$$a = -\dot{A}(x_0). \tag{2.139}$$

Із (2.132) маємо

$$b = -\frac{1}{\vec{\lambda}^2}\lambda_a \xi_0^a. \tag{2.140}$$

Врахувавши (2.138), (2.139), із (2.140) отримаємо
$\ddot{A} = 0.$
Тоді

$$A = c_1 x_0 + \frac{d_0}{2}. \tag{2.141}$$

Використавши (2.141), із (2.136) та (2.137) маємо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \tag{2.142}$$

$$a = -c_1, \tag{2.143}$$

$$\xi^a = c_1 x_a + B^a(x_0). \tag{2.144}$$

Врахувавши (2.144), із (2.140) отримаємо

$$b = -\frac{1}{\vec{\lambda}^2}\lambda_a \dot{B}^a. \tag{2.145}$$

Продиференціювавши (2.145) по x_a, одержимо

$$b_a = 0. \tag{2.146}$$

Врахувавши (2.146), (2.143), із (2.134) маємо

$$rc_1 = 0. \tag{2.147}$$

Нехай $r = \pm 1$. Із (2.147) одержимо

$$c_1 = 0. \tag{2.148}$$

Врахувавши (2.148), із системи (2.142)-(2.144) отримаємо

$$a = 0, \tag{2.149}$$

$$\xi^0 = d_0, \tag{2.150}$$

$$\xi^a = B^a(x_0). \tag{2.151}$$

Із рівнянь (2.145) маємо

$$\lambda_a B^a = c_2 + c_3 \overrightarrow{\lambda}^2 e^{\pm x_0}. \tag{2.152}$$

Із (2.145), (2.152) отримаємо

$$b = -c_3 e^{\pm x_0}. \tag{2.153}$$

Тоді

$$\eta = -c_3 e^{\mp x_0}. \tag{2.154}$$

Врахувавши (2.153), із (2.132) маємо

$$\xi^a = \pm \lambda_a c_3 e^{\pm x_0} + d_a. \tag{2.155}$$

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.150), (2.155), (2.154) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{H} >$.

Тобто має місце випадок 28 із таблиці 2.

Нехай

$$\lambda_3 = 0. \tag{2.156}$$

Врахувавши (2.156), (2.146), із (2.135) отримаємо

$$\lambda_a B^a = -r \frac{3 \overrightarrow{\lambda}^2 c_1}{2} x_0^2 + c_2 \overrightarrow{\lambda}^2 x_0 + c_3. \tag{2.157}$$

Використавши (2.157), із (2.145) маємо

$$b = -3 r c_1 x_0 + c_2. \tag{2.158}$$

Врахувавши (2.158), із (2.144), (2.132) отримаємо

$$B^a = \lambda_a(-r\tfrac{3c_1}{2}x_0^2 + c_2\overrightarrow{\lambda}^2x_0) + d_a. \tag{2.159}$$

Із (2.144), (2.159) одержимо

$$\xi^a = c_1x_0 + \lambda_a(-r\tfrac{3c_1}{2}x_0^2 + c_2\overrightarrow{\lambda}^2x_0) + d_a. \tag{2.160}$$

Із рівнянь (2.143), (2.158) маємо

$$\eta = -c_1u - 3rc_1x_0 + c_2. \tag{2.161}$$

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.142), (2.160), (2.161) породжує наступну алгебру інваріантності

$< \partial_0, \partial_a, D - \partial_u - \frac{3}{4}rx_0(\mathcal{G} - 2\partial_u), \mathcal{G} >.$

Тобто справедливий випадок 29 із таблиці 2.

Нехай $f^0 = 1,\ f^a = \lambda_a \ln u,\ h = (\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)u.$

Підставивши дані функції у рівняння (2.6)-(2.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned}
&\xi^0_0 = 2\xi^1_1,\\
&(au+b)\tfrac{\lambda_a}{u} = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b \ln u - 2a_a - \xi^a_0,\\
&(au+b)(2\lambda_3 \ln u + \lambda_4 + \lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5) =\\
&= (a - \xi^0_0)(\lambda_3 \ln^2 u + +\lambda_4 \ln u + \lambda_5)u - (\triangle au + \triangle b)(a_0u + b_0)-\\
&-(a_au + b_a)\lambda_a \ln u + a_0u + b_0.
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Розчепивши систему (2.162) за різними нелінійностями, отримаємо

$$b = 0, \tag{2.163}$$

$$\xi^0 = d_0, \tag{2.164}$$

$$\xi^a = \xi^a(x_0), \tag{2.165}$$

$$\lambda_a a_a + 2\lambda_3 a = 0, \tag{2.166}$$

$$2a_a = -\lambda_a a - \xi^a_0, \tag{2.167}$$

$$-a_0 + \lambda_4 a = - \triangle a. \tag{2.168}$$

Розв'язок системи (2.164)-(2.168) залежить від сталої λ_3. Можливі наступні нееквівалентні випадки:

1)$\lambda_3 \neq 0, \frac{\overrightarrow{\lambda}^2}{4}$;

2)$\lambda_3 = 0$;

3)$\lambda_3 = \frac{\overrightarrow{\lambda}^2}{4}$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1)$\lambda_3 \neq 0, \frac{\overrightarrow{\lambda}^2}{4}$.

Тоді з рівнянь (2.102)-(2.103) отримаємо

$a = b = 0, \quad \xi^0_0 = \xi^a_0 = \xi^a_b = 0$, що приводить до A^{bas}.

2)$\lambda_3 = 0$.

Із (2.166)-(2.168) отримаємо

$$a = a(x_0), -a_0 + \lambda_4 a = 0. \tag{2.169}$$

Проаналізувавши рівняння (2.169), маємо наступні нееквівалентні випадки:

а)$\lambda_4 = 0$; б)$\lambda_4 \neq 0$.

а)$\lambda_4 = 0$.

Із (2.166)-(2.168) одержимо

$$\xi^0 = d_0, \xi^a = c_1 \lambda_a x_0 + d_a, \eta = -c_1 u. \tag{2.170}$$

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.170) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, G >$.

Тобто має місце випадок 30 із таблиці 2.

б)$\lambda_4 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (2.12) $\lambda_4 = \pm 1$).

Із (2.166)-(2.168) отримаємо

$$a = \varphi(x_0). \tag{2.171}$$

Врахувавши (2.167), (2.171), маємо

$$\xi^a_0 = -\lambda_a \varphi. \tag{2.172}$$

Врахувавши (2.166), (2.168), (2.171), одержимо

$$\dot{\varphi} \mp \varphi = 0. \tag{2.173}$$

Із (2.173) отримаємо

$$\varphi = c_1 e^{\mp x_0}. \tag{2.174}$$

Тоді

$$\eta = c_1 e^{\pm x_0} u. \tag{2.175}$$

Врахувавши (2.175), із (2.172) маємо

$$\xi^a = \mp c_1 \lambda_a e^{\pm x_0} + d_a. \tag{2.176}$$

Інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.164), (2.176), (2.175) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, H >$.

Тобто справедливий випадок 31 із таблиці 2.

3)$\lambda_3 = \frac{\vec{\lambda}^2}{4}$ (з точністю до перетворень еквівалентності (2.12) $\lambda_4 = 0$).

Тоді

$$a = \varphi(x_0) e^{-\frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}}. \tag{2.177}$$

Із (2.167) маємо

$$\xi^a_0 = 0. \tag{2.178}$$

Із рівняння (2.178) одержимо

$$\xi^a = d_a. \tag{2.179}$$

Із (2.177), (2.168) маємо

$$\varphi = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4}x_0}, \tag{2.180}$$

$a = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4}x_0 - \frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}}$.

Тоді

$$\eta = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4}x_0 - \frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}} u. \tag{2.181}$$

Якщо замість λ_a вибрати $2\lambda_a$, то інфінітезимальний оператор (2.3) з координатами (2.164), (2.179), (2.181) породжує наступну алгебру

$< \partial_0, \partial_a, Y >$.

Тобто справедливий випадок 32 із таблиці 2.

Теорема 2.4 доведена.

2.5. Додаткові перетворення еквівалентності рівняння (2.1) та їх застосування

Крім неперервних клас рівнянь (2.1) володіє ще й додатковими перетвореннями еквівалентності. Поставимо задачу знайти всеможливі невироджені локальні перетворення вигляду

$$y_0 = a(x, u), \quad y_a = b^a(x, u), \quad v = c(x, u), \tag{2.182}$$

які довільне рівняння класу (2.1) зводять до рівняння того ж класу

$$v_0 = \partial_a(F^0(v)v_a) + F^a(v)v_a + H(v), \tag{2.183}$$

де $x = (x_0,\ x_1,\ x_2)$, $u = u(x)$, $y = (y_0,\ y_1,\ y_2)$, $v = v(y)$, $F^0 = F^0(v)$, $F^a = F^a(v)$, $H = H(v)$ — довільні гладкі функції.

Теорема 2.5. *Будь-яке рівняння (2.1) зводиться до рівняння (2.183) за допомогою невиродженої локальної підстановки (2.182) тоді і тільки тоді, коли підстановка має вигляд*

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ v = \alpha(x)u + \beta(x), \tag{2.184}$$

причому функції a, b^a, α, β, f^0, f^a, h, F^0, F^a, H задовольняють наступним умовам

$$\dot{a}\alpha(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \neq 0, \tag{2.185}$$

$$b_1^2 = \pm b_2^1, \tag{2.186}$$

$$b_2^2 = \mp b_1^1, \tag{2.187}$$

$$b_a^1 b_a^1 f^0(u) = \dot{a} F^0(v), \tag{2.188}$$

$$\begin{gathered}-\tfrac{2}{\alpha} b_b^a(\alpha_b u + \beta_b)\dot{f}^0(u) + (\triangle a - \tfrac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a) f^0(u) - b_0^a + \\ + b_b^a f^b(u) = \dot{a} F^a(v),\end{gathered} \tag{2.189}$$

$$\begin{gathered}\alpha_0 u + \beta_0 + [\tfrac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle\alpha u + \triangle\beta)] f^0(u) + \\ + \tfrac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0(u) - (\alpha_a u + \beta_a) f^a(u) + \\ + \alpha h(u) = \dot{a} H(v).\end{gathered} \tag{2.190}$$

Доведення. Для того, щоб перетворення (2.184) були невиродженими, якобіан цих перетворень має бути відмінним від нуля

$$J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_u \\ b_0^1 & b_1^1 & b_2^1 & b_u^1 \\ b_0^2 & b_1^2 & b_2^2 & b_u^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_u \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.191}$$

Постановка задачі знаходження додаткових перетворень вимагає виконання наступної умови

$$\begin{gathered}u_0 - \partial_a(f^0(u)u_a) - f^a(u)u_a - h(u) - \lambda[v_0 - \partial_a(F^0(v)v_a) - \\ - F^a(v)v_a - H(v)] = 0,\end{gathered} \tag{2.192}$$

де $\lambda = \lambda(x, u)$ — функція, яка підлягає визначенню. Як бачимо з (2.192), необхідно задати зв'язок між похідними функцій u та v. Маємо наступні формули:

$$u_0 = -\tfrac{v_{y_0} a_0 + v_{y_a} b_0^a - c_0}{\sigma}, \tag{2.193}$$

$$u_a = -\frac{v_{y_0}a_a + v_{y_b}b_a^b - c_a}{\sigma}, \tag{2.194}$$

$$\begin{gathered} u_{ab} = -\frac{1}{\sigma}[(a_a + a_u u_a)(a_b + a_u u_b)v_{y_0 y_0} + 2(a_a + a_u u_a)(b_b^c + \\ + b_u^c u_b)v_{y_0 y_c} + (b_a^c + b_u^c u_a)(b_b^d + b_u^d u_b)v_{y_c} v_{y_d} + (a_{ab} + a_{au}u_b + \\ + a_{bu}u_a + a_{uu}u_a u_b)v_{y_0} - (b_{ab}^c + b_{au}^c u_b + b_{bu}^c u_a + b_{uu}^c u_a u_b)v_{y_c} - \\ -(c_{ab} + c_{au}u_b + c_{bu}u_a + c_{uu}u_a u_b)], \end{gathered} \tag{2.195}$$

де $\sigma = v_{y_0}a_u + v_{y_a}b_u^a - c_u,\ u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a},\ v_{y_a} = \frac{\partial v}{\partial y_a},\quad u_{ab} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_a x_b},\ v_{y_a y_b} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_a y_b}$.

Врахувавши той факт, що у рівнянні (2.183) повинні бути відсутні похідні $v_{y_0 y_0},\ v_{y_0 y_a},\ v_{y_1 y_2}$, а також коефіцієнти біля $v_{y_1 y_1},\ v_{y_2 y_2}$ повинні бути рівними, маємо

$$a_a + a_u u_a = 0, \tag{2.196}$$

$$(b_a^1 + b_u^1 u_a)(b_a^2 + b_u^2 u_a) = 0, \tag{2.197}$$

$$(b_a^1 + b_u^1 u_a)(b_a^1 + b_u^1 u_a) = (b_a^2 + b_u^2 u_a)(b_a^2 + b_u^2 u_a). \tag{2.198}$$

Проаналізувавши (2.196)-(2.198), одержимо

$$a_a = a_u = 0, \tag{2.199}$$

$$b_a^1 b_a^2 = 0, \tag{2.200}$$

$$b_a^1 b_u^2 + b_u^1 b_a^2 = 0, \tag{2.201}$$

$$b_u^1 b_u^2 = 0, \tag{2.202}$$

$$b_a^1 b_a^1 = b_a^2 b_a^2, \tag{2.203}$$

$$b_a^1 b_u^1 = b_a^2 b_u^2, \tag{2.204}$$

$$(b_u^1)^2 = (b_u^2)^2. \tag{2.205}$$

З умов (2.201), (2.203) випливає

$$b_u^1 = b_u^2 = 0. \tag{2.206}$$

Із рівнянь (2.199), (2.244) одержимо

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ v = c(x, u). \tag{2.207}$$

Врахувавши (2.199), (2.244), із формул (2.193)-(2.195) маємо

$$u_0 = \frac{1}{c_u}(\dot{a}v_{y_0} + b_0^a v_{y_a} - c_0), \tag{2.208}$$

$$u_a = \frac{1}{c_u}(b_a^b v_{y_b} - c_a), \tag{2.209}$$

$$\begin{gathered} \triangle u = \frac{1}{c_u}[b_a^1 b_a^1 \triangle v - \frac{c_{uu}}{c_u^2} b_a^c b_a^d v_{y_c} v_{y_d} + (\triangle b^c - \frac{2c_{au}}{c_u} b_a^c + \\ +2\frac{c_{uu}}{c_u^2} b_a^c c_a) v_{y_c} + 2\frac{c_{au}}{c_u} c_a - \frac{c_{uu}}{c_u^2} c_a c_a - \triangle c]. \end{gathered} \tag{2.210}$$

Підставивши (2.208)-(2.210) в (2.192) та розчепивши за похідними функції w, маємо

$$\lambda = \frac{\dot{a}}{c_u}, \tag{2.211}$$

$$c_{uu} = 0, \tag{2.212}$$

$$b_a^1 b_a^1 f^0(u) = \dot{a} F^0(v), \tag{2.213}$$

$$\begin{gathered} -\frac{2}{\alpha} b_b^a (\alpha_b u + \beta_b) \dot{f}^0(u) + (\triangle a - \frac{2}{\alpha} \alpha_b b_b^a) f^0(u) - b_0^a + \\ +b_b^a f^b(u) = \dot{a} F^a(v), \end{gathered} \tag{2.214}$$

$$\begin{gathered} \alpha_0 u + \beta_0 + [\frac{2}{\alpha} \alpha_a (\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle \alpha u + \triangle \beta)] f^0(u) + \\ +\frac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a) \dot{f}^0(u) - (\alpha_a u + \beta_a) f^a(u) + \\ +\alpha h(u) = \dot{a} H(v). \end{gathered} \tag{2.215}$$

Врахувавши (2.199), (2.244), із (2.191) одержимо

$$\dot{a}\alpha(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \neq 0. \tag{2.216}$$

Використавши (2.212), із (2.207) маємо

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ w = \alpha(x)u + \beta(x). \tag{2.217}$$

Врахувавши (2.217) із (2.216), (2.214), (2.215), отримаємо (2.185), (2.189), (2.190).

Отже, підстановка (2.217) має задовольняти умови (2.185), (2.200), (2.203), (2.213), (2.189), (2.190).

Теорема 2.5 доведена.

Застосуємо результати теореми 5 для знаходження перетворень, які зводять рівняння з таблиці 2.2 до інших рівнянь з даної таблиці. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.6. *Усі рівняння таблиці 2.2, які за допомогою локальних перетворень можуть бути зведені до інших рівнянь цієї ж таблиці наведені в таблиці 2.3.*

Таблиця 2.3: Спрощення рівняння (2.1) за допомогою додаткових перетворень еквівалентності

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
1	$u_0 = \triangle u \pm 1$	$y_0 = x_0, y_a = x_a,$ $v = u \mp x_0$	$v_0 = \triangle v$
2	$u_0 = \triangle u \pm u$	$y_0 = x_0, y_a = x_a,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_0 = \triangle v$
3	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm$ $\pm 1 + re^u$	$y_0 = \pm e^{\pm x_0}, y_a = x_a,$ $v = u \mp x_0$	$v_0 = \partial_a(e^v v_a) +$ $+ re^v$
4	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ ru^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k}, y_a = x_a,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_0 = \partial_a(v^k v_a) +$ $+ rv^{k+1}$
5	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) +$ $+ e^u \lambda_a u_a + re^u \pm 1$	$y_0 = \pm e^{\pm x_0}, y_a = x_a,$ $v = u \mp x_0$	$v_0 = \partial_a(e^v v_a) +$ $+ e^v \lambda_a v_a + re^v$
6	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ u^k \lambda_a u_a +$ $+ ru^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k}, y_a = x_a,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_0 = \partial_a(v^k v_a) +$ $+ v^k \lambda_a v_a + rv^{k+1}$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ 4\frac{k+1}{k} u^k u_1 +$ $+ 4\frac{k+1}{k^2} u^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k},\ y_a = x_a,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_0 = \partial_a(v^k v_a) +$ $+ 4\frac{k+1}{k} v^k v_1 +$ $+ 4\frac{k+1}{k^2} v^{k+1}$

8	$u_0 = \triangle u +$ $+ u\lambda_a u_a \pm 1$	$y_0 = x_0,\ y_a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,$ $v = u \mp x_0$	$v_0 = \triangle v + v\lambda_a v_a$
9	$u_0 = \triangle u +$ $+ \ln u\lambda_a u_a \pm u$	$y_0 = x_0,\ y_a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_0 = \triangle v + \ln v\lambda_a v_a$

Доведення. Як випливає з умов (2.188), (2.189) для того, щоб рівняння з другої колонки таблиці 2.3 могли бути зведені за допомогою додаткових перетворень з колонки 3 до рівнянь з четвертої колонки цієї ж таблиці необхідно, щоб їх максимальні алгебри інваріантності мали однакові розмірності, а також функції f^0 і F^0, f^a і F^a належали до одного класу. Знайдемо додаткові перетворення, що зводять рівняння з другої колонки до рівнянь четвертої колонки таблиці 2.3.

Результати пунктів 1-4 таблиці 2.3 отримані іншими авторами(див., наприклад, [61]), тому детально зупинимося на доведенні пунктів 5-9.

Розглянемо рівняння з пункту 20 таблиці 2.2

$$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + e^u \lambda_a u_a + re^u \pm 1. \tag{2.218}$$

Його максимальна алгебра інваріантності складається з 4-ох базових операторів $< \partial_0, \partial_a, \mathcal{T} >$. MAI рівняння

$$v_0 = \partial_a(e^v v_a) + e^v \lambda_a v_a \pm 1, \tag{2.219}$$

одержаного з рівняння пункту 19 таблиці 2.2 при $p = 0$, теж 4-ох вимірна. Її базові генератори мають вигляд $< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 >$.

За допомогою теореми 5 побудуємо заміну, яка зводить рівняння (2.218) до рівняння (2.219). Умова (2.188) має вигляд

$$b_a^1 b_a^1 e^u = \dot{a} e^{\alpha u + \beta}. \tag{2.220}$$

Із рівняння (2.220) випливає, що

$$\alpha = 1, b_a^1 b_a^1 = \dot{a} e^{\beta}. \tag{2.221}$$

Розглянемо частинний випадок

$b^a = x_a.$

Тоді з (2.221) випливає

$$\beta = -\ln \dot{a}, \tag{2.222}$$

тобто $\beta = \beta(x_0)$.

Умова (2.189) виконується тотожньо, а умова (2.190) має вигляд

$\beta_0 + \alpha(re^u \pm 1) = \dot{a}e^\beta re^u$, або

$\beta_0 + re^u \pm 1 = re^u$, звідки

$\beta_0 = \mp 1$, а

$\beta = \mp x_0.$

Із рівняння (2.222) отримуємо

$a = \pm e^{\pm x_0}.$

Отже, заміна, яка зводить рівняння (2.218) до рівняння (2.219), має вигляд

$$y_0 = \pm e^{\pm x_0},\ y_a = x_a,\ v = u \mp x_0. \tag{2.223}$$

Встановимо додаткові перетворення еквівалентності, які зводять рівняння

$$u_0 = u^k u_a + u^k \lambda_a u_a + ru^{k+1} \pm u \tag{2.224}$$

до рівняння

$$v_0 = v^k v_0 + v^k \lambda_a v_a + rv^{k+1} \tag{2.225}$$

У даному випадку рівняння (2.188)-(2.190) набудуть вигляду

$$b_a^1 b_a^1 u^k = \dot{a} v^k, \tag{2.226}$$

$$-\tfrac{2}{\alpha} b_b^a (\alpha_b u + \beta_b) k u^{k-1} + (\triangle b - \tfrac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a) u^k - b_0^a + b_b^a \lambda_b u^k = \dot{a}\lambda_a v^k, \tag{2.227}$$

$$\alpha_0 u + \beta_0 + [\tfrac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle\alpha u + \triangle\beta)]u^k + \\ + \tfrac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a)ku^{k-1} - (\alpha_a u + \beta_a)\lambda_b u^k + \\ + \alpha r u^{k+1} \pm u = \dot{a} r v^{k+1}. \tag{2.228}$$

Одним із розв'язків (2.186)-(2.187) буде

$$b^a = x_a. \tag{2.229}$$

Врахувавши (2.185), (2.229), із (2.226) маємо

$$\alpha^k \dot{a} = 1, \tag{2.230}$$

$$\beta = 0. \tag{2.231}$$

Із рівнянь (2.229), (2.230),

$$\dot{a} = \alpha^{-k}. \tag{2.232}$$

Врахувавши (2.229), (2.231), (2.232), із (2.228) отримаємо

$$\alpha_0 \pm \alpha = 0. \tag{2.233}$$

Із (2.232), (2.233) маємо

$$\alpha = e^{\pm x_0}. \tag{2.234}$$

Врахувавши (2.237), із (2.232) одержимо
$a = \pm\frac{e^{\pm k x_0}}{k}$.

Отже, маємо локальну підстановку, яка зводить рівняння (2.218) до рівняння (2.219).

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\tfrac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\tfrac{k+1}{k^2}u^{k+1} \pm u \tag{2.235}$$

до рівняння

$$v_0 = \partial_a(v^k v_a) + 4\tfrac{k+1}{k}v^k v_1 + 4\tfrac{k+1}{k^2}v^{k+1}. \tag{2.236}$$

Підставивши значення функцій $f^0,\ f^a,\ h,\ F^0,\ F^a, H$ з рівнянь (2.231), (2.233) у систему (2.188)-(2.190), врахувавши при цьому (2.184), (2.229), після розщеплення за різними степеневими функціями одержимо систему

$$\dot{a} = \alpha^k,\ \beta = 0,\ \alpha_0 = \pm\alpha. \tag{2.237}$$

Неважко переконатися, що одним із розв'язків системи (2.237) є функції

$$a = \pm\frac{e^{\pm kx_0}}{k},\ b = x_a,\ \alpha = e^{\pm x_0},\ \beta = 0. \tag{2.238}$$

які визначають пертворення

$$y_0 = \pm\frac{e^{\pm kx_0}}{k},\ y_a = x_a,\ w = e^{\pm x_0}u, \tag{2.239}$$

що зводять рівняння (2.231) до рівняння (2.233). Одержаний результат співпадає з сьомим випадком таблиці 2.3.

Встановимо додаткові перетворення еквівалентності, які зводять рівняння

$$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a \pm 1 \tag{2.240}$$

до рівняння

$$v_0 = \triangle v + v\lambda_a v_a. \tag{2.241}$$

У даному випадку рівняння (2.188)-(2.190) набудуть вигляду

$$b_a^1 b_a^1 = \dot{a}, \tag{2.242}$$

$$\triangle b - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a - b_0^a + b_b^a\lambda_b u = \dot{a}\lambda_a(\alpha u + \beta), \tag{2.243}$$

$$\begin{gathered}\alpha_0 u + \beta_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle\alpha u + \triangle\beta) - (\alpha_a u + \beta_a)\lambda_a u + \\ +\alpha r = 0.\end{gathered} \tag{2.244}$$

Розчепивши систему (2.242)-(2.244) за різними степенями функції u, одержимо систему

$$\begin{gathered}b_a^1 b_a^1 = \dot{a},\ b_b^a\lambda_b = \lambda_a\alpha\dot{a},\ \triangle b - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a - b_0^a = \lambda_a\beta\dot{a},\ \lambda_a\alpha_a = 0,\\ \alpha_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a\alpha_a - \triangle\alpha - \lambda_a\beta_a = 0,\ \beta_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a\beta_a - \triangle\beta + \alpha r = 0.\end{gathered} \tag{2.245}$$

Неважко переконатися, що одним із розв'язків системи (2.245) є функції

$$a = x_0,\ b^a = x_a \pm \tfrac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ \alpha = 1,\ \beta = \mp x_0, \tag{2.246}$$

які визначають перетворення

$y_0 = x_0,\ y_a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ v = u \mp x_0.$

Тобто має місце випадок 8 із таблиці 2.3.

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \triangle u + \ln u \lambda_a u_a \pm u \tag{2.247}$$

до рівняння

$$v_0 = \triangle \ln v + v\lambda_a v_a. \tag{2.248}$$

Підставивши функції

$$\begin{aligned} &f^0(u) = 1,\ f^a(u) = \lambda_a \ln u,\ h(u) = \pm u,\ F^0(u) = 1,\\ &F^a(u) = \lambda_a \ln v,\ H(u) = 0 \end{aligned} \tag{2.249}$$

в систему (2.185)-(2.190) та розчепивши одержані рівняння за різними нелінійностями змінної u, одержимо

$$b_a^1 b_a^1 = \dot{a}, \tag{2.250}$$

$$\beta = 0, \tag{2.251}$$

$$\lambda_a \dot{a} = \lambda_b b_b^a, \tag{2.252}$$

$$b_0^a = -\tfrac{2}{\alpha}\lambda_b b_b^a - \lambda_a \dot{a} \ln \alpha, \tag{2.253}$$

$$\lambda_a \alpha_a = 0, \tag{2.254}$$

$$\alpha_0 + \tfrac{2}{\alpha}\alpha_a\alpha_a - \triangle\alpha \pm \alpha = 0. \tag{2.255}$$

Неважко переконатися, що функції

$$a = x_0,\ b^a = x_a \pm \tfrac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ \alpha = e^{\mp x_0},\ \beta = 0 \tag{2.256}$$

є одним із розв'язків системи (2.250)-(2.255).

Тобто має місце випадок 9 із таблиці 2.3.

Усі інші рівняння з таблиці 2.2 є локально нееквівалентними.

Таким чином, з урахуванням результатів таблиці 2.3 одержуємо, що групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (2.1) може бути наведена у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 2.4: Групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (2.1)

№	Рівняння	MAI	Умови
1	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + h(u)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12} >$	$f^0 - \forall, h - \forall$
2	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D >$	$f^0 - \forall$
3	$u_0 = \triangle u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a,$ $Q, D, \Pi, Q_\infty >$	
4	$u_0 = \triangle u \pm u \ln u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, \widehat{Q}, H_a >$	
5	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D, \mathcal{D}_0 >$	$s = 1$
6	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) \pm e^{mu}$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(s-m)D - 2\mathcal{D}_0 >$	$m \neq 0$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D, D_0 >$	$k \neq -1; 0$
8	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u^m$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(k-m+1)D - 2D_0 >$	$k \neq -1; 0$ $m \neq 1$
9	$u_0 = \partial_a(u^{-1} u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D_0, X_\infty >$	$k = -1$
10	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a)+$ $+\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u) u_a+$ $+re^{(2m-s)u}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $(m-s)D + \mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$	$m \neq s$ $(m, p) \neq (0, 0)$
11	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)+$ $+\lambda_a u u_a + re^{-u}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $D - \mathcal{D}_0 - x_0 \lambda_a \partial_a >$	$s = 1$
12	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)+$	$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 + pJ_{12} >$	$s = 1$

	$+\lambda_b e^u K_{ab}(u)u_a + re^u$		
13	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(lnu)u_a+$ $+ru^{2m-k+1}$	$<\partial_0, \partial_a, (m-k)D+$ $+D_0 + pJ_{12}>$	$m \neq k,$ $(m,p) \neq (0,0)$
14	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\ln u \lambda_a u_a + ru^{-k+1}$	$<\partial_0, \partial_a,$ $kD - D_0 - x_0\lambda_a\partial_a>$	$k \neq 0$
15	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(lnu)u_a+$ $+ru^{k+1}$	$<\partial_0, \partial_a, D_0 + pJ_{12}>$	$k \neq 0, p \neq 0$
16	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+u^k\lambda_a u_a + \lambda_3 u^{k+1}$	$<\partial_0, \partial_a, D_0>$	$k \neq 0,$ $k^2\lambda_3 \neq 4(k+1)$
17	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+4\frac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}$	$<\partial_0, \partial_a, D_0, Q_a>$	$k \neq -1; 0$
18	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a \pm u$	$<\partial_0, \partial_a, \mathcal{G}_a>$	
19	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a$	$<\partial_0, \partial_a, D - u\partial_u, \mathcal{G}>$	
20	$u_0 = \triangle u + \ln u\lambda_a u_a$	$<\partial_0, \partial_a, G>$	
21	$u_0 = \triangle u+$ $+\ln u\lambda_a u_a \pm u\ln u$	$<\partial_0, \partial_a, H>$	
22	$u_0 = \triangle u \pm 2\ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2 u(\ln^2 u + q)$	$<\partial_0, \partial_a, Y>$	

2.6. Ліївські анзаци, редукція та точні розв'язки рівняння (2.1)

Ліївські симетрії рівняння (2.1) можна використати для побудови інваріантних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків даного рівняння.

Дану задачу розв'яжемо, наприклад, для рівняння пункту 17 з таблиці

2.4

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\tfrac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\tfrac{k+1}{k^2}u^{k+1}, \quad k \neq -1; 0. \tag{2.257}$$

Серед рівнянь (2.1) з ненульовим конвективним доданком це рівняння володіє найширшим класом симетрії. Його максимальна алгебра інваріантності задається наступними операторами

$$< \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D_0,\ Q_1,\ Q_2 > . \tag{2.258}$$

Проведемо редукцію рівняння (2.257) до рівняння з меншою кількістю змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \tag{2.259}$$

Один з анзаців (див., наприклад, [75]) при умові $c_0 = d_0 = d_1 = 0$, отриманий за допомогою оператора (2.259) має вигляд

$$u = e^{-\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0, \omega),\ \omega = \sin x_2 e^{x_1} + me^{2x_1}. \tag{2.260}$$

Даний анзац редукує рівняння (2.257) до диференціального рівняння

$\varphi_0 = (4m\omega + 1)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 4m\varphi^k\varphi_\omega.$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\varphi_0 = \partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega). \tag{2.261}$$

Теорема 2.7. *[39] Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.261) є алгебра*

$$1) < \partial_0,\ \partial_\omega,\ D = 2x_0\partial_0 + \omega\partial_\omega,\ D_0 = kx_0\partial_0 - \varphi\partial_\varphi >, \tag{2.262}$$

якщо $k \neq -\frac{4}{3}$;

$$\begin{aligned} &2) < \partial_0,\ \partial_\omega,\ D_0 = 4x_0\partial_0 + 3\varphi\partial_\varphi,\ D_1 = 2\omega\partial_\omega - 3\varphi\partial_\varphi, \\ &K = \omega^2\partial_\omega - 3\omega\varphi\partial_\varphi >, \end{aligned} \tag{2.263}$$

якщо $k = -\frac{4}{3}$.

Використаємо ліївську симетрію рівняння (2.261) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків (див., [83]).

Наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються у випадку $k \neq -\frac{4}{3}$.

$$\varphi = \psi(y),\ y = \omega + px_0; \tag{2.264}$$

$$\varphi = x_0^{-\frac{1}{k}}\psi(y),\ y = \omega + p\ln x_0; \tag{2.265}$$

$$\varphi = e^{-\frac{2p}{k}x_0}\psi(y),\ y = e^{px_0}\omega; \tag{2.266}$$

$$\varphi = x_0^{-\frac{1+2p}{k}}\psi(y),\ y = x_0^p\omega, \tag{2.267}$$

де p – довільна стала ($p \neq 0$), яка виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище інваріантні анзаци підставити у рівняння (2.261). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y = 0, \tag{2.268}$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y - \tfrac{1}{k}\psi = 0, \tag{2.269}$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \tfrac{2m}{k}\psi = 0, \tag{2.270}$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \tfrac{2m+1}{k}\psi = 0. \tag{2.271}$$

Частинними розв'язками редукованого рівняння (2.268) є функції

$$\psi = (pky + c)^{\frac{1}{k}},\ k \neq 0; \tag{2.272}$$

$$\psi = -\tanh^2\left(\tfrac{p}{2}y + c\right),\ k = -\tfrac{1}{2}; \tag{2.273}$$

$$\psi = \tan^2\left(\tfrac{p}{2}y + c\right),\ k = -\tfrac{1}{2}; \tag{2.274}$$

$$\tanh^{-1}(\psi^{\frac{1}{4}}) + \tan^{-1}(\psi^{\frac{1}{4}}) = -\tfrac{p}{2}y + c,\ k = -\tfrac{3}{4}, \tag{2.275}$$

де c – довільна стала.

Використавши анзац (2.264) та розв'язки (2.272)-(2.275), знаходимо розв'язки рівняння (2.257):

$$u = \left[(c + pk^2x_0)e^{-2x_1} - pke^{-x_1}\sin x_2\right]^{\frac{1}{k}}, k \neq 0; \tag{2.276}$$

$$u = -e^{4x_1}\tanh^2[\tfrac{p}{2}(-e^{-x_1}\sin x_2 + px_0) + c],\ k = -\tfrac{1}{2}; \tag{2.277}$$

$$u = e^{4x_1}\tan^2[\tfrac{p}{2}(-e^{-x_1}\sin x_2 + px_0) + c],\ k = -\tfrac{1}{2}; \tag{2.278}$$

$$\begin{gathered}\tanh^{-1}\left(e^{-\frac{2}{3}x_1}u^{\frac{1}{4}}\right) + \tan^{-1}\left(e^{-\frac{2}{3}x_1}u^{\frac{1}{4}}\right) = \tfrac{p}{2}(e^{-x_1}\sin x_2 - px_0) + c,\\ k = -\tfrac{3}{4}.\end{gathered} \tag{2.279}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння(2.261) при $k = -\frac{4}{3}$ є алгебра (2.263). Не вдаючись у деталі, наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, відмінних від (2.264)-(2.267), які одержуються в результаті

$$\begin{gathered}\varphi = |\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y),\ r \in \{-1, 0, 1\},\\ y = \begin{cases}\tanh^{-1}\omega + px_0,\ r = -1,\\ \frac{1}{\omega} + px_0,\ r = 0,\\ \tan^{-1}\omega + px_0,\ r = 1;\end{cases}\end{gathered} \tag{2.280}$$

$$\begin{gathered}\varphi = x_0^{\frac{3}{4}}|\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y),\ r \in \{-1, 0, 1\},\\ y = \begin{cases}\tanh^{-1}\omega + p\ln x_0,\ r = -1,\\ \frac{1}{\omega} + p\ln x_0,\ r = 0,\\ \tan^{-1}\omega + p\ln x_0,\ r = 1,\end{cases}\end{gathered} \tag{2.281}$$

де p — довільна стала ($p \neq 0$), яка виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ c_2,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (2.261). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + 3r\psi^{-\frac{1}{3}}, \tag{2.282}$$

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + (\tfrac{3}{4}\psi^{\frac{4}{3}} + 3r)\psi^{-\frac{1}{3}}. \tag{2.283}$$

Загальним розв'язком рівняння (2.282) при $r=0$ має вигляд

$$\frac{-3}{\sqrt[3]{c_1\psi}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+c_1\psi}{(1+\sqrt[3]{c_1\psi})^3}-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{2}{\sqrt[3]{c_1\psi}}-1)=(c_1)^{-\frac{4}{3}}p(y+c_2) \quad (2.284)$$

при $c_1\neq 0$, та

$$\psi=(-\tfrac{4}{3}py+c)^{-\frac{3}{4}} \quad (2.285)$$

при $c_1\neq 0$.

Один із розв'язків рівняння (2.283) при $r=-1$ має вигляд

$$\psi=4^{\frac{3}{4}}. \quad (2.286)$$

Використавши формули (2.260), (2.280), (2.281), знаходимо розв'язки рівняння (2.257) при $-\frac{4}{3}$:

$$-3\Phi+\frac{1}{2}\ln\frac{\Phi^3+1}{(\Phi+1)^3}-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2\Phi-1}{\sqrt{3}}=(c_1)^{-\frac{4}{3}}[p(-\frac{1}{e^{-x_1}\sin x_2}+$$
$$+px_0)+c_2],$$

$$\Phi=-\frac{e^{\frac{3}{2}x_1}}{\sqrt[3]{c_1u}\sin x_2},\ c_1\neq 0;$$

$$u=-\left[\tfrac{4}{3}pe^{5x_1}\sin^3 x_2(1+(px_0+c)e^{x_1}\sin x_2)\right]^{-\frac{3}{4}}; \quad (2.287)$$

$$u=(\frac{e^{x_1}\sin^2 x_2-e^{-x_1}}{2\sqrt{x_0}})^{-\frac{3}{2}}.$$

При умові $c_0=d_0=d_2=0$ за допомогою оператора (2.259) отримаємо анзац

$$u=(\sin x_2)^{\frac{2}{k}}\varphi(x_0,\omega),\ \omega=\frac{e^{x_1}+m\cos x_2}{\sin x_2}. \quad (2.288)$$

Він редукує рівняння (2.257)) до диференціального рівняння

$$(m^2+\omega^2)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega)+2\tfrac{k+2}{k^2}[-k\omega\varphi^k\varphi_\omega+\varphi^{k+1}]=\varphi_0. \quad (2.289)$$

Припустивши, що $k=-2$, прийдемо до рівняння

$$(m^2+\omega^2)(\varphi^{-2}\varphi_\omega)_\omega=\varphi_0. \tag{2.290}$$

Розв'язком редукованого рівняння (2.290) (див. [18](6.101) є

$$I(\frac{c_1\sqrt{x_0}}{\varphi\sqrt{\omega^2+m^2}})=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{\omega}{m}+c_2, \tag{2.291}$$

де $I(z)=\int_0^z\frac{d\tau}{\sqrt{c_2-m^2\tau^2-2c_1\ln\tau}}$, c_1,c_2 — довільні сталі.

Використавши анзац (2.288) та розв'язок (2.291), знаходимо розв'язок рівняння (2.257):

$$I(\frac{c_1\sqrt{x_0}}{u\sqrt{e^{2x_1+2me^{x_1}}\cos x_2+m^2}})=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{e^{x_1}+m\cos x_2}{m\sin x_2}+c_2. \tag{2.292}$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (2.261) при умові $k=-2$. Застосуємо до даного рівняння сукупність двох перетворень(див., наприклад, [83], [125]):

$x_0=x_0,\ \omega=\omega,\ \varphi=v_\omega,$

де $v=v(x_0,\ \omega)$ – нова невідома функція,

$x_0=t,\ \omega=w,\ v=x,$

де $t,\ x$ – нові незалежні змінні, $w=w\,(t,\ x)$ – нова залежна змінна.

У результаті одержимо рівняння

$$w_t=w_{xx}. \tag{2.293}$$

Це лінійне рівняння теплопровідності. Відомо безліч його точних розв'язків. Для прикладу розглянемо декілька з них.

$$w=t+\tfrac{1}{2}x^2, \tag{2.294}$$

$$w=tx+\tfrac{1}{6}x^3, \tag{2.295}$$

$$w=c_3e^{m_1^2t+m_1x}+c_4e^{m_2^2t+m_2x}, \tag{2.296}$$

$$w=e^{(p^2-m^2)t+px}[c_3\cos(2mpt+mx)+c_4\sin(2mpt+mx)], \tag{2.297}$$

де m_1,m_2,m,p,c_3,c_4 – довільні сталі.

Використавши розв'язки (2.294)-(2.297), знаходимо розв'язки рівняння (2.257), записані в явному та параметричному вигляді:

$$u = (2\sin\frac{x_2}{2}e^{\frac{x_1}{2}} - \frac{1}{2}x_0e^{x_1})^{-\frac{1}{2}};$$

$$u = \frac{4}{e^{\frac{x_1}{2}}(2\tau^2 + x_0)},$$
$$12\sin\frac{x_2}{2} = e^{\frac{x_1}{2}}(3x_0\tau + 2\tau^3);$$

$$u = \frac{e^{x_1}}{\alpha_\tau(x_0, \tau)},$$
$$e^{x_1}\sin x_2 = \alpha(x_0, \tau);$$

$$u = \frac{e^{(m^2-p^2)x_0 - p\tau + x_1}}{p\beta(x_0, \tau) + \beta_\tau(x_0, \tau)},$$
$$e^{(m^2-p^2)x_0 - p\tau + x_1}\sin x_2 = \beta(x_0, \tau),$$

де $\alpha_\tau(x_0, \tau) = c_1e^{m_1^2x_0 + m_1\tau} + c_2e^{m_2^2x_0 + m_2\tau}$, $\beta(x_0, \tau) = c_1\cos(2mpx_0 + m\tau) + c_2\sin(2mpx_0 + m\tau)$, τ — довільний параметр.

Розглянемо нелінійне рівняння

$$u_0 = \partial_a(uu_a) + \lambda_1 uu_1 + \lambda u(1 - u), \tag{2.298}$$

де λ_1, $\lambda > 0$ – довільні константи. Рівняння (2.298) є узагальненням відомого двовимірного рівняння Фішера для пористих областей [118]

$$u_0 = \triangle u + \lambda u(1 - u). \tag{2.299}$$

У випадку, коли деяка область переповнена населенням, рівняння (2.298) описує швидкість його розсіювання в область більш низької щільності (див., [137] і посилання в ньому).

Також рівняння (2.298) можна розглядати як узагальнення рівняння Мюррея

$$u_0 = \triangle u + \lambda_1 u u_1 + \lambda u(1-u), \tag{2.300}$$

яке описує біологічні процеси, пов'язані з процесами ангіогенезу, заживлення ран, динаміки взаємодії популяцій та ін. Дане рівняння було досліджено в [137, 111, 108] в одновимірному випадку.

Якщо $\lambda_1 = -\lambda = 8$, то рівняння (2.298) є частинним випадком рівняння пункту 27 з таблиці 2.2 при $k=1$. Як вказано в таблиці 2.3 за допомогою перетворень

$$x_0 \to -\tfrac{e^{-8x_0}}{8},\ x_a \to x_a,\ u \to e^{-8x_0}u \tag{2.301}$$

рівняння (2.298) зводиться до рівняння

$$u_t = \partial_a(uu_a) + 8uu_1 + 8u^2. \tag{2.302}$$

Якщо використати знайдені нами розв'язки рівняння (2.257) при $k=1$ та зробити заміну (2.301), то отримаємо наступні розв'язки рівняння (2.298) при $\lambda_1 = -\lambda_2 = 8$:

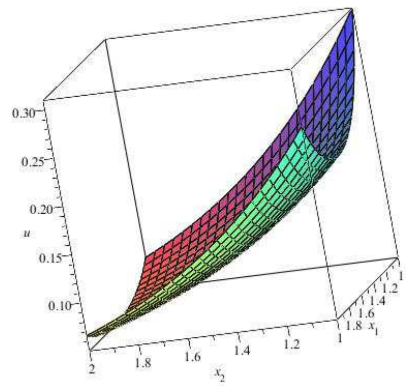
$$u = e^{-2x_1-8x_0}\left[p\sin x_2 e^{x_1} - \tfrac{p^2}{8}e^{-8x_0} + c_2\right]; \tag{2.303}$$

$$u = e^{-2x_1-8x_0}\left[c_1\ln|e^{-2x_1-8x_0}u + c_1| + p\sin x_2 e^{x_1} - \tfrac{p^2}{8}e^{-8x_0} + c_2\right]; \tag{2.304}$$

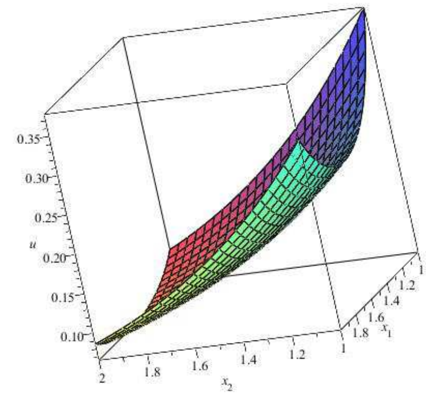
$$u = \tfrac{4}{3}\sin^2 x_2 + c_1 e^{-\frac{16}{3}x_0 - 2x_1}. \tag{2.305}$$

Отримані розв'язки рівняння (2.1) можна вивчити з точки зору можливості їх фізичного застосування. Приведемо це на прикладі розв'язків (2.287), (2.303) та (2.305). Неважко бачити, що при $x_0 \to \infty$ $u \to 0$, $x_1 \to \infty$ $u \to 0$, а при $x_2 \to \infty$ u — обмежене.

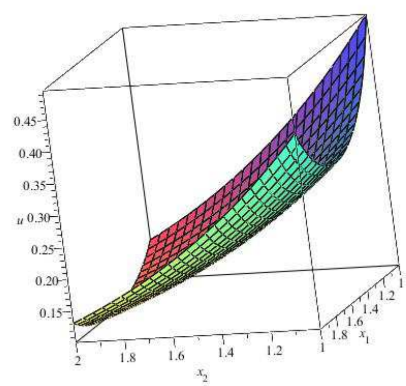
Це дає підстави стверджувати, що дані розв'язки можуть мати фізичне застосування. На рисунках 2.1-2.3 наведені графіки розв'язку (2.287) при наступних значеннях змінної x_0: $x_0 = 0,1$, $x_0 = 0,3$, $x_0 = 0,5$ та обмеженнях $x_1 \in \{1,2\}$, $x_2 \in \{1,2\}$, на рисунках 2.4-2.6 та 2.7-2.9 наведені графіки розв'язків (2.303) та (2.305) при наступних значеннях змінної x_0: $x_0 = 0,01$, $x_0 = 0,1$, $x_0 = 1$ та обмеженнях $x_1 \in [0,10]$, $x_2 \in [0,10]$.



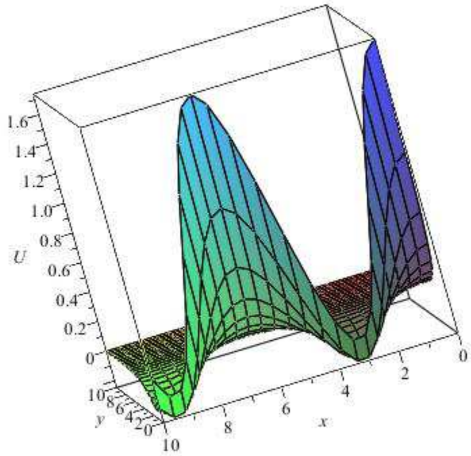
Мал. 2.1: Графік функції $u(x_0 = 0,1)$



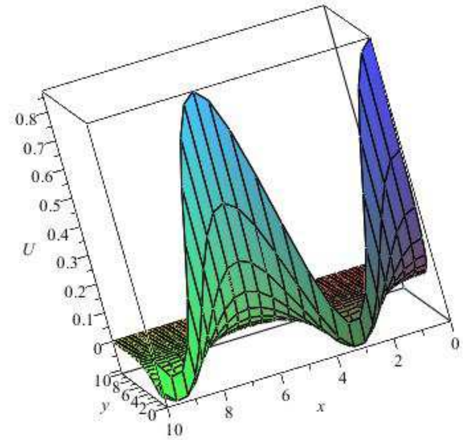
Мал. 2.2: Графік функції $u(x_0 = 0,3)$



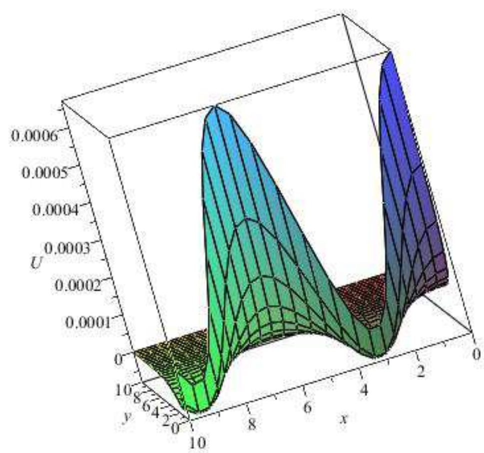
Мал. 2.3: Графік функції $u(x_0 = 0,5)$



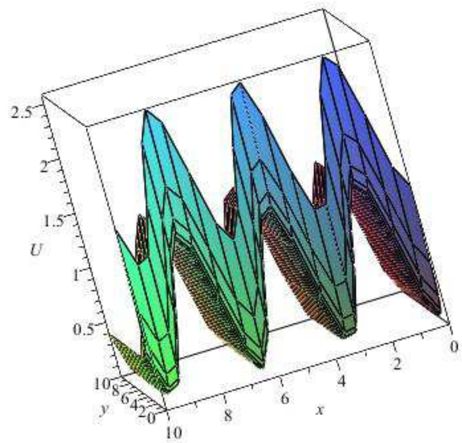
Мал. 2.4: Графік функції $u(x_0 = 0,01)$



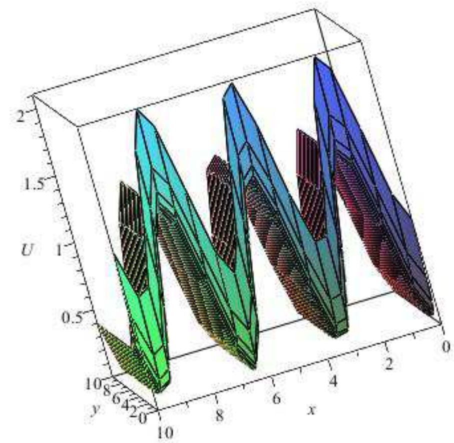
Мал. 2.5: Графік функції $u(x_0 = 0,1)$



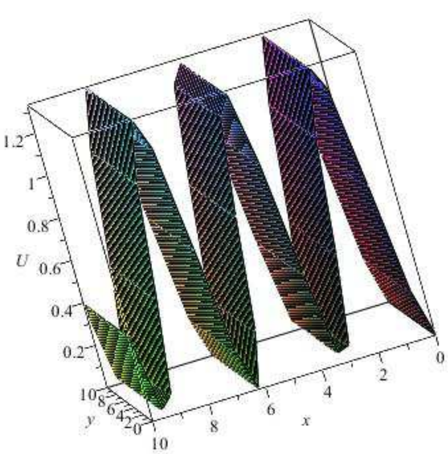
Мал. 2.6: Графік функції $u(x_0 = 1)$



Мал. 2.7: Графік функції $u(x_0 = 0,01)$



Мал. 2.8: Графік функції $u(x_0 = 0,1)$



Мал. 2.9: Графік функції $u(x_0 = 1)$

2.7. Висновки до розділу 2

У даному розділі проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії з точністю до перетворень еквівалентності даного рівняння. Основні результати, отримані в даному розділі, наступні:

1. Встановлено основну алгебру інваріантності.
2. Досліджено групу неперервних перетворень еквівалентності.
3. Встановлено додаткові перетворення еквівалентності.
4. З'ясовано необхідні та достатні умови розширення основної алгебри інваріантності.
5. Наведено повну групову класифікацію з точністю до перетворень еквівалентності.
6. Побудовано точні розв'язки рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями.

РОЗДІЛ 3

Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії

Вирішуючи фундаментальні проблеми з різних сфер діяльності, науковці часто зустрічаються з проблемою побудови математичних моделей процесів, що досліджуються, і вибору рівнянь чи систем, які б найточніше описували цей процес. У багатьох випадках те чи інше фізичне явище вдається змоделювати цілком визначеним диференціальним рівнянням чи системою диференціальних рівнянь. Найпростіші формулювання законів природи приводять до лінійних задач математичної фізики, але часто такі моделі неточні та не дають задовільного результату, адже багатьом реальним процесам відповідають саме нелінійні математичні моделі. І тоді виникає проблема обмеженості наявного математичного апарату для розв'язування отриманих диференціальних рівнянь чи систем. Та якщо нелінійне диференціальне рівняння (чи система рівнянь), що описує певний процес, має нетривіальні симетрійні властивості, то тут дослідники можуть застосовувати методи теорії груп і алгебр Лі.

Згідно методом Лі диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліївською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок (анзаців). Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними. Але кількість розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо рівняння має бідну ліївську симетрію або не має її взагалі, то застосування цього методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату. Це стало передумовою для пошуку в рамках групового аналізу диференціальних рівнянь інших методів побудови нових розв'язків таких рівнянь.

Одним із таких методів став метод, який використовує нелокальні перетворення, що були застосовані в геометричних дослідженнях Л. Біанчі та М. Рібокуром, вивчені та узагальнені Ф.В. Беклундом. Перетворення є особливим випадком скінченних нелокальних перетворень залежних і незалежних змінних.

Під *нелокальними перетвореннями* розумітимемо перетворення незалежних x^i та залежних змінних u^i вигляду

$$y_i = h_i(x, U, U_{(k)}), \quad v^j = g^j(x, U, U_{(k)}),$$

де

$$x \in R^n, \quad U \in R^m, \quad U_{(k)} = \underset{1}{U}, ..., \underset{k}{U},$$

$\underset{l}{U}$ – сукупність всеможливих похідних порядку l функції U за змінними x, дія яких перетворює рівняння

$$F(x, U, U_{(p)}) = 0$$

в інше рівняння

$$\Phi(y, V, V_{(q)}) = 0.$$

Скінченні нелокальні перетворення змінних породжують *нелокальні симетрії* диференціальних рівнянь, що є корисним для створення нових алгоритмів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Частинним випадком нелокальних симетрій є потенціальні симетрії. Згідно з [98] потенціальною симетрією даного диференціального рівняння є точкова симетрія відповідної йому потенціальної системи, яка не проектується в точкову симетрію цього рівняння.

Поняття потенціальної симетрії було запропоновано Дж.В. Блуменом [99], [102]. Поняття перетворень потенціальної еквівалентності ввів Я. Лісл [133] .

Низку сучасних робіт присвячено дослідженню потенціальних симетрій широкого класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, серед яких відзначимо наступні [103], [151], [155].

Неперервною нелокальною групою симетрій S називають (див. [133]) будь-яку симетрію групу симетрій, яка не зв'язана з інфінітезимальним оператором локального типу.

В Україні серед перших робіт, присвячених дослідженням у напрямку нелокальних симетрій відмітимо роботи [74], [119], [122], [164]. У праці [74] вказано спосіб побудови додаткових (нелокальних) анзаців для нелінійного рівняння теплопровідності, які неможливо отримати в рамках класичного алгоритму Лі.

Важливі результати застосування нелокальних симетрій до побудови неліївських розв'язків нелінійних рівнянь теплопровідності, рівнянь реакції-дифузії та дифузії-конвекції отримані в роботах В.А. Тичиніна та його учнів [165]-[167].

У даному розділі знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x, \tag{3.1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $K(U) = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\,(t,\ x)$, t – часова змінна, x – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\,(U)$, $k^{ab} = k^{ab}\,(U)$ – коефіцієнти дифузії та конвекції відповідно, $a, b = \overline{1,2}$. Отримані перетворення використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків даної системи.

3.1. Нелокальні перетворення еквівалентності

Нехай матриця $K(U)$ така, що її компоненти задовольняють умову

$$k^{11}_{u^2} = k^{12}_{u^1}, \quad k^{21}_{u^2} = k^{22}_{u^1}. \tag{3.2}$$

Тоді існують такі функції g^1 та g^2, що система (3.1) набуде вигляду

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{3.3}$$

де $G(U) = \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix}$.

Розглянемо сукупність трьох перетворень (див. [54], [53]):

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{3.4}$$

де $v^a = v^a(t,\ x)$ — нові невідомі функції,

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{3.5}$$

де $x_0, \quad x_1$ — нові незалежні змінні, $\quad w^a = w^a\left(x_0,\ x_1\right)$ — нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^a_1 = z^a, \tag{3.6}$$

$z^a = z^a\left(x_0,\ x_1\right)$ — нові залежні змінні.

Теорема 3.1. *Перетворення (3.4)-(3.6) є перетвореннями еквівалентності системи (3.3).*

Доведення. Застосуємо до системи (3.3) нелокальну заміну вигляду (3.4). Підставивши (3.4) в (3.3) і проінтегрувавши одержану систему за змінною x, будемо мати

$$V_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \tag{3.7}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (3.7) застосувати перетворення годографа (3.5), то дана система зведеться до вигляду

$$
\begin{aligned}
&w_0^1 = \tfrac{1}{(w_1^1)^2}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2] - w_1^2 g^1,\\
&w_0^2 = \tfrac{1}{(w_1^1)^3}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_1^2 - (f^{12} + w_1^2 f^{22}]w_{11}^1 +\\
&+\tfrac{1}{(w_1^1)^2}(f^{22} + w_1^2 f^{12})w_{11}^2 - w_1^2 g^1 + g^2,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

де $w_\mu^a = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}, \quad w_{11}^a = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}, \quad \mu = \overline{0,1}$, причому у формулах (3.8) $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}), \quad g^a = g^a(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}), \quad a, b = \overline{1,2}$.

Продиференціювавши систему (3.8) за змінною x_1 та подіявши перетвореннями (3.6), одержимо наступну систему

$$
Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{3.9}
$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z), \quad \Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \psi^a = \psi^a(Z), \quad \mu = \overline{0,1}$. Функції $\varphi^{ab}, \quad \psi^a$ пов'язані з функціями $f^{ab}, \quad g^a$ наступними співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{11} = (z^1)^{-2}(f^{11} + z^2 f^{12}), \varphi^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12},\\
&\varphi^{12} = (z^1)^{-3}[(f^{11} + z^2 f^{12})z^2 - (f^{21} + z^2 f^{22})],\\
&\varphi^{22} = (z^1)^{-2}(f^{22} + z^2 f^{12}), \psi^1 = -z^1 g^1, \psi^2 = -z^2 g^1 + g^2,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}), \quad g^a = g^a(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок замін (3.4)-(3.6) зводить систему (3.3) до системи рівнянь того ж класу вигляду (3.9). Не важко переконатися, що система (3.9) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (3.3).

Теорема 3.1 доведена.

Оскільки система (3.3) містить дві функції u^1 і u^2, то перетворення годографа вигляду (3.5) не єдино можливе для цієї системи. Так, якщо в

(3.5) замінити $v^1 \to v^2, \quad v^2 \to v^1, \quad w^1 \to w^2, \quad w^2 \to w^1$, то замість (3.5) одержимо

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1. \tag{3.11}$$

Теорема 3.2. *Перетворення (3.4), (3.11), (3.6) є перетвореннями еквівалентності системи (3.3).*

Доведення. Провівши міркування, аналогічні до тих, що наведені в доведенні теореми 3.1, приходимо до висновку, що ланцюжок замін (3.4),(3.11), (3.6) також зводить систему (3.3) до системи рівнянь того ж класу (3.9) і, навпаки, система (3.9) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (3.3), причому функції $\varphi^{ab}, \quad \psi^a$ пов'язані з функціями $f^{ab}, \quad g^a$ наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{11} = (z^2)^{-2}(f^{11} - z^1 f^{21}),\\
&\varphi^{12} = (z^2)^{-3}[-(z^1 f^{11} + f^{12}) + z^1(z^1 f^{21} + f^{22})],\\
&\varphi^{21} = -(z^2)^{-1} f^{21}, \varphi^{22} = (z^2)^{-2}(z^1 f^{21} + f^{22}),\\
&\psi^1 = g^1 - z^1 g^2, \psi^2 = -z^2 g^2,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{z^1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^2}), \quad \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(z^1, z^2), \quad g^a = g^a(\frac{z^1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^2}), \quad \psi^a = \psi^a(Z)$.

Теорема 3.2 доведена.

Перетворення (3.4)-(3.6) назвемо перетворення першого типу для системи (3.3) і позначимо їх P_1, а перетворення (3.4), (3.11), (3.6) — перетвореннями другого типу і позначимо їх P_2.

Зауваження 3.1. Для всього класу рівнянь (3.3) перетворення P_1 та P_2 є еквівалентними, але для конкретної системи вигляду (3.3) ці перетворення дають різні результати. Проілюструємо цей факт на конкретному прикладі.

3.2. Система рівнянь Ван-дер-Ваальса та її нелокальні образи. Симетрії Лі

Розглянемо систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1 u_x^1 + \mu u^2 u_x^2, \\ u_t^2 &= \lambda_2 u_{xx}^2 - u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де $x = (x_0,\ x_1)$, $u^a = u^a(x)$, λ_1 — коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 — коефіцієнт дифузії, μ — коефіцієнт конвекції, $a \in \{1, 2\}$, яка широко використовується у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин (див. наприклад, [124]). Ця система входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії. Її коефіцієнти задовольняють умову (3.2) і вона може бути зведена до вигляду (3.3).

Якщо до системи (3.13) застосувати перетворення P_1, то одержимо систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{(z^1)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2(z^1)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu (z^1)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu (z^2)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \right], \tag{3.14}$$

яку назвемо першим образом системи (3.13) і позначимо O_1.

Якщо до системи (3.13) застосувати перетворення P_2, то одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{(z^2)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^2 & (\lambda_2 - \lambda_1) z^1 \\ 0 & \lambda_2 z^2 \end{pmatrix} Z_1 + \frac{1}{2(z^2)^2} \begin{pmatrix} (z^1)^2 + \mu \\ 2 z^1 z^2 \end{pmatrix} \right], \tag{3.15}$$

яку назвемо другим образом системи (3.13) і позначимо O_2.

У роботі [158] встановлено, що система (3.13) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$AG_2(1,1) =< \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - I,\ \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI + x\partial_{u^1} >$,
де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1},\ \partial_{u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2},\ I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Якщо ж провести повний аналіз її симетричних властивостей, то одержимо наступне твердження.

Теорема 3.3. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (3.13) в залежності від співвідношень між сталими* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu$ *є наступні алгебри*

1) $AG_2(1,1),$ *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu \neq 0;$

2)$< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2} >$, *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu = 0;$

3)$< AG_2(1,1), u^1\partial_{u^1} >$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu \neq 0;$

4)$< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^1},\ u^2\partial_{u^2} >$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0.$

Доведення. Симетрію системи (3.13) будемо досліджувати методом Лі (див., наприклад, [145], [148]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності знаходимо у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,U)\partial_\mu + \eta^a(x,U)\partial_{u^a}, \tag{3.16}$$

де ξ^μ, η^a — шукані функції, $\mu = \overline{0,1}$.

З умови інваріантності системи (3.13) відносно оператора (3.16), одержимо систему визначальних рівнянь для координат ξ^μ та η^a оператора (3.16):

$$\begin{aligned}
&\xi^0_1 = \xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \quad \xi^0_t = 2\xi^1_x,\\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^1_{u^2} = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_{u^1} = 0,\\
&\eta^1 = -\xi^1_1 u^1 - \xi^1_0 - \lambda_1\eta^1_{xu^1} - \lambda_2\eta^2_{xu^2},\\
&\eta^2 = (\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} - \xi^1_1)u^2 - 2\lambda_2\eta^2_{xu^1},\\
&\eta^2_x u^1 + \eta^1_x u^2 + \lambda_2\eta^2_{xx} - \eta^2_t = 0,\\
&\mu\eta^2_x u^2 + \eta^1_x u^1 + \lambda_1\eta^1_{xx} - \eta^1_t = 0,\\
&\mu\eta^2_{u^1}u^2 - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\eta^1_{u^2}u^2 + \lambda_1\eta^1_{xu^1} - \lambda_2\eta^2_{xu^2} = 0,\\
&\mu\eta^2 + \mu(\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} + \xi^1_1)u^2 + 2\lambda_1\eta^1_{xu^2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Розв'язком системи (3.17) будуть функції

1)$\xi^0 = c_1x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = (c_1x_0 + \kappa)x_1 + gx_0 + d_1,\ \eta^1 = -(c_1x_0 + \kappa)x_1u^1 - x_1 - g,\ \eta^2 = (c_1x_0 + \kappa)x_1u^2$, якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu \neq 0;$

2)$\xi^0 = c_1x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = (c_1x_0 + \kappa)x_1 + gx_0 + d_1,\ \eta^1 = -(c_1x_0 + \kappa)x_1u^1 - x_1 - g,\ \eta^2 = (c_1x_0 + \kappa + c_2)x_1u^2,$ якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu = 0;$

3)$\xi^0 = c_1x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = (c_1x_0 + \kappa)x_1 + gx_0 + d_1,\ \eta^1 = -(c_1x_0 + \kappa + c_2)x_1u^1 - x_1 - g,\ \eta^2 = (c_1x_0 + \kappa)x_1u^2,$ якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu \neq 0;$

4)$\xi^0 = c_1x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = (c_1x_0 + \kappa)x_1 + gx_0 + d_1,\ \eta^1 = -(c_1x_0 + \kappa)x_1u^1 + c_2u^2 - x_1 - g,\ \eta^2 = (c_1x_0 + \kappa + c_3)x_1u^2,$ якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0.$

Для кожного з випадків стандартним чином одержуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорема 3.3 доведена.

Дослідимо лiївську симетрію образів (3.14) та (3.15). Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.4. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (3.14) є алгебра*

1) $A^{bas} =< \partial_0,\ \partial_1,\quad D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} >,$ *якщо* $\mu \neq 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$

2)$A =< A^{bas},\quad z^2\partial_{z^2} >,$ *якщо* $\mu = 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$

3)$A =< A^{bas},\quad z^2\partial_{z^2},\quad e^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2} >,$ *якщо* $\mu = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_{z^1} = \frac{\partial}{\partial z^1},\quad \partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}.$

Доведення. Застосувавши до системи (3.14) метод С.Лі, отримаємо систему визначальних рівнянь для координат ξ^μ та η^μ інфінітезимального оператора (3.16), яка має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\xi^0_1 = \xi^1_0 = \xi^0_{z^a} = \xi^1_{z^a} = \eta^a_{z^bz^c},\\
&\alpha^{12} = \beta^1 = \mu\eta^2 = \mu\eta^2_0 = \alpha^{11}_0 = \alpha^{22}_1 = 0,\\
&2\alpha^{11} = \xi^1_1 - \xi^0_0, (\lambda_2 - \lambda_1)\beta^2 = 0,\\
&\beta^2 = 2\lambda_2\beta^2_1, 2\lambda_2\alpha^{21}_{11} = \alpha^{21}_1,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

де $\eta^a = \alpha^{ab}z^b + \beta^a$.

Загальний розв'язок системи (3.18) залежить від значень сталих $\mu,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2$. Можливі наступні нееквівалентні випадки:

1)$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0, \xi^1 = d_1, \eta^1 = \kappa z^1, \eta^2 = 0,$ якщо $\mu \neq 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$

2)$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0, \xi^1 = d_1, \eta^1 = \kappa z^1, \eta^2 = c_1 z^2$, якщо $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

3)$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0, \xi^1 = d_1, \eta^1 = \kappa z^1, \eta^2 = c_1 z^2 + c_2 e^{\frac{x_1}{2}}$, якщо $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Для кожного з випадків отримуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорема 3.4 доведена.

Теорема 3.5. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (3.15) є алгебра*

1) $A^{bas} =< \partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}, \quad Q = z^2\partial_{z^1} >,$ *якщо* $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

2)$A =< A^{bas}, \quad D_2 = x_1\partial_1 - I >,$ *якщо* $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

3)$A =< A^{bas}, \quad D_2 = x_1\partial_1 - I, \quad K = x_1^2\partial_1 - 2x_1 I + 2\partial_{z^1} >,$ *якщо* $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

4)$A =< A^{bas}, \quad Q_1 = e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - I), \quad Q_2 = e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + I) >,$ *якщо* $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

5)$A =< A^{bas}, \quad Q_1 = \cos x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + \sin x_1 I, \quad Q_2 = \sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) - \cos x_1 I >,$ *якщо* $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_{z^1} = \frac{\partial}{\partial z^1}, \quad \partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}, \quad I = z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}.$

Доведення. Результатом застосування до системи (3.15) алгоритму С. Лі є наступна систему визначальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\xi_0^1 = \alpha^{21} = \alpha_0^{11} = \alpha_0^{12} = \alpha_0^{22} = \alpha_1^{12} = \beta^2 = \beta_0^1 = 0,\\
&\alpha^{11} = -\xi_1^1,\\
&\alpha^{22} = \tfrac{1}{2}\xi_0^0 - \xi_1^1,\\
&(\lambda_2 - \lambda_1)\beta^1 = 0,\\
&\beta^1 = \lambda_2\xi_{11}^1;\\
&(\lambda_2 - 3\lambda_1)\lambda_2\xi_{111}^1 - 2\mu\xi_1^1 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Розв'язавши систему (3.19) в залежності від значень сталих $\mu, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2$, отримаємо:

1)$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \xi^1 = d_1, \eta^1 = c_4 z^2, \eta^2 = c_1 z^2$, якщо $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$;

2)$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \xi^1 = c_3x_1 + d_1, \eta^1 = -c_3z^1 + c_4z^2, \eta^2 = (c_1 - c_3)z^2$, якщо $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$;

3)$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \xi^1 = c_2x_1^2 + c_3x_1 + d_1, \eta^1 = -(2c_2x_1 + c_3)z^1 + c_4z^2 + 2c_2, \eta^2 = [c_1 - (2c_2x_1 + c_3)]z^2$, якщо $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

4)$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \xi^1 = c_2e^{x_1} + c_3e^{-x_1} + d_1, \eta^1 = -(c_2e^{x_1} - c_3e^{-x_1})z^1 + c_4z^2 - c_2e^{x_1} - c_3e^{-x_1}, \eta^2 = [c_1 - (c_2e^{x_1} - c_3e^{-x_1})]z^2$, якщо $\mu = -1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

5)$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \xi^1 = c_2 \cos x_1 + c_3 \sin x_1 + d_1, \eta^1 = (c_2 \sin x_1 - c_3 \cos x_1)z^1 + c_4z^2 - c_2 \cos x_1 - c_3 \sin x_1, \eta^2 = (c_1 + c_2 \sin x_1 - c_3 \cos x_1)z^2$, якщо $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Для кожного з випадків одержуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорема 3.5 доведена.

3.3. Ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та її нелокальних образів

Використаємо ліївську симетрію систем (3.13), (3.14) та (3.15) для побудови інваріантних анзаців.

Розв'язок цих систем будемо шукати у вигляді (див. [54], [83], [148])

$$J_a = \varphi^a(\omega), \quad a = \overline{1,2}, \tag{3.20}$$

де $\varphi^a = \varphi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega, \quad J_1, \quad J_2$ — перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau. \tag{3.21}$$

3.31.. Ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса Із теореми 3.3 випливає, що у випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$ МАІ системи (3.13) є узагальнена алгебра Галілея $A^{bas} =< \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - I,\ \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI + x\partial_{u^1} >$.

Координати інфінітезимального оператора даної алгебри задаються формулами

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1, \\
\xi^1 &= (c_5 t + c_4)x + c_3 t + c_2, \\
\eta^1 &= -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3, \\
\eta^2 &= -(c_5 t + c_4)u^2,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

де $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$ — групові параметри.

Система (3.21) має вигляд

$\frac{dt}{c_5t^2+2c_4t+c_1} = \frac{dx}{(c_5t+c_4)x+c_3t+c_2} = \frac{du^1}{-(c_5t+c_4)u^1+c_5x+c_3} = \frac{du^2}{-(c_5t+c_4)u^2} = d\tau,$

або

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1, \\
\dot{x} &= (c_5 t + c_4)x + c_3 t + c_2, \\
\dot{u}^1 &= -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3, \\
\dot{u}^2 &= -(c_5 t + c_4)u^2,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

де крапка означає диференціювання за змінною τ.

Перед тим, як розв'язати систему рівнянь (3.23), приведемо її до більш простого вигляду за допомогою перетворень, які породжуються алгеброю $AG_2(1,1)$:

$$\begin{aligned}
t' &= e^{2\theta_4}\tfrac{t}{1-\theta_5 t} + \theta_1, \\
x' &= e^{\theta_4}\tfrac{x}{1-\theta_5 t} + \theta_3 e^{2\theta_4}\tfrac{t}{1-\theta_5 t} + \theta_2, \\
u^{1'} &= e^{-\theta_4}[(1-\theta_5 t)u^1 + \theta_5 x], \\
u^{2'} &= e^{-\theta_4}(1-\theta_5 t)u^2,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

де θ_i — довільні сталі.

Лема 3.1. *Перетворення (3.24) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (3.23).*

Доведення. Підставивши перетворення (3.24) в систему (3.23), записану в системі координат $(t', x', u^{1'}, u^{2'})$, одержимо

$$
\begin{aligned}
&\dot{t} = C_5 t^2 + 2C_4 t + C_1,\\
&\dot{x} = (C_5 t + C_4)x + C_3 t + C_2,\\
&\dot{u^1} = -(C_5 t + C_4)u^1 + C_5 x + C_3,\\
&\dot{u^2} = -(C_5 t + C_4)u^2.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

де $C_1, ...C_5$ виражаються через $c_1, ...c_5$ та $\theta_1, ...\theta_5$ наступними співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&C_1 = (c_5\theta_1^2 + 2c_4\theta_1 + c_1)e^{-2\theta_4},\\
&C_2 = -\theta_3 C_1 + (c_5\theta_1\theta_2 + c_4\theta_2 + c_3\theta_1 + c_2)e^{-\theta_4},\\
&C_3 = \theta_3\theta_4 C_1 + (c_5\theta_2 + c_3)e^{\theta_4} - \theta_3(c_5\theta_1 + c_4) -\\
&-\theta_5(c_5\theta_1\theta_2 + c_4\theta_2 + c_3\theta_1 + c_2)e^{-\theta_4},\\
&C_4 = -\theta_5 C_1 + c_5\theta_1 + c_4,\\
&C_5 = \theta_5^2 C_1 - 2\theta_5(c_5\theta_1 + c_4) + c_5 e^{2\theta_4}.
\end{aligned}
$$

Цей факт і доводить твердження леми 3.1.

Лема доведена.

Проаналізуємо, чи можна вибрати параметри θ_i таким чином, щоб занулити деякі сталі C_i. Елементарними перетвореннями сталі C_1 та C_5 зводяться до вигляду

$$
\begin{aligned}
&C_1 = c_5 e^{-2\theta_4}[(\theta_1 + \tfrac{c_4}{c_5})^2 + \tfrac{1}{c_5^2}(c_1c_5 - c_4^2)],\\
&C_5 = c_5 e^{-2\theta_4}[(e^{2\theta_4} + \theta_5(\theta_1 + \tfrac{c_4}{c_5}))^2 + \tfrac{\theta_5}{c_5}(c_1c_5 - c_4^2)].
\end{aligned}
$$

У випадку, коли $c_1c_5 - c_4^2 > 0$ неможливо вибрати параметри θ_i так, щоб занулити сталі C_1 та C_5. Легко переконатися, що в цьому випадку параметри θ_i можна вибрати так, щоб $C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad C_1 = C_5 = 1$.

У випадку, коли $c_1c_5 - c_4^2 \leq 0$ параметри θ_i можна вибрати так, щоб $C_5 = 0$. Розглянемо ці випадки окремо.

У першому випадку систему (3.23) запишемо так

$$
\begin{aligned}
&\dot{t} = t^2 + 1,\\
&\dot{x} = tx,\\
&\dot{u^1} = tu^1,
\end{aligned}
$$

$\dot{u^2} = tu^2.$

Розв'язавши цю систему, одержимо вигляд інваріантного анзацу

$$\begin{aligned} &u^1 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + t\omega), \quad u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \\ &\omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x. \end{aligned} \tag{3.26}$$

У другому випадку для побудови інваріантних анзаців системи (3.13) необхідно проінтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{t} = 2c_4 t + c_1, \\ &\dot{x} = c_4 x + c_3 t + c_2, \\ &\dot{u^1} = -c_4 u^1 + c_3, \\ &\dot{u^2} = -c_4 u^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Щоб полегшити інтегрування системи, зведемо її до більш простого вигляду. Це можна зробити, якщо подіяти на неї перетвореннями, які породжуються розширеною алгеброю Галілея $AG_1(1,1)$:

$$\begin{aligned} &t' = e^{2\theta_4}t + \theta_1, \\ &x' = e^{\theta_4}x + \theta_3 e^{2\theta_4}t + \theta_2, \\ &u^{1'} = e^{-\theta_4}u^1 + \theta_3, \\ &u^{2'} = e^{-\theta_4}u^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Застосувавши перетворення (3.28) до системи (3.27), зводимо її до вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{t} = 2C_4 t + C_1, \\ &\dot{x} = C_4 x + C_3 t + C_2, \\ &\dot{u^1} = -C_4 u^1 + C_3, \\ &\dot{u^2} = -C_4 u^2, \end{aligned} \tag{3.29}$$

де

$$\begin{aligned} &C_1 = (2c_4\theta_1 + c_1)e^{-2\theta_4}, \\ &C_2 = (c_4\theta_2 + c_3\theta_1 - 2c_4\theta_1\theta_3 - c_1\theta_3 + c_2)e^{-2\theta_4}, \\ &C_3 = (-c_4\theta_3 + c_3)e^{\theta_4}, \\ &C_4 = c_4. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Проаналізувавши можливість вибору параметрів θ_i таким чином, щоб занулити деякі зі сталих (3.30), приходимо до наступних нееквівалентних випадків

2.1) $C_4 = 1,\ C_1 = C_2 = C_3 = 0$;

2.2) $C_4 = C_2 = 0,\ C_3 = 1,\ C_1 - \forall$;

2.3) $C_4 = C_3 = 0,\ C_1,\ C_2 - \forall$.

Розв'язавши систему (3.27) для кожного з указаних вище випадків, знаходимо відповідні анзаци

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.31}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2; \tag{3.32}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx, \tag{3.33}$$

де k і m – довільні сталі.

Побудуємо ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса для інших значення параметрів $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu$. Маємо наступні інваріантні анзаци: для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{gathered} u^1 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + t\omega), \quad u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}e^{n\arctan t}\psi^2(\omega), \\ \omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x; \end{gathered} \tag{3.34}$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^n\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \tag{3.35}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2; \tag{3.36}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx; \tag{3.37}$$

для випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered} u^1 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + n\arctan t\psi^2 + t\omega), \\ u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x; \end{gathered} \tag{3.38}$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + n\ln t\psi^2(\omega)), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \tag{3.39}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) + nt\psi^2(\omega) - 2kt, \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2; \tag{3.40}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) + nt\psi^2(\omega), \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx; \tag{3.41}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} u^1 &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + pe^{n\arctan t}\psi^2 + t\omega), \\ u^2 &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}e^{n\arctan t}\psi^2(\omega), \quad \omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x; \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + pt^{n+\frac{1}{2}}\psi^2(\omega)), \quad u^2 = t^n\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \tag{3.43}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) + pe^{nt}\psi^2(\omega) - 2kt, \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2; \tag{3.44}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) + pe^{nt}\psi^2(\omega), \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx. \tag{3.45}$$

3.32.. Ліївські анзаци першого образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса Використаємо ліївську симетрію системи (3.14) для побудови її інваріантних анзаців.

Система (3.21) має вигляд:

для випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_2} = \tfrac{dz^1}{c_1z^1} = \tfrac{dz^2}{0} = d\tau, \tag{3.46}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_2} = \tfrac{dz^1}{c_3z^1} = \tfrac{dz^2}{c_4z^2} = d\tau, \tag{3.47}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_2} = \tfrac{dz^1}{c_3z^1} = \tfrac{dz^2}{c_4z^2+c_5e^{\frac{x_1}{2}}}. \tag{3.48}$$

Розв'язавши системи (3.46)-(3.48) для кожного з указаних вище випадків, знаходимо відповідні анзаци

для випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0; \tag{3.49}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0; \tag{3.50}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0; \tag{3.51}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0; \tag{3.52}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0; \tag{3.53}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0; \tag{3.54}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2mx_0; \tag{3.55}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2m\ln x_0. \tag{3.56}$$

3.33.. Ліївські анзаци другого образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса Використаємо ліївську симетрію системи (3.15) для побудови її інваріантних анзаців. Система (3.21) має вигляд

для випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_2} = \tfrac{dz^1}{c_4z^1} = \tfrac{dz^2}{c_3z^2} = d\tau; \tag{3.57}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_5x_1+c_2} = \tfrac{dz^1}{-c_5z^1+c_4z^2} = \tfrac{dz^2}{-(c_5-c_3)z^2} = d\tau; \tag{3.58}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_6x_1^2+c_5x_1+c_2} = \tfrac{dz^1}{-2c_6x_1(z^1+1)-c_5z^1+c_4z^2} = \tfrac{dz^2}{-(2c_6x_1+c_5-c_3)z^2} = d\tau; \tag{3.59}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered}\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_6e^{-x_1}+c_5e^{x_1}+c_2} = \tfrac{dz^1}{c_6e^{-x_1}(z^1+1)-c_5e^{x_1}(z^1-1)+c_4z^2} = \\ = \tfrac{dz^2}{(c_6e^{-x_1}-c_5e^{x_1}+c_3)z^2} = d\tau;\end{gathered} \tag{3.60}$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered}\tfrac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \tfrac{dx_1}{c_6\sin x_1+c_5\cos x_1+c_2} = \tfrac{dz^1}{-c_6(\cos x_1z^1+\sin x_1)+c_5(\sin x_1z^1-\cos x_1)+c_4z^2} = \\ = \tfrac{dz^2}{-(c_6\cos x_1-c_5\sin x_1-c_3)z^2} = d\tau,\end{gathered} \tag{3.61}$$

де $c_1, ...c_6$ — групові параметри.

Розв'язавши системи (3.57)-(3.61) в залежності від значень c_i, знаходимо відповідні нееквівалентні анзаци для системи рівнянь (3.15).

При $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega) + kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0; \tag{3.62}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0. \tag{3.63}$$

При $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k\ln x_0; \tag{3.64}$$

$$z^1 = x_0^k\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{k-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^k; \tag{3.65}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega) + m\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0; \tag{3.66}$$

$$z^1 = [\psi^1(\omega) + mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = e^{kx_0}x_1. \tag{3.67}$$

При $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \tfrac{\psi^1(\omega)+2x_1}{x_1^2+1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\tfrac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1}, \quad \omega = \ln x_0 + m\arctan x_1; \tag{3.68}$$

$$z^1 = \tfrac{\psi^1(\omega)+2x_1}{x_1^2+1}, \quad z^2 = \tfrac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1}, \quad \omega = x_0 + m\arctan x_1. \tag{3.69}$$

При $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \tfrac{\psi^1(\omega)+\sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \tfrac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 + k\arctan me^{x_1}; \tag{3.70}$$

$$z^1 = \tfrac{\psi^1(\omega)+\sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \tfrac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 - k\arctan ne^{x_1}; \tag{3.71}$$

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + le^{x_1}; \tag{3.72}$$

$$z^1 = \tfrac{\psi^1(\omega)+\sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\tfrac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = \ln x_0 + k\arctan me^{x_1}; \tag{3.73}$$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega)+\sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = \ln x_0 - k \arctan ne^{x_1}; \tag{3.74}$$

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = \sqrt{x_0}e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + le^{x_1}, \tag{3.75}$$

де $\sigma = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$.

При $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega)+\cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = x_0 + \ln ctg\frac{x_1}{2}; \tag{3.76}$$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega)+\cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = \ln x_0 + \ln ctg\frac{x_1}{2}, \tag{3.77}$$

де $k, \ l, \ m$ — довільні сталі.

3.4. Нелокальні анзаци та редукція системи рівнянь Ван-дер-Ваальса

Для відшукання нелокальних анзаців системи (3.13) подіємо нелокальними перетвореннями P_1 або P_2 на знайдені ліївські анзаци систем (3.14) та (3.15).

3.41.. Нелокальні анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, одержані з першого образу Розглянемо спочатку анзаци системи (3.14).

1)Випадок $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (3.49)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Подіявши спочатку на (3.49) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - mt, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.78}$$

Продиференціювавши анзац (3.78) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega), \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.79}$$

Отже, маємо, що анзац (3.49) під дією перетворень (3.4)-(3.6) переходить у ліївський анзац (3.33) при $k = 0, \quad m = 1$.

Розглянемо анзац (3.50)

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0.$$

Подіявши спочатку на (3.50) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \sqrt{x_0}\Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \sqrt{t}\Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - m\ln t, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.80}$$

Продиференціювавши анзац (3.80) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.81}$$

У результаті маємо, що анзац (3.50) під дією перетворень (3.4)-(3.6) переходить у ліївський анзац (3.31).

2) Випадок $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (3.51)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Подіявши спочатку на (3.51) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = e^{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = e^t\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - mt, \quad w^2 = e^t\Psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.82}$$

Продиференціювавши анзац (3.82) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^t\varphi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.83}$$

Отже, маємо, що анзац (3.51) під дією перетворень (3.4)-(3.6) переходить у ліївський анзац (3.36) при $k = 0, \quad n = 1$.

Розглянемо анзац (3.52)

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0.$$

Подіявши спочатку на (3.52) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \sqrt{x_0}\Psi^1(\omega), \quad v^2 = x_0\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \sqrt{t}\Psi^1(\omega), \quad w^2 = t\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - m\ln t, \quad w^2 = t\Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.84}$$

Продиференціювавши анзац (3.84) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t\varphi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.85}$$

У результаті маємо, що анзац (3.52) під дією перетворень (3.4)-(3.6) переходить у ліївський анзац (3.35) при $n = 1$.

3) Випадок $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Анзаци (3.53) та (3.54) співпадають з анзацами (3.51) та (3.52). Їх розглянуто у попередньому випадку. Тоді отримаємо, що анзац (3.53) переходить у анзац (3.45) при $p = 0,\ n = 1,\ k = 0,\ m = 1$, а анзац (3.54) переходить у анзац (3.43) при $p = 0,\ n = 1$.

Розглянемо анзац (3.55)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2mx_0.$$

Подіявши спочатку на (3.55) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{w^1}{2}}, \quad \omega = w^1 + 2mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, та ввівши заміну

$$\Psi^1 = 2\ln\varphi^1, \quad \Psi^2 = \Phi^2,$$

одержимо наступний анзац

$$w^1 = 2\ln\varphi^1(\omega) - 2mt, \quad w^2 = \Phi^2(\omega) + 2e^{-mt}\varphi^1(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.86}$$

Продиференціювавши анзац (3.86) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = 2\tfrac{\dot\varphi^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = \varphi^2(\omega) + 2e^{-mt}\dot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x, \tag{3.87}$$

де $\varphi^2(\omega) = \dot\Phi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (3.56)

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2m\ln x_0. \tag{3.88}$$

Подіявши спочатку на (3.56) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \sqrt{x_0}\Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + 2m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.5) даний анзац набуде вигляду

$$x = \sqrt{t}\Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{w^1}{2}}, \quad \omega = w^1 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, та ввівши заміну

$$\Psi^1 = 2\ln\varphi^1, \quad \Psi^2 = \Phi^2,$$

одержимо наступний анзац

$$w^1 = 2\ln\varphi^1(\omega) - 2mt, \quad w^2 = \Phi^2(\omega) + 2t^{-m}\varphi^1(\omega), \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}. \tag{3.89}$$

Продиференціювавши анзац (3.89) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \tfrac{2}{\sqrt{t}}\tfrac{\dot\varphi^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}[\varphi^2(\omega) + 2t^{-m}\dot\varphi^1(\omega)], \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3.90}$$

де $\varphi^2(\omega) = \dot{\Phi}^2(\omega)$.

У результаті отримали, що анзаци (3.49)-(3.54) перейдуть у ліївські анзаци для системи (3.13), а анзаци (3.55)-(3.56) перейшли в нелокальні анзаци (3.87) та (3.90).

3.42.. Нелокальні анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, одержані з другого образу Подіємо композицією нелокальних перетворень (3.4), (3.11), (3.6) на вже знайдені ліївські анзаци системи (3.15). Розглянемо перетворення кожного з анзаців окремо.

1) Випадок $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (3.62)

$$z^1 = \psi^1(\omega) + kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Перепишемо даний анзац у наступному вигляді

$$z^1 = \psi^1(\omega) - 2kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0. \tag{3.91}$$

Подіявши спочатку на (3.91) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2kx_0\Psi^2(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - kx_0^2, \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де $\Psi^1, \Psi^2(\omega) - kx_0^2$ — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2kt\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega) - kx_0^2, \quad \omega = w^2 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2ktx, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - mt, \quad \omega = x + kt^2. \tag{3.92}$$

Продиференціювавши анзац (3.92) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2. \tag{3.93}$$

У результаті, маємо що анзац (3.62) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.32).

Розглянемо анзац (3.63)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m \ln x_0.$$

Подіявши спочатку на (3.63) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m \ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + m \ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - m \ln t, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.94}$$

Продиференціювавши анзац (3.94) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.95}$$

Отже, маємо, що анзац (3.63) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.31).

2) Випадок $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (3.64)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k \ln x_0.$$

Подіявши спочатку на (3.64) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k \ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = t^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + k\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - k\ln t, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.96}$$

Продиференціювавши анзац (3.96) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.97}$$

У результаті маємо, що анзац (3.64) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.35) при $n = -\frac{1}{2}$.

Розглянемо анзац (3.65)

$$z^1 = x_0^k\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{k+\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1x_0^k.$$

Подіявши спочатку на (3.65) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1x_0^k,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = t^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2t^k.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1, \quad w^2 = t^{-k}\Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.98}$$

Продиференціювавши анзац (3.98) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-k-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.99}$$

Отже, маємо, що анзац (3.65) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.35) при $n = -k - \frac{1}{2}$.

Розглянемо анзац (3.66)

$$z^1 = \psi^1(\omega) + m\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0.$$

Подіявши спочатку на (3.66) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + m\Psi^2(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + m\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + kt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + mx, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - kt, \quad \omega = x. \tag{3.100}$$

Продиференціювавши анзац (3.100) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.101}$$

Отже, маємо, що анзац (3.66) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.37) при $n = 0,\ k = 0,\ m = 1$.

Розглянемо анзац (3.67)

$$z^1 = [\psi^1(\omega) + mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = e^{kx_0}x_1.$$

Перепишемо даний анзац у вигляді

$$z^1 = [\psi^1(\omega) - 2mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = e^{kx_0}x_1. \tag{3.102}$$

Подіявши спочатку на (3.102) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - 2mx_0\Psi^2(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega) - mx_0^2, \quad \omega = e^{kx_0}x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $\psi^1, \psi^2 + mx_0^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2mt\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega) - mt^2, \quad \omega = e^{kt}w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2mt(x + mt^2), \quad w^2 = e^{-kt}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x + mt^2. \quad (3.103)$$

Продиференціювавши анзац (3.103) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \psi^1(\omega) - 2mt, \quad u^2 = e^{-kt}\psi^2(\omega), \quad \omega = x + mt^2. \quad (3.104)$$

Отже, маємо, що анзац (3.67) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у ліївський анзац (3.36) при $n = -k$.

3) Випадок $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Розглянемо анзац (3.68)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2 + 1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2 + 1}, \quad \omega = \ln x_0 + m \arctan x_1.$$

Подіявши спочатку на (3.68) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(x_1^2 + 1), \quad v^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + m \arctan x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $m\psi^1, m\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln((w^2)^2 + 1), \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + m \arctan w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$\begin{aligned} &w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(\tan^2\alpha + 1), \quad w^2 = \tan\alpha, \\ &\omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + qt. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Продиференціювавши анзац (3.105) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}(\varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega)\tan\alpha), \quad u^2 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\dot{\varphi}^2(\omega)\cos^{-2}\alpha, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \quad (3.106)$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Отже, маємо, що анзац (3.68) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у нелокальний анзац для системи (3.13).

Розглянемо анзац (3.69)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2 + 1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2 + 1}, \quad \omega = x_0 + m\arctan x_1.$$

Подіявши спочатку на (3.68) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(x_1^2 + 1), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + m\arctan x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $m\psi^1, m\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln((w^2)^2 + 1), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + m\arctan w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$\begin{aligned} &w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(\tan^2\alpha + 1), \quad w^2 = \tan\alpha, \quad \omega = x, \\ &\alpha = \varphi^2(\omega) + qt, \quad q = -\tfrac{1}{m}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Продиференціювавши анзац (3.107) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega)\tan\alpha, \quad u^2 = \dot{\varphi}^2(\omega)\cos^{-2}\alpha, \quad \omega = x, \quad (3.108)$$

де $\varphi^1(\omega) = m\Psi^1(\omega), \quad \varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Отже, маємо, що анзац (3.69) під дією перетворень (3.4), (3.11), (3.6) переходить у нелокальний анзац для системи (3.13).

4) Випадок $\mu = -1, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Розглянемо анзац (3.70)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 + k \arctan m e^{x_1},$$

де $\sigma = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$.

Подіявши спочатку на (3.70) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + k \arctan m e^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $\frac{1}{mkc_2}\psi^1, \frac{1}{mkc_2}\psi^2$. Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + k \arctan m e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1 + \ln \tfrac{2c_2 m}{\sin 2\alpha}, \quad w^2 = \ln \tfrac{1}{m} + \ln \tan \alpha, \quad \omega = x, \tag{3.109}$$

де $\alpha = \varphi^2(\omega) + qt$.

Продиференціювавши анзац (3.109) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot\varphi^2(\omega) \cot \alpha, \quad u^2 = \tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{\sin \alpha}, \quad \omega = x, \tag{3.110}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (3.71)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1}.$$

Подіявши спочатку на (3.71) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $\frac{1}{nkc_2}\psi^1, \frac{1}{nkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t - k \arctan n e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$\begin{aligned} &w^1 = \Psi^1 + \ln\tfrac{2c_2n}{\sinh 2\alpha}, \quad w^2 = \ln\tfrac{1}{m} + \ln\tanh\alpha, \\ &\omega = x, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Продиференціювавши анзац (3.111) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot\varphi^2(\omega)\coth\alpha, \quad u^2 = \tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{\sinh\alpha}, \quad \omega = x, \tag{3.112}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (3.72)

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + le^{x_1}.$$

Подіявши спочатку на (3.72) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - x_1, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + le^{w^2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - w^2, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + le^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - \ln(\Psi^2(\omega) - \tfrac{1}{l}t), \quad w^2 = \ln(\Psi^2(\omega) - \tfrac{1}{l}t), \quad \omega = x. \tag{3.113}$$

Продиференціювавши анзац (3.123) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad u^2 = \tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad \omega = x, \tag{3.114}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (3.73)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma(x_1)}, \quad \omega = \ln x_0 + k\arctan me^{x_1},$$

де $\sigma(x_1) = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$.

Подіявши спочатку на (3.73) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sigma, \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + k\arctan me^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $\frac{1}{mkc_2}\psi^1, \frac{1}{mkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sigma(w^2), \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + k\arctan me^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$\begin{aligned} &w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\tfrac{2c_2 m}{\sin 2\alpha}, \quad w^2 = \ln\tfrac{1}{m} + \ln\tan\alpha, \\ &\omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Продиференціювавши анзац (3.115) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot\varphi^2(\omega)\cot\alpha, \quad u^2 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{\sin\alpha}, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3.116}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt$.

Розглянемо анзац (3.74)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma(x_1)}, \quad \omega = \ln x_0 - k\arctan ne^{x_1},$$

де $\sigma(x_1) = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$.

Подіявши спочатку на (3.71) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sigma(x_1), \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 - k\arctan ne^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій $\frac{1}{nkc_2}\psi^1, \frac{1}{nkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sigma(w^2), \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t - k\arctan ne^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$\begin{aligned} &w^1 = \Psi^1 + \ln\tfrac{2c_2 n}{\sinh 2\alpha}, \quad w^2 = \ln\tfrac{1}{m} + \ln\tanh\alpha, \\ &\omega = x, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \end{aligned} \tag{3.117}$$

Продиференціювавши анзац (3.117) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\coth\alpha, \quad u^2 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\tfrac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sinh\alpha}, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3.118}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (3.75)

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = \sqrt{x_0}e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + le^{x_1}.$$

Подіявши спочатку на (3.75) перетворенням (3.4), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - x_1, \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + le^{w^2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - w^2, \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + le^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - \ln(\Psi^2(\omega) - \tfrac{1}{l}t), \quad w^2 = \ln(\Psi^2(\omega) - \tfrac{1}{l}t), \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}. \tag{3.119}$$

Продиференціювавши анзац (3.119) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \tfrac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad u^2 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\tfrac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3.120}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

5) Випадок $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Розглянемо анзац (3.76)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2}.$$

Подіявши спочатку на (3.76) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin x_1, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin(w^2), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + k\tan\frac{w^2}{2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1 + \ln 2\tfrac{e^t\Psi^2(\omega)}{A}, \quad w^2 = 2\arctan e^{-t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{3.121}$$

Продиференціювавши анзац (3.121) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - 2\tfrac{\varphi^2(\omega)\dot\varphi^2(\omega))}{A}, \quad u^2 = 2e^t\tfrac{\dot\varphi^2(\omega))}{A}, \quad \omega = x, \tag{3.122}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad A = (\varphi^2)^2 + e^{2t}$.

Розглянемо анзац (3.77)

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = \ln x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2}.$$

Подіявши спочатку на (3.77) перетворенням (3.4), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin x_1, \quad v^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 — первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (3.11) даний анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin w^2, \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + \ln\tan\frac{w^2}{2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо наступний анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \tfrac{2t\Psi^2(\omega)}{(\Psi^2(\omega))^2+t^2}, \quad w^2 = 2\arctan\tfrac{\varphi^2(\omega)}{t}, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}. \tag{3.123}$$

Продиференціювавши анзац (3.123) за змінною x та застосувавши перетворення (3.6), маємо нелокальний анзац для системи (3.13)

$$u^1 = \tfrac{1}{\sqrt{t}}[\varphi^1(\omega) - 2\tfrac{\varphi^2(\omega)\dot\varphi^2(\omega)}{B}], \quad u^2 = 2\sqrt{t}\tfrac{\dot\varphi^2(\omega)}{B}, \quad \omega = \tfrac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3.124}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad B = (\varphi^2)^2 + t^2$.

У результаті отримали, що анзаци (3.62)-(3.67) перейдуть у ліївські анзаци для системи (3.13), а анзаци (3.68)-(3.77) перейшли в нелокальні анзаци (3.106), (3.108), (3.110), (3.112), (3.114), (3.116), (3.118), (3.120), (3.122), (3.124).

3.43.. Редукція системи рівнянь Ван-дер-Ваальса Підставивши анзаци (3.55),(3.56) та (3.106), (3.108), (3.110), (3.112), (3.114), (3.116), (3.118), (3.120), (3.122), (3.124) у систему (3.13), одержимо наступні редуковані системи рівнянь:

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= 2\tfrac{(\dot{\varphi}^1)^2}{\varphi^1} - m\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= 2\tfrac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 + 2(\tfrac{\ddot{\varphi}^1}{\varphi^1} - \tfrac{(\dot{\varphi}^1)^2}{(\varphi^1)^2})\varphi^2; \end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= (2\tfrac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} - \tfrac{\omega}{2})\dot{\varphi}^1 - m\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (2\tfrac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} - \tfrac{\omega}{2})(\dot{\varphi}^2 + \tfrac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\varphi^2) - (2m + \tfrac{1}{2})\varphi^2; \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 + 4\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}(\omega\dot{\varphi}^1 + \varphi^1), \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2; \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 + 4\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2; \end{aligned} \tag{3.128}$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 - \varphi^2; \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= [\varphi^1 - \tfrac{1}{2}(\varphi^1 - \omega)]\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}\varphi^2; \end{aligned} \tag{3.130}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 - \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + q; \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + q; \end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + 1; \end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= -\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 + (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \tfrac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 + q; \end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 + (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \tfrac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 + q; \end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \tfrac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{3.136}$$

3.5. Нелокальні анзаци та редукція образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса

Задачу знаходження нелокальних анзаців та проведення редукції можна розв'язати і для образів O_1 і O_2, використавши ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та перетворення P_1, P_2.

Для відшукання нелокальних анзаців першого образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса подіємо композицією нелокальних перетворень (3.4)-(3.6) на вже знайдені ліївські анзаци системи (3.13). У результаті одержимо, що частина анзаців системи (3.13) перейдуть у ліївські анзаци для системи (3.14), а інші анзаци перейдуть в наступні нелокальні анзаци

$$z^1 = \tfrac{1}{\varphi^1(\omega)-2kx_0}, \quad z^2 = \tfrac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)-2kx_0}, \quad \omega = \tau + kx_0^2, \quad \tau_1 = z^1; \tag{3.137}$$

$$z^1 = \tfrac{\sqrt{x_0^2+1}}{\varphi^1(\omega)+x_0\omega}, \quad z^2 = \tfrac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)+x_0\omega}, \quad \omega = \tfrac{\tau}{\sqrt{x_0^2+1}}, \quad \tau_1 = z^1. \tag{3.138}$$

Аналогічним чином одержимо нелокальний анзац для системи (3.15):

$$z^1 = \varphi^1(\omega)+x_0\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0^2+1}\dot{\varphi}^2(\omega), \quad \omega = x_1. \tag{3.139}$$

Підставивши анзаци (3.137), (3.138) у систему (3.14), одержимо наступні редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned}&\lambda_1\ddot{\varphi}^1-\varphi^1\dot{\varphi}^1+\mu\varphi^2\dot{\varphi}^2+2k=0,\\&\lambda_2\ddot{\varphi}^2-\varphi^1\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}^1\varphi^2=0;\end{aligned}\tag{3.140}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1\ddot{\varphi}^1-\varphi^1\dot{\varphi}^1+\mu\varphi^2\dot{\varphi}^2-\omega=0,\\&\lambda_2\ddot{\varphi}^2-\varphi^1\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}^1\varphi^2=0.\end{aligned}\tag{3.141}$$

Якщо підставити анзац (3.139) у систему (3.15), то отримаємо наступну редуковану систему рівнянь:

$$\begin{aligned}&(2\lambda_1\dot{\varphi}^1-\tfrac{\lambda_2-2\lambda_1}{\lambda_2}(\varphi^1)^2+\mu)\ddot{\varphi}^2-(\lambda_1\ddot{\varphi}^1-\tfrac{\lambda_2-2\lambda_1}{\lambda_2}\varphi^1\dot{\varphi}^1)\dot{\varphi}^2-\\&-(\dot{\varphi}^2)^4\varphi^2=0,\\&\lambda_2\ddot{\varphi}^2+\varphi^1\dot{\varphi}^2=0.\end{aligned}\tag{3.142}$$

3.6. Точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса

Якщо розв'язати редуковані системи (3.125)-(3.136) та використати відповідні анзаци, то можна побудувати точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Наведемо деякі з них.

Розв'язками редукованої системи (3.125) є функції

$$\begin{aligned}&\varphi^1=-\tfrac{c_1}{\omega},\\&\varphi^2=c_2\omega+\tfrac{c_3}{\omega^2};\end{aligned}\tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}&\varphi^1=\tfrac{c_1}{\cos\omega},\\&\varphi^2=-2\ln\cos\omega+c_2\omega+c_3;\end{aligned}\tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}&\varphi^1=\tfrac{c_1}{\cosh\omega},\\&\varphi^2=-2\ln\cosh\omega+c_2\omega+c_3,\end{aligned}\tag{3.145}$$

де $c_1,\ c_2,\ c_3$ — довільні сталі.

Використавши анзац (3.87), розмножений перетвореннями

$$t\to t,\quad x\to x+\theta t,\quad u^1\to u^1-\theta,\quad u^2\to u^2,\tag{3.146}$$

та розв'язки (3.143)–(3.145), знаходимо розв'язки системи (3.13):

$$u^1 = -\tfrac{2}{x+\theta t} + \theta,$$
$$u^2 = c_2(x+\theta t) + \tfrac{c_3 - 2c_1 e^{-mt}}{(x+\theta t)^2};$$

$$u^1 = 2\tan(x+\theta t) + \theta,$$
$$u^2 = -2\ln\cos(x+\theta t) + 2c_1 e^{-mt}\tfrac{\tan(x+\theta t)}{\cos(x+\theta t)} + c_2(x+\theta t) + c_3;$$

$$u^1 = -2\tanh(x+\theta t) + \theta,$$
$$u^2 = -2\ln\cosh(x+\theta t) - 2c_1 e^{-mt}\tfrac{\tanh(x+\theta t)}{\cosh(x+\theta t)} + c_2(x+\theta t) + c_3.$$

Розв'язками редукованої системи (3.129) є наступні функції (див., [18], [149])

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= -\tfrac{2}{\omega}, \\ \varphi^2 &= \tfrac{\cos\omega}{\omega}; \end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \tan\tfrac{\omega}{2}, \\ \varphi^2 &= \tfrac{c_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}\omega + c_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}; \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= -\tanh\tfrac{\omega}{2}, \\ \varphi^2 &= \tfrac{c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cosh\frac{\omega}{2}}, \end{aligned} \tag{3.149}$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Використавши анзац (3.122), розмножений перетвореннями Галілея (3.146) та розв'язки (3.147)–(3.149), знаходимо розв'язки системи (3.13):

$$\begin{aligned} u^1 &= \tfrac{2}{x+\theta t}\left[\tfrac{\cos(x+\theta t)[(x+\theta t)\sin(x+\theta t)+\cos(x+\theta t)]}{\cos^2(x+\theta t)+e^{2t}(x+\theta t)^2} - 1\right] + \theta, \\ u^2 &= 2e^t\tfrac{(x+\theta t)\sin(x+\theta t)+\cos(x+\theta t)}{\cos^2(x+\theta t)+e^{2t}(x+\theta t)^2}; \end{aligned} \tag{3.150}$$

$$u^1 = \tan\tfrac{x+\theta t}{2} - \tfrac{1}{\cos\frac{x+\theta t}{2}}\tfrac{C[2C_x\cos\frac{x+\theta t}{2} + C\sin\frac{x+\theta t}{2}]}{C^2 + e^{2t}\cos^2\frac{x+\theta t}{2}} + \theta,$$
$$u^2 = e^t\tfrac{2C_x\cos\frac{x+\theta t}{2} + C\sin\frac{x+\theta t}{2}}{C^2 + e^{2t}\cos^2\frac{x+\theta t}{2}};$$

$$u^1 = -\tan\tfrac{x+\theta t}{2} - \tfrac{1}{\cosh\frac{x+\theta t}{2}}\tfrac{D[2D_x\cosh\frac{x+\theta t}{2} - D\sinh\frac{x+\theta t}{2}]}{D^2 + e^{2t}\coth^2\frac{x+\theta t}{2}} + \theta,$$
$$u^2 = e^t\tfrac{2D_x\cosh\frac{x+\theta t}{2} - D\sin\frac{x+\theta t}{2}}{D^2 + e^{2t}\cosh^2\frac{x+\theta t}{2}},$$

де $C = c_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}(x+\theta t) + c_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}(x+\theta t)$, $D = c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\theta t) + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\theta t)$.

Розв'язком редукованої системи (3.133) є функції

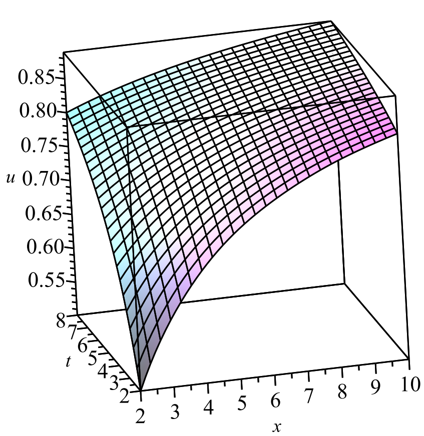
$$\begin{aligned} &\varphi^1 = -\tfrac{2}{\omega},\\ &\varphi^2 = \tfrac{c_1}{\omega} + c_2 + \tfrac{\omega^2}{6}, \end{aligned} \tag{3.151}$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

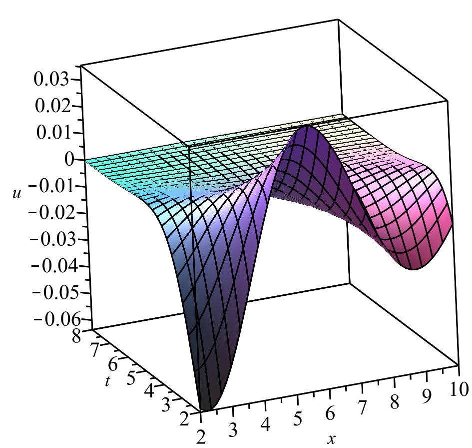
Використавши анзац (3.114), розмножений перетвореннями (3.146) та розв'язок (3.151), знаходимо розв'язки системи (3.13):

$$\begin{aligned} &u^1 = -\tfrac{2}{x+\theta t} - \tfrac{2(x+\theta t)^3 - c_1}{(x+\theta t)^4 + (6t+c_2)(x+\theta t)^2 + c_1(x+\theta t)} + \theta,\\ &u^2 = -\tfrac{2(x+\theta t)^3 - c_1}{(x+\theta t)^4 + (6t+c_2)(x+\theta t)^2 + c_1(x+\theta t)}. \end{aligned}$$

Отримані розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса можна вивчити з точки зору можливості їх фізичного застосування. Приведемо це на прикладі розв'язку (3.150). Неважко бачити, що при $t \to \infty$ і $x \to \infty$ $u^1 \to \theta$, $u^2 \to 0$. Це дає підстави стверджувати, що даний розв'язок може мати фізичне застосування. На рисунках 1 і 2 наведені графіки даного розв'язку при наступних обмеженнях: $\theta = 1,\ t \in \{2, 8\},\ x \in \{2, 10\}$.



Мал. 3.1: Графік функції u^1



Мал. 3.2: Графік функції u^2

Розв'язавши редуковані системи (3.140)-(3.142) та використавши відповідні анзаци, можна знайти точні розв'язки обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Оскільки системи (3.14) та (3.15) не є досить вивченими з точки зору фізичного застосування і не відомо, чи вони описують конкретні фізичні процеси, то їхні розв'язки ми не наводимо.

3.7. Нелокальні симетрії системи рівнянь Ван-дер-Ваальса

Наявність нелокальних анзаців означає наявність нелокальних симетрій даної системи. Кожному нелокальному анзацу відповідає нелокальний оператор. Знайдемо нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Наведемо спочатку оператори, які породжують ліївські анзаци першого та другого образу:

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$X_1 = 2\partial_0 - 2m\partial_1 - me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}, \tag{3.152}$$

$$X_2 = 4m\partial_1 - 2x_0\partial_0 - z^1\partial_{z^1} + 2me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}, \tag{3.153}$$

$$X_3 = m\partial_0 - \partial_1 - (x_1^2\partial_1 - 2x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}) + 2\partial_{z^1}), \tag{3.154}$$

$$\begin{gathered} X_4 = 2\partial_1 - m(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) + 2(x_1^2\partial_1 - \\ -2x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}) + 2\partial_{z^1}); \end{gathered} \tag{3.155}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered} X_5 = km\partial_0 - m^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ -e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{3.156}$$

$$\begin{gathered} X_6 = kn\partial_0 + n^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ -e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{3.157}$$

$$X_7 = l\partial_0 - e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \tag{3.158}$$

$$X_8 = km(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) - 2m^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ -2e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \tag{3.159}$$

$$X_9 = kn(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) - 2n^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) + \\ +2e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \tag{3.160}$$

$$X_{10} = l(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) + 2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}); \tag{3.161}$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$X_{11} = \partial_0 - \sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + + \cos x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \tag{3.162}$$

$$X_{12} = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2} - 2\sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + \\ +2\cos x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}). \tag{3.163}$$

Подіявши перетвореннями P_1 на оператори (3.152)-(3.153) та перетвореннями P_2 на оператори (3.156)-(3.155) отримаємо наступні нелокальні оператори для системи Ван-дер-Ваальса:

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_1 = \partial_t - \tfrac{m}{2}e^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2}, \tag{3.164}$$

$$Q_2 = 2t\partial_t + x\partial_x - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2} - 2me^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2}, \tag{3.165}$$

$$Q_3 = m\partial_t - 2u^2\partial_{u^1} - 2v^2u^2\partial_{u^2}, \tag{3.166}$$

$$Q_4 = 2t\partial_t + mx\partial_x - (mu^1 + 4u^2)\partial_{u^1} - (mu^2 + 4v^2u^2)\partial_{u^2}; \tag{3.167}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_5 = km\partial_t + (m^2e^{v^2} + e^{-v^2})u^2\partial_{u^1} + (m^2e^{v^2} - e^{-v^2})u^2\partial_{u^2}, \tag{3.168}$$

$$Q_6 = kn\partial_t - (n^2e^{v^2} - e^{-v^2})u^2\partial_{u^1} - (n^2e^{v^2} + e^{-v^2})u^2\partial_{u^2}, \tag{3.169}$$

$$Q_7 = l\partial_t - e^{-v^2}u^2(\partial_{u^1} - \partial_{u^2}), \tag{3.170}$$

$$Q_8 = 2kmt\partial_t + kmx\partial_x + [kmu^1 + 2(m^2e^{v^2} + e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1} + \\ +[kmu^2 + 2(m^2e^{v^2} - e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2}, \tag{3.171}$$

$$Q_9 = 2knt\partial_t + knx\partial_x - [knu^1 + 2(n^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1} - \\ -[knu^2 + 2(n^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2}, \qquad (3.172)$$

$$Q_{10} = 2l\partial_t + lx\partial_x - (lu^1 - 2e^{v^2}u^2)(\partial_{u^1} + \partial_{u^2}); \qquad (3.173)$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_{11} = \partial_t + u^2 \sin v^2 \partial_{u^1} - u^2 \cos v^2 \partial_{u^2}, \qquad (3.174)$$

$$Q_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x - (u^1 - 2u^2 \sin v^2)\partial_{u^1} - (u^1 + 2u^2 \cos v^2 \partial_{u^2}), \qquad (3.175)$$

де $v^1 = \int u^1 dx$, $v^2 = \int u^2 dx$.

Процедуру отримання нелокальних операторів (3.164)-(3.167) з ліївських операторів (3.152)-(3.155) за допомогою перетворень P_1 та P_2 наведемо на прикладі операторів (3.152), (3.156) та (3.164), (3.168).

Подіявши оператором (3.152)

$$X_1 = 2\partial_0 - 2m\partial_1 - me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}$$

на z^1 та z^2 та використавши умову

$$Xz^1 = 0, \quad Xz^2 = 0, \qquad (3.176)$$

отримаємо

$$2z^1_0 - 2mz^1_1 = 0, \\ 2z^2_0 - 2mz^1_1 + 2me^{\frac{x_1}{2}} = 0. \qquad (3.177)$$

Подіявши спочатку на (3.177) перетворенням (3.6) та проінтегрувавши за змінною x_1, маємо

$$2w^1_0 - 2mw^1_1 = 0, \\ 2w^2_0 - 2mw^1_1 + 2me^{\frac{x_1}{2}} = 0. \qquad (3.178)$$

Подіявши перетворенням годографа (3.5) на (3.178)

$$w^1_0 = -\frac{v^1_t}{v^1_x}, \quad w^2_0 = v^2_t - \frac{v^1_t v^2_x}{v^1_x}, \quad w^1_1 = \frac{1}{v^1_x}, \quad w^2_1 = \frac{v^2_x}{v^1_x},$$

одержимо

$$\begin{aligned} &v_t^1 + m = 0, \\ &v_t^2 + me^{\frac{v^1}{2}} = 0. \end{aligned} \tag{3.179}$$

Продиференціювавши систему (3.179) за змінною x та застосувавши перетворення (3.4), маємо

$$\begin{aligned} &u_t^1 = 0, \\ &u_t^2 + \tfrac{m}{2}e^{\frac{v^1}{2}}u^1 = 0. \end{aligned} \tag{3.180}$$

Системі (3.180) відповідає оператор (3.164).

Отже, маємо, що ліївський оператор (3.152) переходить у нелокальний оператор(3.164).

Подіявши оператором (3.156)

$$\begin{aligned} &X_3 = km\partial_0 - m^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ &-e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}) \end{aligned}$$

на z^1 та z^2 та використавши умову (3.176) отримаємо

$$\begin{aligned} &kmz_0^1 - m^2e^{x_1}(z_1^1 + z^1 - 1) - e^{-x_1}(z_1^1 - z^1 - 1) = 0, \\ &kmz_0^2 - m^2e^{x_1}(z_1^2 + z^2) - e^{-x_1}(z_1^2 - z^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.181}$$

Подіявши спочатку на (3.181) перетворенням (3.6) та проінтегрувавши за змінною x_1, отримаємо

$$\begin{aligned} &kmw_0^1 - m^2e^{x_1}(w_1^1 - 1) - e^{-x_1}(w_1^1 + 1) = 0, \\ &kmw_0^2 - m^2e^{x_1}w_1^2 - e^{-x_1}w_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Подіявши перетворенням годографа (3.11) на дану систему та використавши формули

$$w_0^1 = v_t^1 - \frac{v_t^2 v_x^1}{v_x^2}, \quad w_0^2 = -\frac{v_t^2}{v_x^2}, \quad w_1^1 = \frac{v_x^1}{v_x^2}, \quad w_1^2 = \frac{1}{v_x^2},$$

одержимо

$$\begin{aligned} & kmv_t^1 + m^2 e^{v^2} - e^{-v^2} = 0, \\ & kmv_t^2 + m^2 e^{v^2} + e^{-v^2} = 0. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Продиференціювавши систему (3.182) за змінною x та застосувавши перетворення (3.4), маємо

$$\begin{aligned} & kmu_t^1 + (m^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2 = 0, \\ & kmu_t^2 + (m^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.183}$$

Системі (3.183) відповідає оператор (3.168).

У результаті отримаємо, що ліївський оператор (3.156) переходить у нелокальний оператор (3.169).

Отже, ми показали, що координати ξ^μ та η^a ліївських операторів (3.152)-(3.155) залежать від змінних t, x, z^1, z^2, а координати нелокальних операторів (3.164)-(3.167) — t, x, u^1, u^2, v^1, v^2, де $v^1 = \int u^1 dx$, $v^2 = \int u^2 dx$.

3.8. Висновки до розділу 3

У даному розділі нелокальні перетворення еквіваленності першого та другого типу застосовані для знаходження образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Симетрійні властивості першого та другого образів системи (3.13) використані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків цієї системи. Застосовано нелокальні перетворення еквівалентності до знаходження нелокальних анзаців та проведення редукції обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. За допомогою ліївських анзаців системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та нелокальних перетворень еквівалентності P_1, P_2 побудовані нелокальні анзаци та проведена редукція образів O_1 і O_2.

Основні результати, отримані в даному розділі, наступні:

1. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

2. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії, та досліджено симетрійні властивості цих образів.

3. Знайдено максимальні алгебри інваріантності обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

4. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукції системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

5. Знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

6. Знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх інтерпретацію.

7. Показано, що нелокальні анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса відповідають нелокальним операторам інваріантності даної системи.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати наступним чином.

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
2. З точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
3. Побудовано точні розв'язки рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.
4. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.
5. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. Використано симетрійні властивості першого та другого образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків цієї системи.
6. За допомогою нелокальних перетворень еквівалентності знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.
7. Знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.
8. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним операторам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Список використаних джерел

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований. Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 482–489.

[2] Аль Фарах Х., Портенко М. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів. К.: Ін-т математики НАН України, 2007. 24 с. (Препр. 2007.6).

[3] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации. Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. С. 1033–1035.

[4] Баранник А.Ф., Юрик І.І. Про точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії. Укр. мат. журн. 2005. Т. 57, № 8. С. 1011–1019.

[5] Белоколос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Эпольский В.З. Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений. Успехи математических наук. 1986. Т. 41, № 2. С. 3–42.

[6] Белоколос Е.Д., Эпольский В.З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнениний в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния. Успехи математических наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 89–120.

[7] Березанский Ю.М., Калюжный А.А.Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. К.: Наукова думка, 1992. 352 с.

[8] Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К.: Наукова думка, 1988. 680 с.

[9] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К.: Наукова думка, 1965. 798 с.

[10] Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространстве бесконечного числа переменных. К.: Наукова думка, 1978. 360 с.

[11] Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Иностранная литература, 1963. 400 с.

[12] Бойко В.М., Попович Р.О. Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня. Доповіді Національної академії наук України. 2013. № 9. С. 7–15.

[13] Вільгельмссон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв‘язку температури та густини у термоядерних плазмах. УМЖ. 1993. Т. 38, № 1. С. 44–53.

[14] Власенко Л.А., Перестюк Н.А. О разрешимости дифференциально–алгебраических уравнений с импульсным воздействием. Укр. мат. журн. 2005. 57, N 4. С. 458–468.

[15] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. С. 1215–1223.

[16] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником. Журн. выч. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.

[17] Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б, Цыганов М.А. От беспорядка к упорядоченности – на примере движения микроорганизмов. Успехи физических наук. 1991.Т. 161, № 4. С. 13–71.

[18] Камке Э. Справочник по обыкновенним дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 704 с.

[19] Карпалюк Т.О. Симетрійна класифікація нелінійних рівнянь конвекції-дифузії відносно алгебр Галілея: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Полтава: ПолтНТУ, 2016. 154 с.

[20] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа. Журнал прикладной механики и теоретической физики. 1965. Т. 6. С. 105–106.

[21] Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 228 с.

[22] Костенко В. Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Л. : Львів. держ. ун-т, 1959. 22 с.

[23] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований. Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 3. С. 365–372.

[24] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. Праці Інституту математики НАН України: Мат-ка та її застосування. К., 2002. Т. 45. 359 с.

[25] Лазарь Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: В. школа, 1987. 296 с.

[26] Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.

[27] Луковский И.А. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. Киев: Наукова думка, 1977. 240 с.

[28] Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости. Киев: Наукова думка, 1984. 232 с.

[29] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью. Приклад. механика. 2004. Т. 40, № 10. С. 37–77.

[30] Луковський І.О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках. Доп. НАН України. 2002. № 5. С. 53–58.

[31] Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач математической физики. Киев: Вища школа, 1977. 408 с.

[32] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. К.: Наук. думка., 1977. 331 с.

[33] Мартынюк Д.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно–периодическими коэффициентами. К.: Наук. думка, 1984. 213 с.

[34] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Асимптотическое исследование слабонелинейных колебательных систем. К.: Наукова думка, 1976. 54 с.

[35] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Математические проблемы нелинейной механики. К.: Вища шк., 1987. 69 с.

[36] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наук. думка, 1973. 182 с.

[37] Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно–двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи. Функц. анализ. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 80–82.

[38] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с. English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. Ovsiannikov L.V. New York: Academic Press, 1982. 400 p.

[39] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР. Т.125, 1959. С. 492–495.

[40] Овсянников Л. В., Чаплыгина С.А. Групповые свойства уравнений. Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1960. № 3. С. 126–145.

[41] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М. : Мир, 1989. 639 с.

[42] Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер.: Математика и её применение. К, 2007. Т. 67. 427 с.

[43] Перестюк Н.А., Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием. Укр. мат. журн. 2001. 53, N 8. С. 1061–1079.

[44] Портенко М.І. Ймовірнісне зображення розв'язку однієї задачі математичної фізики. Укр. мат. журн. 2000. Т 52, N 9. С. 1272–1282.

[45] Портенко М.І. Про рівняння відновлення, які виникають в деяких задачах теорії узагальнених дифузійних процесів. Укр. мат. журн. 2005. Т. 57, N 9. С. 1302–1312.

[46] Приставка Ю.В. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 15-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р. Київ: Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2014. С. 256-257.

[47] Приставка Ю.В. Точні розв'язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Системи управління, навігації та зв'язку, 2018. Випуск 3(49). С. 78-82.

[48] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 301 с.

[49] Самойленко А.М., Станжицкий А. Н. Об инвариантных множествах дифференциальных уравнений с малыми случайными возмущениями. Дифференц. уравнения. 1998. Т.34, № 1. С. 54–58.

[50] Самойленко А.М., Станжицький А.Н. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале. Дифференциальные Уравнения. 2006. В.42, № 4. С. 476–482.

[51] Самойленко А.М., Станжицкий А. Н., Новак І. Г. Про асимтотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь. Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 8.

[52] Сєрова М.М. , Омелян О.М., Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер Ваальса. Праці Інституту математики НАН України. Серія: Математика та її застосування. 2000. Т. 36. С. 254-261.

[53] Сєров М.І., Омелян О.М., Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису: монографія. Полтава: ПолтНТУ, 2012. 238 с.

[54] Сєров М.І., Омелян О.М., Черніга Р.М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень. Доп. НАН України. 2004. В.10. С. 39–45.

[55] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. Випуск 14. С. 132-139.

[56] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" , 21-22 квітня 2016 р. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 204-205.

[57] Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Про розширення основних симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія. Математика. Механіка. 2015. Випуск 1(33). С. 38-44.

[58] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Прикарпатський вісник НТШ. 2017. Випуск 1(37). С. 42-52.

[59] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції "Прикладні задачі математики" , присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р. Івано-Франківськ: Івано-

Франківський національний технічний університет нафти і газу, 2016. С. 92-94.

[60] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Точні розв'язки двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 16-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р. Київ: Т.1. Диференціальні інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2015. С. 207-208.

[61] Сєров М.І., Рассоха І.В. Симетрійні властивості рівнянь реакції–конвекції–дифузії: монографія. Полтава: ПолтНТУ, 2013. 168 с.

[62] Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Приставка Ю.В. Застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії до знаходження її точних розв'язків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2017. Випуск 83. С. 123-138.

[63] Сєров М.І., Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Нелінійні коливання. 2019. Т. 22, № 1. С. 98-117.

[64] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом. УМЖ. 1997. Т. 49, № 9. С. 1262–1270.

[65] Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійна класифікація одновимірного рівняння Фоккера-Планка з довільними коефіцієнтами знесення і дифузії. Нелінійні коливання. 1999. Т. 2, № 3. С. 401–413.

[66] Станжицький О. М. Дослідження стійкості інваріантних множин стохастичних систем за допомогою локальних кординат. Нелінійні коливання. 2000. Т. 3, № 2. С. 266-270.

[67] Станжицький О. М., Цуканова А. О. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Нелінійні коливання. 2016. Т. 19, № 3. С. 408-430.

[68] Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t{=}h(u)u_{xx}$. Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. Киев. 1988. № 8. С. 72–77.

[69] Фущич В. И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики — М. : Наука, 1990. — 400 с.

[70] Фущич В. И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла — К.: Наук. думка, — 1983. — 199 с.

[71] Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. К.: Ин-т математики, 1987. С. 4–16.

[72] Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики. Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. К.: Ин–т математики, 1981. С. 6–28.

[73] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики. Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 11. С. 1456–1470.

[74] Фущич В. И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравненя теплопроводности. Доклады Академии наук Украины. 1992. Т.1. С. 26 - 30.

[75] Фущич В.И., Сєров Н.И., Амеров Т.К. О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности. К.: Наук. думка, 1989. 339 с.

[76] Фущич В. И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности. Докл. АН УССР. 1990. № 11. С. 15—18.

[77] Фущич В. И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукціия нелинейніх уравнений, Наук. думка, Киев, 1991. 304 с.

[78] Фущич В. И., Миронюк П.И. Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики. Scientific Works. 2002. Vol. 4. С. 250–257.

[79] Фущич В. И., Серов Н.И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений. Докл. АН СССР. 1991. № 9. С. 45–49.

[80] Фущич В. И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности. Докл. АН УССР. 1988. Сер. А, № 9. С. 17–20.

[81] Фущич В. И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности. Докл. АН УССР. 1990. Сер. А, № 7. С. 24—27.

[82] Фущич В. І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь. Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 10. С. 1433–1443.

[83] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. К.: Наук. думка, 1989. 339 с.

[84] Цифра І., Бойко В. Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля. Доп. НАН України. 1995. № 5. С. 35–36.

[85] Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными. Мат. сборник. 1976. Т. 99. С. 261–281.

[86] Юрик І.І., Баранник Т.А. Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2006. Т. 3, № 2. С. 331–336.

[87] Яненко Н. Н. Теория совместимости и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. IV Всесоюзный математический сьезд (Ленинград, 1961), 1964. Т. 2. P. 247–252.

[88] Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Nonlocal symmetries. Heuristic approach. J. Sov. Math. 55 (1991). P. 1401–1450.

[89] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol I. New York-London: Academic Press, 1965. 511 p.

[90] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol II. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 18-II. New York-London: Academic Press, 1972. 322 p.

[91] Anderson R.L., Ibragimov N.H. Lie-Backlund transformations in applications. Philadelphia. SIAM, 1979.

[92] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: the theory of the steady state. Oxford: Clarendon Press, 1975. 460 p.

[93] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: Vol. 2: questions of uniqueness stability, and transient behavior. Oxford: Clarendon Press, 1975. 232 p.

[94] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. Acta Appl. Math. 2001. Vol. 69, № 1. P. 43–94.

[95] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations. Proc. London Math. Soc. 1909. Vol. 8. P. 223–264.

[96] Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C., Applications of symmetry methods to partial differential equations, Vol. 168 of Applied Mathematical Sciences. Springer: New York, 2010.

[97] Bluman G. W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. 1968/69. Vol. 18. P. 1025–1042.

[98] Bluman G.W., Doran-Wu P., The use of factors to discover potential systems of linearizations, Appl. Math., 41 1995. P. 21-43.

[99] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. Springer: New York, 1989. 142 p.

[100] Bluman G. , Kumei S. Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations. I. Local symmetries, EJAM. 1990. Vol. 1. P. 189–216.

[101] Bluman G. , Kumei S. Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations. II. Linearization by nonlocal symmetries, EJAM. 1990. Vol. 1. P. 1217–223.

[102] Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations. J. Math. Phys. 1988. Vol. 29, № 4. P. 806–811.

[103] Bluman G.W., Yan Z., Nonclassical potential solutions of partial differential equations. European J. Appl. Math. 2005. Vol. 16. P. 239-261.

[104] Boyko V. Symmetry Classification of the One-Dimensional Second Order Equation of a Hydrodynamic Type. J.Phys.A: Math. Gen. 1995. Vol. 2, № 3-4. P. 418-424.

[105] Boyko V.M , Popovych V. O. Group classification of Galilei-invariant higher-orders equations. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2001. Vol. 3. P. 45-50.

[106] Boyko V.M , Popovych V. O., Shapoval N.M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 397, №1. P. 434-440.

[107] Britton N.F. Essential mathematical biology. London: Springer, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003. 335 p.

[108] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Chapman Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2018.

[109] Cherniha R, Serov M., Rassokha I. Lie symmeties and form-preserving transformation of reaction-diffusion-convection equation. J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 342, №2. P. 1363–1379.

[110] Cherniha R. Conditional symmetries for boundary value problems: new definition and its application for nonlinear problems. Miskolc Math. Notes. 2013. Vol. 14. P. 637-646.

[111] Cherniha R. New Q-conditional symmetries end exact solutions reaction-diffusion-convection eduations arising in mathematical biology. J.Math.Anal.Appl. 2007. V. 326. P. 783-799.

[112] Cherniha R., Serov M. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms. Euro. J. of Appl. Math. 1998. Vol. 9. P. 527–542.

[113] Cheviakov A. F. Symbolic computation of equivalence transformations and parameter reduction for nonlinear physical models. Computer Physics Communications. 2017. Vol. 220. P. 56–73.

[114] Gardner C. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.

[115] Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology, volume 46 of Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. 586 p.

[116] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations. Phys. Lett. A. 1994. Vol. 190. P. 149–154.

[117] Fife P. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, volume 28 of Lecture notes in biomathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1975. 185 p.

[118] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. Ann. Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 353–369.

[119] Fushchych W.I., Serov N.I., Tychynin V.A., Amerov T.K. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation. Proc. Acad. of Sci. Ukraine. 1992. №11. P. 27-33.

[120] Fushchych W.I., Shtelen W. M., Serov M. I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Vol. 246 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[121] Fushchych W.I., Tsifra I. M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry. J. Phys. A. 1987. Vol. 20, №2. P. L45–L48.

[122] Fushchych W.I., Tychynin V.A. Hodograph transformations and generating of solutions for nonlinear differential equations. Proc. Acad. of Sci. Ukraine. 1993. №10. P. 52-58.

[123] Hashemi M. S., Nucci M. C. Nonclassical symmetries for a class of reaction- diffusion equations: the method of heir-equations. J. Nonlinear Math. Phys. 2013. Vol. 20, №1. P. 44–60.

[124] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.-Y. The global attractor of dissipative nonlinear evolution system. J. Math. Anal.and Appl. 1999. Vol. 238. 124–142.

[125] King J. R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1990. Vol. 23. P. 5441-5464.

[126] Kuang Y., Nagy J.D., Eikenberry S.E. Introduction to mathematical oncology. Chapman Hall/CRC Mathematical and Computational Biology Series. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2016. 480 p.

[127] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$. Arch. Math. 1881. Vol. 8, № 1. P. 112–125.

[128] Lie S. Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. I, II, Math. Ann. 1888. Vol. 32. P. 213–281.

[129] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung. Arch for Math. 1881. V. 6, № 3. P. 328–368.

[130] Lie S. Uber Differentialinvarianten. Math. Ann. 1884. Vol. 24, № 1. P. 52–89.

[131] Lie S., Engel F.Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 1–3. 1888, 1890, 1893. 623 s., 554 s., 830 s.

[132] Lie S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen. Leipzig: Teubnner. 1893. 805 p.

[133] Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations. PhD Thesis University of British Columbia. 1992. (www.ise.canberra.edu.ua/mathstat/StaffPages/LialeDissertation.pdf).

[134] Murray J.D. Mathematical biology. I, volume 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics, third edition. An introduction. New York: Springer, 2002. 551 p.

[135] Murray J.D. Mathematical biology. II, volume 18 of Interdisciplinary Applied Mathematics, third edition. Spatial models and biomedical applications. New York: Springer, 2003. 881 p.

[136] Murray J.D. Nonlinear partial differential equations models in biology. Oxford: Clarendon Press, 1977. 370 p.

[137] Murray J. D. Mathematical Biology. Berlin : Springer, 1989. 767 p.

[138] Murray J. D. Mathematical Biology, II. Berlin : Springer, 2003. 801 p.

[139] Nikitin A.G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. Ukrainian Marhematical Bulletin. 2005. Vol. 2, № 2. P. 153–204.

[140] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing

systems. J. Math. Analysis and Applications (JMAA). 2007. Vol. 332, № 1. P. 666–690.

[141] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix. Ukrainian Mathematical Journal. 2007. Vol. 59, № 3. P. 395–411.

[142] Noether E. Invariante variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen: Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. P. 235–257.

[143] Okubo A., Levin S.A. Diffusion and ecological problems: modern perspectives, volume 14 of Interdisciplinary Applied Mathematics, second edition. New York: Springer, 2001. 468 p.

[144] Oliveira-Pinto F., Conolly B.W. Applicable Mathematics of Non-Physical Phenomena. New York : Halsted Press, 1982. 269 p.

[145] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations, Vol. 107 of Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1986.

[146] Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations. SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47. P. 263-278.

[147] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heart and wave equations. Phys. Lett. A. 1986. Vol. 118, № 4. P. 172-176.

[148] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. New York :Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publihers], 1982.

[149] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, 2nd Edition. Chapman Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2003.

[150] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. J. Phys. A.: Math. Gen. 2004. V.37. P. 7547–7565.

[151] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations. J. Phys. A.: Math. Gen. 2005. V.38. P. 3145-3155.

[152] Popovych R.O., Vaneeva O. O., Ivanova N.M. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation. Phys. Lett. A. 2007. V.362, № 2-3. P. 166–173.

[153] Qu C., Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method. IMA J. Appl. Math. 1999. V.62, № 3. P. 283–302.

[154] Qu C. Group classification and generalized conditional symmetry reduction of the nonlinear diffusion-convection equation with a nonlinear source. Stud. Appl. Math. 1997. V.99, № 2. P. 107–136.

[155] Reyes E.G. Nonlocal symmetries and Kaup-Kupershmidt equation. J.Phys. 2005. A.46. 073507. 19 p.

[156] Rosen G. Nonlinear heat conduction in solid h2. Phys. Rev. B. 1979. V.19. P. 2398–2399.

[157] Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. Singapore: World Scientific, 2011. 322 p.

[158] Serov M.I., Karpaliuk T.O., Pliukhin O.G., Rassokha I.V. Systems of reaction-convection-diffusion equations invariant under Galilean Algebras. J. Math. Anal. Appl. 2015. V.422. P. 185–211.

[159] Serov M., Prystavka Yu. Nonlocal ansätze, reduction and some exact solutions for the system of the van der Waals equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2020. V. 481, № 1. P. 98-117. doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123442.

[160] Serov M., Serova M., Omelyan O., Prystavka Yu. Application of non-local conversions of equivalence of the system of convection-diffusion equations to the finding of exact solutions. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky: book of abstracts, 20-24 September 2016. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. P. 105-107.

[161] Shonkwiler R., Herod J. Mathematical Biology: An Introduction with Maple and MATLAB. Undergraduate Text in Mathematics. New York: Springer, 2009. 551 p.

[162] Spichak S.V., Stognii V.I.Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion. J. Phys. A. 1999. V. 32, № 47. P. 8341–8353.

[163] Tychynin V. New nonlocal symmetries of diffusion-convection equations and their connection with generalized hodograph transformation. Symmetry. 2015. V. 7, № 4. P. 1751–1767.

[164] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym-type equations. J.Phys. A: Math.Gen. 1994. Vol.27. P. 4549-4556.

[165] Tychynin V.A., Petrova O.V. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations. J. Math. Anal. Appl. 2011. №382. P. 20-33.

[166] Tychynin V.A., Petrova O.V., Tertyshnyk O.M. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations. Symmetry,

Integrability and Geometry: Methods and Applications(SIGMA). 2007. V.3, 019 — 14 p.

[167] Tychynin V.A., Rasin O.G. Nonlocal symmetry and generation of solutions for reaction-diffusion equations. Rep. on Math. Phys. 2005. Vol.55, №2. P. 297-302.

[168] Waniewski J. Theoretical foundations for modeling of mebrane transport in medicine and biomedical engineering. Institute of Computer Science PAS: Warsaw, 2015.

[169] Wilhelmsson H. Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects. Physica Scripta. 1992. Vol. 46. P. 177—181.

[170] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non–linear diffusion–convection equation $u_t=(D(u)u_x)_x-K'(u)u_x$. Int. J. Non-Lin. Mech. 1994. V. 29, № 3. P. 273–278.

[171] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source. J.Phys.A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 7405–7418.

[172] Zhdanov R.Z. Conditional Lie–Backlund symmetry and reduction of evolution equations. J. Phys. A. 1995. V. 28, № 13. P. 3841–3850.

Додаток А

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Про розширення основних симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія. Математика. Механіка. 2015. Випуск 1(33). С. 38-44.

2. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія. Фізико-математичні науки. 2016. Випуск 14. С. 132-139.

3. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Прикарпатський вісник НТШ. 2017. Випуск 1(37). С. 42-52.

4. Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Приставка Ю.В. Застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії до знаходження її точних розв'язків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2017. Випуск 83. С. 123-138.

5. Сєров М.І., Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Нелінійні коливання. 2019. Т. 22, № 1. С. 98-117.

6. Serov M., Prystavka Yu. Nonlocal ansätze, reduction and some exact solutions for the system of the van der Waals equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2020. V. 481, № 1. P. 98-117. doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123442.

Статті в інших наукових виданнях

1. Приставка Ю.В. Точні розв'язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Системи управління, навігації та зв'язку, 2018. Випуск 3(49). С. 78-82.

Тези наукових доповідей, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Приставка Ю.В. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 15-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р. Київ: Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2014. С. 256-257.

2. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Точні розв'язки двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 16-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р. Київ: Т.1. Диференціальні інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ" , 2015. С. 207-208.

3. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції "Прикладні задачі математики" , присвяченої 55-річчю кафедри вищої

математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р. Івано-Франківськ: Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 2016. С. 92-94.

4. Serov M., Serova M., Omelyan O., Prystavka Yu. Application of non-local conversions of equivalence of the system of convection-diffusion equations to the finding of exact solutions. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky: book of abstracts, 20-24 September 2016. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. P. 105-107.

5. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" , 21-22 квітня 2016 р. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 204-205.

Тези наукових доповідей, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Приставка Ю.В. Перетворення еквівалентності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 66-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 15 квітня – 15 травня 2014 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2014. С. 178-179.

2. Приставка Ю.В. Додаткові перетворення двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 67-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 2 квітня – 22 травня 2015 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2015. — С. 198-199.

3. Приставка Ю.В. Симетрійні властивості двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 68-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 19 квітня – 13 травня 2016 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2016. — С. 185-187.

4. Приставка Ю.В. Знаходження точних розв'язків системи рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень еквівалентності. Тези 69-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 19 квітня – 13 травня 2017 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2017. — С. 185-187.

5. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні анзаци та редукція системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Тези 70-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 23 квітня – 18 травня 2018 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2018. С. 173-174.

6. Приставка Ю.В. Ліївські анзаци, редукція та точні розв'язки нелінійного (1+2)–вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 71-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 22 квітня – 17 травня 2019 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2019. С. 143-144.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наступних наукових конференціях і семінарах, у тому числі чотирьох міжнародних і одній всеукраїнській конференціях.

1. 15-а міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ.

2. 16-а міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня 2015 р., Київ.

3. Друга Всеукраїнська наукова конференція, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р., Івано-Франківськ.

4. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky, 20-24 September 2016, Lviv.

5. VII міжнародна наукова конференція, 21-22 квітня 2016 р., Кам'янець-Подільський.

6. Засідання наукового семінару відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (м. Київ, 19.04.2018 р.).

7. Науково-практична конференція-семінар, присвячена 70-ій річниці від дня народження професора Г.М. Губреєва (м. Полтава, 18.05.2018 р.).

8. Засідання наукового семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (м. Київ, 19.11.2018 р.).

9. Засідання наукового семінару "Нелінійні моделі математичної фізики та математичної біології: симетрії, інтегровність, точні та наближені розв'язки" (м. Київ, 21.12.2018 р.),

10. Засідання міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики присвяченому сороковій річниці створення відділу прикладних досліджень (зараз відділ математичної фізики) Інституту математики НАН України (м. Київ, 22.12.2018 р.).

11. Засідання наукового семінару кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 22.05.2019 р.).

12. Наукові конференції науково-педагогічного колективу Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка"

    (66-а — 71-а наукові конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ (м. Полтава, 2014-2019 р.).

13. Засідання наукових семінарів кафедри вищої та прикладної математики Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка" (м. Полтава, 2012-2020 р.).