НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПРИСТАВКА ЮЛІЯ ВАСИЛІВНА

УДК 517.95

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному університеті «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
СЄРОВ Микола Іванович,
Національний університет
«Полтавська політехніка
імені Юрія Кондратюка»,
професор кафедри вищої та прикладної математики

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики;

доктор фізико-математичних наук
Бойко Вячеслав Миколайович,
Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник
відділу математичної фізики

Захист відбудеться "8" вересня 2020 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 3 " серпня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.Б. ВАСИЛИК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні багатьох фізичних, хімічних, біологічних, біохімічних, екологічних процесів часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. Проте, на сьогоднішній день не існує загальних методів точного розв'язання таких рівнянь. Саме тому, задача відшукання точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними дала поштовх до розвитку нових методів інтегрування диференціальних рівнянь.

До сьогодні розроблено цілу низку методів розв'язання диференціальних рівнянь: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, Метод Д'аламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуассона, метод Фур'є та багато інших. Одним із таких методів є метод оберненої задачі теорії розсіяння (та ряд споріднених з ними методів), який було запропоновано у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) та Р. Міури (R. Miura) на прикладі інтегрування нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза. Великий внесок у розвитку методів оберненої задачі теорії розсіювання та створення на його основі нових методів належить українським математикам, зокрема, Ю.М. Березанському, В.О. Марченку, Л.П. Нижнику, Є.Д. Білоколосу, Є.Я. Хруслову та ін.

Серед методів, які з'явилися нещодавно, слід відзначити також асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, важливу роль у розвитку яких відіграли праці А.М. Самойленка, Ю.О. Митропольського, О.М. Станжицького та ін.; варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І.О. Луковським; алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, запропоновані М.О. Перестюком; асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком; чисельно-аналітичний метод знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В.Л. Макаровим, та інші.

При побудові точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними часто використовують сучасні теоретико-групові методи, в основі яких лежить метод видатного норвезького математика Софуса Лі. Даний метод ґрунтується на знаходженні та застосуванні операторів алгебри інваріантності (симетрій Лі) нелінійного рівняння для теоретико-групової редукції та знаходження його точних розв'язків.

Багато науковців продовжили дослідження у цьому напрямку використовуючи і розвиваючи теорію С. Лі. Так, у 1905 р. Пуанкаре застосував ідеї Лі до системи рівнянь Максвела, у 1909 році Г. Бейтман використав симетрійні властивості лінійного хвильового рівняння для побудови його точних розв’язків. Е. Ньотер у 1918 році довела важливі теореми, які пов’язали групи симетрії із законами збереження. Г. Біркгоф наголосив на важливості цих результатів і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці.

Результати С. Лі щодо групового аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними тривалий час залишалися маловідомими. Новий етап розвитку метод Лі отримав у роботах Л.В. Овсяннікова і його школи, якими була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв’язків диференціальних рівнянь. В Україні перші роботи з цієї тематики наприкінці 50-х років XX століття були опубліковані В.Г. Костенком.

У середині 70-х років років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено суттєвий внесок як у класичні, так і в нові методи дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних досягнень необхідно відзначити розроблений В.І. Фущичем і А.Г. Нікітіним новий метод дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, який дістав назву неліївського методу дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна відмінність цього методу від методу С. Лі полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності відповідних диференціальних рівнянь є, як правило, інтегро-диференціальними (псевдодиференціальними) операторами. За допомогою даного методу вдалося знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака, Максвела, Ламе, тощо.

У 80-х роках XX століття очевидною стала обмеженість класичного підходу Лі по відношенню до розв’язання задачі побудови інваріантних анзаців та редукції диференціальних рівнянь, оскільки існували приклади редукцій рівнянь, які не можна було отримати в рамках даного підходу. Крім того, при всіх безперечних перевагах класичного підходу Лі знаходження розв’язків диференціальних рівнянь та їх систем, клас розв’язків рівнянь, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо ж рівняння має бідну ліївську симетрію, або не має її взагалі, то застосування даного методу до побудови розв’язків не дає бажаного результату.

Ці та деякі інші проблеми стимулювали пошук нових підходів до побудови точних розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Основою ряду з числа таких підходів постає ідея пошуку додаткових (неліївських) операторів симетрії. Так, у 1969 р. Дж. Блумен та І.Д. Коул ввели поняття некласичної симетрії і запропонували новий метод для пошуку анзаців і точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Що дозволило знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, які неможливо отримати в рамках класичного методу С. Лі. Цей напрям розвивали в своїх роботах П. Олвер та Розенау. У 80-х роках минулого століття Н.Х Ібрагімовим та Р.Л. Андерсоном було відкрито узагальнені симетрії диференціальних рівнянь, які одержали назву груп Лі–Беклунда.

Новим етапом розвитку симетрійних методів стала розробка В.І. Фущичем разом зі своїми учнями: В.І. Чопиком, І.М. Цифрою та М.І. Сєровим методу умовної симетрії. За допомогою цього методу вдалося побудувати нові розв'язки низки відомих нелінійних рівнянь, які неможливо знайти методами Лі та методом оберненої задачі розсіяння. Дослідження в цьому напрямку плідно провадили українські математики, П.І. Миронюк, В.М. Бойко, Р.О. Попович, Р.М. Черніга та ін.

Інший напрям розв'язання проблеми пошуку додаткових розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, які неможливо одержати стандартним ліївським методом, був запропонований В.І. Фущичем, М.І. Сєровим, Т.К. Амеровим. Вони використали одержане Дж. Кінгом перетворення годографа, яке разом з деякими нелокальними замінами, перетворює нелінійне рівняння теплопровідності в рівняння того ж самого типу, для лінеаризації, побудови нелокальних анзаців, та знаходження нелокальних формул розмноження розв'язків даного рівняння.

Таким чином, розвиток методів теоретико-групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення при знаходженні розв'язків тих диференціальних рівнянь чи систем, для яких інші методи є неефективними.

Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Однією з основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача знаходження найширшої (максимальної) групи симетрії, яку допускає диференціальне рівняння, і не менш важливою є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, яку започаткував С. Лі. Сучасне формулювання задачі групової класифікації було запропоноване Л.В. Овсянніковим, який вперше здійснив повну групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Дослідженнями в цьому напрямку займалося багато українських математиків: А.Г. Нікітін, М.І Сєров, А.Ф. Баранник, Т.А. Баранник, І.І. Юрик та ін.

Важливою також є задача відшукання групи перетворень еквівалентності заданого класу диференціальних рівнянь. Знаходження групи перетворень еквівалентності даного рівняння дає можливість записати його у найбільш простій для дослідження формі. Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквівалентності було внесено І. Ахатовим, Р. Газізовим та Н. Ібрагімовим. Подальший розвиток ці ідеї одержали в роботах В.І. Лагна, С.В. Спічака та В.І. Стогнія, де описано новий підхід до розв’язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі-Овсяннікова, результатом класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності.

Із наведеного вище стає очевидним, що однією із актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь є побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, а, зокрема, задача повної групової класифікації диференціальних рівнянь, що дозволяє із заданого класу рівнянь виділити такі, які володіють широкими симетрійними властивостями. Ще однією важливою задачею теоретико-групового аналізу є розробка ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Розв'язанню таких актуальних задач стосовно нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії і присвячена дана дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано згідно з загальним планом досліджень кафедри вищої та прикладної математики Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є застосування ліївського методу до повної групової класифікації (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії та побудова точних розв’язків даного рівняння, а також застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв’язків даної системи.

Об'єктом дослідження є рівняння реакції-конвекції-дифузії та системи рівнянь конвекції-дифузії.

Предметом дослідження є класифікація ліївських симетрій рівнянь реакції-конвекції-дифузії та знаходження нелокальних анзаців і побудова нелокальних операторів системи рівнянь конвекції-дифузії.

Завдання дослідження:

– знайти основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії;
– провести повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії з точністю до перетворень

еквівалентності;

– побудувати точні розв’язки (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії;
– знайти нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії;
– побудувати нелокальні анзаци, провести редукцію та знайти точні розв’язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса;
– знайти нелокальні анзаци та провести редукцію образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса;
– побудувати нелокальні оператори інваріантності які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Методи дослідження Для виконання групової класифікації рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем рівнянь конвекції-дифузії використано класичний метод Лі. Основні перетворення еквівалентності знайдено з використанням інфінітезимального підходу, запропонованого в роботах Дж. Блумена, І.Д. Коула; І.С. Ахатова, Р.К. Газізова, Н.Х. Ібрагімова та В.І. Лагна, С.В. Спічака, В.І. Стогнія. Для побудови точних розв’язків застосовано методи ліївської та нелокальної редукції, класичні методи інтегрування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну дисертації, виносяться на захист і отримані вперше, є такі:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. Проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.

3. Проведено симетрійну редукцію та знайдено деякі точні розв’язки (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями.

4. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії.

5. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, які використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв’язків системи Ван-дер-Ваальса.

6. Побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

7. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам даної системи.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв’язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії теплопровідності, проникання, дифузії, гідродинаміки, газової динаміки та деяких інших. Точні розв’язки, отримані для окремих систем рівнянь, зокрема системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та деяких рівнянь реакції-конвекції-дифузії, можуть знайти практичне застосування при моделюванні відповідних біофізичних процесів, а також при розв’язуванні цих рівнянь та систем рівнянь числовими методами.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику – М.І. Сєрову. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

У роботах [3, 7, 10, 12, 15] дисертанту належить формулювання та доведення всіх теорем. У роботі [5] дисертанту належить доведення теореми про розширення основних симетрій (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. У роботі [6] дисертанту належить застосування нелокальних перетворень еквівалентності до знаходження точних розв’язків системи рівнянь конвекції-дифузії. У роботі [8] дисертанту належить застосування нелокальних перетворень еквівалентності до знаходження точних розв’язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. У роботі [13] дисертанту належить побудова нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв’язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, а також побудова нелокальних анзаців та проведено редукції обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. У роботі [16] дисертанту належить доведення теорем про необхідні та достатні умови розширення основної алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. У роботі [18] дисертанту належить побудова нелокальних анзаців та нелокальних операторів, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, а також проведення редукції та знаходження деяких точних розв’язків даної системи. У роботах [3, 6-8, 10, 12, 13, 15, 16, 18] М.І. Сєрову належить загальна постановка задач і аналіз отриманих результатів. У роботах [5, 8, 13, 16] М.М. Сєровій належить уточнення формулювань теорем та аналіз зв’язку результатів з попередніми дослідженнями. У роботі [8] О.М. Омеляну належить проведення лінеаризації системи рівнянь конвекції-дифузії $U_t = \partial_x \left[F(U)U_x + G(U) \right]$. У роботі [13] О.М. Омеляну належить побудова нелокальних анзаців, проведення редукції та побудова нелокальних формул розмноження розв’язків для образу лінеаризованої системи $U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x$.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах кафедри вищої та прикладної математики Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», на наукових конференціях науково-педагогічного колективу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, 2014-2019 р.), на 15-й та 16-й Міжнародних наукових конференціях імені акад. Михайла Кравчука (м. Київ, 2014 р., 2015 р.), на VII міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2016 р.), на міжнародній конференції диференціальних рівнянь, присвяченій 110-річчю Я.Б. Лопатинського (International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky) (м. Львів, 2016 р.), на Другій Всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (м. Івано-Франківськ, 2016 р.), на наукових семінарах відділу математичної фізики і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на науково-практичній конференції-семінарі, присвяченій 70-ій річниці від дня народження професора Г.М. Губреєва, на науковому семінарі «Нелінійні моделі математичної фізики та математичної біології: симетрії, інтегровність, точні та наближені розв'язки» (м. Київ, 2018 р.), на міжнародному семінарі «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики», присвяченому сороковій річниці створення відділу прикладних досліджень (зараз відділ математичної фізики) Інституту математики НАН України (м. Київ, 2018 р.), на науковому семінарі кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2019 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у вісімнадцяти роботах [1-18]. Серед них 5 статей [5, 6, 12, 13, 16] у провідних наукових фахових виданнях, що затверджені Міністерством освіти і науки України; стаття [18] в журналі, який індексується міжнародними наукометричними базами даних Scopus та Web of Science. Основні результати дисертації додатково відображено у матеріалах наукових конференцій [1-4, 7-11, 15, 17].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел (172 найменування) і додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 175 сторінок.

Автор дисертації висловлює глибоку вдячність своєму науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору Сєрову Миколі Івановичу, – за постійну увагу до роботи й підтримку під час її виконання.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано наукову новизну, проведено короткий огляд робіт за темою дисертації, сформульовано основні поняття та визначення, що використовуються в роботі, зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд та аналіз літератури, в якій досліджуються симетрійні властивості нелінійних диференціальних рівнянь та систем нелінійних рівнянь з частинними похідними, а також здійснено постановку задач, що розглядаються в наступних розділах.

У **другому розділі** проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \qquad (1)$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ – довільні гладкі функції, $a \in \{1, 2\}$.

У першому підрозділі виписано систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} рівняння (1).

Теорема 2.1. Основною алгеброю інваріантності рівняння (1) є алгебра

$$A^{bas} = < \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} > . \qquad (2)$$

У другому підрозділі, застосувавши метод, запропонований в роботах І.С. Ахатова, Р.К. Газізова, Н.Х. Ібрагімова та В.І. Лагно, С.В. Спічака, В.І. Стогнія, знайдено групу неперервних перетворень еквівалентності рівняння (1).

Теорема 2.2. Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (1) є група перетворень, суперпозиція яких має вигляд

$$\begin{aligned} &u' = e^{\theta}u + m,\ x_0' = e^{\theta_0}x_0 + m_0, \\ &x_a' = e^{\theta_1}(\delta_{ab}cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}sin\theta_2)x_b + q_a x_0 + m_a, \\ &h' = e^{\theta-\theta_0}h,\ f^{0'} = e^{2\theta_1-\theta_0}f^0, \\ &f^{a'} = e^{-\theta_0}[e^{\theta_1}(\delta_{ab}cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}sin\theta_2)f^b - q_a], \end{aligned} \qquad (3)$$

де $q_a, \theta_0, \theta_a, \theta, m_0, m_a, m$ – довільні групові параметри.

У третьому підрозділі одержано необхідні умови розширення алгебри A^{bas}. Зображення одержаних нелінійностей f^0, f^a, h дещо спрощено за допомогою неперервних перетворень еквівалентності (3).

У четвертому підрозділі для кожного з нееквівалентних виглядів функцій f^0, f^a, h що допускають розширення A^{bas} побудовано максимальну алгебру інваріантності.

У п'ятому підрозділі за допомогою прямого методу знайдено всеможливі локальні перетворення, які зводять довільне рівняння класу (1) до рівняння цього ж класу. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності частину одержаних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, нееквівалентних відносно неперервних перетворень, зведено до інших рівнянь даного класу. Таким чином, одержано нееквівалентні зображення нелінійностей f^0, f^a, h та відповідних максимальних алгебр інваріантності рівняння (1) в найбільш спрощеному вигляді.

Теорема 2.3. Будь-яке рівняння (1) зводиться до рівняння

$$v_0 = \partial_a(F^0(v)v_a) + F^a(v)v_a + H(v),$$

за допомогою невиродженої локальної підстановки

$$y_0 = a(x,u), \quad y_a = b^a(x,u), \quad v = c(x,u),$$

тоді і тільки тоді, коли підстановка має вигляд

$$y_0 = a(x_0),\, y_a = b^a(x),\, v = \alpha(x)u + \beta(x),$$

причому функції $a, b^a, \alpha, \beta, f^0, f^a, h, F^0, F^a, H$ задовольняють наступним умовам

$$\dot{a}\alpha(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \neq 0,$$

$$b_a^1 b_a^2 = 0,\; b_a^1 b_a^1 = b_a^2 b_a^2,\; b_a^1 b_a^1 f^0(u) = \dot{a}F^0(v),$$

$$-\frac{2}{\alpha}\frac{d}{du}\left[b_b^a(\alpha_b u + \beta_b) f^0(u)\right] + \Delta a f^0(u) - b_0^a + b_b^a f^b(u) = \dot{a}F^a(v),$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{du}\left[(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a) f^0(u)\right] - (\Delta\alpha u + \Delta\beta)] f^0(u) + \alpha_0 u + \beta_0 -$$

$$-(\alpha_a u + \beta_a) f^a(u) + \alpha h(u) = \dot{a}H(v).$$

За допомогою додаткових перетворень еквівалентності, одержаних в теоремі 2.3, частина рівнянь, отриманих в попередньому підрозділі, зведена до інших рівнянь, що допускають розширення максимальної алгебри інваріантності, і одержано повну групову класифікацію локально нееквівалентних рівнянь класу (1). Результати наведено у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 2.1. Групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (1)

№ п/п	Рівняння	MAI	Умови
1	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + h(u)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12} >$	$f^0 - \forall, h - \forall$
2	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D >$	$f^0 - \forall$
3	$u_0 = \Delta u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a, Q,$ $D, \Pi, Q_\infty >$	
4	$u_0 = \Delta u \pm u \ln u$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, \hat{Q}, H_a >$	
5	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D,$ $D_0 >$	$s = 1$
6	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) \pm e^{mu}$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(s-m)D - 2\ D_0 >$	$m \neq 0$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D, D_0 >$	$k \neq -1; 0$
8	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u^m$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(k-m+1)D - 2D_0 >$	$k \neq -1; 0$ $m \neq 1$
9	$u_0 = \partial_a(u^{-1} u_a)$	$< \partial_0, \partial_a, J_{12}, D_0, X_\infty >$	$k = -1$
10	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) +$ $+\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u) u_a + r e^{(2m-s)u}$	$< \partial_0, \partial_a, (m-s)D +$ $+D_0 + pJ_{12} >$	$m \neq s$ $(m, p) \neq (0, 0)$
11	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + \lambda_a u u_a + r e^{-u}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $D - D_0 - x_0 \lambda_a \partial_a >$	$s = 1$
12	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) +$ $+\lambda_b e^u K_{ab}(u) u_a + r e^u$	$< \partial_0, \partial_a, D_0$ $+pJ_{12} >$	$s = 1$
13	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u) u_a + r u^{2m-k+1}$	$< \partial_0, \partial_a, (m-k)D +$ $+D_0 + pJ_{12} >$	$m \neq k$ $(m, p) \neq (0, 0)$
14	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+\ln u \lambda_a u_a + r u^{-k+1}$	$< \partial_0, \partial_a,$ $kD - D_0 - x_0 \lambda_a \partial_a >$	$k \neq 0$

15	$u_0=\partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)u_a+ru^{k+1}$	$<\partial_0,\partial_a,D_0+pJ_{12}>$	$k\neq 0, p\neq 0$
16	$u_0=\partial_a(u^k u_a)+u^k\lambda_a u_a+\lambda_3 u^{k+1}$	$<\partial_0,\partial_a,D_0>$	$k\neq 0,$ $k^2\lambda_3\neq 4(k+1)$
17	$u_0=\partial_a(u^k u_a)+4\dfrac{k+1}{k}u^k u_1+$ $+4\dfrac{k+1}{k^2}u^{k+1}$	$<\partial_0,\partial_a,D_0,Q_a>$	$k\neq -1;0$
18	$u_0=\Delta u+u\lambda_a u_a\pm u$	$<\partial_0,\partial_a,G_a>$	
19	$u_0=\Delta u+u\lambda_a u_a$	$<\partial_0,\partial_a,D-u\partial_u,$ $G>$	
20	$u_0=\Delta u+\ln u\lambda_a u_a$	$<\partial_0,\partial_a,G>$	
21	$u_0=\Delta u+\ln u\lambda_a u_a\pm u\ln u$	$<\partial_0,\partial_a,H>$	
22	$u_0=\Delta u\pm 2\ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2 u(\ln^2 u+q)$	$<\partial_0,\partial_a,Y>$	

У таблиці введені наступні позначення: $K_{ab}(u)=\delta_{ab}\cos pu+\varepsilon_{ab}\sin pu$, δ_{ab} – символ Кронекера, $(\delta_{ab})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, ε_{ab} – антисиметричний тензор, $(\varepsilon_{ab})=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $J_{12}=x_2\partial_1-x_1\partial_2$, $D=2x_0\partial_0+x_a\partial_a$, $G_a=x_0\partial_a+x_aQ$,

$Q=-\dfrac{1}{2}u\partial_u$, $\Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_a\partial_a-(x_0+\dfrac{\vec{x}^2}{4})u\partial_u$, $H_a=e^{\pm x_0}(\partial_a\mp\dfrac{1}{2}x_a u\partial_u)$,

$\hat{Q}=e^{\pm x_0}u\partial_u$, $D_0=sx_0\partial_0-\partial_a$, $D_0=kx_0\partial_0-u\partial_a$, $H=e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_0\mp u\partial_u)$,

$G_a=e^{\mp x_0}(\partial_a\mp\dfrac{\lambda_a}{\vec{\lambda}^2}\partial_u)$, $G=x_0\lambda_a\partial_a-\partial_u$, $G=x_0\lambda_a\partial_a-u\partial_u$, $Y=e^{\vec{\lambda}^2x_0\mp\vec{\lambda}\vec{x}}u\partial_u$,

$Q_1=e^{-x_1}(\cos x_2\partial_1-sinx_2\partial_2-\dfrac{2}{k}cosx_2u\partial_u)$,

$Q_2=e^{-x_1}(sinx_2\partial_1+cosx_2\partial_2-\dfrac{2}{k}sinx_2u\partial_u)$,

$Q_\infty=b(x_0,\vec{x})\partial_u$, $b(x_0,\vec{x})$, – довільний розв’язок рівняння $b_0=\Delta b$,

$\hat{Q}_\infty = \beta(x_0, \vec{x})\partial_u$, $\beta(x_0, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння $\beta_0 = \Delta\beta \pm \beta$, $X_\infty = A(\vec{x})\partial_1 + B(\vec{x})\partial_2 - 2uC(\vec{x})\partial_u$, $A(\vec{x})$, $B(\vec{x})\partial_2$, $C(\vec{x})$ пов'язані співвідношеннями $A_1 = B_2 = C$, $A_2 = -B_1$, $k, m, p, q, \lambda_1, \lambda_2$, – довільні сталі, $r \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$, $\vec{\lambda}^2 \neq 0$.

У шостому підрозділі за знайденими операторами інваріантності побудовано нееквівалентні ліївські анзаци та проведено симетрійну редукцію деяких рівнянь класу (1). В окремих випадках знайдено точні розв'язки рівняння (1) зі степеневими нелінійностями, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

Таким чином, у даному розділі проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії з точністю до перетворень еквівалентності даного рівняння, а також використано його симетрійні властивості для побудови точних розв'язків рівняння (1) зі степеневими нелінійностями.

У третьому розділі розв'язано задачу знаходження нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x, \tag{4}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $K(U) = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, t – часова змінна, x – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $k^{ab} = k^{ab}(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$. Знайдені нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції і знаходження точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Нехай матриця $K(U)$ така, що її компоненти задовольняють умову

$$k^{11}_{u^2} = k^{12}_{u^1}, \quad k^{21}_{u^2} = k^{22}_{u^1}.$$

Тоді існують такі функції g^1 та g^2, що система (4) набуде вигляду

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{5}$$

де $G(U) = \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix}$.

У першому підрозділі знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії (5).

Теорема 3.1. Суперпозиція перетворень:

$$t = t, \ x = x, \ u^a = v^a{}_x, \tag{6}$$

де $v^a = v^a(t,x)$ – нові невідомі функції;

$$t = x_0,\ x = w^1,\ v^1 = x_1,\ v^2 = w^2, \tag{7}$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні;

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_1,\ w^a{}_1 = z^a, \tag{8}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні; є нелокальними перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (5).

Оскільки система (5) містить дві функції u^1 і u^2, то перетворення годографа вигляду (7) не єдино можливе для цієї системи. Так, якщо в (7) замінити

$$v^1 \to v^2,\quad v^2 \to v^1,\quad w^1 \to w^2,\quad w^2 \to w^1,$$

то замість (7) одержимо

$$t = x_0,\quad x = w^2,\quad v^1 = w^1,\quad v^2 = x_1. \tag{9}$$

Теорема 3.2. Суперпозиція перетворень (6), (9), (8) є нелокальними перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (5).

Перетворення (6)-(8) назвемо перетвореннями першого типу для системи (5) і позначимо їх P_1, а перетворення (6), (9), (8) – перетвореннями другого типу і позначимо їх P_2.

У другому підрозділі розглянуто систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1 u_x^1 + \mu u^2 u_x^2, \\ u_t^2 &= \lambda_2 u_{xx}^2 - u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1, \end{aligned} \tag{10}$$

де $x = (x_0, x_1)$, $u^a = u^a(x)$, λ_1 – коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 – коефіцієнт дифузії, μ – коефіцієнт конвекції, $a \in \{1,2\}$, яка широко використовується у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин. Ця система входить до класу систем рівнянь (5).

За допомогою перетворень P_1 та P_2 знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та досліджено симетрійні властивості цих образів. Якщо до системи (10) застосувати перетворення P_1, то одержимо систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{\left(z^1\right)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2\left(z^1\right)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu\left(z^1\right)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu\left(z^2\right)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \right], \tag{11}$$

яку назвемо першим образом системи (10) і позначимо O_1. Якщо до системи (10) застосувати перетворення P_2, то одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{\left(z^2\right)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^2 & (\lambda_2 - \lambda_1) z^1 \\ 0 & \lambda_2 z^2 \end{pmatrix} Z_1 + \frac{1}{2\left(z^2\right)^2} \begin{pmatrix} \left(z^1\right)^2 + \mu \\ 2z^1 z^2 \end{pmatrix} \right], \qquad (12)$$

яку назвемо другим образом системи (10) і позначимо O_2.

Використавши те, що система (10) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея і провівши повний аналіз її симетрійних властивостей, одержано наступне твердження.

Теорема 3.3. Максимальною алгеброю інваріантності системи (10) в залежності від співвідношень між сталими λ_1, λ_2, μ є наступні алгебри

1) $AG_2(1,1)$, якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu \neq 0$;

2) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2} >$, якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu = 0$;

3) $< AG_2(1,1), u^1\partial_{u^1} >$, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu \neq 0$;

4) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^1}, u^2\partial_{u^2} >$, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0$,

де $AG_2(1,1) =< \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + \partial_{u^1}, D = 2t\partial_t + x\partial_x - I, \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI +$ $+x\partial_{u^1} >,\ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_{u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}, \partial_{u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2},\ I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Результатом дослідження симетрійних властивостей системи (11) є наступне твердження.

Теорема 3.4. Максимальною алгеброю інваріантності системи (11) є алгебра

1) $A^{bas} =< \partial_0, \partial_1,\quad D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} >$, якщо $\mu \neq 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) $A =< A^{bas},\quad z^2\partial_{z^2} >$, якщо $\mu = 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

3) $A =< A^{bas},\quad z^2\partial_{z^2},\quad e^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2} >$, якщо $\mu = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_{z1} = \frac{\partial}{\partial z^1},\quad \partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}$.

Результатом дослідження симетрійних властивостей системи (12) є така теорема.

Теорема 3.5. Максимальною алгеброю інваріантності системи (12) є алгебра

1) $A^{bas} =< \partial_0,\quad \partial_1,\quad D_1 = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2},\quad Q = z^2\partial_{z^1} >$, якщо $\mu \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) $A =< A^{bas},\quad D_2 = x_1\partial_1 - I >$, якщо $\mu = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$;

3) $A =< A^{bas}, \quad D_2 = x_1\partial_1 - I, \quad K = x_1^2\partial_1 - 2x_1 I + 2\partial_{z^1} >$, якщо $\mu = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

4) $A =< A^{bas}, \quad Q_1 = e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - I), \quad Q_2 = e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + I) >$, якщо $\mu = -1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

5) $A =< A^{bas}, \quad Q_1 = \cos x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + \sin x_1 I, \qquad Q_2 = \sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) - -\cos x_1 I >$ якщо $\mu = 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

У третьому підрозділі результати теореми 3.3, 3.4 та 3.5 використано для побудови нееквівалентних лiївських анзаців системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та її образів:

У четвертому підрозділі з лiївських анзаців першого та другого образів за допомогою перетворень P_1 та P_2 побудовані нелокальні анзаци та проведено редукцію системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Нелокальні анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, одержані з першого образу:

$$u^1 = 2\frac{\dot{\varphi}^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = \varphi^2(\omega) + 2e^{-mt}\dot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x;$$

$$u^1 = 2\frac{\dot{\varphi}^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = \varphi^2(\omega) + 2e^{-m\ln t}\dot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Нелокальні анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, одержані з другого образу: при $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}(\varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega)\tan\alpha), \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\dot{\varphi}^2(\omega)\cos^{-2}\alpha, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega)\tan\alpha, \quad u^2 = \dot{\varphi}^2(\omega)\cos^{-2}\alpha, \quad \omega = x;$$

при $\mu = -1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\cot\alpha, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin\alpha}, \quad \omega = x;$$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\coth\alpha, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sinh\alpha}, \quad \omega = x;$$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad \omega = x;$$

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\cot\alpha, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin\alpha}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\coth\alpha, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sinh\alpha}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

при $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - 2\frac{\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega)}{A}, \quad u^2 = 2e^t\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{A}, \quad \omega = x;$$

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}[\varphi^1(\omega) - 2\frac{\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega)}{B}], \quad u^2 = 2\sqrt{t}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{B}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Анзаци, які наведено вище, редукують систему рівнянь Ван-дер-Ваальса до систем звичайних диференціальних рівнянь.

У п'ятому підрозділі побудовано нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Нелокальні анзаци першого образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса:

$$z^1 = \frac{1}{\varphi^1(\omega) - 2kx_0}, \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega) - 2kx_0}, \quad \omega = \tau + kx_0^2, \quad \tau_1 = z^1;$$

$$z^1 = \frac{\sqrt{x_0^2+1}}{\varphi^1(\omega) + x_0\omega}, \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega) + x_0\omega}, \quad \omega = \frac{\tau}{\sqrt{x_0^2+1}}, \quad \tau_1 = z^1.$$

Нелокальний анзац другого образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса:

$$z^1 = \varphi^1(\omega) + x_0\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0^2+1}\dot{\varphi}^2(\omega), \quad \omega = x_1.$$

Анзаци, які наведено вище, редукують системи (11) та (12) до систем звичайних диференціальних рівнянь.

У шостому підрозділі розв’язано деякі з редукованих рівнянь системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та за допомогою відповідних анзаців побудовано класи її точних розв’язків. Вивчено асимптотику одержаних розв’язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

У сьомому підрозділі знайдено нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса:

для випадку $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_1 = \partial_t - \frac{m}{2}e^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2};$$

$$Q_2 = 2t\partial_t + x\partial_x - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2} - 2me^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2};$$

$$Q_3 = m\partial_t - 2u^2\partial_{u^1} - 2v^2u^2\partial_{u^2};$$

$$Q_4 = 2t\partial_t + mx\partial_x - (mu^1 + 4u^2)\partial_{u^1} - (mu^2 + 4v^2u^2)\partial_{u^2},$$

для випадку $\mu = -1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_5 = km\partial_t + (m^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2\partial_{u^1} + (m^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2\partial_{u^2};$$

$$Q_6 = kn\partial_t - (n^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2\partial_{u^1} - (n^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2\partial_{u^2};$$

$$Q_7 = l\partial_t - e^{-v^2}u^2(\partial_{u^1} - \partial_{u^2});$$

$$Q_8 = 2kmt\partial_t + kmx\partial_x + [kmu^1 + 2(m^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1} +$$

$$+[kmu^2 + 2(m^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2}$$

$$Q_9 = 2knt\partial_t + knx\partial_x - [knu^1 + 2(n^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1} -$$

$$-[knu^2 + 2(n^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2}$$

$$Q_{10} = 2l\partial_t + lx\partial_x - (lu^1 - 2e^{v^2}u^2)(\partial_{u^1} + \partial_{u^2}),$$

для випадку $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_{11} = \partial_t + u^2 \sin v^2 \partial_{u^1} - u^2 \cos v^2 \partial_{u^2};$$

$$Q_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x - (u^1 - 2u^2 \sin v^2)\partial_{u^1} - (u^1 + 2u^2 \cos v^2\partial_{u^2}),$$

де $v^1 = \int u^1 dx$, $v^2 = \int u^2 dx$.

Так як координати операторів $Q_1,...,Q_{12}$ залежать від v^1, v^2, то це говорить про те, що дані оператори є нелокальними операторами інваріантності системи рівнянь Ван-дер-Ваальса (10).

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати наступним чином:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
2. З точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії.
3. Побудовано точні розв’язки рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями, досліджено властивості деяких з отриманих розв’язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

4. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії, які застосовано для дослідження системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

5. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії, та досліджено симетрійні властивості цих образів.

6. Використано симетрійні властивості першого та другого образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження деяких точних розв'язків цієї системи.

7. За допомогою нелокальних перетворень еквівалентності знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

8. Знайдено точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію.

9. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Приставка Ю.В. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 15-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р. Київ: Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. С. 256-257.
2. Приставка Ю.В. Перетворення еквівалентності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 66-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 15 квітня – 15 травня 2014 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2014. С. 178-179.
3. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Точні розв'язки двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали 16-ї міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р. Київ: Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ :НТУУ «КПІ», 2015. С. 207-208.
4. Приставка Ю.В. Додаткові перетворення двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 67-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 2 квітня – 22 травня 2015 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2015. С. 198-199.

5. Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Про розширення основних симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія. Математика. Механіка. 2015. Випуск 1(33). С. 38-44.
6. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія. Фізико-математичні науки. 2016. Випуск 14. С. 132-139.
7. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв’язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції «Прикладні задачі математики», присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р. Івано-Франківськ: Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 2016. С. 92-94.
8. Serov M., Serova M., Omelyan O., Prystavka Yu. Application of non-local conversions of equivalence of the system of convection-diffusion equations to the finding of exact solutions. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky: book of abstracts, 20-24 September 2016. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. P. 105-107.
9. Приставка Ю.В. Симетрійні властивості двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 68-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 19 квітня – 13 травня 2016 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2016. С. 185-187.
10. Сєров М.І. Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», 21-22 квітня 2016 р. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 204-205.
11. Приставка Ю.В. Знаходження точних розв’язків системи рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень еквівалентності. Тези 69-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 19 квітня – 13 травня 2017 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2017. С. 217-219.
12. Сєров М.І. Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв’язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Прикарпатський вісник НТШ. 2017. Випуск 1(37). С. 42-52.

13. Сєров М.І. Сєрова М.М., Омелян О.М., Приставка Ю.В. Застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії до знаходження її точних розв’язків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2017. Випуск 83. С. 123-138.
14. Приставка Ю.В. Точні розв’язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Системи управління, навігації та зв’язку, 2018. Випуск 3(49). С. 78-82.
15. Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні анзаци та редукція системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Тези 70-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 23 квітня – 18 травня 2018 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2018. С. 173-174.
16. Сєров М.І., Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Нелінійні коливання. 2019. Т. 22, № 1. С. 98-117.
17. Приставка Ю.В. Ліївські анзаци, редукція та точні розв’язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Тези 71-ої наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів на студентів ПолтНТУ, 22 квітня – 17 травня 2019 р. Полтава: Т.1. Полтава: ПолтНТУ, 2019. С. 143-144.
18. Serov M., Prystavka Yu. Nonlocal ansätze, reduction and some exact solutions for the system of the van der Waals equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2020. V. 481, № 1. doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123442

АНОТАЦІЇ

Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та точні розв’язки рівнянь реакції-конвекції-дифузії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей та побудові точних розв’язків нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. У дисертаційній роботі для рівняння реакції-конвекції-дифузії проведено класифікацію ліївських симетрій та знайдено деякі точні розв’язки рівнянь зі степеневими нелінійностя-

ми. Для системи рівнянь конвекції-дифузії побудовано нелокальні анзаци та нелокальні оператори, які їм відповідають. За допомогою знайдених анзаців проведено редукцію даних рівнянь, а також знайдено деякі їх точні розв'язки.

З точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Побудовано точні розв'язки рівняння реакції-конвекції-дифузії зі степеневими нелінійностями, досліджено властивості деяких з отриманих розв'язків та наведено їх геометричну інтерпретацію. Отримано нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. Дані перетворення використані для дослідження системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Знайдено два образи системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка входить до класу систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії, та досліджено симетрійні властивості цих образів. Здійснено побудову нелокальних анзаців, проведено редукцію та знайдено деякі точні розв'язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Знайдено нелокальні анзаци та проведено редукцію обох образів системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Побудовано нелокальні оператори інваріантності, які відповідають нелокальним анзацам даної системи.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, алгебра Лі, група еквівалентності, рівняння реакції-конвекції-дифузії, система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, нелокальний анзац, точні розв'язки.

Приставка Ю.В. «Симметрийные свойства и точные решения уравнений реакции-конвекции-диффузии». — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена исследованию симметрийных свойств и построению точных решений нелинейных уравнений реакции-конвекции-диффузии и систем нелинейных уравнений конвекции-диффузии.

С точностью до преобразований эквивалентности проведена полная групповая классификация симметрийных свойств (1+2)-мерного уравнения реакции-конвекции-диффузии. Построены точные решения уравнения реакции-конвекции-диффузии со степенными нелинейностями, исследованы свойства некоторых из полученных решений и приведена их геометрическая интерпретация. Найдены нелокальные преобразования эквивалентности системы нелинейных уравнений конвекции-диффузии. Данные преобразования использованы для исследования системы уравнений Ван-дер-Ваальса.

Получены два образа системы уравнений Ван-дер-Ваальса, которая входит в класс систем нелинейных уравнений конвекции-диффузии, и исследованы симметрийные свойства этих образов. Осуществлено построение нелокальных анзацев, проведена редукция и найдены некоторые точные решения системы уравнений Ван-дер-Ваальса. Найдены нелокальные анзацы и проведена редукция обоих образов системы уравнений Ван-дер-Ваальса. Построено нелокальные операторы инвариантности, соответствующие нелокальным анзацам.

Prystavka Yu.V. Symmetry properties and exact solutions of the reaction-convection-diffusion equations. – Manuscript.

Thesis for a Candidate degree in Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 – differential equations. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of symmetry properties and the construction of exact solutions of nonlinear reaction-convection-diffusion equations and systems of nonlinear convection-diffusion equations. In the thesis work, for classification of reaction-convection-diffusion equations, we classified Lie symmetries and found some exact solutions of equations with power nonlinearities. The nonlocal ansätze and nonlocal operators corresponding to them are constructed for the system of convection-diffusion equations. With the help of the found ansätze, the data of the equations were reduced and some exact solutions of them were found.

The reaction-convection-diffusion equation is widely used in physics, biology, chemistry, ecology and other fields of science. It is used to describe various physical processes, including thermal conductivity, diffusion, and convection. This equation is used to model the motion of particles, energy or other physical quantities in a particular physical system. Thus, modifications of the reaction-convection-diffusion equation are used to model the transfer of energy in plasma, the distribution of solutions in soil, movement of liquids in a porous medium, processes of chemotaxis and other biochemical processes. At specific values of nonlinearities, the reaction-convection-diffusion equation is used in biology, in particular when describing oxygen transfer in circulatory system, for modelling the growth of a blood clot in the parietal flow. One of the applications of this equation in ecology is to study the processes of propagation of substance which contaminates water basins. Hydrodynamic instability, which occurs near the surface of the distribution of two immiscible liquids and is described by the reaction-convection-diffusion equation, is found in such fields as oil refining, combustion processes, ore separation, etc.

The system of nonlinear convection-diffusion equations with specific nonlinearities is widely used to describe various physical, chemical and biological processes. Thus, mathematical models based on this system are used in macrokinetics, the main subject matter of which is to study the role of diffusion, heat transfer and convection in the course of chemical reactions. Solution of a wide range of scientific and technical problems involves the study of the phenomenon of free convection. The process of heat and mass transfer is of great practical importance for intensification of thermal energy and chemical-technological processes in various fields of the industry. Systems of convection-diffusion equations are widely used in the biological sciences for modelling processes and phenomena of wildlife, in particular for describing the phenomenon of chemotaxis of microorganisms, for describing competition of animals in a particular territory and others. Systems of this class describe the movement of fluid in porous medium, transfer of energy in plasma, distribution of substances in soil and many other processes. In our work, we study the van der Waals equation system, which is a class of the convection-diffusion equation systems. The van der Waals equation system is widely used in the molecular kinetic theory of gases and liquids. It describes the processes related to the passage of gas into liquid and vice versa.

A complete group classification of the symmetry properties of the (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion equation was carried out to within equivalence transformations. The exact solutions of the reaction-convection-diffusion equation with power nonlinearities are constructed, the properties of some of the solutions obtained are investigated and their geometrical interpretation is given. Nonlocal equivalence transformations of a system of nonlinear convection-diffusion equations are found. These transformations are used to study the system of the van der Waals equations. Two images of the van der Waals system of equations, which belongs to the class of systems of nonlinear convection-diffusion equations, are obtained, and the symmetry properties of these images are investigated. The nonlocal ansätze were constructed, a reduction was carried out, and some exact solutions of the van der Waals system of equations were found. Nonlocal ansätze were found, and both images of the van der Waals system of equations were reduced. Nonlocal operators of invariance, which correspond to the nonlocal ansätze of this system, are constructed.

Keywords: symmetry, invariance, Lie algebra, equivalence group, reaction-convection-diffusion equation, system of convection-diffusion equations, nonlocal equivalence transformations, the van der Waals equation system, nonlocal ansatz, exact solutions.