Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Герасимова Тетяна Григорівна

УДК 512.64

ДИСЕРТАЦІЯ

Лінійно-алгебраїчні методи в теорії операторів

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
__________ Т.Г. Герасимова

Науковий керівник
Сергейчук Володимир Васильович
доктор фіз.–мат. наук, професор

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ

Герасимова Т.Г. Лінійно-алгебраїчні методи в теорії операторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 "Алгебра та теорія чисел". — Київський національний університет імені Тараса Шевченка. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

В дисертаційній роботі розглядаються певні класифікаційні задачі лінійної алгебри, а саме: класифікація взаємоанулюючих матриць над будь-яким полем, класифікація матриць які є самоконгруентими за допомогою матриць з одиничним визначником, критерії унітарної подібності для матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

В першому розділі розглядається задача класифікації пар взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$ на скінченновимірному векторному просторі V. Пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ були класифіковані І. Гельфандом та В. Пономарьовим [30] над алгебраїчно замкненим полем методом лінійних відношень та Л. Назаровою, А. Ройтером, В. Сергейчуком та В. Бондаренко [54] над довільним полем $\mathbb{F}$ з класифікації скінченнопороджених модулів над діадою двох дедекіндових кілець. В цьому розділі надані канонічні форми матриць $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ над будь-яким полем у явній формі, а також дано конструктивне доведення: матриці $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ послідовно зводяться до їх канонічних форм перетвореннями подібності $(A, B) \mapsto (S^{-1}AS, S^{-1}BS)$, де S — певна невироджена матриця.

На це дослідження надихнула стаття Облак, в якій характеризуються усі можливі пари канонічних форм Жордана (J_A, J_B) для пар (A, B) взаємоанулюючих матриць $AB = BA = 0$ над алгебраїчно замкненим полем. Для цього, одна матриця зводиться до Жорданової нормальної форми, а

далі використовуються тільки ті перетворення подібності, що зберігають її та зводять другу матрицю до простої форми. В цьому розділі продовжено зведення другої матриці поки не отримано канонічну форму (A, B).

Д. Доковіч та Ф. Зехтман [19] розглянули векторний простір V, наділений білінійною формою. Вони довели, що ізометрії V над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2 мають визначник 1 тоді та тільки тоді коли V не має ортогональних доданків непарної розмірності (випадок характеристики 2 був також розглянутий). Їх доведення базується на класифікації білінійних форм Ріма. Е. Коклі, Ф. Допіко та Р. Джонсон [14] надали інше доведення цього критерію над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$, використовуючи канонічні пари Томпсона [69] симетричних та кососиметричних матриць відносно конгруентності. Нехай M — матриця білінійної форми на V. В другому розділі дисертаційної роботи наведено інше доведення цього критерію над $\mathbb{F}$ та отримано необхідні та достатні умови, використовуючи канонічні форми M для конгруентності, пари (M^T, M) для еквівалентності, та $M^{-T}M$ (якщо M невироджена) для подібності.

Класичною задачею лінійної алгебри є наступна: якщо A та B комплексні квадратні матриці, тоді як можна визначити чи A та B унітарно подібні (тобто, $U^{-1}AU = B$ для унітарної U)? Більш точно, які інваріанти повністю визначають матрицю з точністю до унітарної подібності?

Нагадаємо декілька відомих розв'язків цієї задачі:

Теорема Шпехта. Матриці A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли

$$\operatorname{trace} \omega(A, A^*) = \operatorname{trace} \omega(B, B^*)$$

для усіх слів ω з двох некомутуючих змінних.

Алгоритм Літлвуда. Літлвуд побудував алгоритм, що зводить кожну квадратную комплексну матрицю A перетворенням подібності до певної матриці A_{can} таким чином, що A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, якщо вони зводяться до однакової матриці $A_{\mathrm{can}} = B_{\mathrm{can}}$. Таким чином, матриці, що не змінні за цим алгоритмом є канонічними відносно унітарної подібності.

Критерій Арвесона. Нехай A та B — це $n \times n$ комплексні матриці, та нехай A не унітарно подібна до прямої суми квадратних матриць менших розмірів. Тоді A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли

$$\|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes A\|_{\mathrm{sp}} = \|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes B\|_{\mathrm{sp}} \text{ для усіх } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad (1)$$

де $\|M\|_{\mathrm{sp}}$ — спектральна норма матриці M. Спектральна норма матриці M — це найбільше сингулярне число M (квадратний корінь найбільшого власного числа додатньонапіввизначеної матриці M^*M). Спектральна норма — це спеціальний випадок операторної норми оскільки

$$\|M\|_{\mathrm{sp}} = \max_{|v|=1} |Mv|$$

в якій $|\cdot|$ — це Евклідова норма векторів.

В дисертації показано, що спектральна норма в критерії Арвесона не може бути замінена на норму Фробеніуса

$$\|C\| := \sqrt{\sum |c_{ij}|^2} \qquad \text{для кожної } C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Мета цього розділу надати критерій унітарної подібності матриць, що є аналогом критерію Арвесона (3.3), але з многочленами над $\mathbb{C}$ замість матричних многочленів.

Норма Фробеніуса для матриць не змінюється при множенні на унітарні матриці. Таким чином, якщо A та B унітарно подібні матриці, тоді $\|A\| = \|B\|$; більш того,

$$\|h(A)\| = \|h(B)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x].$$

Доведено, що зворотнє твердження виконується, якщо A — це верхньотрикутна матриця Тьопліца з ненульовою головною діагоналлю та B — довільна матриця.

Зворотнє твердження не виконується навіть для матриць

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Доведено, що A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, якщо

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n,$$

де $A_k := [a_{ij}]_{i,j=1}^k$ та $B_k := [b_{ij}]_{i,j=1}^k$ є лідуючими основними $k \times k$ підматрицями A та B, та $\| \cdot \|$ — норма Фробеніуса.

У наступному розділі надано декілька критеріїв унітарної подібності нормальної матриці A та довільної матриці B у термінах норми Фробеніуса та спектральної норми, характеристичних многочленів та слідів матриць.

Нехай $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ — задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. В п'ятому розділі наведений алгоритм, що визначає за скінченну кількість обчислень, чи існує одна унітарна матриця U така, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

Ця задача включає як спеціальний випадок задачу визначення чи скінченна кількість пар матриць є одночасно унітарно подібними ($\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$), а також задачу визначення чи скінченна кількість пар матриць є одночасно унітарно конгруентними ($\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$).

В останньому розділі надано алгоритм, що для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад. Канонічна форма пари (A, B) відносно конгруентності гарантує, що $(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ — регулярна частина (A, B) — визначена з точністю до конгруентності, та $(A_1, B_1), \dots, (A_t, B_t)$ — вироджені доданки — однозначно визначені з точністю до перестановок.

Надано регуляційний алгоритм, що використовує елементарні перетворення матриць та кожній парі кососиметричних матриць над полем характеристики не 2 будує її регуляційний розклад відносно конгруентності. Регуляційні алгоритми були побудовані для матричних пучків В. Дуреном [70], для циклів лінійних відображень В. Сергейчуком [65] та А. Варгою [71], та для квадратних матриць відносно конгруентності та *конгруентності Р. Хорном та В. Сергейчуком [39].

Регуляційний розклад — це перший крок до зведення (A, B) до її канонічної форми відносно конгруентності: кожна пара кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики не 2 конгруентна прямій сумі, визначеній однозначно з точністю до перестановки доданків, пари цих форм

$$\mathcal{J}_n(\lambda) := \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & J_n(\lambda) \\ -J_n(\lambda)^T & 0 \end{bmatrix} \right) \ (\lambda \in \mathbb{F}), \quad \mathcal{K}_n, \quad \mathcal{L}_n,$$

де

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (n\text{-на-}n).$$

Якщо $\mathbb{F}$ не алгебраїчно замкнене, тоді $J_n(\lambda)$ замінено на будь-які нерозкладні канонічні матриці відносно подібності; наприклад, $J_n(\lambda)$ може бути замінений на блок Фробеніуса

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & & 1 & -c_1 \end{bmatrix},$$

в якому $p(x)^\ell = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$ — цілий степінь многочлена $p(x)$, що незвідний над $\mathbb{F}$. Ця канонічна форма пар кососиметричних матриць відносно конгруентності була наведена Шарлау [67] в термінах модулів Кронекера.

Надано інше доведення канонічних форм пар кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем на основі регуляційного алгоритму.

Дмитришин та Крьогрстрьом [17,18] побудували мініверсальні трансформації пар кососиметричних матриць (A, B) відносно подібності та вивчили як маленькі збурення A та B змінюють канонічні форми (A, B) відносно конгруентності.

Розглянуті задачі належать до напрямку, в якому працюють багато українських та іноземних науковців. Все вищезазначене свідчить про актуальність теми дисертації.

Ключові слова: канонічна форма, унітарна подібність, конгруентність, алгоритм регуляризації.

ABSTRACT

Gerasimova T.G. Linear-algebraic methods in operator theory. — Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.06 "Algebra and the theory of numbers". — Taras Shevchenko National University of Kyiv. — Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

Several aspects of the classification problem in linear algebra are considered: classification of pairs of mutually annihilating operators, classification of matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one, criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position and normal matrices, simultaneous unitary equivalences, and reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence.

Pairs $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ of mutually annihilating operators $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$ on a finite dimensional vector space over an algebraically closed field were classified

by Gelfand and Ponomarev [30] by method of linear relations. The classification of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ over any field was derived by Nazarova, Roiter, Sergeichuk, and Bondarenko [54] from the classification of finitely generated modules over a dyad of two local Dedekind rings. It is given canonical matrices of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ over any field in an explicit form and our proof is constructive: the matrices of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ are sequentially reduced to their canonical form by similarity transformations $(A,B)\mapsto(S^{-1}AS,S^{-1}BS)$.

This research was inspired by Oblak's article, in which she characterizes all possible pairs of Jordan canonical forms (J_A,J_B) for pairs (A,B) of mutually annihilating matrices $AB=BA=0$ over an algebraically closed field. For this purpose, she puts one matrix in Jordan form, then she uses only those similarity transformations that preserve it and reduces the second matrix to a simple form. We continue to reduce the second matrix until obtain a canonical form of (A,B).

Đocović and Szechtman [19] considered a vector space V endowed with a bilinear form. They proved that all isometries of V over a field $\mathbb{F}$ of characteristic not 2 have determinant 1 if and only if V has no orthogonal summands of odd dimension (the case of characteristic 2 was also considered). Their proof is based on Riehm's classification of bilinear forms. Coakley, Dopico, and Johnson [14] gave another proof of this criterion over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ using Thompson's [69] canonical pairs of symmetric and skew-symmetric matrices for congruence. Let M be the matrix of the bilinear form on V. It is given another proof of this criterion over $\mathbb{F}$ using our canonical matrices for congruence and obtain necessary and sufficient conditions involving canonical forms of M for congruence, of (M^T,M) for equivalence, and of $M^{-T}M$ (if M is nonsingular) for similarity.

A classical problem in linear algebra is the following one: if A and B are square complex matrices, then how can one determine whether A and B are unitarily similar (i.e., $U^{-1}AU=B$ for a unitary U)? More precisely, which invariants completely determine a matrix up to unitary similarity?

Let us recall several known solutions to this problem:

Specht's theorem. *Matrices A and B are unitarily similar if and only if*

$$\operatorname{trace} \omega(A, A^*) = \operatorname{trace} \omega(B, B^*)$$

for all words ω in two noncommuting variables.

Littlewood's algorithm. Littlewood constructed an algorithm that reduces each square complex matrix A by transformations of unitary similarity to some matrix A_{can} in such a way that A and B are unitarily similar if and only if they reduce to the same matrix $A_{\text{can}} = B_{\text{can}}$. Thus, the matrices that are not changed by Littlewood's algorithm are *canonical with respect to unitary similarity.*

Arveson's criterion. Let A and B be $n \times n$ complex matrices, and suppose that A is not unitarily similar to a direct sum of square matrices of smaller sizes. Then A *and* B *are unitarily similar if and only if*

$$\|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes A\|_{\text{sp}} = \|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes B\|_{\text{sp}} \text{ for all } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad (2)$$

where $\|M\|_{\text{sp}}$ is the spectral norm of M. The spectral norm of M is the largest singular value of M (which is the square root of the largest eigenvalue of the positive-semidefinite matrix M^*M). The spectral norm is a special case of the operator norm since

$$\|M\|_{\text{sp}} = \max_{|v|=1} |Mv|$$

in which $|\cdot|$ is the Euclidean norm of vectors.

We show that the spectral norm in Arveson's criterion cannot be replaced by the *Frobenius norm*

$$\|C\| := \sqrt{\sum |c_{ij}|^2} \qquad \text{for each } C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

The purpose of this chapter is to give a criterion for unitary similarity of matrices that is analogous to Arveson's condition (3.3), but with polynomials over $\mathbb{C}$ instead of matrix polynomials.

The Frobenius norm of a matrix does not change under multiplication by unitary matrices. Hence, if A and B are unitarily similar matrices, then $\|A\| = \|B\|$; moreover,

$$\|h(A)\| = \|h(B)\| \qquad \text{for all } h \in \mathbb{C}[x]. \tag{3}$$

We prove that the converse statement holds if A is an upper triangular Toeplitz matrix with nonzero superdiagonal and B is arbitrary.

The converse statement does not hold even for the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

We prove that A and B are unitarily similar if and only if

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{for all } h \in \mathbb{C}[x] \text{ and } k = 1, \dots, n,$$

where $A_k := [a_{ij}]_{i,j=1}^k$ and $B_k := [b_{ij}]_{i,j=1}^k$ are the leading principal $k{\times}k$ submatrices of A and B, and $\|\cdot\|$ is the Frobenius norm.

It is given several criteria of unitary similarity of a normal matrix A and any matrix B in terms of the Frobenius and spectral norms, characteristic polynomials, and traces of matrices.

Let $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ be given finite sets of pairs of n-by-n complex matrices. It is described an algorithm to determine, with finitely many computations, whether there is a single unitary matrix U such that each pair of matrices in $\mathcal{S}_1$ is unitarily similar via U, each pair of matrices in $\mathcal{S}_2$ is unitarily congruent via U, each pair of matrices in $\mathcal{S}_3$ is unitarily similar via $\bar{U}$, and each pair of matrices in $\mathcal{S}_4$ is unitarily congruent via $\bar{U}$.

This problem includes as special cases the problem of determining whether finitely many pairs of matrices are simultaneously unitarily similar ($\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$) as well as the problem of determining whether finitely many pairs of matrices are simultaneously unitarily congruent ($\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$).

We give an algorithm that for each pair of skew-symmetric matrices constructs its regularization decomposition.

The canonical form of (A, B) under congruence ensures that $(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ — the *regular part* of (A, B) — is determined up to congruence, and $(A_1, B_1), \dots, (A_t, B_t)$ — the *singular summands* — are determined uniquely up to permutations.

We give a *regularization algorithm* that uses elementary transformations of matrices and for each pair of skew-symmetric matrices over a field of characteristic not 2 constructs its regularization decomposition under congruence. Regularization algorithms were constructed for matrix pencils by Van Dooren [70], for cycles of linear mappings by Sergeichuk [65] and Varga [71], and for square matrices under congruence and *congruence by Horn and Sergeichuk [39].

The regularization decomposition is the first step towards the reduction of (A, B) to its canonical form under congruence: each pair of skew-symmetric matrices over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic not 2 is congruent to a direct sum, determined uniquely up to permutation of summands, of pairs of the form

$$\mathcal{J}_n(\lambda) := \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & J_n(\lambda) \\ -J_n(\lambda)^T & 0 \end{bmatrix} \right) \ (\lambda \in \mathbb{F}), \quad \mathcal{K}_n, \quad \mathcal{L}_n,$$

where

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (n\text{-by-}n).$$

If $\mathbb{F}$ is not algebraically closed, then $J_n(\lambda)$ is replaced by any indecomposable canonical matrix for similarity; for example, $J_n(\lambda)$ can be replaced by a Frobenius block

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & & 1 & -c_1 \end{bmatrix},$$

in which $p(x)^\ell = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$ is an integer power of a polynomial $p(x)$ that is irreducible over $\mathbb{F}$. This canonical form of pairs of skew-symmetric matrices under congruence was given by Scharlau [67] in terms of Kronecker's modules.

We give another proof of the canonical form of a pair of skew-symmetric matrices over an algebraically closed field based on the regularization algorithm.

Dmytryshyn and Kågström [17, 18] construct miniversal deformations of a pair of skew-symmetric matrices (A, B) under congruence and study how small perturbations of A and B change the canonical form of (A, B) under congruence.

Keywords: canonical form, unitary similarity, congruence, regularizing algorithm.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

1. Bovdi V.A. Reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence / V.A. Bovdi, T.G. Gerasimova, M.A. Salim, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 17–30.

2. Gerasimova T.G. Simultaneous unitary equivalences / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 3829–3835.

3. Farenick D. A complete unitary similarity invariant for unicellular matrices / D. Farenick, T.G. Gerasimova, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 409–419.

4. Gerasimova T.G. Unitary similarity to a normal matrix / T.G. Gerasimova // Linear Algebra Appl. — 2012. — Vol. 436. — P. 3777–3783.

5. Bondarenko V.M. Pairs of mutually annihilating operators / V.M. Bondarenko, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 86–105.

6. Farenick D. Criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position / D. Farenick, V. Futorny, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 1356–1369.

7. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 1620–1632.

Тези наукових доповідей

1. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova // 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Kharkov, Ukraine, 18 — 23 August 2009. — Kharkov: V. N. Karazin Kharkov National University, 2009. — P. 54.

2. Gerasimova T.G. Linear operators satisfying a polynomial relation on a space with positive semidefinite form / T.G. Gerasimova // Ukrainian Mathematical Congress – 2009, Kyiv, Ukraine, 27 — 29 August 2009. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2009.

3. Gerasimova T.G. Unitary similarity of nonderogatory matrices / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department, Kyiv, Ukraine, 22 — 23 December 2009. — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2009. — P. 30-31.

4. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular compact operators / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference “Mathematics and Life

Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits", Kyiv, Ukraine, 5 — 8 August 2010. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,2010. — P. 32.

5. Gerasimova T.G. A characterization of upper triangular Toeplitz matrices / T.G. Gerasimova, N. Shvai // International Young Scientists Conference "70 years of KNU's mechanics and mathematics faculty, Kyiv, Ukraine, 13 — 15 December 2010. — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2010. — P. 27.

6. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular operators / T.G. Gerasimova // IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics Varna, Bulgaria, 20 — 26 June 2011. — Varna: Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, 2011.

7. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova, N. Shvai // 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Lugansk, Ukraine, 5 — 12 July 2011. — Lugansk: Lugansk Taras Shevchenko National University, 2011. — P. 162.

8. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova // 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), Seville, Spain, 3 — 9 July 2011. — P. 29.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. В дисертаційній роботі розглядаються певні класифікаційні задачі лінійної алгебри, а саме: класифікація взаємоанулюючих матриць над будь-яким полем, класифікація матриць які є самоконгруентими за допомогою матриць з одиничним визначником, критерії унітарної подібності для матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

В першому розділі розглядається задача класифікації пар взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$ на скінченновимірному векторному просторі V. Пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ були класифіковані І. Гельфандом та В. Пономарьовим над алгебраїчно замкненим полем та Л. Назаровою, А. Ройтером, В. Сергейчуком та В. Бондаренко над довільним полем $\mathbb{F}$ як модулі над $\mathbb{F}[x, y]/(xy)$. В цьому розділі дисертаційної роботи дано конструктивне доведення теореми про канонічну форму пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ взаємоанулюючих операторів над довільним полем. Наводиться алгоритм для зведення матриць пари до канонічних форм відносно перетворень подібності.

Д. Доковіч та Ф. Зехтман розглянули векторний простір V, наділений білінійною формою. Вони довели, що ізометрії V над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2 мають визначник 1 тоді та тільки тоді коли V не має ортогональних доданків непарної розмірності (випадок характеристики 2 був також розглянутий). Їх доведення базується на класифікації Ріма білінійних форм. Е. Коклі, Ф. Допіко та Р. Джонсон надали інше доведення цього критерію над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ використовуючи топмсонівські канонічні пари симетричних та кососиметричних матриць відносно конгруентності. Нехай M — матриця білінійної форми на V. В другому розділі дисертаційної роботи наведено інше доведення цього критерію над $\mathbb{F}$ та отримано необхідні та достатні умови використовуючи канонічні форми M для конгруентності, пари $\left(M^T, M\right)$ для еквівалентності, та $M^{-T}M$ (якщо M невироджена) для подібності.

Класичною задачею теорії матриць є задача знаходження умов унітарної подібності. Найвідомішими результатами у цьому напрямку є теорема Шпехта, яка надає умову унітарної подібності матриць у термінах рівності їхніх слідів; канонічна форма Літтлвуда відносно унітарної подібності; та критерій Арвесона, шо надає умову унітарної подібності у термінах рівності норм.

Необхідність різних підходів до питання унітарної подібності обумовлюється широким застосуванням цих результатів. Зокрема, для окремих класів матриць критерії унітарної подібності можуть бути суттєво послаблені або адаптовані відповідно до практичних задач. В третьому та четвертому розділі дисертаційної роботи розроблено критерії унітарної подібності для верхньотрикутних матриць у загальному положенню та нормальних матриць.

Нехай $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ — задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. В п'ятому розділі наведений алгоритм, що визначає за скінченну кількість обчислень, чи існує одна унітарна матриця U така, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

В шостому розділі дисертаційної роботи наведений алгоритм, що для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад, використовуючи елементарні перетворення матриць. Регуляційні алгоритми були побудовані для матричних пучків В. Дуреном [70], для циклів лінійних відображень В. Сергейчуком [65] та А. Варгою [71], та для квадратних матриць відносно конгруентності та *конгруентності Хорном та Сергейчуком [39]. Регуляційний розклад — це перший крок в сторону зведення пари (A, B) до її канонічної форми відносно конгруентності.

Розглянуті задачі належать до напрямку, в якому працюють багато українських та іноземних науковців. Все вищезазначене свідчить про актуальність теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках теми 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теорії груп, напівгруп, кілець, зображень, до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер держреєстрації 0111U005264).

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є побудова канонічного виду пар взаємоанулюючих матриць над будь-яким полем, опис матриць, які є самоконгруентими за допомогою матриць з одиничним визначником, встановлення критеріїв унітарної подібності для верхньотрикутних матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та побудова алгоритму зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

Об'єктом дослідження є лінійні відображення, ланцюжки лінійних відображень та скінченні множини пар n-на-n матриць.

Предметом дослідження є унітарна подібність, подібність, та конгруентність.

Методами дослідження є класифікаційні методи лінійної алгебри, розроблені математиками київської школи теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Побудовано канонічну форму пари взаємоанулюючих матриць у явному вигляді; дано конструктивне доведення зведення пар матриць до цієї форми.

2. Описано матриці, які є самоконгруентними тільки за допомогою матриці з одиничним визначником.

3. Знайдено новий критерій перевірки унітарної подібності двох верхньотрикутних матриць, що є матрицями або в загальному положенні або матрицями, що неподібні прямій сумі квадратних матриць менших розмірів. Новий критерій використовує норми Фробеніуса від матричних поліномів в якості інваріантів відносно унітарної подібності.

4. Одержано нові критерії унітарної подібності нормальної матриці та довільної матриці. В якості інваріантів були використані: спектральна норма, норма Фробеніуса, характеристичний многочлен та слід матриці.

5. Для скінченної множини пар n-на-n комплексних матриць $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ побудовано алгоритм для визначення за скінченну кількість обчислювань, чи існує така унітарна матриця U, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

6. Побудовано алгоритм, який для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними в дослідженнях з теорії матриць і прикладних дослідженнях.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать моєму науковому керівнику В. В. Сергейчуку. У роботах, які опубліковано разом зі співавторами, внески співавторів є рівноцінними. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

- VIII International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics”, June 15–21, 2009, Varna, Bulgaria.
- Summer School and Advanced Workshop on Trends and Developments in Linear Algebra, June 22 – July 10, 2009, Trieste, Italy.
- VII International Algebraic Conference in Ukraine, August 18–23, 2009, Kharkov, Ukraine.
- Ukrainian Mathematical Congress 2009, August 27–29, 2009, Kiev, Ukraine.
- International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department at the Taras Shevchenko National University of Kiev, December 22–23, 2009, Kiev, Ukraine.
- International Conference “Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits”, August 05–08, 2010, Kiev, Ukraine.
- International Young Scientists Conference "70 years of KNU’s mechanics and mathematics faculty”, December 13–15, 2010, Kiev, Ukraine.

- 4th European Women in Mathematics Summer School, June 6–10, 2011, Leiden, the Netherlands.
- 3rd International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, MMMA-2011, June 22–25, 2011, Moscow, Russia.
- IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics", June 20–26, 2011, Varna, Bulgaria.
- 8th International Algebraic Conference in Ukraine, July 5–12, 2011, Lugansk, Ukraine.
- 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), July 3–9, 2011, Seville, Spain.
- The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 3–17, 2011, Moscow, Russia.
- School and Workshop on Computational Algebra and Number Theory, June 18 – June 29, 2012, Trieste, Italy.
- 6th European Congress of Mathematicians, July 2–7, 2012, Krakow, Poland.
- 7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, September 9-19 2012, Belgrade, Serbia.
- The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 1–30, 2012, Moscow, Russia and Rome, Italy.
- X International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics", June 17–23, 2013, Varna, Bulgaria.
- Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications, July 1 – July 12, 2013, Trieste, Italy.

- International Congress of Women Mathematicians, August 12, 14, 2014, Seoul, South Korea
- International Congress of Mathematicians, August 13–21, 2014, Seoul, South Korea

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-16], що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 5 з вказаних робіт надруковано без співавторів, 9 у закордононних виданнях. Згідно з міжнародною науковометричною базою даних Scopus є 24 посилання на 7 з наведених робіт автора дисертації. h-index цих робіт у вказаній базі даних становить 3.

Відповідно до класифікації SCImago Journal&Country Rank наукові публікації [1-7] надруковано у виданнях, які відносятья до квартиля Q1.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації (двома мовами), вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 72 найменування. Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку, з них 8 сторінок займає список використаних джерел.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику провідному співробітнику Інституту математики НАН України доктору фіз.-мат. наук, професору Сергейчуку Володимиру Васильовичу за допомогу в роботі над дисертацією та нескінченну віру в неї.

Розділ 1

Класифікація пари взаємоанулюючих операторів

Результати даного розділу опубліковані в статті [12].

В даному розділі розглядається проблема класифікації пар взаємоанулюючих операторів

$$\mathcal{A},\mathcal{B} : V \to V, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$$

на скінченновимірному векторному просторі V.

Пари $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ були класифіковані

- в [29] над алгебраїчно замкненим полем методом лінійних відносин, та
- в [46, 54] над довільним полем $\mathbb{F}$ як модулі над $\mathbb{F}[x,y]/(xy)$;

Наведена нижче класифікація $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ над довільним полем є конструктивною: наводиться алгоритм для зведення матриць пари до канонічних форм відносно перетворень подібності

$$(A,B) \mapsto S^{-1}(A,B)S := (S^{-1}AS, S^{-1}BS), \qquad S \text{ є невиродженою.} \tag{1.1}$$

Облак у своїй статті [55] характеризувала усі можливі пари Жорданових канонічних форм (J_A, J_B) для пар (A,B) взаємоанулюючих матриць $AB = BA = 0$ над алгебраїчно замкненим полем. Для цієї мети, вона перетворила одну матрицю у Жорданову форму, потім вона використовувала тільки ті перетворення подібності, які зберігали цю форму та зводили другу матрицю у просту форму. У цьому розділі продовжено зведення другої матриці поки не отримано канонічну форму (A, B).

У підрозділі 1.1 наведена основна теорема розділу: класифікована пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ взаємоанулюючих операторів та надана канонічна форма цих матричних пар (A, B). У підрозділах 1.2–1.4 доведено основну теорему та зведено (A, B) до її канонічної форми (див. кінець підрозділу 1.1).

Класифікація пар взаємоанулюючих операторів є досить неочікуваною оскільки

- задача класифікації *довільних* пар операторів $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ розглядається як безнадійна оскільки вона містить в собі задачу класифікації *будь-якої* системи лінійних операторів (тобто, представлення довільного колчану); дивіться, наприклад, [9, 30], та
- комутативність умови $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ не спрощує задачу класифікації $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ оскільки відповідно [30] класифікація пар комутуючих операторів має як наслідок класифікацію пар довільних операторів. Дійсно, дві пари (A, B) та (C, D) $n \times n$ матриць є подібними тоді та тільки тоді коли дві пари комутуючих та нільпотентних матриць
$$\left(\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&I&A&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&B&I&0 \end{bmatrix}\right), \quad \left(\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&I&C&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&D&I&0 \end{bmatrix}\right)$$
є подібними (усі блоки мають розмір $n \times n$).

Тим не менш, алгоритм Беліцького [8, 62] перетворює довільну пару (A, B) $n \times n$ матриць до деякої пари $(A_{\text{can}}, B_{\text{can}})$ перетвореннями подібності такими, що дві пари (A, B) та (A', B') є подібними тоді та тільки тоді коли
$$(A_{\text{can}}, B_{\text{can}}) = (A'_{\text{can}}, B'_{\text{can}}).$$

Таким чином, пара $(A_{\text{can}}, B_{\text{can}})$ може бути розглянута як канонічна форма (A, B) відносно подібності, але не існує повного опису множини матричних пар $(A_{\text{can}}, B_{\text{can}})$. Алгоритм представлений у розділах 1.2–1.4 є спеціальним випадком алгоритму Беліцького.

1.1 Канонічна форма матриць пари взаємоанулюючих операторів

Усі векторні простори та матриці в розділі розглядаються над довільним полем $\mathbb{F}$.

Визначимо два типи пар взаємоанулюючих операторів

$$\mathcal{A} : V \to V, \quad \mathcal{B} : V \Rightarrow V, \qquad \mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0,$$

на векторному просторі V (для того, щоб розрізняти оператори, використаємо *подвійну стрілку* $\Rightarrow$ для $\mathcal{B}$).

Означення 1.1.1. *Пара взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A} : V \to V$ та $\mathcal{B} : V \Rightarrow V$ є* **шляхового типу***, якщо вона визначена наступним чином. Нехай*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow (t-1) \longrightarrow t \qquad (t \geqslant 1) \tag{1.2}$$

— довільний шлях в якому кожне ребро є одинарною стрілкою $\longrightarrow$ або подвійною $\Longleftarrow$ (такого напряму). Візьмемо

$$V := \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_t$$

та визначимо дію $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на базисних векторах $e_1, \dots, e_t$ як в (1.2), в якому кожна вершина i замінена на e_i та невизначена дія є нульовою. Матрична пара

$$(A, B) \tag{1.3}$$

що відповідає $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ у базисі $e_1, \dots, e_t$ називається **матричною парою шляхового типу**.

Очевидно, що пара (1.3) формується взаємоанулюючими $t \times t$ матрицями $A = [a_{ij}]$ та $B = [b_{ij}]$, в яких

$$\left.\begin{array}{l} a_{i+1,i} = 1, \quad \text{якщо } i \longrightarrow (i+1) \\ b_{i,i+1} = 1, \quad \text{якщо } i \Longleftarrow (i+1) \end{array}\right\} \text{ у (1.2)}, \quad i = 1, \dots, t-1,$$

та інші елементи нульові. Зазначимо, що

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.1.1. *Граф шляхового типу*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \Longleftarrow 4$$

визначає наступну дію $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на базисних векторах:

$$e_1 \xrightarrow{\mathcal{A}} e_2 \xrightarrow{\mathcal{A}} e_3 \xLeftarrow{\mathcal{B}} e_4$$

та пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ задається матричною парою

$$(A, B) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Нагадаємо, що кожна квадратна матриця A подібна прямій сумі *блоків Фробеніуса*

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & & 1 & -c_1 \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

в яких $p(x)^l = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$ є цілим степенем многочлена $p(x)$, що є незвідним над $\mathbb{F}$ (зазначимо, що $p(x)^l$ є мініміальним многочленом (4.4)).

Пряма сума однозначно визначається матрицею A, з точністю до перестановки доданків; дивіться [58, Розділ 14]. Якщо $\mathbb{F}$ є алгебраїчно замкненим тоді $p(x) = x - \lambda$ та читач може використати n-на-n Жорданів блок

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

замість (4.4) в усіх твердженнях цього розділу.

Означення 1.1.2. *Пара взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A} : V \to V$ та $\mathcal{B} : V \Rightarrow V$ є* **циклічного типу**, *якщо вона визначена наступним чином.*

(i)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[rrr, dash, bend right] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

буде циклічним графом в якому кожне пряме ребро є $\longrightarrow$ або $\Longleftarrow$ та зігнуте ребро є $\longleftarrow$ або $\Longrightarrow$ саме з такою орієнтацією.

(ii) Нехай цей граф є **аперіодичним**, *це означає, що циклічна перенумерація його вершин*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[rrr, dash, bend right] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd} \quad \to \quad \begin{tikzcd} i \arrow[r, dash] \arrow[rrr, dash, bend right] & (i+1) \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & (i-1) \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

не є ізоморфізмом для кожного $i = 2, \ldots, t$. Іншими словами, для кожного нетривіального обертання цього циклічного графу існує одинична або подвійна стрілка, що відображається у подвійну або, відповідно, одинарну стрілку.

(iii) По (ii), якщо (1.5) *не має подвійної стрілки, тоді це петля* $\circlearrowleft$; *поставимо у відповідність з нею невироджений блок Фробеніуса Φ (або невироджений Жорданів блок, якщо $\mathbb{F}$ алгебраїчно замкнене поле). Якщо*

граф має подвійну стрілку, тоді виберемо будь-яку подвійну стрілку та поставимо їй у відповідність Φ.

Нехай $k \times k$ *буде розмір* Φ. *Визначимо дію* $\mathcal{A}$ *та* $\mathcal{B}$ *на* kt*-вимірному векторному просторі*

$$V := V_1 \oplus \cdots \oplus V_t, \qquad V_i := \mathbb{F}e_{i1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{ik},$$

за допомогою (1.5), *в якому кожна вершина* i *замінюється на* V_i *та кожна стрілка представляє лінійне відображення відповідних векторних просторів. Це лінійне відображення задається* Φ, *якщо стрілка була асоційована з* Φ*; в протилежному випадку, відображення задається одиничною матрицею* I_k.

Матрична пара (A, B), *яка задає* $\mathcal{A}$ *та* $\mathcal{B}$ *у базисі*

$$e_{11}, \ldots, e_{1k}; \ldots; e_{t1}, \ldots, e_{tk}$$

буде називатися **матричною парою циклічного типу**. *Таким чином,*

- *якщо* $t = 1$ *та петля* $1 \frac{\quad}{} 1$ *є одинарною стрілкою (яка асоційована з* Φ*), тоді* $(A, B) = (\Phi, 0_k)$*;*

- *якщо* $t = 1$ *та петля* $1 \frac{\quad}{} 1$ *є подвійною стрілкою (яка асоційована з* Φ*), тоді* $(A, B) = (0_k, \Phi)$*;*

- *якщо* $t \geqslant 2$*, тоді* $A = [A_{ij}]$ *та* $B = [B_{ij}]$ *є блочними матрицями (що містять* t^2 *блоків та кожний блок розміру* $k \times k$*), в яких для* $i = 1, \ldots, t$*:*

$$A_{i+1,i} = I_k \quad \text{якщо } i \longrightarrow (i+1), \qquad B_{i,i+1} = \begin{cases} I_k, & \text{якщо } i \Longleftarrow (i+1) \\ \Phi, & \text{якщо } i \overset{\Phi}{\Longleftarrow} (i+1) \end{cases} \tag{1.7}$$

(якщо $i = t$ тоді усі $i+1$ у (1.7) замінюються на 1); інші блоки A та B є нульовими. Зазначимо, що

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 0_k & \dots & \dots & 0_k & * \\ * & 0_k & & & 0_k \\ 0_k & * & 0_k & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_k & \dots & 0_k & * & 0_k \end{bmatrix} \qquad (t^2 \text{ блоків})$$

в якому 0_k є $k \times k$ нульовою матрицею, одна зірка є Φ, та інші елементи є I_k.

Приклад 1.1.2. *Циклічний граф*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, Leftarrow] & 3 \arrow[l, Leftarrow, "\Phi"'] \arrow[r] & 4 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

(Φ є 3-на-3) визначає наступну дію $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на базис $e_{i1}, \dots, e_{ik}$ кожного простору V_i:

$$\begin{tikzcd} V_1 & V_2 \arrow[l, Leftarrow, "I_3"'] & V_3 \arrow[l, Leftarrow, "\Phi"'] \arrow[r, "I_3"] & V_4 \arrow[lll, bend left, "I_3"] \end{tikzcd}$$

та пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ задана матричною парою

$$(A, B) = \left(\begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \Phi & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \right).$$

Нехай $\mathcal{P} := (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ та $\mathcal{P}' := (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ є дві пари лінійних операторів на векторному просторі V та V', відповідно. Визначимо їх **пряму суму**

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A}', \mathcal{B}') := (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}', \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}') \quad \text{на } V \oplus V'.$$

Кажуть, що $\mathcal{P}$ є **ізоморфною** до $\mathcal{P}'$, якщо існує лінійна бієкція $\varphi : V \to V'$, що відображає $\mathcal{P}$ до $\mathcal{P}'$; це означає, що

$$\varphi\mathcal{A} = \mathcal{A}'\varphi, \qquad \varphi\mathcal{B} = \mathcal{B}'\varphi.$$

Теорема 1.1.3. (a) *Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ два лінійні оператори на векторному просторі над будь-яким полем $\mathbb{F}$, та нехай*

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0. \tag{1.9}$$

Тоді $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ є ізоморфною прямій сумі пар шляхового та циклічного типу, та ця сума є однозначно визначеною за допомогою $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ з точністю до

(i) *перестановки прямих доданків та*

(ii) *заміни будь-якого заданого доданку циклічного графу* (1.5) *парою заданою будь-яким циклічним графом отриманим з* (1.5) *шляхом*

- *циклічної перенумерації його вершин* (1.6) *та/або*
- *якщо існує хоча б дві подвійні стрілки, тоді перенесенням* Φ $($*асоційованого з однією подвійною стрілкою* $)$ *до іншої подвійної стрілки.*

(b) *Кожна пара (A, B) взаємоанулюючих матриць*

$$AB = BA = 0 \tag{1.10}$$

подібна до прямої суми матричних пар шляхового та циклічного типу, та ця сума є однозначновизначеною за допомогою (A, B), з точністю до перетворень (i) *та* (ii).

Наприклад, циклічний граф (1.8) та циклічний граф

$$\begin{tikzcd} 4 & 1 \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] & 2 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r] \arrow[ll, bend left] & 3 \end{tikzcd}$$

дають ізоморфні пари циклічного типу.

(a) Пара шляхового типу задана у (1.2) може бути також задана коротко послідовністю

$$(c_1, \ldots, c_{t-1})$$

в якій

$$c_i := \begin{cases} 1 & \text{якщо } i\text{та стрілка є одинарною,} \\ 2 & \text{якщо } i\text{та стрілка є подвійною.} \end{cases} \tag{1.11}$$

(b) Пара циклічнго типу задана у (1.5) також може бути задана, з точністю до зміни базису, системою

$$(c_1, \ldots, c_t; \Phi)$$

в якій послідовність $(c_1, \ldots, c_t)$ (задана у (1.11)) є аперіодичною та визначена з точністю до циклічної перестановки.

В інших підрозділах побудуємо алгоритм, що перетворює пару (A, B) взаємоанулюючих матриць до її канонічної форми визначеної в Теоремі 1.1.3(b).

- В параграфі 1.2 зводимо загальний випадок до випадку нільпотентної A, зводимо A до її канонічної форми Жордана, обмежуючи себе до таких перетворень подібності, що зберігають A, та показуємо, що вони індукують на деяку підматрицю D матриці B (що містить усі ненульові елементи матриці B), матрична проблема розв'язана в [53, 54].

- В параграфі 1.3 застосовуємо зведення описане [53, 54] та трансформуємо D у блочну форму, таку, що кожний горизонтальний та кожний вертикальний рядок містить не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим.

- В параграфі 1.4, розширюючи поділ D на блоки, знаходимо блочну форму A та B таку, що кожна горизонтальна та кожна вертикальна смуга містіть не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим. З цього випливає розклад відповідної операторної пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на пряму суму пар шляхового та циклового типів, що доводить Теорему 1.1.3.

- У додатку даємо альтернативні доведення двох ключових тверджень з параграфів 3 та 4 використовуючі елементарні перетворення матриці.

1.2 Зведення до шахової матричної задачі

Почнемо зводити пару (A, B) взаємоанулюючих матриць за допомогою перетворень унітарної подібності (1.1) до її канонічної форми, описаної в Теоремі 1.1.3(b).

Лема 1.2.1. (a)

Кожна пара взаємоанулюючих матриць (A, B) *є подібною до прямої суми*

$$(A', B') \oplus (\Phi_1, 0_{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\Phi_r, 0_{n_r}), \tag{1.12}$$

в якому A' *є нільпотентною та кожна* Φ_i *є* $n_i \times n_i$ *невиродженим блоком Фробеніуса*

(b) *Ця пряма сума визначена єдиним чином за допомогою* (A, B), *з точністю до перестанови доданків та заміни пари* (A', B') *подібною парою* (*тобто, парою отриманою перетвореннями подібності*).

Доведення. (a) Існує невироджена матриця S така, що

$$S^{-1}(A, B)S = (A', B') \oplus (A'', B''),$$

де матриця A' нільпотентна та матриця A'' невироджена. Використовуючи (1.10) маємо, що $B'' = 0$. Перетворюючи A'' до своєї канонічної форми Фробеніуса $\Phi_1 \oplus \cdots \oplus \Phi_r$, отримаємо (1.12).

(b) Нехай

$$R^{-1}((A', B') \oplus (A'', 0))R = (C', D') \oplus (C'', 0)$$

де матриця C' нільпотентна та матриця C'' невироджена. Тоді з

$$(A' \oplus A'')R = R(C' \oplus C'')$$

випливає, що $R = R' \oplus R''$, а значить

$$(A', B')R' = R'(C', D'), \qquad A''R'' = R''C''.$$

$\square$

Таким чином, можемо припустити, що A нільпотентна. Тоді 0 — це єдине власне число матриці A, та тоді можемо звести матрицю A до її канонічної форми Жордана J над будь-яким полем $\mathbb{F}$. Поєднаємо усі Жорданові блоки одного розміру в один блок, та отримаємо

$$J^+ := J_{m_1}(0_{r_1}) \oplus \cdots \oplus J_{m_t}(0_{r_t}), \qquad m_1 < m_2 < \cdots < m_t, \tag{1.13}$$

де

$$J_{m_i}(0_{r_i}) := \begin{bmatrix} 0_{r_i} & & & 0 \\ I_{r_i} & 0_{r_i} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I_{r_i} & 0_{r_i} \end{bmatrix} \qquad (m_i^2 \text{ блоків}). \tag{1.14}$$

Роблячи аналогічні перетворення подібності з B, перетворюємо (A, B) до деякої пари (J^+, C), яка подібна до (A, B). Використовуючи (1.10),

$$J^+C = CJ^+ = 0, \tag{1.15}$$

таким чином, C має форму

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{t1} & \dots & C_{tt} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

(поділена відповідно до (1.13)) в якій

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (m_i m_j \text{ блоків розміру } r_i \times r_j); \tag{1.17}$$

зокрема, C_{ii} поділена відповідно до (1.14). Поєднаємо усі D_{ij} в одну матрицю

$$D := \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{t1} & \dots & D_{tt} \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Будемо зводити (J^+, C) тими перетвореннями подібності $S^{-1}(J^+, C)S$, що зберігає J^+; тобто,

$$C \mapsto C' := S^{-1}CS, \qquad S^{-1}J^+S = J^+. \tag{1.19}$$

Оскільки пара (J^+, C) подібна до (J^+, C'), з (1.15) випливає $J^+C' = C'J^+ = 0$. Таким чином матриця C' має форму визначену у (4.10) та (1.17) з C_{ij} та D_{ij} заміненими на C'_{ij} та D'_{ij}.

Таким чином, перетворення (1.19) зберігає усі (нульові) блоки матриці C зовні D. У Лемі 1.2.2 показуємо, що перетворення (1.19) індукує на D наступну матричну задачу (кожна *матрична задача* задана, за означенням, набором матриць та набором допустимих перетворень цих матриць; питання — класифікувати класи еквівалентності набору матриць відповідно до цих допустимих перетворень; див. [26, Розділ 1.4]).

Означення 1.2.1. Шахова матрична задача *задається*

(a) *набором усіх блочних матриць $D = [D_{ij}]$, у яких деякі квадратні блоки є перекресленими вздовж головної діагоналі так, що кожна горизонтальна та діагональна смужки містять не більше одного перекресленого блоку, та*

(b) *набором наступних допущених перетворень з кожним блоком D:*

  (i) *довільні елементарні перетворення всередені смужок з наступним обмеженням: кожний перекреслений блок зведений за допомогою перетворень подібності (тобто, можемо робити елементарне стовпчкове перетворення в середині будь-якої вертикальної* *смужки, але, якщо вона містить в собі перекреслений блок, тоді маємо зробити обернене рядкове перетворення в горизонтальній смужці, що містить цей перекреслений блок);*

(ii) *якщо u є стовпцем у вертикальній смужці i, v є стовпцем у вертикальній смужці j, та $i < j$, тоді можемо замінити v на $v+\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{F}$;*

(iii) *якщо u є рядком у горизонтальній смужці i, v є рядком у горизонтальній смужці j, та $i < j$, тоді можемо замінити v на $v + \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Таким чином, усі доступні перетворення між різними смужками є перетвореннями зліва направо та зверху донизу.

Канонічна форма відносно перетворень (i)–(iii) була отримана в [54]. А саме, було показано, що кожний блок D зводиться перетвореннями (i)–(iii) до матриці з додатковим поділом на блоки так, що кожна горизонтальна та вертикальна смужка містить не більше одного ненульового блоку та цей блок є невироджений. Нагадаємо про цей поділ в Розділі 1.3; це буде використано в Розділі 1.4.

Лема 1.2.2. *Нехай (A, B) — пара взаємоанулюючих матриць в якій A є нільпотентною. Тоді (A, B) подібна до деякої пари (J^+, C), в якій J^+ має форму* (1.13)*. Якщо обмежимо себе на ці перетворення подібності з C, що зберігають J^+, тоді*

- *ми отримаємо шахову матричну задачу для підматриці* (1.18) *чиї перекреслені блоки є $D_{11}, D_{22}, \dots, D_{tt}$;*
- *блоки C зовні D залишаються нульовими над цими перетвореннями.*

Доведення. Зведемо C перетвореннями (1.19). Поділ S відповідно поділу J^+

в (1.13):

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1t} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ S_{t1} & \dots & S_{tt} \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Оскільки S комутує з J^+, кожний S_{ij} має наступну форму описану в [27, Розділ VIII, § 2]:

$$\begin{bmatrix} R_{ij} & & & & & 0 \\ R'_{ij} & R_{ij} & & & & \\ R''_{ij} & R'_{ij} & R_{ij} & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & R''_{ij} & R'_{ij} & R_{ij} & \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ R_{ij} & & & & \\ R'_{ij} & R_{ij} & & & \\ R''_{ij} & R'_{ij} & R_{ij} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & R''_{ij} & R'_{ij} & R_{ij} \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

(S_{ij} складається з $m_i m_j$ блоків розміру $r_i \times r_j$).

Підставляючи (4.10) та (1.20) в $SC' = CS$ та упускаючи нульові елементи, отримаємо

$$\begin{bmatrix} R_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ R_{t1} & \dots & R_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{11} & \dots & D'_{1t} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D'_{t1} & \dots & D'_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1t} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D_{t1} & \dots & D_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1t} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & R_{tt} \end{bmatrix}$$

в якому перша та четверта матриця є підматрицями S сформованими блоками S_{ij} на позиціях (m_i, m_j) та $(1, 1)$, відповідно. Тоді

$$\begin{bmatrix} D'_{11} & \dots & D'_{1t} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D'_{t1} & \dots & D'_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & R_{tt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1t} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D_{t1} & \dots & D_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{tt} \end{bmatrix}$$

де зірки позначають довільні блоки. Тоді D зведений перетвореннями (i)–(iii) з Означення 1.2.1. $\square$

В доповненні покажемо, що Лема 1.2.2 також може бути доведена елементарними матричними перетвореннями. Таке примітивне доведення робить зведення до шахової матричної задачі ясніше.

1.3 Розв'язання шахової матричної задачі

В цьому розділі доведемо наступну лему

Лема 1.3.1. *Нехай D — блочна матриця, у якій деякі квадратні блоки є перекресленими вздовж головної діагоналі таким чином, що кожна горизонтальна або вертикальна смуга містить не більше одного перекресленого блоку. Тоді існує алгоритм, що*

(a) *використовуючи перетворення* (i)–(iii) *з Означення 1.2.1 та*

(b) *роблячи додаткові поділи смуг на підсмуги так, що поділ кожного перекресленого блоку на горизонтальні підсмуги дублюють його поділ на вертикальні підсмуги* (*тобто, усі діагональні підблоки перекреслених блоків квадратні*)

перетворює D на матрицю D_0 поділену на підблоки такі, що

кожна горизонтальна або вертикальна підсмуги містять не більше одного ненульового підблоку та цей підблок невироджений. (1.22)

Доведення. Використовуємо індукцію по розміру D. Якщо перша горизонтальна смуга D нульова, тоді можемо видалити її зменшуючи розмір D. Таким чином допускаємо, що перша горизонтальна смуга $D = [D_{ij}]$ ненульова; нехай D_{1k} — перший ненульовий блок.

Випадок 1: D_{1k} не перекреслені. Перетвореннями (i) з Означення 1.2.1 зводимо його до форми

$$\tilde{D}_{1k} := \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1.23}$$

Додаючи лінійні комбінації стовпчиків D, що перетинають I_r (перетвореннями (ii)), робимо нульовими усі елементи справа від I_r. Додаючи лінійні комбінації рядків, що перетинають I_r (перетвореннями (iii)), робимо нульовими усі елементи під I_r. Розширюючи поділ (1.23), поділимо першу горизонтальну смугу на дві підсмуги. Якщо новий горизонтальний або вертикальний поділ проходить через помічений блок, тоді робимо перпендикулярний поділ (вертикальний або горизонтальний відповідно) такий, що цей блок поділяється на 4 підблоки з квадратними діагональними підблоками перекресленими вздовж головної діагоналі. Позначимо отриману матрицю $\tilde{D}$. Наприклад, якщо новий горизонтальний поділ та новий вертикальний поділ проходить через перекреслені блоки F та G, тоді

$$\tilde{D} = \begin{array}{|ccc|c|c|ccc|c|c|ccc|}
\hline
0 & \dots & 0 & I_r & 0 & 0 & \dots & 0 & \cancel{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * & F_{21} & \cancel{F_{22}} & * & \dots & * \\
\hline
 & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \cancel{0} & G_{12} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & \cancel{G_{22}} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Під **канонічними підсмугами** маємо на увазі горизонтальні підсмуги, що містять I_r, та вертикальні підсмуги, що містять I_r, (ми називаємо їх “канонічними” оскільки вони підсмуги канонічної форми D відносно перетворень (i)–(iii)). Позначимо E блочну матрицю отриману з $\tilde{D}$ шляхом видалення канонічних підсмуг.

Зведемо $\tilde{D}$ цими перетвореннями (i)–(iii) (визначеними відносно початкового поділу D на блоки), що зберігає $\tilde{D}_{1k}$ та канонічні підсмуги. Покажемо, що ці перетворення індукують на E шахову матричну задачу.

- Використовуючи перетворення (i) можемо додати стовпчики першої вертикальної підсмуги, що проходить через F до стовпчиків другої вертикальної підсмуги, що проходить через F. Оскільки F перекреслений, повинні зробити обернене рядкове перетворення в F. Це може зіпсувати нульові підблоки F над F_{21} та F_{22}, відновимо їх додаючи лінійні комбінації стовпчиків I_r.

- Можемо додавати рядки першої горизонтальної підсмуги, що проходить через G, до рядків другої горизонтальної підсмуги. Обернене перетворення стовпчиків в G може зіпсувати нульові підблоки в G зліва від G_{12} та G_{22}, відновимо їх додаючи лінійні комбінації рядків I_r.

По індукції за розміром, Лема 1.3.1 виконується для E; так, що, E зводиться до блочної матриці E_0 задовільняючи умову (1.22). Замінюючи E на E_0 в $\tilde{D}$ та роблячи додаткові поділи на підблоки у відповідності з додатковим поділом в E_0, отримаємо блочну матрицю D_0, що задовільняє (1.22).

Випадок 2: D_{1k} перекреслений та ненільпотентний. Можемо звести його перетвореннями подібності.

Перетворимо D_{1k} у форму $K \oplus N$, в якій K невироджена матрица Фробеніуса та N нільпотентна (якщо D_{1k} невироджена тоді N не зявиться). Використовуючи перетворення (ii) та (iii), зробимо нульовими усі елементи справа від K та під K та отримаємо матрицю

$$\tilde{D} := \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0\ \dots\ 0 & \cancel{K} & 0 & 0\ \dots\ 0 \\ \hline 0\ \dots\ 0 & 0 & \cancel{N} & *\ \dots\ * \\ \hline & 0 & * & \\ * & \vdots & \vdots & * \\ & 0 & * & \\ \hline \end{array} \tag{1.24}$$

Позначимо як E блочну матрицю отриману від (1.24) шляхом видалення горизонтальних та вертикальних підсмуг, що містять K.

Будемо зводити (1.24) тими перетвореннями (i)–(iii), що зберігають нулі справа від K та під K та, що перетворюють K в невироджену матрицю та N

в нільпотентну матрицю. Ці перетворення індукують на E шахову матричну задачу.

За індукцією по розміру, Лема 1.3.1 виконується для E; тобто, E конвертується у блочну матрицю E_0, що задовольняє умову (1.22). Замінюючи E на E_0 в (1.24), отримаємо блочну матрицю D_0, що задовільняє (1.22).

Випадок 3: D_{1k} помічений та нільпотентний. Зведемо його перетвореннями подібності у форму

$$\tilde{D}_{1k} := J_{m_1}(0_{r_1}) \oplus \cdots \oplus J_{m_t}(0_{r_t}), \qquad m_1 > m_2 > \cdots > m_t, \tag{1.25}$$

в якій $J_{m_i}(0_{r_i})$ визначений в (1.14). Використовуючи перетворення (ii) та (iii), зробимо нульовими усі елементи справа від I_{r_i} та під I_{r_i} для кожного I_{r_i} в (1.14); які конвертують D у форму

$$\tilde{D} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \tilde{D}_{1k} & \mathcal{F} \\ \hline * & \mathcal{G} & * \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|ccc|c|} \hline 0 & J_{m_1}(0_{r_1}) & & 0 & \mathcal{F}_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & J_{m_t}(0_{r_t}) & \mathcal{F}_t \\ \hline * & \mathcal{G}_1 & \dots & \mathcal{G}_t & * \\ \hline \end{array} \tag{1.26}$$

(ми не робимо нових поділів в смугах окрім для смуг $\tilde{D}_{1k}$), в яких

$$\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ (m_i \text{ смуг}), \qquad \mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & G_i \end{bmatrix} \ (m_i \text{ смуг})$$

для $i = 1, \dots, t$.

Під **канонічними підсмугами** маємо на увазі усі горизонтальні та вертикальні підсмуги $\tilde{D}$, що містять I_{r_i} з $\tilde{D}_{1k}$. Видалимо в $\tilde{D}$ канонічні підсмуги та отримаємо блочну матрицю

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0_{r_1} & \dots & 0 & F_1 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0_{r_t} & F_t \\ \hline * & G_1 & \dots & G_t & * \\ \hline \end{array} \tag{1.27}$$

поділену як D, в якій ділимо додатково першу горизонтальну смугу та k-ту вертикальну смугу на t підсмуг розміру $r_1, \dots, r_t$; пряма в $\tilde{D}$, що перекреслює $\tilde{D}_{1k}$ вздовж її діагоналі, стає лінією в E, що перекреслює діагональні блоки $0_{r_1}, \dots, 0_{r_t}$ вздовж їх діагоналей.

Покажемо, що

> перетворення (i)–(iii) з Означення 1.2.1 з $\tilde{D}$, що зберігає канонічні підсмуги та $\tilde{D}_{1k}$ індукують шахову матричну задачу на E. (1.28)

Перша горизонтальна смуга $\tilde{D}$ зводиться перетвореннями, що зберігають $\tilde{D}_{1k}$:

$$(S^{-1} \oplus I)\tilde{D}(I \oplus S \oplus I) = \tilde{D}', \qquad S^{-1}\tilde{D}_{1k}S = \tilde{D}_{1k}.$$

За останньою нерівністю та (1.25), S має форму визначену у (1.20) та (1.21). Тоді

$$(S \oplus I)\tilde{D}' = \tilde{D}(I \oplus S \oplus I)$$

виводить

$$\left(\begin{bmatrix} R_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ R_{t1} & \dots & R_{tt} \end{bmatrix} \oplus I\right)E' = E\left(I \oplus \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1t} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & R_{tt} \end{bmatrix} \oplus I\right)$$

(в якій E' визначено за допомогою (1.27) з F_i та G_i заміненими F_i' та G_i'), та таким чином

$$E' = \left(\begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & R_{tt}^{-1} \end{bmatrix} \oplus I\right)E\left(I \oplus \begin{bmatrix} R_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{tt} \end{bmatrix} \oplus I\right),$$

де зірочки позначають довільні блоки. Отже, підсмуги першої горизонтальної та kтої вертикальної смуги E зводяться перетвореннями (i)–(iii) з Означення 1.2.1, що доводить (1.28).

По індукції за розміром, E перетворюється у блочну матрицю E_0, що задовольняє умову (1.22). Замінюючи E на E_0 в (1.26), отримаємо блочну матрицю, що задовольняє (1.22). $\square$

Ключовим твердженням в доведенні Леми 1.3.1 є (1.28). В додатку отримаємо твердження (1.28), використовуючи елементарні матричні перетворення.

1.4 Доведення теореми 1.1.3

Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ взаємоанулюючі оператори на векторному просторі V над полем $\mathbb{F}$. Нехай A та B їхні матриці в деякому базисі V. Змінюючи базис, можемо звести (A, B) за допомогою перетворень подібності до (1.1). За лемою 1.2.1(a), (A, B) подібна до (1.12), в якій кожний доданок $(\Phi_i, 0_{n_i})$ є циклічним типом: це задано звичайним циклом $\circlearrowleft$ повязаний з Φ_i. Пряма сума (1.12) однозначно визначена за (A, B), з точністю до перестановки доданків та заміною (A', B') на подібну пару.

Отже, достатньо довести теорему 1.1.3 для пар $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в яких $\mathcal{A}$ нільпотентна. Тоді A є також нільпотентною.

Лема 1.4.1. *Нехай (A, B) пара взаємоанулюючих матриць, в якій A є нільпотентною. Тоді алгоритм з розділів 1.2 та 1.3 зводить (A, B) перетвореннями подібності до пари (A_0, B_0) матриць, що можуть бути конформно подідлені на блоки такі, що кожна горизонтальна та вертикальна смуга містить не більш одного ненульового блоку та цей блок невироджений.*

Доведення. За лемами 1.2.2 та 1.3.1, (A, B) подібна до деякої пари $(A_0, B_0) := (J^+, C)$ блочних матриць в яких J^+ є формою (1.13) та підматриця D з C визначена (1.17) та (1.18) є додатково поділена на підсмуги такі, що кожна горизонтальна та вертикальна підсмуги містять не більше одного ненульового підблоку та цей підблок є невироджений.

Оскільки усі діагональні блоки $D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{tt}$ матриці D є поміченими, за Лемою 1.3.1(b) діагональні підблоки кожного D_{ii} (відповідно до нового поділу) є квадратними; отже, поділ D_{ii} на горизонтальні підсмуги співпадають з їх поділом на вертикальні підсмуги. Кожний C_{ii} в (1.17) містить m_i^2 квадратних блоки однакового розміру та один з них — D_{ii}; поділимо кожен блок матриці C_{ii} на підблоки відповідно до поділу D_{ii} та розширимо цей поділ на усю матрицю C. Оскільки усі підблоки C зовні D є нульовими, кожна горизонтальна або вертикальна підсмуга C містить не більше ніж 1 ненульовий підблок та цей підблок є невиродженим.

Поділимо J^+ на підблоки відповідно до поділу C на підблоки. Поділ (1.14) кожного $J_{m_i}(0_{r_i})$ на блоки є відповідними до поділу (1.17) матриці C_{ii} на блоки; більш того, поділ кожного I_{r_i} в $J_{m_i}(0_{r_i})$ є відповідним до поділу D_{ii} на підблоки. Таким чином, усі діагональні підблоки I_{r_i} є квадратними; тобто, вони є одиничними матрицями. $\square$

Нехай $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — задана пара (A_0, B_0) блочних матриць описаних у Лемі 1.4.1. Розкладемо векторний простір V на пряму суму

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t \tag{1.29}$$

відповідно до поділу A_0 та B_0 на блоки.

Побудуємо граф Γ з вершинами $1, 2, \ldots, t$, одиничними стрілками $\longrightarrow$, та подвійними стрілками $\Longrightarrow$ наступним чином. Якщо блок (i, j) в матриці A_0 є ненульовим, тоді $\mathcal{A}V_j \subset V_i$, рисуємо $j \longrightarrow i$. Якщо блок (i, j) матриці B_0 є ненульовими, тоді $\mathcal{B}V_j \subset V_i$, рисуємо $j \Longrightarrow i$.

Таким чином, кількість стрілок дорівнює кількості ненульових блоків в A_0 та B_0. Кількість стрілок в кожній вершині j не більше ніж 2. Якщо їх 2 тоді існує лише 3 можливості поведінки стрілок в j:

$$i \longrightarrow j \longrightarrow k, \qquad i \longrightarrow j \Longleftarrow k, \qquad i \Longleftarrow j \Longleftarrow k.$$

Дійсно,

- випадки $i \longrightarrow j \longleftarrow k$ та $i \Longrightarrow j \Longleftarrow k$ є неможливими оскільки кожна горизонтальна смуга містить не більш ніж 1 ненульовий блок,

- випадки $i \longleftarrow j \longrightarrow k$ та $i \Longleftarrow j \Longrightarrow k$ є неможливими оскільки кожна вертикальна смуга містить не більше ніж 1 ненульовий блок,

- випадки $i \longrightarrow j \Longrightarrow k$ та $i \Longrightarrow j \longrightarrow k$ є неможливими через $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$.

Отже, кожен звязний компонент графу Γ є або графом типу шлях (1.2) або циклічним графом (1.5) (з точністю до перенумерації вершин).

Нехай $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ є усіма зв'язними компонентами Γ. Для кожного Γ_l, позначимо як W_l пряму суму усіх просторів V_i з (1.29), що відповідає вершинам Γ_l. Очевидно, W_l є інваріантом відносно операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$. Позначимо як $\mathcal{A}_l$ та $\mathcal{B}_l$ їх обмеження на W_l. Тоді

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r, \qquad (\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1) \oplus \dots \oplus (\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r). \tag{1.30}$$

Випадок 1: $r = 1$. Тоді Γ має форму (1.2) або (1.5), кожна вершина i відповідає векторному простору V_i та кожна стрілка $i \longrightarrow [i]$ з

$$[1] := 2, \ \dots, \ [t-1] := t, \quad [t] := 1$$

асоційована з лінійною біекцією $\mathcal{F}_i$ між відповідними векторними просторами, що є індукованими $\mathcal{A}$ або $\mathcal{B}$. Починаючи з базису V_1 та беручи образи та прообрази відповідно до $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{t-1}$, послідовно будуємо базиси в $V_2, \dots, V_t$. Лінійні біекції $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{t-1}$ задані в цих базисах одиничними матрицями:

$$F_1 = \dots = F_{t-1} = I_d, \qquad d := \dim V_1. \tag{1.31}$$

Якщо Γ це граф типу шлях, тоді пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — це пряма сума d пар типу шлях (див. Означення 1.1.1).

Нехай Γ — це цикловий граф форми (1.5).

Якщо (1.5) є періодичним (див. Означення 1.1.2(ii)), тоді робимо його аперіодичним наступним чином. Послідовність $(c_1,\dots,c_t)$ визначена (1.11) є періодичною; тобто,

$$(c_1,\dots,c_t)=(c_1,\dots,c_\tau;c_{\tau+1},\dots,c_{2\tau};\dots;c_{(q-1)\tau+1},\dots,c_{q\tau}).$$

для деяких $\tau<t$, що ділить t. Нехай τ — це мінімальна число з такою властивістю. Замінимо Γ на граф, що визначений послідовністю $(c_1,\dots,c_\tau)$ та замінимо кожен V_i $(i=1,\dots,\tau)$ на $V_i\oplus V_{i+\tau}\oplus V_{i+2\tau}\oplus\dots$. Отриманий граф є аперіодичним та дає таку ж пару взаємоанулюючих операторів.

Отже, Γ є аперіодичною. Оберемо інші бази у $V_1,\dots,V_t$ використовуючи матриці переходу $S_1,\dots,S_t$. Тоді F_i зміниться за правилом

$$F_i'=\begin{cases}S_{[i]}^{-1}F_iS_i & \text{якщо } i\longrightarrow[i],\\ S_i^{-1}F_iS_{[i]} & \text{якщо } i\Longleftarrow[i],\end{cases}\qquad i=1,\dots,t,$$

та тоді матриця

$$G_i:=\begin{cases}F_i^{-1} & \text{if } i\longrightarrow[i]\\ F_i & \text{якщо } i\Longleftarrow[i]\end{cases}$$

змінюється за правилом

$$G_i'=S_i^{-1}G_iS_{[i]},\qquad i=1,\dots,t.$$

Якщо $S_1=\dots=S_t$, тоді матриці (1.31) не змінюються та G_t зводиться перетвореннями подібності. Конверутємо її до канонічної матриці Фробеніуса

$$\Phi=\Phi_1\oplus\dots\oplus\Phi_p \tag{1.32}$$

в якій кожне Φ_i — це $n_i\times n_i$ блок Фробеніуса форми (4.4), та отримаємо

$$(G_1',\dots,G_t')=(I,\dots,I,\Phi). \tag{1.33}$$

Далі беручи

$$(S_1,\dots,S_t)=(I,\dots,I,\Phi,\dots,\Phi)$$

ми можемо конвертувати (3.16) у

$$(G''_1, \ldots, G''_t) = (I, \ldots, I, \Phi, I, \ldots, I) \tag{1.34}$$

з Φ у будь-якому місці.

Оскільки Γ — аперіодичний, то він містить хоча б 1 подвійну стрілку; в протилежному випадку це одинарна петля $\circlearrowright$ асоційована за невиродженою матирицею, але це неможливо оскільки $\mathcal{A}$ є нільпотентною. Нехай $i \Longleftarrow [i]$ — це подвійна стрілка. Згідно з (1.34) з Φ у місці i, можемо поставити у відповідність $G''_i = F''_i = \Phi$ з цією стрілкою. Згідно з (1.32), $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — це пряма сума p пар циклічного типу (див Означення 1.1.2).

Випадок 2: $r > 1$. Кожна пара $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l)$ в розкладі (1.30) відноситься до звязаного графу Γ_l. За тими ж міркуваннями як і в Випадку 1, розкладемо $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l)$ на пряму суму пар типу шлях та циклічного типу.

Отже, розклали $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на пряму суму пар шляхового та циклічного типів, що доводить існування розкладу з Теореми 1.1.3. Згідно з (1.34), для кожного циклічного графу, що відноситься до доданку циклічного типу, можемо перемістити блок Фробеніуса асоційованого з подвійною стрілкою на будь-яку іншу подвійну стрілку.

Цей розклад однозначно визначений $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ з точністю до перетворень (i) та (ii) з Теореми 1.1.3(a) оскільки кожний прямий доданок є нерозкладним та різні доданки є ізоморфними тоді та тільки тоді коли вони є циклічного типу та відповідні циклічні графи співпадають з точністю до перетворень (ii). Таким чином, можемо використати теорему Крула-Шмідта [7, Глава 1, Теорема 3.6], яка гарантує, що кожне колчанівське представлення є ізоморфним до прямої суми нерозкладних представлень визначених однозначно з точністю до ізоморфізму доданків. Отже, кожна система лінійних відображень однозначно розкладається на пряму суму нерозкладних систем, з точністю до ізоморфізму доданків (більш того, за [64, Теоремою 2] кожна система білінійних форм та лінійних відображень над $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}$ єдиним чином розкладається на пряму суму нерозкладних систем, з точністю до ізоморфізму доданків).

Це доводить твердження (a) Теореми 1.1.3. Твердження (b) випливає з (a) оскільки 2 пари лінійних операторів ізоморфні тоді та тільки тоді коли їх матричні пари подібні.

Додаток

Доведення Леми 1.2.2 елементарними перетвореннями

Для спрощення, допускаємо, що усі Жорданові блоки A не більш ніж 3-на-3, загальний випадок розглядається аналогічно. Тоді

$$J = \underbrace{J_1(0) \oplus \cdots \oplus J_1(0)}_{p \text{ разів}} \oplus \underbrace{J_2(0) \oplus \cdots \oplus J_2(0)}_{q \text{ разів}} \oplus \underbrace{J_3(0) \oplus \cdots \oplus J_3(0)}_{r \text{ разів}},$$

де p, q, r — це натуральні числа або нуль. Пара (A, B) подібна до (J^+, C), в якій

$$J^+ = J_1(0_p) \oplus J_2(0_q) \oplus J_3(0_r) = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} 0_p & & & & & 0 \\ \hline & 0_q & 0_q & & & \\ & I_q & 0_q & & & \\ \hline & & & 0_r & 0_r & 0_r \\ & & & I_r & 0_r & 0_r \\ 0 & & & 0_r & I_r & 0_r \end{array}\right]. \qquad (1.35)$$

Оскільки $J^+C = CJ^+ = 0$,

$$C = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{13} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & D_{23} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & 0 & D_{33} & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Нехай доведемо, що перетворення подібності з (J^+, C), що зберігає J^+ індукує на

$$D := \begin{bmatrix} \cancel{D_{11}} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & \cancel{D_{22}} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & \cancel{D_{33}} \end{bmatrix}$$

(в яких блоки D_{11}, D_{22}, D_{33} перекреслені) шахову матричну задачу.

(i) Можемо зробити з D перетворення (i) з Означення 1.2.1 використовуючи наступні перетворення всередині шести горизонтальних та шести вертикальних смуг матриць J^+ та C:

– Будь-яке елементарне стовпчкове перетворення в першій вертикальній смузі J^+ та C одночасно, та потім обернене рядкове перетворення.

– Будь-яке елементарне стовпчкове перетворення у другій вертикальній смузі матриць J^+ та C та потім обернене рядкове перетворення. Останнє перетворення псує одиничний блок на позиції (3,2) та (1.35), відновлюємо його на обернене рядкове перетворення у третій горизонтальній смузі та потім робимо початкове стовпчкове перетворення у третій вертикальній смузі.

– Будь-яке елементарне стовпчкове перетворення у вертикальних смугах 4, 5, 6 відповідно, тоді обернене рядкове перетворення в горизонтальних смугах 4, 5, 6.

Отже, D_{11}, D_{22}, та D_{33} зводяться перетвореннями подібності.

(ii) Можемо зробити з D перетворення (ii) з Означення 1.2.1 наступне. Можемо додати рядок до вертикальної смуги 1 в D до стовпчика вертикальної смуги 2 чи 3 оскільки відповідні перетворення в J^+ та обернене рядкове перетворення не змінює J^+. Можемо додати стовпець вертикальної смуги 2 у D до стовпця вертикальної смуги 3; відповідне перетворення в J^+ може зіпсувати нульовий блок $(3,4)$, відновимо його додаванням рядків до горизонтальної смуги 5 та обернене стовпчкові перетворення не змінять J^+.

(iii) Можемо робити з D перетворення (iii) з Означення 1.2.1 наступним чином. Можемо додати рядок горизонтальної смуги 1 у D до рядка горизонтальної смуги 2 чи 3 оскільки відовідні перетворення у J^+ не змінюють J^+. Можемо додати рядок горизонтальної смуги 2 у D до рядка горизонтальної смуги 3; відповідне перетворення у J^+ може зіпсувати нульовий блок $(6,2)$, відновимо його додаванням стовпчиків у вертикальну смугу 5.

Доведення (1.28) *елементарними перетвореннями*

Для спрощення, використаємо

$$\tilde{D}_{1k} := J_5(0_p) \oplus J_3(0_q)$$

на місці (1.25), тоді матриця (1.26) приймає форму

$$\tilde{D}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \tilde{D}_{1k} & \mathcal{F}\\ \hline * & \mathcal{G} & * \\ \hline\end{array} = \begin{array}{c|c|ccccc|ccc|c|} & & 1&2&3&4&5&6&7&8& \\ \cline{2-11} 1 & 0 & 0_p &&&&& &&& F_1\\ 2&0&I_p&0_p&&&&&&&0\\ 3&0&&I_p&0_p&&&&0&&0\\ 4&0&&&I_p&0_p&&&&&0\\ 5&0&&&&I_p&0_p&&&&0\\ \cline{3-10} 6&0&&&&&&0_q&&&F_2\\ 7&0&&&0&&&I_q&0_q&&0\\ 8&0&&&&&&&I_q&0_q&0\\ \cline{2-11} & * & 0&0&0&0&G_1&0&0&G_2&*\\ \cline{2-11}\end{array}.$$

Обмежимо себе на ті перетворення (i)–(iii) з Означення 1.2.1 з $\tilde{D}$, що зберігають канонічні підсмуги та $\tilde{D}_{1k}$, та доведемо, що вони індукують шахову матричну задачу на підматриці

$$E = \begin{array}{c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-5} 1 & 0 & \cancel{0_p} & 0 & F_1 \\ \cline{2-5} 6 & 0 & 0 & \cancel{0_q} & F_2 \\ \cline{2-5} & * & G_1 & G_2 & * \\ \cline{2-5} \end{array}$$

в якій блоки 0_p та 0_q перекреслені.

(i) Можемо зробити з E перетворення (i) з Означення 1.2.1 використовуючи наступну послідовність перетворень в $\tilde{D}$:

– По-перше, робимо будь-які елементарні рядкові перетворення у F_1. Оскільки блок $\tilde{D}_{1k}$ перекреслений, повинні зробити обернере стовпчкове перетворення у вертикальній підсмузі 1 матриці $\tilde{D}_{1k}$. Це зіпсує підблок I_p в позиції (2,1) матриці $\tilde{D}_{1k}$, відновимо його початковим рядковим перетворенням в горизонтальній підсмузі 2. Обернене стовпчкове перетворення псує I_p у позиції (3,2), відновимо її початковим рядковим перетворенням в горизонтальній підсмузі 3, і так далі. Отже, зберігаючи підматрицю $J_5(0_p)$ в $\tilde{D}_{1k}$, повинні зробити будь-яке елементарне перетворення рядків в горизонтальних підсмугах 1, 2, 3, 4, 5 одночасно та потім обернене перетворення стовпців у вертикальних підсмугах 1, 2, 3, 4, 5, та таким чином підблок 0_p у E є перекреслений.

– Аналогічно, можемо зробити будь-яке елементарне рядкове перетворення у горизонтальних підсмугах 6, 7, 8 та потім обернене стовпчкове перетворення у вертикальних підсмугах 6, 7, 8, та таким чином підблок 0_q у E є перекресленим.

(ii) Для кожної $p \times q$ матриці S, можемо замінити G_2 на $G_2 + G_1S$ наступним чином. Додамо вертиаклньі підсмуги 3, 4, та 5 матриці $\tilde{D}_{1k}$, помножені справа на S, до вертикальних підсмуг 6, 7, та 8, відповідно:

$$\xrightarrow{\cdot(S\oplus S\oplus S)}$$

$$
-(S\oplus S\oplus S)\cdot\quad
\begin{array}{c|c|cc|ccc|ccc|c|}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
\hline
1 & 0 & 0_p & & & & & & & & F_1 \\
2 & 0 & I_p & 0_p & & & & & & & 0 \\
\hline
3 & 0 & & I_p & 0_p & & & & & & 0 \\
4 & 0 & & & I_p & 0_p & & & & & 0 \\
5 & 0 & & & & I_p & 0_p & & & & 0 \\
\hline
6 & 0 & & & & & & 0_q & & & F_2 \\
7 & 0 & & & & & & I_q & 0_q & & 0 \\
8 & 0 & & & & & & & I_q & 0_q & 0 \\
\hline
 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & G_2 & * \\
\hline
\end{array}
$$

Це перетворення замінює G_2 на $G_2 + G_1S$, але також замінює нульові підблоки (4,6) та (5,7) матриці $\tilde{D}_{1k}$ на S. Обернене рядкове перетворення відбудовує нульові підблоки (4,6) та (5,7), але псує нульові підблоки горизонтальної підсмуги 3 справа від $\tilde{D}_{1k}$. Відновимо їх додаванням лінійну комбінацію стовпців I_p. Таким чином, E може бути зведеним перетвореннями (ii) з Означення 1.2.1.

(iii) Для кожної $q \times p$ матриці S, можемо замінити F_2 на $F_2 + SF_1$ наступним чином. Додамо горизонтальні підсмуги 1, 2, та 3, помножені зліва на S, до горизонтальних підсмуг 6, 7, та 8, відповідно:

$$\xleftarrow{\cdot(-S\oplus S\oplus S)}$$

$$
(S\oplus S\oplus S)\cdot\quad
\begin{array}{c|c|ccc|cc|ccc|c|}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
\hline
1 & 0 & 0_p & & & & & & & & F_1 \\
2 & 0 & I_p & 0_p & & & & & & & 0 \\
3 & 0 & & I_p & 0_p & & & & & & 0 \\
\hline
4 & 0 & & & I_p & 0_p & & & & & 0 \\
5 & 0 & & & & I_p & 0_p & & & & 0 \\
\hline
6 & 0 & & & & & & 0_q & & & F_2 \\
7 & 0 & & & & & & I_q & 0_q & & 0 \\
8 & 0 & & & & & & & I_q & 0_q & 0 \\
\hline
 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & G_2 & * \\
\hline
\end{array}
$$

Таке перетворення заміняє F_2 на F_2+SF_1, але також заміняє нульові підблоки (7,1) та (8,2) у $\tilde{D}_{1k}$ на S. Обернене стовпчкове перетворення відновлює підблоки (7,1) та (8,2), але псує нульові підблоки у вертикальній підсмузі 3 нижче $\tilde{D}_{1k}$. Відновлюємо їх додаванням лінійних комбінацій рядків I_p. Таким чином, E може бути зведене перетвореннями (iii) з Означення 1.2.1.

1.5 Висновки до розділу 1

Данний розділ дисертації присвячений проблемі класифікації пар взаємоанулюючих операторів на скінченновимірному вектороному просторі. Для таких пар наведена класифікація над довільним полем. Більше того наводиться алгоритм для зведення матриць такої пари до канонічних форм відносно перетворень подібності.

У першому параграфі наведені означення пар матриць шляхового та циклічного типу, а також сформульована основна теорема розділу.

У другому параграфі зведено загальний випадок до випадку нільпентної A, зведено A до її канонічної форми Жордана, обмежуючи себе до таких перетворень подібності, що зберігають A, та показуємо, що вони індукують на деяку підматрицю D матриці B (що містить усі ненульові елементи матриці B).

У третьому параграфі застосовуємо зведення описане в [53, 54] та трансформуємо D у блочну форму, таку, що кожний горизонтальний та кожний вертикальний рядок містить не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим.

У четвертому параграфі, розширюючи поділ D на блоки, знаходиться блочна форма A та B така, що кожна горизонтальна та кожна вертикальна смуга містіть не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим. З цього випливає розклад відповідної операторної пари $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на пряму суму пар шляхового та циклового типів, що доводить Теорему 1.1.3.

Розділ 2

Матриці, які самоконгруентні тільки за допомогою матриць з одиничним визначником

Результати даного розділу опубліковані в статті [32].

Даний розділ дисертації присвячений питанню критерію самоконгруентності за допомогою матриці з одиничним визначником, використовуючи канонічні матриці відносно конгруентності.

Д. Доковіч та Ф. Зехтман розглянули векторний простір V, наділений білінійною формою. Вони довели, що ізометрії V над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2 мають визначник 1 тоді та тільки тоді коли V не має ортогональних доданків непарної розмірності (випадок характеристики 2 був також розглянутий). Їх доведення базується на класифікації Ріма білінійних форм. Е. Коклі, Ф. Допіко та Р. Джонсон надали інше доведення цього критерію над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ використовуючи топмсонівські канонічні пари симетричних та кососиметричних матриць відносно конгруентності. Нехай M — матриця білінійної форми на V. В другому розділі дисертаційної роботи наведено інше доведення цього критерію над $\mathbb{F}$ та отримано необхідні та достатні умови використовуючи канонічні форми M для конгруентності, пари (M^T, M) для еквівалентності, та $M^{-T}M$ (якщо M невироджена) для подібності.

2.1 Вступ

Фундаментальні результати, отримані Доковичем та Зехтманом ведуть до опису усіх n-на-n матриць M над довільним полем $\mathbb{F}$ таким, що

$$S \text{ невироджена та } S^T M S = M \quad \text{дає} \quad \det S = 1. \tag{2.1}$$

Над полем характеристики не 2, надамо інше доведення їх опису та отримаємо необхідні та достатні умови на M що гарантують (2.1) та включають канонічні форми M для конгруентності, пари (M^T, M) для еквівалентності, та $M^{-T}M$ (якщо M не вироджена) для подібності. Авжеж, якщо $\mathbb{F}$ має характеристику 2 тоді кожна невироджена матриця M задовільняє (2.1).

Векторний простір V над $\mathbb{F}$ з білінійною формою $B : V \times V \to \mathbb{F}$ називається **білінійним простором**. Лінійна бієкція $\mathcal{A} : V \to V$ називається **ізометрією**, якщо

$$B(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = B(x, y) \qquad \text{для усіх } x, y \in V.$$

Якщо B задано матрицею M, тоді умова (2.1) гарантує, що кожна ізометрія має визначник 1; так що група ізометрій міститься у спеціальній лінійній групі.

Білінійний простір V називається **симплектичним**, якщо B є невиродженою кососиметричною формою. Відомо, що кожна ізометрія симплектичного простору має визначник 1 [3, Теорема 3.25]. Якщо B задано матрицею

$$Z_{2m} := \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

тоді кожна ізометрія задана симлпектичною матрицею (матриця S є **симлпектичною**, якщо $S^T Z_{2m} S = Z_{2m}$), та таким чином кожна симплектична матриця має визначник 1.

Позначимо $M_n(\mathbb{F})$ множину $n \times n$ матриць над полем $\mathbb{F}$ та скажемо, що $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ є **конгруентними**, якщо є невироджена $S \in M_n(\mathbb{F})$ така що $S^T AS = B$; вони є **подібними**, якщо $S^{-1}AS = B$ для деякої невиродженої $S \in M_n(\mathbb{F})$.

Наступна теорема є наслідком головної теореми Доковіча та Зехтмана [19, Теорема 4.6], яка базується на класифікації Ріма білінійних фор [59].

Теорема 2.1.1. *Нехай M — квадратна матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні*

(i) *M задовільняє* (2.1) *(тобто кожна ізометрія на білінійному просторі над $\mathbb{F}$ з скалярним добутком, заданим матрицею M має визначник* 1*),*

(ii) *M не конгруентна до $A \oplus B$, де A — квадратна матриця непарного розміру.*

- Доковіч та Зехтман [19] також довели, що якщо $\mathbb{F}$ складається з більше ніж 2 елементів та його характеристика 2, тоді $M \in M_n(\mathbb{F})$ задовільняє (2.1) тоді та тільки тоді коли M не конкруентна до $A \oplus B$, в якому кожна A є виродженим блоком Жордана непарного розміру . (Очевидно, що кожна $M \in M_n(\mathbb{F})$ задовільняє (2.1), якщо $\mathbb{F}$ має лише 2 елементи.) Коклі, Допіко, та Джонсон [14, Твердження 4.10] надали інше доведення теореми 2.1.1 для дійсних та комплексних матриць тільки: вони використали канонічні пари Томпсона симетричних та кососиметричних матриць для конгруентності [69]. Надамо ще одне доведення Теореми 2.1.1 використовуючи наші канонічні матриці для конгруентності [42, 64]. Для комплексного поля, пари канонічних форм 8 різних типів необхідні в [14]; наші канонічні форми лише трьох простих типів (2.14). Наш підхід до Теореми 2.1.1 через канонічні форми матриць; підхід в [19] через розклад білінійних просторів.

Згідно [14], позначимо через $\Xi_n(\mathbb{F})$ набір усіх $M \in M_n(\mathbb{F})$, що задовільняють (2.1). Обчислення виявили, що $\Xi_n(\mathbb{F})$ є замнкненими відносно конгруентності, так що,

$$M \in \Xi_n(\mathbb{F}) \text{ та } M \text{ конгруентно } N \text{ дає } N \in \Xi_n(\mathbb{F}). \tag{2.3}$$

Імплікацію (i) ⇒ (ii) Теореми 2.1.1 легко встановити: нехай M буде конгруентна до $N = A \oplus B$, де $A \in M_r(\mathbb{F})$ та r є непарними. Якщо $S := (-I_r) \oplus I_{n-r}$, тоді $S^T N S = N$ та $\det S = (-1)^r = -1$, та таким чином $N \notin \Xi_n(\mathbb{F})$. Звідси маємо з (2.3), що $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$.

Імплікацію (ii) ⇒ (i) не так легко встановити. Це доводиться в Розділі 2.3. В іншій частині цього розділу та в розділі 2.2 обговорюємо деякі висновки Теореми 2.1.1. Перший це

Наслідок 2.1.2. *Нехай $\mathbb{F}$ буде полем характеристики не 2. Якщо n непарне тоді $\Xi_n(\mathbb{F})$ є порожнім. $M \in \Xi_2(\mathbb{F})$ тоді та тільки тоді коли M не є симетричною.*

Дійсно, Теорема 2.1.1 гарантує що $M \notin \Xi_2(\mathbb{F})$ тоді та тільки тоді коли M є конгруентною до $[a] \oplus [b]$ для деяких $a, b \in \mathbb{F}$, та це виконується тоді та тільки тоді коли M є симетричною.

В усіх матричних парах, щорозглядаємо , обидві матриці над полем $\mathbb{F}$ та мають однаковий розмір. Дві матричні пари (A, B) та (C, D) є **еквівалентними**, якщо існують невироджені матриці R та S над $\mathbb{F}$ такі що

$$R(A, B)S := (RAS, RBS) = (C, D).$$

Пряма сума пар (A, B) та (C, D) — це пара

$$(A, B) \oplus (C, D) := (A \oplus C, B \oplus D)$$

спряжена до (A, B) — це пара (B^T, A^T); таким чином, (A, B) це *самоспряжена*, якщо A квадратна та $A = B^T$. Для зручності позначення напишемо

$$M^{-T} := (M^{-1})^T.$$

Кажемо, що (A, B) є **прямим доданком** (M, N) **відносно еквівалентності**, якщо (M, N) еквівалентна до $(A, B) \oplus (C, D)$ для деяких (C, D). Квадратна матриця A є *прямим доданком* M *відносно конгруентності* (відповідно, *подібності*), якщо M є конруетною (відповідно подібною) до $A \oplus B$ для деяких B.

Критерій (ii) в Теоремі 2.1.1 використовує відношення матричної конгруентності; потрібно розв'язати систему квадратних рівнянь, щоб перевірити, що дві матриці конгруентні. Критерій (iii) та (iv) в наступній теоремі може бути зручнішим для використання: потрібно розв'язати лише систему лінійних рівнянь, що перевірити, що дві матриці еквівалентні чи подібні.В розділі 2.2покажемо, що з теореми 2.1.1 випливає

Теорема 2.1.3. *Нехай M є $n \times n$ матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики, відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні:*

(i) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$;

(ii) *M має прямий доданок відносно конгруентності, що має непарний розмір;*

(iii) (M^T, M) *має прямий доданок* (A, B) *відносно еквівалентності, в якій A та B є $r \times r$ матрицями та r є непарною.*

(iv) $($*у випадку невиродженої* $M)$ $M^{-T}M$ *має прямий доданок відносно подібності, що має непарний розмір.*

Для кожного натурального чилса r, визначимо $(r-1)$-на-r матриці

$$F_r := \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

та r-на-r матриці

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_r := \begin{bmatrix} 0 & & & & & \iddots \\ & & & & 1 & \iddots \\ & & & -1 & -1 & \\ & & 1 & 1 & & \\ & -1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Зазначимо, що

$$\Gamma_r^{-T}\Gamma_r \quad \text{подібна до} \quad J_r((-1)^{r+1}) \tag{2.6}$$

оскільки

$$\Gamma_r^{-T}\Gamma_r = (-1)^{r+1} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \Gamma_r = (-1)^{r+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & & * \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Явні прямі доданки в умовах (ii)–(iv) Теореми 2.1.3 задані в наступній теоремі.

Теорема 2.1.4. *Нехай M є $n \times n$ матрицею над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні:*

(i) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$;

(ii) *M має прямий доданок відносно конгруентності, що є або*

- *невиродженою матрицею Q такою, що $Q^{-T}Q$ подібна до $J_r(1)$ з непарним r (якщо $\mathbb{F}$ є алгебраїчно замкненим, тоді можемо взяти Q, що буде Γ_r оскільки будь-яка така Q конгруентна до Γ_r), або*
- *$J_s(0)$ з непарним s.*

(iii) (M^T, M) *має прямий доданок відносно еквівалентності, що є або* $(I_r, J_r(1))$ *з непарним* r*, або* (F_t, G_t) *з будь-яким* t.

(iv) (*у випадку невиродженої* M) $M^{-T}M$ *має прямий доданок для подібності, що є* $J_r(1)$ *з непарним* r.

У наступному розділі отримаємо Теореми 2.1.3 та 2.1.4 з Теореми 2.1.1 та дамо алгоритм, щоб визначити чи $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$. У розділі 2.3 доведемо теорему 2.1.1.

2.2 З теореми 2.1.1 випливають Теореми 2.1.3 та 2.1.4

Теорема 2.1.4 дає три критерії для $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$, що включає прямі доданки M відносно конгруентності, прямі доданки (M^T, M) відносно еквівалентності, та прямі доданки $M^{-T}M$ відносно подібності. В цьому розділі отримаємо ці критерії з 2.1.1. З цією метою, нагадаємо канонічну форму квадратних матриць M відносно конгруентності над $\mathbb{F}$ заданої в [64, Теорема 3], та отримаємо канонічні форми самоспряжених пар (M^T, M) відносно еквівалентності та канонічних форм коквадратів $M^{-T}M$ відносно подібності. Тоді встановили умови на ці канонічні форми під якими $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$.

2.2.1 Канонічна форма квадратної матриці відносно конгруентності.

Кожна квадратна матриця A над полем $\mathbb{F}$, характеристики відмінної від 2, подібна прямій сумі, однозначно визначеній з точністю до перестановки доданків *блоків Фробеніуса*

$$\Phi_{p^l} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -c_m \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & & 1 & -c_1 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

в яких

$$p(x)^l = x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m$$

є цілим степенем многочлена

$$p(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \cdots + a_s \tag{2.8}$$

що є незвідним над $\mathbb{F}$. Ця пряма сума називається **канонічною формою Фробеніуса** матриці A; іноді вона називається **раціональною канонічною формою** (див. [11, Розділ 6]).

Блок Фробеніуса не має прямих доданків відносно подібності відмінних від себе, тобто він нерозкладний відносно подібності. Також, блок Фробеніуса $\Phi_{(x-\lambda)^m}$ подібний до блоку Жордана $J_m(\lambda)$.

Якщо $p(0) = a_s \neq 0$ в (2.19), ми позначимо

$$p^\vee(x) := a_s^{-1}(1 + a_1 x + \cdots + a_s x^s) = p(0)^{-1} x^s p(x^{-1}) \tag{2.9}$$

та помітимо, що

$$(p(x)^l)^\vee = p(0)^{-l} x^{sl} p(x^{-1})^l = (p(0)^{-1} x^s p(x^{-1}))^l = (p^\vee(x))^l. \tag{2.10}$$

Матриця $A^{-T}A$ називається **коквадратом** невиродженої матриці A. Якщо дві невироджені матриці конгруентні, тоді їх коквадрати подібні тому що

$$(S^T AS)^{-T}(S^T AS) = S^{-1} A^{-T} AS. \tag{2.11}$$

Якщо Φ є коквадратом, оберемо матрицю A таку що $A^{-T}A = \Phi$ та позначимо $\sqrt[T]{\Phi} := A$ (*коквадратний корінь* матриці Φ).

Лема 2.2.1. *Нехай $p(x)$ буде незвідним многочленом виду* (2.19) *та нехай Φ_{p^l} буде $m \times m$ блоком Фробеніуса* (4.4). *Тоді*

(a) Φ_{p^l} *є коквадратом тоді та тільки тоді коли*

$$p(x) \neq x, \qquad p(x) \neq x + (-1)^{m+1}, \qquad \text{та } p(x) = p^\vee(x). \tag{2.12}$$

(b) *Якщо* Φ_{p^l} *є коквадратом та* m *є непарним, тоді* $p(x) = x - 1$.

Доведення. Умови в (a) та явна форма матриці $\sqrt[T]{\Phi_{p^l}}$ була визначена в [64, Теоремі 7]; див. [42, Лему 2.3] для детальнішого доведення.

(b) За (2.12), $p(x) = p^\vee(x)$. Тоді, $a_s = a_s^{-1}$, отже $a_s = \varepsilon = \pm 1$ та

$$p(x) = x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \cdots + a_k x^{k+1} + a_k \varepsilon x^k + \cdots + a_1 \varepsilon x + \varepsilon.$$

Помітимо, що $p(-\varepsilon) = 0$. Але $p(x)$ є незвідним, тоді $s = 1$ та $p(x) = x + \varepsilon$. За (2.12) знову, $\varepsilon \neq 1$. Тоді, $p(x) = x - 1$. $\square$

Визначимо, що *коса сума* двох матриць:

$$[A \setminus B] := \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.2.2. *Нехай* M *є квадратною матрицею над полем* $\mathbb{F}$ *характеристики відмінної від* 2. *Тоді*

(a) M *є конгруентною прямій сумі матриць форми*

$$[\Phi_{p^l} \setminus I_m], \qquad Q, \qquad J_s(0), \tag{2.13}$$

в якій Φ_{p^l} *— це* $m \times m$ *блок Фробеніуса, що не є коквадратом,* Q *є невиродженою та* $Q^{-T}Q$ *є подібною до блоку Фробеніуса , та* s *є непарною.*

(b) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$ *тоді та тільки тоді, коли* M *має прямий доданок відносно конгруентності, що або*

- *невироджена матриця* Q *така, що* $Q^{-T}Q$ *подібна до* $J_r(1)$ *з непарним* r*, або*
- $J_s(0)$ *з непарним* s.

Доведення. (a) Це твердження є частиною існування Теореми 3 в [64] (також представленій в [42, Теорема 2.2]), в якій канонічна форма матриці відносно конгруентності над $\mathbb{F}$ задана з точністю до класифікації форм Ерміта над скінченним розширенням $\mathbb{F}$. Канонічний блок $J_{2m}(0)$ використаний в [64] замість $[J_m(0) \diagdown I_m]$, але доведення Теореми 3 [64] показує, що ці дві матриці конгруентні.

(b) Частина "тоді" доведення випливає прямо з Теореми 2.1.1. Давайте доведемо частину "тільки тоді". Якщо $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$, Теорема 2.1.1 гарантує, що M конгруентно до $A \oplus B$, в якому A квадратна матриця непарного розміру. Частина (a) гарантує, що матриця A конгруентна прямій сумі матриць виду (2.13), не усі з яких мають парний розмір. Таким чином, A (а тоді також і M) має прямі доданки відносно конгруентності, що або $J_s(0)$ з s непарним, або невироджена матриця Q непарного розміру така, що $Q^{-T}Q$ подібна до блоку Фробеніуса Φ_{p^l} непарного розміру. Лемма 2.2.1 гарантує, що $p(x) = x - 1$, таким чином $Q^{-T}Q$ подібна до $\Phi_{(x-1)^r}$, яка подібна до $J_r(1)$. □

Якщо $\mathbb{F}$ алгебраїчно замкнене поле, тоді Теорема 2.2.2 може бути спрощена наступним чином.

Теорема 2.2.3. *Нехай M —квадратна матриця над алгебраїчно замкненим полем характеристики відмінної від 2. Тоді*

(a) *M конгруентна до прямої суми матриць виду*

$$[J_m(\lambda) \diagdown I_m], \qquad \Gamma_r, \qquad J_s(0), \tag{2.14}$$

в яких $\lambda \neq (-1)^{m+1}$, кожне ненульове λ визначається з точністю до заміни на λ^{-1}, Γ_r визначено в (2.5), та s непарна. Ця пряма сума однозначно визначена матрицею M з точністю до перестановки доданків.

(b) *$M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$ тоді та тільки тоді коли M має прямий доданок відносно конгруентності виду Γ_r з непарним r або $J_s(0)$ з непарним s.*

Доведення. (a) Ця канонічна форма відносно конгруентності була отримана в [42, Теоремі 2.1(a)]; дивіться також [40, 41].

(b) Це твердження випливає з (a) та Теореми 2.1.1. □

Еквівалентність (i) $\Leftrightarrow$ (ii) в Теоремі 2.1.4 випливає з Теорем 2.2.2 та 2.2.3. (Еквівалентність (i) $\Leftrightarrow$ (ii) в Теоремі 2.1.3 це інша форма Теореми 2.1.1.)

2.2.2 Канонічна форма самоспряженої матричної пари відносно еквівалентності

Теорема Кронекера для матричних олівців [27, Розділ 12] гарантує. що кожна матрична пара (A, B) над $\mathbb{C}$ еквівалентна прямій сумі пар виду

$$(I_m, J_m(\lambda)), \quad (J_r(0), I_r), \quad (F_s, G_s), \quad (F_t^T, G_t^T),$$

в якій F_s та G_s визначені в (3.18). Ця пряма сума визначена однозначно через (A, B), з точністю до перестановки доданків. Над полем $\mathbb{F}$ характеристики не 2, ця канонічна форма з блоками Фробеніуса Φ_{p^l} (див. (4.4)) замість блоків Жордана $J_m(\lambda)$ може бути побудована у два кроки:

- Використайте алгоритм Доорена регуляризаціїї [70] для матричних олівців (які були розширені на матриці циклів лінійних відображень у [65] та на матриці білінійних форм в [39]), що перетворити (A, B) у еквівалентну пару, що є прямою сумою *регулярної частини* (I_k, R) з невиродженою R та канонічними парами виду $(J_r(0), I_r)$, (F_s, G_s), та (F_t^T, G_t^T).

- Зведіть R до прямої суми блоків Фробеніуса Φ_{p^l} за допомогою перетворень подібності $S^{-1}RS$; відповідне перетворення подібності $S^{-1}(I_k, R)S = (I_k, S^{-1}RS)$ розкладає регулярну частину на пряму суму канонічних блоків (I_m, Φ_{p^l}).

Теорема 2.2.4. *Нехай M — це квадратна матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від* 2.

(a) *Самоспряжена пара (M^T, M) еквівалентна прямій сумі самоспряже-*

них пар виду

$$([I_m \diagdown \Phi_{p^l}^T], [\Phi_{p^l} \diagdown I_m]), \quad (\sqrt[T]{\Phi_{q^r}}^T, \sqrt[T]{\Phi_{q^r}}), \quad (J_s(0)^T, J_s(0)), \tag{2.15}$$

в яких Φ_{p^l} *є* $m \times m$ *блоком Фробеніуса, що не є коквадратом,* Φ_{q^r} *— це блок Фробеніуса, що є коквадратом, та* s *є непарним. Ця пряма сума однозначно визначена через* M*, з точністю до перестановки прямих доданків та замін, в якій кожна* Φ_{p^l}*, будь-якої кількості доданків виду* $([I_m \diagdown \Phi_{p^l}^T], [\Phi_{p^l} \diagdown I_m])$ *за допомогою* $([I_m \diagdown \Phi_{q^l}^T], [\Phi_{q^l} \diagdown I_m])$*, в якій* $q(x) := p^\vee(x)$ *визначено в* (2.9).

(b) *Наступні три умови еквівалентні:*

(i) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$*;*

(ii) (M^T, M) *має самоспряжений прямий доданок відносно еквівалентності виду* (Γ_r^T, Γ_r) *з непарним* r*, або* $(J_s(0)^T, J_s(0))$ *з непарним* s*;*

(iii) (M^T, M) *має пряму суму відносно еквівалентності виду* $(I_r, J_r(1))$ *з непарним* r*, або* (F_t, G_t) *з будь-яким* t*.*

Доведення. Нехай M є квадратною матрицею над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2.

(a) За Теоремою 2.2.2(a), M конгруентна прямій сумі N матриць виду (2.13). Таким чином, (M^T, M) еквівалентна (N^T, N), прямій сумі пар вигляду (2.15).

Єдиність цієї прямої суми випливає з єдиності припущення в теоремі Кронекера та наступних чотирьох еквівалентностей:

1. $([I_m \diagdown \Phi_{p(x)^l}^T], [\Phi_{p(x)^l} \diagdown I_m])$ є еквівалентною до $(I_m, \Phi_{p(x)^l}) \oplus (I_m, \Phi_{p^\vee(x)^l})$ для кожного незвідного многочлена $p(x) \neq x$.

2. $([I_m \diagdown J_m(0)^T], [J_m(0) \diagdown I_m])$ еквівалентна до $(I_m, J_m(0)) \oplus (J_m(0), I_m)$.

3. $(\sqrt[T]{\Phi_{q^r}}^T, \sqrt[T]{\Phi_{q^r}})$ еквівалентна до (I, Φ_{q^r}).

4. $(J_{2t-1}(0)^T, J_{2t-1}(0))$ еквівалентна до $(F_t^T, G_t^T) \oplus (G_t, F_t)$.

Щоб перевірити першу еквівалентність, помітимо, що $(\Phi^T_{p(x)^l}, I_m)$ еквівалентно до $(I_m, \Phi_{p^\vee(x)^l})$ оскільки

$$\Phi^{-T}_{p(x)^l} \quad \text{подібна до} \quad \Phi_{p^\vee(x)^l} \tag{2.16}$$

для кожного невиродженого $m \times m$ блоку Фробеніуса $\Phi := \Phi_{p(x)^l}$. Подібність (2.16) випливає з факту, що характеристичні многочлени матриць Φ^{-T} та $\Phi_{p^\vee(x)^l}$ рівні:

$$\begin{aligned}\chi_{\Phi^{-T}}(x) &= \det(xI - \Phi^{-1}) = \det((-\Phi^{-1})(I - x\Phi)) \\ &= \det(-\Phi^{-1}) \cdot x^m \cdot \det(x^{-1}I - \Phi) = \chi^\vee_\Phi(x) = (p(x)^l)^\vee,\end{aligned}$$

що дорівнює $p^\vee(x)^l$ згідно (2.10).

Друга еквівалентність очевидна.

Щоб перевірити третю еквівалентність, обчислимо

$$\sqrt[T]{\Phi_{q^r}}^{-T}(\sqrt[T]{\Phi_{q^r}}^T, \sqrt[T]{\Phi_{q^r}})I = (I, \Phi_{q^r}).$$

Матричні пари четвертої еквівалентності є перестановочно еквівалентними.

(b) Імплікація "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Припустимо, що $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$. За теоремою 2.2.2(b), M має прямий доданок Q відносно конгруентності такий, що $Q^{-T}Q$ подібна до $J_r(1)$ з непарним r, або прямій сумі $J_s(0)$ з непарним s. Тоді (Q^T, Q) або $(J_s(0)^T, J_s(0))$ є прямою сумою (M^T, M) відносно еквівалентності. Пара (Q^T, Q) еквівалентна до (Γ_r^T, Γ_r) оскільки $Q^{-T}Q$ та $\Gamma_r^{-T}\Gamma_r$ подібні (вони подібні до $J_r(1)$ згідно (2.6)) та оскільки

$$S^{-1}Q^{-T}QS = \Gamma_r^{-T}\Gamma_r \quad \Longrightarrow \quad \Gamma_r^T S^{-1}Q^{-T}(Q^T, Q)S = (\Gamma_r^T, \Gamma_r).$$

Імплікація "(ii) $\Rightarrow$ (iii)". Щоб довести цей напрям, помітимо, що (Γ_r^T, Γ_r) з непарним r еквівалентно до $(I_r, \Gamma_r^{-T}\Gamma_r)$, який еквівалентний до $(I_r, J_r(1))$

через (2.6), та [42, стор. 213] гарантує, що

$$\big(J_{2t-1}(0)^T, J_{2t-1}(0)\big) \quad \text{еквівалентне до} \quad (F_t, G_t) \oplus (G_t^T, F_t^T). \tag{2.17}$$

"(iii) ⇒ (i)" Припустимо твердження в (iii). Згідно теореми 2.2.2(a), M конгруентна прямій сумі $N = \oplus_i N_i$ матриць виду (2.13). Тоді (M^T, M) еквівалентна до $(N^T, N) = \oplus_i (N_i^T, N_i)$. Згідно (iii) та твердження єдиності в теоремі Кронекера, деякі (N_i^T, N_i) мають прямий доданок відносно еквівалентності виду $(I_r, J_r(1))$ з непарним r або (F_t, G_t) з будь-яким t.

- Припустимо, що прямий доданок це $(I_r, J_r(1))$ з непарним r. Оскільки N_i одна з матриць (2.13) та $J_r(1)$ з непарним r є коквадратом згідно (2.12), звідси випливає, що $N_i = Q$ та $Q^{-T}Q$ подібні до $J_r(1)$.

- Припустимо, що прямий доданок це (F_t, G_t). Оскільки N_i — це одна з матриць (2.13), (2.17) гарантує, що $N_i = J_{2t-1}(0)$.

В обох попередніх випадках, N_i має непарний розмір, отже Теорема 2.1.1 гарантує, що $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$. □

Еквівалентності (i) ⇔ (iii) в Теоремах 2.1.3 та 2.1.4 випливають з Теореми 2.2.4.

2.2.3 Канонічна форма коквадрату відносно подібності

Теорема 2.2.5. *Нехай M невироджена матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2.*

(a) *Коквадрат $M^{-T}M$ подібний прямій сумі коквадратів*

$$\Phi_{p^l} \oplus \Phi_{p^l}^{-T}, \qquad \Phi_{q^r}, \tag{2.18}$$

в якій Φ_{p^l} невироджений блок Фробеніуса, що не є коквадратом та Φ_{q^r} є блоком Фробеніуса, що є коквадратом. Ця пряма сума однозначно визначена над M, з точністю до перестановки прямих доданків та *заміни, для кожного Φ_{p^l}, будь-якої кількості доданків виду $\Phi_{p^l} \oplus \Phi_{p^l}^{-T}$ на $\Phi_{q^l} \oplus \Phi_{q^l}^{-T}$, в якій $q(x) := p^\vee(x)$, що визначено в* (2.9).

(b) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$ *тоді та тільки тоді коли $M^{-T}M$ має прямий доданок для подібності виду $J_r(1)$ з непарним r.*

Доведення. (a) Існування цієї прямої суми випливає з Теореми 2.2.2(a) оскільки M конгруентно прямій сумі невироджених матриць $[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]$ та Q (див (2.13)); матриці (2.18) є їх коквадратами. Твердження про єдиність випливає з єдиності канонічної форми Фробеніуса та (2.16).

(b) За теоремою 2.2.4(b) та оскільки M є невиродженою, $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$ тоді та тільки тоді, коли (M^T, M) має прямий доданок відносно еквівалентності виду $(I_r, J_r(1))$ з непарним r. З цього випливає (b) оскільки (M^T, M) еквівалентно до $(I_n, M^{-T}M)$. $\square$

Еквівалентності (i) $\Leftrightarrow$ (iv) в Теоремах 2.1.3 та 2.1.4 випливають з Теореми 2.2.5.

2.2.4 Алгоритм

Наступної простої умови достатньо, щоб гарантувати, що $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$.

Лема 2.2.6 ([14, Теорема 2.3] для $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). *Нехай $\mathbb{F}$ є полем характеристики, відмінної від* 2. *Якщо $M \in M_n(\mathbb{F})$ та, якщо його кососиметрична частина $M_w = (M - M^T)/2$ є невиродженою, тоді $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$.*

Доведення. Оскільки M_w кососиметрична та невироджена, тоді існує невироджена C така що $M_w = C^T Z_{2m} C$, в якій Z_{2m} визначена в (3.9). Якщо $S^T M S = M$, тоді

$$S^T M_w S = M_w, \qquad (CSC^{-1})^T Z_{2m} (CSC^{-1}) = Z_{2m},$$

а отже CSC^{-1} є симплектичною. Згідно [3, Теореми 3.25], $\det CSC^{-1} = 1$, що випливає з $\det S = 1$. $\square$

Незалежно від будь-якої умови на M_w, можна використати алгоритм регуляризації описаний в [39], щоб звести M за послідовністю конгруенцій (прості рядкові та стовпчкові операції) над формою

$$B \oplus J_{n_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_p}(0),\ B \text{ невироджена та } 1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_p. \tag{2.19}$$

Авжеж, вироджені блоки відсутні та $B = M$, якщо M невироджена.

Згідно теореми 2.2.5(b), єдина потрібна інформація про B в (2.19) це чи має вона будь-які блоки Жордана $J_r(1)$ з непарним r. Нехай $r_k = \operatorname{rank}(B^{-T}B - I)^k$ та набір $r_0 = n$. Для кожного $k = 1, \ldots, n$, $B^{-T}B$ має $r_{k-1} - r_k$ блоки $J_j(1)$ усіх розмірів $j \geq k$ та рівно $(r_{2k} - r_{2k+1}) - (r_{2k+1} - r_{2k+2}) = r_{2k} - 2r_{2k+1} + r_{2k+2}$ блоків виду $J_{2k+1}(1)$ для кожного $k = 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}]$.

Попередні спостереження ведуть до наступного алгоритму, що визначає чи задана $M \in M_n(\mathbb{F})$ є в $\Xi_n(\mathbb{F})$:

1. Якщо $M\ ---M^T$ невироджена, тоді зупиняємося: $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$.

2. Якщо M вироджена, використовуємо алгоритм регуляризації [39] щоб визначити пряму суму виду (2.19) до якої M конгруентно, та перевіряємо вироджений блок розміру n_j. Якщо будь-який n_j непарний, тоді зупиняємося: $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$.

3. Якщо M невироджена або, якщо усі n_j парні, тоді $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$ тоді та тільки тоді, якщо $r_{2k} - 2r_{2k+1} + r_{2k+2} = 0$ для усіх $k = 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}]$.

Помітимо, що, якщо $M - M^T$ невироджена , тоді (a) немає n_j непарних оскільки $J_r(0) - J_r(0)^T$ вироджена для кожного непарного r, (b) $B - B^T$ невироджена , та (c) $\operatorname{rank}(B^{-T}B - I) = \operatorname{rank}(B^{-T}(B - B^T)) = n$, отже $r_k = n$ для усіх $k = 1, 2, \ldots$ та $r_{2k} - 2r_{2k+1} + r_{2k+2} = 0$ для усіх $k = 1, 2, \ldots$.

2.3 Доведення теореми 2.1.1

Імплікація (i) ⇒ (ii) теореми 2.1.1 була встановлена у розділі 2.1. В цьому розділідоведемо залишену імплікацію (ii) ⇒ (i):візьмемо будь-яку $M \in M_n(\mathbb{F})$, що не має прямі доданки відносно конгруентності непарного розміру, та покажемо, що $M \in \Xi_n(\mathbb{F})$. Продовжимо допускати, як в Теоремі 2.1.1, що $\mathbb{F}$ є полем характеристики відмінної від 2.

Згідно (2.3) та Теореми 2.2.2(a), можемо допустити, що M пряма сума матриць парних розмірів форми $[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]$ та Q; див (2.13). Переставляючи доданки, представимо M у формі

$$M = M' \oplus M'', \qquad M' \text{ is } n' \times n', \quad M'' \text{ is } n'' \times n'', \tag{2.20}$$

в якій

(α) M' пряма сума усіх доданків виду $[\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m]$ (m парне за лемою 2.2.1(a)), та

(β) M'' пряма сума усіх інших доданків; вони мають форму $[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]$ з $p(x) \neq x-1$ та Q парного розміру, в якому Φ_{p^l} є $m \times m$ блоком Фробеніуса, що не є коквадратом та $Q^{-T}Q$ подібна до блоку Фробеніуса.

Крок 1: Покажемо, що для кожної невиродженої S,

$$S^T M S = M \quad \Longrightarrow \quad S = S' \oplus S'', \quad S' \text{ є } n' \times n', \quad S'' \text{ є } n'' \times n''. \tag{2.21}$$

Якщо $S^T M S = M$, тоді $S^T(M^T, M)S = (M^T, M)$, та отже з $R := S^{-T}$маємо

$$(M^T, M)S = R(M^T, M). \tag{2.22}$$

Щоб довести (2.21), доведемо більш загальне припущення: з (2.22) випливає що

$$S = S' \oplus S'', \; R = R' \oplus R'', \quad S', R' \in n' \times n', \quad S'', R'' \in n'' \times n''. \tag{2.23}$$

Використовуючи теорему 2.2.3(a), зведемо M' та M'' в (6.3.2) за допомогою перетворень конгруентності над алгебраїчним замиканням $\overline{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$ прямих сум матриць виду $[J_m(1) \diagdown I_m]$ та, відповідно, виду $[J_m(\lambda) \diagdown I_m]$ з $\lambda \neq 1$ та Γ_r з парним r. Тоді

- (M'^T, M') еквівалентно над $\overline{\mathbb{F}}$ прямій сумі пар виду $(I_m, J_m(1)) \oplus (J_m(1), I_m)$, та
- (M''^T, M'') еквівалентно над $\overline{\mathbb{F}}$ прямій сумі пар виду $(I_m, J_m(\lambda)) \oplus (J_m(\lambda), I_m)$ з $1 \neq \lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ та (Γ_r^T, Γ_r) з парним r.

Пара $(J_m(1), I_m)$ еквівалентна $(I_m, J_m(1))$. Пара (Γ_r^T, Γ_r) еквівалентна $(I_r, \Gamma_r^{-T}\Gamma_r)$, що є еквівалентною до $(I_r, J_r(-1))$ згідно (2.6) оскільки r парне. Таким чином,

(α') (M'^T, M') еквівалентна прямій сумі пар виду $(I_m, J_m(1))$, та

(β') (M''^T, M'') еквівалентна прямій сумі пар, що або виду $(I_m, J_m(\lambda))$ з $\lambda \neq 1$ або виду $(J_m(0), I_m)$.

Оберемо $\gamma \in \overline{\mathbb{F}}$, $\gamma \neq -1$, таке що $M''^T + \gamma M''$ невироджена (якщо M'' невироджена, тодіможемо взяти $\gamma = 0$; якщо M'' невироджена, тодіможемо обрати будь-який $\gamma \neq 0, -1$ такий, що (M^T, M) не має прямих доданків виду $(I_m, J_m(-\gamma^{-1}))$.

Тоді з (2.22) випливає що

$$(M^T + \gamma M, M)S = R(M^T + \gamma M, M).$$

Пара $(M^T+\gamma M, M)$ еквівалентна до $(I_n, (M^T+\gamma M)^{-1}M)$, чия канонічна пара Кронекера має форму

$$(I_n, N) := (I_{n'}, N') \oplus (I_{n''}, N''),$$

в якій (α') та (β') гарантує, що

(α'') N' (розміру $n' \times n'$) є прямою сумою блоків Жордана з власним числом $(1+\gamma)^{-1}$, та

(β'') N'' (розміру $n'' \times n''$) є прямою сумю блоків Жордана з власними числами, що відмінні від $(1+\gamma)^{-1}$.

Якщо $(I_n, N)\tilde{S} = \tilde{R}(I_n, N)$, тоді $\tilde{S} = \tilde{R}$, $N\tilde{S} = \tilde{S}N$, та (α'') та (β'') гарантує, що $\tilde{S} = \tilde{S}' \oplus \tilde{S}''$, в якій $\tilde{S}'$ є $n' \times n'$ та $\tilde{S}''$ є $n'' \times n''$. Тоді (I_n, N) отримується з (M^T, M) за допомогою перетворень всередині (M'^T, M') та всередині (M''^T, M''), з (2.22) випливає (2.23). Це доводить (2.21).

Оскільки $\det S = \det S' \det S''$, залишається довести, що

$$M' \in \Xi_{n'}(\mathbb{F}), \qquad M'' \in \Xi_{n''}(\mathbb{F}).$$

Крок 2: Покажемо, що $M'' \in \Xi_{n''}(\mathbb{F})$.

За лемою 2.2.6, достатньо показати, що $2M''_w = M'' - M''^T$ є невиродженою. Це припущення правильне, оскільки (β) гарантує, що матриця M'' має пряму суму матриць виду $[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]$ з $p(x) \neq x-1$ та Q парного розміру, та

- для кожного доданку виду $[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]$,

$$[\Phi_{p^l} \diagdown I_m]_w = \begin{bmatrix} 0 & I_m - \Phi_{p^l}^T \\ \Phi_{p^l} - I_m & 0 \end{bmatrix}$$

  є невиродженою оскільки 1 не є власним числом Φ_{p^l};

- для кожного доданку виду Q, $Q - Q^T = Q^T(Q^{-T}Q - I_r)$ є невиродженою оскільки $Q^{-T}Q$ подібна до блоку Фробеніуса Φ_{p^l} парного розміру, в якій (2.12) гарантує, що $p(x) \neq x-1$, та таким чином 1 не є власним числом $Q^{-T}Q$.

Крок 3: Покажемо, що $M' \in \Xi_{n'}(\mathbb{F})$.

Згідно (α), M' є прямою сумою матриць виду

$$[\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m], \qquad m \text{ є парним}, \tag{2.24}$$

в якій $\Phi_{(x-1)^m}$ блок Фробеніуса, що не є коквадратом; (2.12) гарантує що m є парним.

Оскільки $C^{-1}\Phi_{(x-1)^m}C = J_m(1)$ для деякої невиродженої C, кожний доданок $[\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m]$ є конгруентним до

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ J_m(1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ \Phi_{(x-1)^m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C^{-T} \end{bmatrix},$$

що є конгруентним до

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{I}_m \\ \tilde{J}_m(1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ J_m(1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

в якій

$$\tilde{I}_m := \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_m(1) := \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \quad (m\text{-на-}m).$$

Матриця $[\tilde{J}_m(1) \diagdown \tilde{I}_m]$ конгруентна за допомогою матриці перестановок до

$$\begin{bmatrix} 0 & & & K_2 \\ & & K_2 & L_2 \\ & \iddots & \iddots & \\ K_2 & L_2 & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{в якій} K_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ L_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Доведено, що $[\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m]$ конгруентна до (2.25). Відповідно,

$$[\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m] \oplus \dots \oplus [\Phi_{(x-1)^m} \diagdown I_m] \quad (r \text{ доданків})$$

конгруентна до

$$A_{m,r} := \begin{bmatrix} 0 & & & K_r \\ & & K_r & L_r \\ & \iddots & \iddots & \\ K_r & L_r & & 0 \end{bmatrix} \quad (m^2 \text{ блоків}), \tag{2.26}$$

в якій

$$K_r := \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{bmatrix}, \qquad L_r := \begin{bmatrix} 0 & 0_r \\ I_r & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, M' конгруентна деякій матриці

$$N = A_{m_1,r_1} \oplus A_{m_2,r_2} \oplus \dots \oplus A_{m_t,r_t}, \qquad m_1 > m_2 > \dots > m_t,$$

в якій r_i — це кількість доданків $[\Phi_{(x-1)^{m_i}} \setminus I_{m_i}]$ розміру $2m_i$ в прямій сумі M'. Згідно з (2.3), достатньо довести, що $N \in \Xi_{n'}(\mathbb{F})$.

Якщо

$$S^T N S = N, \tag{2.27}$$

тоді з (2.11) випливає що

$$N^{-T} N S = S N^{-T} N, \tag{2.28}$$

в якій

$$N^{-T} N = \begin{bmatrix} A^{-T}_{m_1,r_1} A_{m_1,r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{-T}_{m_t,r_t} A_{m_t,r_t} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Оскільки

$$A^{-1}_{m_i,r_i} = \begin{bmatrix} * & \dots & * & -L^T_{r_i} & K_{r_i} \\ \vdots & \iddots & -L^T_{r_i} & K_{r_i} & \\ * & \iddots & K_{r_i} & & \\ -L^T_{r_i} & \iddots & & & \\ K_{r_i} & & & & 0 \end{bmatrix},$$

ми маємо

$$A^{-T}_{m_i,r_i} A_{m_i,r_i} = \begin{bmatrix} I_{2r_i} & H_{r_i} & * & \dots & * \\ & I_{2r_i} & H_{r_i} & \ddots & \vdots \\ & & I_{2r_i} & \ddots & * \\ & & & \ddots & H_{r_i} \\ 0 & & & & I_{2r_i} \end{bmatrix}, \quad H_{r_i} := \begin{bmatrix} I_{r_i} & 0 \\ 0 & -I_{r_i} \end{bmatrix}; \tag{2.30}$$

зірки позначають неспецифічні блоки.

Поділ S в (2.28) на t^2 блоків

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{t1} & \dots & S_{tt} \end{bmatrix}, \qquad S_{ij} \ \text{є} \ 2m_i r_i \times 2m_j r_j,$$

відповідно до поділу (2.29), тоді поділ кожного блоку S_{ij} на підблоки розміру $2r_i \times 2r_j$ відповідно до поділу (2.30) діагональних блоків (2.29). Прирівнюючи відповідні блоки матриць рівняння (2.28) (в більшості як у описі Гантмахера усіх матриць, що комунікують з матрицею Жордана, [27, Розділ VIII, §2]), знайдемо що

- усі діагональні блоки S мають форму

$$S_{ii} = \begin{bmatrix} C_i & & & & * \\ & C_i^H & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_i & \\ 0 & & & & C_i^H \end{bmatrix}, \qquad C_i^H := H_{r_i} C_i H_{r_i},$$

  (кількість діагональних блоків парна згідно (2.24)), та

- усі недіагональні блоки S_{ij} мають форму

$$\begin{bmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \\ 0 & & \end{bmatrix} \text{якщо } i < j, \qquad \begin{bmatrix} & * & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \text{якщо } i > j,$$

  в якій усі зірки позначають неспецифічні підблоки.[1]

[1]Будь-яка матриця Жордана J є перестановочно подібна до матриці Вейра W_J та усіх матриць, що комунікують W_J, є блочно трикутними; див [62, Section 1.3]. Якщозведемо матрицю (2.29) одночасними перестановками рядків та стовпчиків до її форми Вейра, тоді такіж перестановки зведуть S до блочнотрикутної форми .

Наприклад, якщо

$$
\begin{aligned}
N &= A_{6,r_1} \oplus A_{4,r_2} \oplus A_{2,r_3} \\
&= \begin{bmatrix}
0 & & & & & K_{r_1} \\
 & & & & K_{r_1} & L_{r_1} \\
 & & & K_{r_1} & L_{r_1} & \\
 & & K_{r_1} & L_{r_1} & & \\
 & K_{r_1} & L_{r_1} & & & \\
K_{r_1} & L_{r_1} & & & & 0
\end{bmatrix}
\oplus
\begin{bmatrix}
0 & & & K_{r_2} \\
 & & K_{r_2} & L_{r_2} \\
 & K_{r_2} & L_{r_2} & \\
K_{r_2} & L_{r_2} & & 0
\end{bmatrix}
\oplus
\begin{bmatrix}
0 & K_{r_3} \\
K_{r_3} & L_{r_3}
\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

тоді

$$
S = \left[\begin{array}{cccccc|cccc|cc}
C_1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & C_1^H & * & * & * & * & & * & * & * & & * \\
 & & C_1 & * & * & * & & & * & * & & \\
 & & & C_1^H & * & * & & & & * & & \\
 & & & & C_1 & * & & & & & & \\
 & & & & & C_1^H & & & & & & \\
\hline
 & & * & * & * & * & C_2 & * & * & * & * & * \\
 & & & * & * & * & & C_2^H & * & * & & * \\
 & & & & * & * & & & C_2 & * & & \\
 & & & & & * & & & & C_2^H & & \\
\hline
 & & & & * & * & & & * & * & C_3 & * \\
 & & & & & * & & & & * & & C_3^H
\end{array}\right],
$$

в якій

$$
C_1^H := H_{r_1} C_1 H_{r_1}, \quad C_2^H := H_{r_2} C_2 H_{r_2}, \quad C_3^H := H_{r_3} C_3 H_{r_3}.
$$

Тепер сфокусуємося на рівнянні (2.27). Підблок у верхньому правому кутку iго діагонального блоку A_{m_i,r_i} матриці N є K_{r_i}; див (2.26). Доведемо, що відповідний підблок $S^T N S$ є $C_i^T K_{r_i} C_i^H$; таким чином,

$$
C_i^T K_{r_i} C_i^H = K_{r_i}. \tag{2.31}
$$

Помноживши першу горизонтальну підсмугу її смуги S^T на N, отримаємо

$$(0 \ldots 0 * | \ldots | 0 \ldots 0 * | 0 \ldots 0\, C_i^T K_{r_i} | 0 \ldots 0 | \ldots | 0 \ldots 0);$$

помноживши її на останню вертикальну підсмугу її вертикальної смуги S, отримаємо $C_i^T K_{r_i} C_i^H$, що доводить (2.31). Таким чином, $\det C_i \det C_i^H = 1$. Але

$$\det S = \det C_1 \det C_1^H \cdots \det C_1 \det C_1^H \det C_2 \det C_2^H \cdots$$

Отже, $\det S = 1$, що закінчує доведення Теореми 2.1.1.

2.4 Висновки до розділу 2

Данний розділ дисертації присвячений питанню критерію самоконгруентності за допомогою матриці з одиничним визначником, використовуючи канонічні матриці відносно конгруентності.

У першому параграфі наводиться основна теорема розділу: Нехай M — квадратна матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2. Кожна ізометрія на білінійному просторі над $\mathbb{F}$ з скалярним добутком, заданим матрицею M має визначник 1, тоді та тільки тоді, коли M не конгруентна до $A \oplus B$, де A —квадратна матриця непарного розміру. Також наводяться ще дві теореми, які випливають з основної теореми розділу. У другому параграфі доводяться ці дві теореми.

У третьому параграфі доводиться основна теорема розділу, використовуючи канонічні матриці відносно конгруентності.

Розділ 3

Критерій унітарної подібності верхньотрикутних матриць у загальному положенні

Результати даного розділу опубліковані в статті [23].

Мета цього розділу — надати критерій унітарної подібності матриць, що є аналогом умови Арвесона (3.3), але з многочленами над $\mathbb{C}$ замість матричних многочленів. Мета цього розділу аналогічна [24], але [24] використовує спектральну норму $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ та використаємо норму Фробеніуса $\|\cdot\|$. Усі матриці, що розглядаємо є комплексними.

Класична задача в лінійній алгебрі наступна: якщо A та B квадратні комплексні матриці, тоді як можна визначити чи будуть матриці A та B унітарно подібні (тобто, $U^{-1}AU = B$ для деякої унітарної U)? Більш точно, які інваріанти повністю визначають матрицю з точністю до унітарної подібності?

Нагадаймо декілька відомих розв'язків цієї задачі:

Теорема Шпехта. *Матриці A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді коли*

$$\operatorname{trace} \omega(A, A^*) = \operatorname{trace} \omega(B, B^*)$$

для усіх слів ω двох некомутативних змінних; див. [68].

Алгоритм Літлвуда. Літлвуд [49] побудував алгоритм, що зводить кожну квадратну комплексну матрицю A перетвореннями унітарної подібності до деякої матриці A_{can} таким чином, що A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли вони зводяться до однакової матриці $A_{\text{can}} = B_{\text{can}}$. Таким чином, матриці, що не змінюються за алгоритмом Літлвуда є **канонічними відносно унітарної подібності**. Використаємо це надалі; див. зауваження 3.

Інші версії алгоритма Літлвуда були надані в [10] та [63]. Системи лінійних відображень на унітарних та евклідових просторах були вивчені в [66] використовуючи алгоритм Літлвуда.

Критерій Арвесона. Нехай A та B є $n \times n$ комплексні матриці, та припустимо, що A не унітарно подібна до прямої суми квадратних матриць менших розмірів. Тоді *A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли*

$$\|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes A\|_{\text{sp}} = \|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes B\|_{\text{sp}} \text{ для усіх } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad (3.1)$$

де $\|M\|_{\text{sp}}$ є спектральною нормою M; див. [4, Теореми 2 та 3], [5, Теорема 2.4.2], [25, Теорема 2.1], та [22]. Спектральна норма M — це найбільше сингулярне значення M (що є квадратним коренем найбільшого власного числа додатньо-напіввизначеної матриці M^*M). Спектральна норма — це особливий випадок операторної норми, оскільки

$$\|M\|_{\text{sp}} = \max_{|v|=1} |Mv|$$

в якій $|\cdot|$ — Евклідова норма векторів.

Достатньо перевірити (3.1) для усіх пар (H_0, H_1), в яких H_1 має форму

$$\begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, \\ r_1 \geqslant \dots \geqslant r_n \geqslant 0, \end{matrix} \tag{3.2}$$

див зауваження 4. Наприклад, дві 2×2 комплексні матриці A та B є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли

$$\left\| \begin{bmatrix} aI_2 + \lambda A & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 + \mu A \end{bmatrix} \right\|_{\text{sp}} = \left\| \begin{bmatrix} aI_2 + \lambda B & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 + \mu B \end{bmatrix} \right\|_{\text{sp}}$$

для усіх

$$H_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad H_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ \lambda \geqslant \mu \geqslant 0. \end{matrix}$$

Покажемо у твердженні 3.4.2, що спектральна норма в критерії Арвесона не може бути замінена на *норму Фробеніуса*

$$\|C\| := \sqrt{\sum |c_{ij}|^2} \qquad \text{для кожного } C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Якщо визначимо значення матричного многочлена

$$H(x) = H_0 + H_1 x + \dots + H_t x^t \in \mathbb{C}^{k \times k}[x]$$

(чиї коефіцієнти H_i є $k \times k$ матрицями) у $n \times n$ матриці M через

$$H(M) := H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes M + \dots + H_t \otimes M^t \in \mathbb{C}^{kn \times kn},$$

тоді умова (3.1) набуде форми:

$$\|H(A)\|_{\text{sp}} = \|H(B)\|_{\text{sp}} \qquad \text{для усіх } H \in \mathbb{C}^{n \times n}[x] \text{ степеня } \leqslant 1. \tag{3.3}$$

Норма Фробеніуса матриці не змінюється під множенням на унітарні матриці. Таким чином, якщо A та B унітарно подібні матриці, тоді $\|A\| = \|B\|$; більш того,

$$\|h(A)\| = \|h(B)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x]. \tag{3.4}$$

Доведемо в теоремі 3.1.1, що обернене твердження виконується, якщо A є верхньотрикутною матрицею Тьоплица з ненульовою супердіагоналлю та B є довільною матрицею : умова (3.4) гарантує їх унітарну подібність.

Обернене твердження не виконується навіть для матриць

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

оскільки вони не унітарно подібні та задовільняють (3.4); див Лему 3.4.1. Але їх головні лідуючі 2×2 підматриці

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

не задовільнять (3.4). (Під *лідуючою основною* $k \times k$ *підматрицею* M_k матриці M, розуміємо підматрицю на перетині перших k рядків та перших k стовпців.) З цієї причини, ми даємо критерій унітарної подібності в якому умова (3.4) виконується не тільки на $n \times n$ матрицях A та B, але також на їх лідуючих основних підматрицях. Таким чином, замість (3.4) використаємо умову

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

Нехай A та B верхньотрикутні $n \times n$ матриці. Доведемо, що (3.6) необхідна та достатня умова для унітарної подібності A та B у двох випадках:

- якщо A та B не подібні до прямих сум квадратних матриць менших розмірів (див Теорему 3.1.2, яка була переформульована у термінах одноклітинних операторів у твердженнях 3.1.3 та 3.1.4), та
- якщо A та B у загальній позиції (Теорема 3.1.5).

Можемо розглянути тільки верхньотрикутні матриці оскільки за теоремою Шура про унітарну триангуляризацію [37, Теорема 2.3.1]: *кожна квадратна матриця A унітарно подібна до верхньотрикутної матриці B чиї* *діагональні елементи є власними числами A в будь-якому назначеному порядку*; кажемо, в лексикографічному порядку:

$$a + bi \preccurlyeq c + di \qquad \text{або, якщо } a < c, \text{ або } a = c \text{ та } b \leqslant d. \tag{3.7}$$

Унітарна матриця U, що перетворює A на $B = U^{-1}AU$ легко будується: зведемо A унітарними перетворенням до верхньотрикутної матриці $S^{-1}AS$ з діагональними елементами у заданому порядку (така матриця може бути отримана з форми Жордана матриці A за допомогою перестановок рядків та стовпців), тоді застосувати ортогоналізацію Грама-Шмідта до стовпців S та отримаємо унітарну матрицю $U = ST$, де T верхньотрикутна.

3.1 Головні результати

3.1.1 Критерій для матриць Тьопліца

Верхньотрикутна матриця Тьопліца — це матриця виду

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ & a_0 & a_1 & \ddots & \ddots \\ & & a_0 & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & & a_0 \end{bmatrix}, \qquad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

У розділі 3.2, доводимо наступну теорему, яка є першим важливим результатом цього розділу.

Теорема 3.1.1. *Нехай A верхньотрикутна матриця Тьопліца з ненульовою супердіагоналлю, та нехай B —матриця такого ж розміру. Тоді A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли*

$$\|h(A)\| = \|h(B)\| \qquad \textit{для усіх } h \in \mathbb{C}[x]. \tag{3.9}$$

Зауваження 1. *(a) Достатньо перевірити умову* (3.9) *для усіх h степеня не більше n, де $n \times n$ — це розмір A та B. Дійсно, нехай*

$$\|g(A)\| = \|g(B)\| \qquad \text{для усіх } g \in \mathbb{C}[x] \text{ степеня не більше } n. \tag{3.10}$$

Якщо μ мінімальний многочлен A, тоді з (3.10) *випливає, що $\|\mu(A)\| = \|\mu(B)\| = 0$ та отже $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Для h довільного степеня, маємо $h(A) = r(A)$ та $h(B_k) = r(B_k)$, де r — це залишок від ділення h на μ. Згідно* (3.10), *$\|r(A)\| = \|r(B)\|$, та отже $\|h(A)\| = \|h(B)\|$.*

(b) Теорема 3.1.1, але з $\|h(A)\|_{sp} = \|h(B)\|_{sp}$ замість $\|h(A)\| = \|h(B)\|$, була доведена у [24].

3.1.2 Критерій для нерозкладних матриць та одноклітинних операторів.

Кажемо, що матриця є **нерозкладною відносно подібності**, якщо вона не подібна до прямої сум квадратних матриць менших розмірів. Це означає, що матриця подібна до блоку Жордана. Таким чином, матриця нерозкладна відносно подібності тоді та тільки тоді, коли вона унітарно подібна до матриці виду

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \text{усі } a_{i,i+1} \neq 0. \tag{3.11}$$

У частині 3.3, доведемо наступну теорему, що є другим головним результатом цього розділу.

Теорема 3.1.2. *Нехай A та B будуть $n \times n$ верхньотрикутними матрицями, що є нерозкладними відносно подібності. Тоді A та B унітарно подібні* *тоді та тільки тоді, коли*

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n, \tag{3.12}$$

де A_k та B_k лідуючі основні $k \times k$ підматриці A та B.

Зауваження 2. *(a) Аналогічно зауваженню 5(a), достатньо перевірити умову* (3.12) *для усіх h степеня не більше n.*

(b) Теорема 3.1.2, але з $\|h(A_k)\|_{sp} = \|h(B_k)\|_{sp}$ замість $\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\|$, була доведена у [24].

Тепер наведемо операторну форму цього критерію. **Норма Фробеніуса лінійного оператора** на унітарному просторі — це норма Фробеніуса його матриці в будь-якому ортнормальному базисі. Два оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на унітарному просторі є **унітарно подібними**, якщо існує унітарний оператор $\mathcal{U}$ такий, що $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{B}$. Лінійний оператор $\mathcal{A} : U \to U$ на n-розмірному унітарному просторі U називається **одноклітинним**, якщо він задовільняє одну з наступних еквівалентних умов :

- його матриця нерозкладна відносно подібності;
- не існує інваріантних підпросторів U' та U'' $\mathcal{A}$ таких, що

$$\dim U' + \dim U'' = n, \qquad U' \cap U'' = 0;$$

- усі інваріантні підпростори $\mathcal{A}$ формують ланцюг

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n = U, \qquad \dim U_k = k \text{ для усіх } k.$$

Наслідок 3.1.3. (a) *Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ одноклітинні лінійні оператори на n-розмірному унітарному просторі U з ланцюгом інваріантних підпросторів*

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n = U, \qquad 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = U,$$

та нехай

$$\mathcal{A}_k := \mathcal{A}|U_k, \qquad \mathcal{B}_k := \mathcal{B}|V_k$$

будуть обмеженнями $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ до їх інваріантних підпросторів. За теоремою 3.1.2 та зауваженням 2(b), $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли

$$|||h(\mathcal{A}_k)||| = |||h(\mathcal{B}_k)||| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n, \tag{3.13}$$

де $|||\cdot|||$ або норма Фробеніуса $\|\cdot\|$ або спектральна норма $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$.

(b) *Також, два нільпотентних лінійний оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ рангу $n-1$ на n-розмірному унітарному просторі є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли* (3.13) *має місце для обмежень $\mathcal{A}_k$ та $\mathcal{B}_k$ операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на образи $\mathcal{A}^k$ та $\mathcal{B}^k$.*

Нехай (3.13) має місце. Тоді $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ мають однакове власне число: якщо λ — це власне число $\mathcal{A}$, та $h(x) := (x-\lambda)^n$, тоді $|||h(\mathcal{B})||| = |||h(\mathcal{A})||| = 0$ та таким чином λ власне число $\mathcal{B}$. Таким чином, канонічний ізоморфізм алгебр з одним генератором

$$\mathbb{C}[\mathcal{A}_k] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{B}_k], \qquad \mathcal{A}_k \mapsto \mathcal{B}_k \tag{3.14}$$

визначено коректно: алгебри ізоморфні до $\mathbb{C}[x]/(x-\lambda)^k\mathbb{C}[x]$.

Наслідок 3.1.4. *Два одноклітинних лінійних оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на n-розмірному унітарному просторі унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли вони мають однакове власне число та канонічний ізоморфізм* (3.14) *ізометричний (тобто, він зберігає спектральну норму або норму Фробеніуса) для кожного $k = 1, \dots, n$.*

3.1.3 Критерій для матриць в загальному положенні

Теорема 3.1.2 не може бути розширена до матриць з декількома власними числами: ми доводимо в Лемі 3.4.3, що будь-які дві матриці виду

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} a \neq b, \\ |a| = |b| = 1, \end{matrix} \tag{3.15}$$

не унітарно подібні, але задовільняють умову (3.12). Тим не менш, у цьому розділі розширимо Теорему 3.1.2 до "майже усіх" верхньотрикутних матриць наступним чином.

Нехай

$$X_n := \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & x_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

матриця, чиї верхньотрикутні елементи є змінними; позначимо через $\mathbb{C}[x_{ij}|i \leqslant j \leqslant n]$ множину многочленів з цими змінними. Для простоти записів, запишемо $f\{X_n\}$ замість $f(x_{11}, x_{12}, x_{22}, \dots)$.

Для кожного $f \in \mathbb{C}[x_{ij}|i \leqslant j \leqslant n]$, запишемо

$$M_n(f) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, A \text{ верхньотрикутна та } f\{A\} \neq 0\}. \tag{3.17}$$

Наприклад, якщо

$$\varphi_n\{X_n\} := x_{12}x_{23}\cdots x_{n-1,n} \prod_{i<j}(x_{ii} - x_{jj}), \tag{3.18}$$

тоді $M_n(\varphi_n)$ складається з матриць форми

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_i \neq \lambda_j \text{ якшо } i \neq j, \\ \text{усі } a_{i,i+1} \neq 0. \end{matrix} \tag{3.19}$$

Кажемо, що $n \times n$ верхньотрикутні матриці **у загальному положенні** мають певну властивість, якщо існує ненульовий многочлен $f_n \in \mathbb{C}[x_{ij}|i \leqslant j \leqslant n]$ такий, що усі матриці $M_n(f_n)$ мають цю властивість. Таким чином, ця властивість має місце для усіх матриць $\mathbb{C}^{n\times n}$ окрім матриць з алгебраїчного многовиду меншої розмірності.

Третій головний результат наступна теорема.

Теорема 3.1.5. *Дві $n \times n$ верхньотрикутні матриці A та B у загальному положенні з лексикографічно впорядкованими власними числами на головній діагоналі (див (3.7)) є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли*

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для всіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n, \tag{3.20}$$

де A_k та B_k лідуючі основні $k \times k$ підматриці A та B.

Теорема 3.1.5 — це теорема існування: "A та B у загальному положенні " означає"$A, B \in M_n(f_n)$ для деяких f_n". Наведемо f_n у явній формі в Теоремі 3.1.6.

Для кожного $n \geqslant 2$ та $r = 1, 2, \dots, n$, визначимо $n \times n$ матрицю

$$\begin{aligned} G^{(n,r)}\{X_n\} &= [g_{ij}^{(n,r)}\{X_n\}] \\ &:= \begin{cases} (X_n - x_{22}I_n)(X_n - x_{33}I_n)\cdots(X_n - x_{nn}I_n), & \text{якщо } r = 1, \\ (X_n - x_{11}I_n)(X_n - x_{22}I_n)\cdots(X_n - x_{r-1,r-1}I_n), & \text{якщо } r > 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Її елементи $g_{ij}^{(n,r)}\{X_n\}$ є многочленами в елементах з (3.16). Запишемо

$$f_n := \begin{cases} \varphi_n, & \text{якщо } n = 1, 2, 3, \\ \varphi_n \cdot g_{14}^{(4,1)} g_{15}^{(5,1)} \cdots g_{1n}^{(n,1)} \cdot g_{13}^{(3,3)} g_{14}^{(4,4)} \cdots g_{1,n-1}^{(n-1,n-1)}, & \text{якщо } n \geqslant 4. \end{cases} \tag{3.22}$$

де φ_n визначено в (3.18). Теорема 3.1.5 наслідок наступної теореми, що доведено в розділі 3.5.

Теорема 3.1.6. *Матриці $A, B \in M_n(f_n)$ унітарно подібні та мають однакову головну діагональ тоді та тільки тоді, коли вони задовільняють умову* (3.20).

За цією теоремою та вищою рівністю у (3.22), *дві матриці A та B виду* (3.19) *розміру не більше 3×3 унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли вони задовільняють умову* (3.20).

3.2 Доведення теореми 3.1.1

Лема 3.2.1. *Для кожної $n \times n$ матриці $A = [a_{ij}]$, існує діагональна унітарна матриця U така, що елменти першої супердіагоналі $U^{-1}AU$ є невід'ємними дійсними числами $|a_{12}|, |a_{23}|, \dots, |a_{n-1,n}|$.*

Доведення. Запишемо $a_{i,i+1}$ у формі $r_i u_i$, в якій $r_i := |a_{i,i+1}|$ та $|u_i| = 1$; візьмемо $u_i := 1$, якщо $a_{i,i+1} = 0$. Тоді

$$U^{-1} := \operatorname{diag}(1, u_1, u_1u_2, u_1u_2u_3, \dots)$$

бажана матриця. □

Доведення теореми 3.1.1. Нехай A є $n \times n$ верхньотрикутна матриця Тьопліца (3.8) з ненульовою супердіагоналлю (тобто, $a_1 \neq 0$), нехай B довільна $n \times n$ матриця, та нехай (3.9) виконується. Нам потрібно довести, що A та B унітарно подібні.

Не втрачаючи загальності, можемо допустити, що A та B задовільняють наступні умови:

- $a_0 = 0$, таким чином $A^n = 0$. Щоб гарантувати це, замінимо A та B на $A' := A - a_0 I_n$ та $B' := B - a_0 I_n$.
- $B^n = 0$, оскільки за (3.9) маємо $\|B^n\| = \|A^n\| = 0$.

- A є виродженим блоком Жордана $J_n(0)$. Щоб гарантувати це, візьмемо
$$f(x) := a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$
(тоді $f(J_n(0)) = A$), знайдемо $g \in \mathbb{C}[x]$ таке, що $fg \equiv 1 \bmod x^n$ (g існує оскільки $a_1 \neq 0$), та замінимо A та B на $A' := g(A)$ та $B' := g(B)$. Можемо зробити цю заміну оскільки
  - (3.9) виконується для A' та B', та
  - якщо A' та B' унітарно подібні, тоді $A = f(A')$ та $B = f(B')$ унітарно подібні також.
- B верхньотрикутна та усі елементи першої супердіагоналі невід'ємні дійсні числа. Можемо звести B до цієї форми перетвореннями унітарної подібності згідно теореми Шура про триангуляризацію та леми 3.2.1.

Таким чином,
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{усі } b_{i,i+1} \geqslant 0.$$
З (3.9)маємо $\|B^{n-1}\| = \|A^{n-1}\|$, таким чином
$$b_{12} b_{23} \cdots b_{n-1,n} = 1. \tag{3.23}$$
Розділивши $\|B\| = \|A\|$ на $n-1$ та використовуючи (3.23), отримаємо
$$\frac{b_{12}^2 + b_{23}^2 + \cdots + b_{n-1,n}^2}{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{i+2 \leqslant j} |b_{ij}|^2 = 1 = \sqrt[n-1]{b_{12}^2 b_{23}^2 \cdots b_{n-1,n}^2}.$$
Згідно нерівності з арифметичним та геометричним середнім,
$$\frac{b_{12}^2 + b_{23}^2 + \cdots + b_{n-1,n}^2}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{b_{12}^2 b_{23}^2 \cdots b_{n-1,n}^2}$$
та рівність виконується тоді та тільки тоді $b_{12}^2 = b_{23}^2 = \cdots = b_{n-1,n}^2$. Таким чином, $b_{12} = b_{23} = \cdots = b_{n-1,n} = 1$ (остання рівність згідно (3.23)), $b_{ij} = 0$, якщо $i + 2 \leqslant j$, та маємо $A = B$. □

3.3 Доведення теореми 3.1.2

Лема 3.3.1 ([51, p. 71]). *Нехай*

$$A := \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \text{якщо } \lambda_i = \lambda_j \text{ та } i < j \\ \quad \text{тоді } \lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_j, \\ \text{усі } a_{i,i+1} \text{ додатні та дійсні,} \end{array} \tag{3.24}$$

та

$$B := \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ є рівними,} \\ \text{усі } b_{i,i+1} \text{ додатні та дійсні.} \end{array}$$

Якшо A та B унітарно подібні, тоді $A = B$. Більш того, якшо $U^{-1}AU = B$ та U унітарні матриці, тоді $U = uI_n$ для деяких $u \in \mathbb{C}$ з $|u| = 1$.

Доведення. Нехай $U^{-1}AU = B$, де U —унітарна матриця. Прирівнюючи елементи матриць$AU = UB$ вздовж діагоналей, починаючи з нижньої лівої діагоналі (тобто з елементу$(n, 1)$), та закінчуючи на головній діагоналі, знайдемо, що U верхньотрикутна. Оскільки U унітарна, то це діагональна матриця: $U = \operatorname{diag}(u_1, \dots, u_n)$. Прирівнюючи елементи з $AU = UB$, знайдемо, що $u_1 = \dots = u_n$. Таким чином, $U = uI_n$ та $A = B$. □

Зауваження 3. *За лемою вище, будь-які дві матриці виду* (3.24) *в якій діагональні елементи знаходяться у лексикографічному порядку (тобто, $\lambda_1 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq \lambda_n$; див* (3.7)*) є або рівними або унітарно неподібними. Ці матриці є канонічними формами Мітчела [51, Теорема 3] верхньотрикутних матриць, у яких діагональні елементи впорядковані лексикографічно та усі елементи першої супердіагоналі є ненульовими; вони є спеціальним випадком канонічних матриць Літлвуда.*

Лема 3.3.2. *Кожна матриця виду*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \text{усі } a_{i,i+1} \text{ є додатними дійсними числами,} \tag{3.25}$$

повністю визначенні індексованою сім'єю дійсних чисел

$$\{\|h(A_k)\|\}_{(h,k)}, \qquad \text{де } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n. \tag{3.26}$$

Доведення. За означенням, сім'я (3.26) — це відображення

$$\mathbb{C}[x] \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}, \qquad (h, k) \mapsto \|h(A_k)\|.$$

Таким чином, для кожного $r \in \mathbb{R}$знаємо набір усіх (h, k) таких, що $\|h(A_k)\| = r$.

Нехай h є ненульовим многочленом мінімального степеня такий, що $\|h(A)\| = 0$. Тоді $h(A) = 0$, а отже $h(x) = (x - \lambda)^n$. Таким чином, λ визначена за допомогою (3.26).

Запишемо $B := A - \lambda I_n$. Тоді (3.26) визначає сім'ю

$$\{\|h(B_k)\|\}_{(h,k)} \qquad \text{де } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \dots, n. \tag{3.27}$$

Додатнє дійсне число a_{12} визначено за допомогою (3.27) оскільки $\|B_2\| = a_{12}$. Це доводить лему для $n = 1$ та 2.

За індукцією по n, допускаємо, що $n \geqslant 3$ та що B_{n-1} визначена через (3.27). Оскільки усі елементи B^{n-1} є нульовими окрім$(1, n)$ елементу, що є додатнім дійсним числом

$$c := a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1,n},$$

ми маємо $\|B^{n-1}\| = c$. Таким чином, $a_{n-1,n}$ визначено за допомогою(3.27).

За індукцією припускаємо, що $a_{n-1,n}, a_{n-2,n}, \dots, a_{r+1,n}$ визначені (3.27) та знайдемо a_{rn}. Нехай α буде комплексним числом для якого $\|B^r - \alpha B^{n-1}\|$ є мінімальною. Тоді $(1, n)$ елемент матриці $B^r - \alpha B^{n-1}$ є

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{r-1,r}a_{rn} + \cdots - \alpha c = 0.$$

Оскільки неспеціальні доданки не містять a_{rn} та тільки a_{rn} є невизначеним у цій рівності, це визначає a_{rn}. □

Доведення теореми 3.1.2. Нехай M —$n \times n$ верхньотрикутна матриця, яка є нерозкладною відносно подібності. За лемою 3.2.1, M унітарно подібна до матриці A виду (3.25) за допомогою діагональної унітарної матриці. Тоді $\|h(M_k)\| = \|h(A_k)\|$ для усіх $h \in \mathbb{C}[x]$ та $k = 1, \dots, n$. Таким чином, цього достатньо, щоб довести Теорему 3.1.2 для матриць виду (3.25).

"$\Rightarrow$" Нехай A та B виду (3.25) будуть унітарно подібні. За лемою 3.3.1, $A = B$, отже вони задовольняють припущення (3.12).

"$\Leftarrow$" Нехай A та B виду (3.25) задовільняють (3.12). За лемою 3.3.2, $A = B$ оскільки їх індексовані сім'ї $\{\|h(A_k)\|\}_{(h,k)}$ та $\{\|h(B_k)\|\}_{(h,k)}$ співпадають. □

3.4 Контрприклади

3.4.1 Умови, які не гарантують унітарну подібність

В цьому розділі, даємо приклади матриць виду (3.24) (і навіть для виду (3.25)), для яких умови (3.4) та

$$\|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes A\| = \|H_0 \otimes I_n + H_1 \otimes B\| \quad \text{для усіх } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n} \tag{3.28}$$

не гарантують їх унітарну подібність.

Для кожної квадратної матриці A, позначимо через A^S її транспоновану матрицю відносно другої діагоналі:

$$A^S = ZA^TZ, \qquad Z := \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Наприклад, $B = A^S$ в (3.5).

Лема 3.4.1. *Нехай A матриця виду* (3.24) *така, що $A \neq A^S$ та головні діагоналі A та A^S співпадають. Тоді A та $B := A^S$ задовільняють* (3.4) *та* (3.28), *але вони не є унітарно подібними.*

Доведення. Оскільки $A \neq A^S$, A та A^S не унітарно подібні за лемою 3.3.1.

Умова (3.4) виконується для A та $B = A^S$ оскільки

$$\begin{aligned} \|h(A^S)\| &= \|h(ZA^TZ)\| = \|Zh(A^T)Z\| \\ &= \|h(A^T)\| = \|h(A)^T\| = \|h(A)\|. \end{aligned}$$

Існує матриця перестановок P така, що $P^T(M \otimes N)P = N \otimes M$ для усіх $n \times n$ матриць M та N. Таким чином, умова (3.28) еквівалентна умові

$$\|I_n \otimes H_0 + A \otimes H_1\| = \|I_n \otimes H_0 + B \otimes H_1\| \ \text{ для усіх } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad (3.29)$$

Оскільки A має форму (3.24),

$$\begin{aligned} \|I_n \otimes H_0 + A \otimes H_1\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} H_0 + \lambda_1 H_1 & a_{12}H_1 & \dots & a_{1n}H_1 \\ & H_0 + \lambda_2 H_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n}H_1 \\ 0 & & & H_0 + \lambda_n H_1 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \sum_i \|H_0 + \lambda_i H_1\|^2 + \sum_{i<j} \|a_{ij}H_1\|^2, \end{aligned}$$

таким чином A та $B = A^S$ задовільняє (3.28). $\square$

Наслідок 3.4.2. *Нехай A матриця виду* (3.25) *така, що $A \neq A^S$. Тоді A та $B = A^S$ нерозкладні відносно подібності. За лемою 3.4.1, A та B задовільняють* (3.28)*, але вони не унітарно подібні. Таким чином, спектральна норма в умові Арвесона* (3.1) *не може бути замінена нормою Фробеніуса.*

Зауваження 4. *Достатньо перевірити умову Арвесона* (3.1) *для усіх пар* (H_0, H_1)*, в яких H_1 (або H_0) мають форму* (3.2)*. Дійсно, за аналогією з* (3.29)*, умова* (3.1) *еквівалентна умові*

$$\|I_n \otimes H_0 + A \otimes H_1\|_{sp} = \|I_n \otimes H_0 + B \otimes H_1\|_{sp} \quad \text{для усіх } H_0, H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{3.30}$$

За сингулярним розкладом [37, Теорема 7.3.5], для кожної H_1 існують унітарні матриціU та V такі що $\Sigma := UH_1V$ мають вид (3.2)*. Спектральна норма матриці не змінюється над множенням на унітарні матриці, таким чином*

$$\begin{aligned}\|I_n \otimes H_0 + A \otimes H_1\|_{sp} &= \|(I_n \otimes U)(I_n \otimes H_0 + A \otimes H_1)(I_n \otimes V)\|_{sp} \\ &= \|I_n \otimes (UH_0V) + A \otimes \Sigma\|_{sp}\end{aligned}$$

та умова (3.30) *виконується для* (H_0, H_1)*, якщо це виконується для* (UH_0V, Σ)*.*

3.4.2 Теорема 3.1.2 не може бути поширена на матриці з декількома власними числами

Теорема 3.1.2 була доведена для матриць виду (3.11); покажемо, що це не може бути розширне до матриць виду (3.19).

Лема 3.4.3. *Матриці A та B виду* (3.15) *не унітарно подібні, але задовільняють* (3.12)*.*

Доведення. За лемою 3.3.1, A та B не унітарно подібні оскільки $a \neq b$.

Доведемо, що A та B задовільняють (3.12). Напишемо:

$$M_c := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{де } c \in \mathbb{C} \text{ and } |c| = 1,$$

та візьмемо будь-яке $h \in \mathbb{C}[x]$.

Достатньо довести, що $\|h(M_c)\|$ не залежить від c. Нехай $r(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ — це залишок при діленні $h(x)$ на характеристичний многочлен M_c. Тоді

$$h(M_c) = r(M_c) = \alpha I_4 + \beta M_c + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3c \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 9c \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix},$$

та таким чином

$$\begin{aligned} \|h(M_c)\|^2 = \|r(M_c)\|^2 &= \|r(M_0)\|^2 + |\beta c + \gamma 3c + \delta 9c|^2 \\ &= \|r(M_0)\|^2 + |\beta + 3\gamma + 9\delta|^2 |c|^2 \\ &= \|r(M_0)\|^2 + |\beta + 3\gamma + 9\delta|^2 \end{aligned}$$

не залежить від c. □

Зазначимо, що $M_c \notin M_4(f_4)$ (в якій $M_4(f_4)$ з Теореми 3.1.6), оскільки $g_{13}^{(3,3)}\{M_c\} = 0$.

3.5 Доведення теореми 3.1.6

В цьому розділі, $M_n(f)$ —набір (3.17) та f_n многочлен (3.22).

Лема 3.5.1. *Нехай $G^{(n,r)}$ є матриця визначена в* (3.21).

(a) *Тільки перший рядок $G^{(n,1)}$ ненульовий.*

(b) *Матриця* $G^{(n,r)}$ *з* $2 \leqslant r \leqslant n$ *має форму*

$$\begin{bmatrix} 0_{r-1} & * \\ 0 & T \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

в якій 0_{r-1} *є* $(r-1)\times(r-1)$ *нульова матриця та* T *верхньотрикутна.*

(c) *Матриця* $G^{(r,r)}$ *з* $2 \leqslant r < n$ *є лідуюча основна* $r \times r$ *підматриця матриці* $G^{(n,r)}$.

Доведення. Для кожного $i = 1,\dots,n$, нехай P_i буде $n \times n$ верхньотрикутна матриця, в якій (i,i) елемент є нульовим. Тоді

$$P_1 \cdots P_n = \begin{bmatrix} 0 & & & * \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & & & * \\ & 0 & & \\ & & * & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} * & & & * \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.32}$$

Ця рівність може бути доведена за індукцією по n: якщо це виконується для $n-1$, тоді добуток лідуючих основних $(n-1)\times(n-1)$ підматриць матриць $P_1,\dots,P_{n-1}$ дорівнює нулю, та таким чином

$$(P_1 \cdots P_{n-1})P_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & & & * \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

(a) У добутку матриць (3.21), що визначає $G^{(n,1)}$, заберемо перший рядок та перший стовпчик в кожній з його множників. Тоді застосуємо (3.32) до результуючого добутку.

(b) У добутку матриць (3.21), що визначає $G^{(n,r)}$ з $r \geqslant 2$, заміняємо кожний множник на його лідуючу основну $(r-1)\times(r-1)$ підматрицю. Тоді застосуємо (3.32) до отриманого добутку.

(c) Це твердження випливає з (3.21). $\square$

Лема 3.5.2. *Якщо $A \in M_n(f_n)$ та S невироджені діагональні матриці, тоді $S^{-1}AS \in M_n(f_n)$.*

Доведення. Нехай $A \in M_n(f_n)$ та нехай S є невиродженою діагональною матрицею. Для кожного i, (i,i) елементи A та $S^{-1}AS$ співпадають та $S^{-1}AS - a_{ii}I_n = S^{-1}(A - a_{ii}I_n)S$. Таким чином, $G^{(n,r)}\{S^{-1}AS\} = S^{-1}G^{(n,r)}\{A\}S$ для кожного r, та таким чином відповідні елементи матриць $G^{(n,r)}\{A\}$ та $G^{(n,r)}\{S^{-1}AS\}$ є одночасно нульові або ненульові. Звертаючи увагу на означення (3.22) для f_n, отримаємо $S^{-1}AS \in M_n(f_n)$. □

Наступна лема аналогічна лемі 3.3.2.

Лема 3.5.3. *Кожна матриця $A \in M_n(f_n)$, в якій усі супердіагональні елементи є додатні дійсні числа, є повністю визначеними через індексовані сім'ї дійсних чисел*

$$\{\|h(A_k)\|\}_{(h,k)} \qquad \text{в якій } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1,\dots,n. \tag{3.33}$$

Доведення. Матриця A має форму:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \lambda_i \neq \lambda_j \text{ якщо } i \neq j, \\ \text{усі } a_{i,i+1} \text{ є додатними та дійсними.} \end{array} \tag{3.34}$$

Для кожного k, мінімальний многочлен $\mu_k(x)$ для A_k визначений сім'єю (3.33). Оскільки $\lambda_i \neq \lambda_j$, якщо $i \neq j$, $\mu_k(x)$ є характеристичним многочленом матриці A_k, та отже $\mu_k(x)/\mu_{k-1}(x) = x - \lambda_k$. Таким чином, головна діагональ матриці A визначена через (3.33).

Елемент a_{12} матриці A також визначений через (3.33), оскільки a_{12} є додатнім дійсним числом, $\|A_2\|$ визначена через (3.33), та

$$\|A_2\|^2 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + a_{12}^2.$$

Це доводить лему 3.5.3 для $n = 2$.

Нехай $n \geqslant 3$. Оскільки f_{n-1} ділить f_n, можемо використати індукцію по n, та таким чином допускаємо, що (3.33) визначає A_{n-1}.

Знайдемо $a_{n-1,n}$. Для кожного $r = 2, 3, \ldots, n-1$, визначимо $n \times n$ матрицю

$$B^{(r)} = \big[b_{ij}^{(r)}\big] := G^{(n,r)}\{A\}(A - \lambda_n I_n) = (A - \lambda_1 I_n)\cdots(A - \lambda_{r-1} I_n)(A - \lambda_n I_n).$$

Оскільки $G^{(n,n-1)}\{A\}$ має форму (3.31) та (n, n) елемент матриці $A - \lambda_n I_n$ дорівнює нулю, останній стовпчик матриці $B^{(n-1)}$ is $v a_{n-1,n}$, в якій

$$v := [g_{1,n-1}^{(n,n-1)}\{A\}, \ldots, g_{n-1,n-1}^{(n,n-1)}\{A\}, 0]^T \tag{3.35}$$

є $(n - 1)$им стовпчиком $G^{(n,n-1)}\{A\}$. Стовпець v відомо оскільки воно визначено матрицею A_{n-1}. Перший елемент матриці v є ненульовим оскільки за Лемою 3.5.1(c)

$$g_{1r}^{(n,r)}\{A\} = g_{1r}^{(r,r)}\{A\} \neq 0, \qquad r = 2, \ldots, n-1; \tag{3.36}$$

вони ненульові оскільки кожен $g_{1r}^{(r,r)}$ ділить f_n (позначимо, що $g_{12}^{(2,2)} = x_{12}$).

Таким чином, $\|v\| \neq 0$. Додатнє дійсне число $a_{n-1,n}$ повністю визначене через рівність

$$\|B^{(n-1)}\|^2 = \|B_{n-1}^{(n-1)}\|^2 + \|v\|^2 a_{n-1,n}^2,$$

в якій $B_{n-1}^{(n-1)}$ — це лідуюча основна $(n-1)$-на-$(n-1)$ підматриця $B^{(n-1)}$.

Також визначили матрицю $B^{(n-1)}$ оскільки їх останній стовпчик є$v a_{n-1,n}$.

Розглянемо простір $\mathbb{C}^{n \times n}$ n-на-n матриць як унітарний простір із скалярним добутком

$$(X, Y) := \sum_{i,j} x_{ij} \bar{y}_{ij}, \qquad X = [x_{ij}],\ Y = [y_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Цей скалярний добуток визначений нормою Фробеніуса через рівність поляризації

$$(X, Y) = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2) + \frac{i}{4}(\|X + iY\|^2 - \|X - iY\|^2).$$

За лемою 3.5.1(a),

$$C := G^{(n,1)}\{A\} = (A - \lambda_2 I_n)\cdots(A - \lambda_n I_n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix},$$

в якій $c_1, \dots, c_{n-1}$ відомі. Оскільки головна діагональ матриці A визначена через (3.33), $\|C\|$ визначена через (3.33) також. Використовуючи рівність поляризації, знайдемо $\big(B^{(n-1)}, C\big)$. Тоді знайдемо c_n з рівності

$$\big(B^{(n-1)}, C\big) = b_{11}^{(n-1)}\bar{c}_1 + \dots + b_{1,n-1}^{(n-1)}\bar{c}_{n-1} + b_{1n}^{(n-1)}\bar{c}_n,$$

в якій $b_{1n}^{(n-1)} = g_{1,n-1}^{(n,n-1)}\{A\}a_{n-1,n} \neq 0$ (див (3.35) та (3.36)).

За індукцією, припустимо, що $a_{n-1,n}, a_{n-2,n}, \dots, a_{r+1,n}$ відомі та знайдемо a_{rn} для кожного $r \leqslant n-2$.

Спочатку припустимо, що $r \geqslant 2$. Тоді $n \geqslant 4$, та $c_n \neq 0$ тому що $g_{1n}^{(n,1)}$ ділить f_n. Оскільки $\|B^{(r)}\|$ визначено через (3.33) та C відомі, визначимо $\big(B^{(r)}, C\big)$ використовуючи рівність поляризації. Визначимо $b_{1n}^{(r)}$ з

$$\big(B^{(r)}, C\big) = b_{11}^{(r)}\bar{c}_1 + \dots + b_{1,n-1}^{(r)}\bar{c}_{n-1} + b_{1n}^{(r)}\bar{c}_n.$$

За (3.31), перші $r-1$ стовпчиків матриці $G^{(n,r)}$ нульові, та таким чином

$$b_{1n}^{(r)} = g_{1r}^{(n,r)}\{A\}a_{rn} + g_{1,r+1}^{(n,r)}\{A\}a_{r+1,n} + \dots + g_{1,n-1}^{(n,r)}\{A\}a_{n-1,n}.$$

Ця рівність визначає a_{rn} оскільки тільки a_{rn} невідомі та $g_{1r}^{(n,r)}\{A\} \neq 0$ по (3.36).

Нехай тепер $r = 1$. Оскільки C у формі $D\big(A - \lambda_n I_n\big)$, в якій

$$D = \big[d_{ij}\big] := (A - \lambda_2 I_n)(A - \lambda_3 I_n)\cdots(A - \lambda_{n-1} I_n).$$

Тоді $c_n = d_{11}a_{1n} + d_{12}a_{2n} + \dots + d_{1,n-1}a_{n-1,n}$.

Ця рівність визначає a_{1n}, оскільки тільки a_{1n} невідомі та

$$d_{11} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \neq 0.$$

Таким чином, визначили усі елементи матриці A. □

Доведення теореми 3.1.6. За лемами 3.2.1 та 3.5.2, кожна матриця $A \in M_n(f_n)$ унітарна подібна до матриці $A' \in M_n(f_n)$ виду (3.34) через діагональну унітарну матрицю. Тоді $\|h(A_k)\| = \|h(A'_k)\|$ для усіх $h \in \mathbb{C}[x]$ та $k = 1, \dots, n$. Таким чином, достатньо довести теорему 3.1.6 для матриць $A, B \in M_n(f_n)$ виду (3.34).

"$\Rightarrow$" Нехай $A, B \in M_n(f_n)$ виду (3.34) унітарноподібні та мають однакову головну діагональ. За лемою 3.3.1, $A = B$ та таким чином вони задовільняють (3.20).

"$\Leftarrow$" Нехай $A, B \in M_n(f_n)$ виду (3.34) задовільняє (3.20). За лемою 3.5.3, $A = B$ оскільки їх індексовані сім'ї $\{\|h(A_k)\|\}_{(h,k)}$ та $\{\|h(B_k)\|\}_{(h,k)}$ співпадають. □

3.6 Висновки до розділу 3

Данний розділ дисертації присвячений вивченню критерію унітарної подібності верхньотрикутних матриць у загальному положенні.

У першому параграфі наведені основні означення та відомі результати.

У другому параграфі отримано новий критерій унітарної подібності для верхньотрикутної матриці Тьопліца: якщо A верхньотрикутна матриця Тьопліца з ненульовою супердіагоналлю, та B —матриця такого ж розміру, тоді A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли $\|h(A)\| = \|h(B)\|$ для усіх $h \in \mathbb{C}[x]$.. Отримано критерій унітарної подібності для верхньотрикутних матриць у загальному положенні: дві $n \times n$ верхньотрикутні матриці A та B у загальному положенні з лексикографічно впорядкованими власними числами на головній діагоналі є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли $\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\|$ для всіх $h \in \mathbb{C}[x]$ та $k = 1, \dots, n$, де A_k та B_k лідуючі основні $k \times k$ підматриці A та B.

У четвертому, п'ятому та шостому параграфі наводяться доведення цих теорем.

Розділ 4

Критерії унітарної подібності нормальній матриці

Результати даного розділу опубліковані в статті [33].

Даний розділ присвячено критерію унітарної подібності нормальній матриці.

Класична задача в лінійній алгебрі наступна: як можна визначити чи будуть квадратні комплексні матриці A та B унітарно подібні (тобто чи $U^{-1}AU = B$ для деякої унітарної матриці U)? Найвідоміший розв'язок — це теорема Шпехта [68]: A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, якщо

$$\operatorname{trace}\omega(A, A^*) = \operatorname{trace}\omega(B, B^*)$$

для усіх слів ω з двох неперестановочних змінних, де $\operatorname{trace} A$ позначає слід матриці A.

Припустимо, що A верхньотрикутна матриця Тьопліца з ненульовою супердіагоналлю та B довільна матриця такого ж розміру. Тоді матриці A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли матриці $f(A)$ та $f(B)$ мають однакові спектральні норми та норми Фробеніуса для усіх комплексних многочленів f (див [23, Теорема 2.1] та [24, Теорема 2.1]). Доведемо аналогічні твердження для нормальної матриці A та довільної матриці B. Нагадаємо, що спектральна норма та норма Фробеніуса комплексної матриці $C = [c_{ij}]$

визначаються наступним чином:

$$\|C\| := \sqrt{\sum |c_{ij}|^2}, \qquad \|C\|_{\mathrm{sp}} := \max_{|v|=1} |Cv|,$$

в якій $|\cdot|$ Евклідова норма векторів.

В процесі доведення встановимо, що нормальна матриця A та довільна матриця B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли $\|A\| = \|B\|$ та $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ for $k = 1, \ldots, n$. Аналогічне твердження було доведено Мурнаганом [52] та, незалежно, Ікрамовим [43]: дві нормальні матриці A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ для $k = 1, \ldots, n$ (зазначимо, що це твердження не виплива€ прямо з теореми Шпехта, див [43]).

Наша мета довести наступну теорему в якій даємо декілька критеріїв унітарної подібності нормальної матриці A та довільної матриці B. Матриці, що унітарно подібні симетричній матриці досліджені в [6, 28].

Теорема 4.0.1. *Нехай A довільна $n \times n$ нормальна комплексна матриця та B довільна $n \times n$ комплексна матриця. Наступні твердження еквівалентні:*

(i) *A та B унітарно подібні;*

(ii) *B нормальна матриця (тобто, B задовільняє одну з 89 критеріїв нормальності з* [21] та [34]) та характеристичні многочлени A та B рівні;

(iii) $\|A\| = \|B\|$ та характеристичні многочлени A та B рівні;

(iv) $\|A\| = \|B\|$ та $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ для $k = 1, \ldots, n$;

(v) $\|A^k + cI_n\| = \|B^k + cI_n\|$ для $c \in \{0, 1, i\}$ та $k = 1, \ldots, n$;

(vi) $\|f(A)\| = \|f(B)\|$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n;

(vii) $\|f(A)\|_{\mathrm{sp}} = \|f(B)\|_{\mathrm{sp}}$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n, та характеристичні многочлени матриць A та B рівні.

З умови (i) випливають (ii)–(vii) оскільки спектральна норма та норма Фробеніуса матриці не змінюється при множенні на унітарні матриці. Імплікація (ii) ⇒ (i) очевидна. Імлікації (iv) ⇒ (iii) ⇒ (i), (vi) ⇒ (v) ⇒ (iv), та (vii) ⇒ (i) доведені в розділах 4.1, 4.2, та 4.3, відповідно.

Зауваження 5. *(a)* Якщо B нормальна, тоді умова $\|A\| = \|B\|$ в (iv) може бути упущена *(див [43] або [52]).* Це не може бути опущено для довільної матриці B*: якщо*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

тодів они мають однакові характеристичні многочлени та $\operatorname{trace} A^i = \operatorname{trace} B^i$ *для* $i = 1, \dots, n$*, але* A *та* B *не унітарно подібні.*

(b) Якшо B нормальна, тоді умова "$\|A^k + cI_n\| = \|B^k + cI_n\|$ для $c \in \{0, 1, i\}$" в (v) може бути замінена $\|A^k\| = \|B^k\|$. Це не може бути замінено для довільної матриці B*: якщо*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

тоді $\|A^k\| = \|B^k\|$ *для* $k = 1, \dots, n$*, але* A *та* B *не унітарно подібні.*

(c) Умова $\|f(A)\|_{\mathrm{sp}} = \|f(B)\|_{\mathrm{sp}}$ у *(vii)* не може бути послаблена до $\|A\|_{\mathrm{sp}} = \|B\|_{\mathrm{sp}}$*. Наприклад, якщо*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

тоді вони мають однаковий характеристичний многочлен та $\|A\|_{\mathrm{sp}} = \|B\|_{\mathrm{sp}} = 2$*, але* A *та* B *унітарно подібні.*

(d) Умова "характеристичні многочлени матриць A та B рівні" в (vii) не може бути опущена. *Наприклад, якщо*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

тоді $\|f(A)\|_{\mathrm{sp}} = \|f(B)\|_{\mathrm{sp}} = \max(|f(1)|, |f(2)|)$ *для усіх* $f \in \mathbb{C}[x]$, *але* A *та* B *не унітарно подібні.*

4.1 Доведення імплікацій (iv) ⇒ (iii) ⇒ (i)

Нехай A довільна $n \times n$ нормальна матриця та нехай B довільна матриця такого ж розміру.

Спочатку доведемо, що (iii) ⇒ (i). Припустимо, що A та B задовільняють (iii). Оскільки A та B мають однакові характеристичні многочлени, вони мають однакові власні числа. Використовуючи перетворення унітарної подібності (що зберігає (iii)), спершу зведемо A до діагональної форми та потім B до верхньотрикутної форми з такою ж головною діагоналлю,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

що можливо згідно [37, Теореми 2.3.1].

Оскільки $\|A\| = \|B\|$,

$$\sum_{i<j} |b_{ij}|^2 = 0.$$

Таким чином, B діагональна та дорівнює матриці A з точності до перестановки діагональних елементів. Таким чином A та B унітарно подібні, що доводить (iii) ⇒ (i).

За [37, Задача 12 у розділі 1.2], рівності Ньютона гарантують, що дві $n \times n$ матриці A та B мають однаковий характеристичний многочлен тоді та тільки тоді, коли $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ для $k = 1, \dots, n$, що доводить (iv) ⇒ (iii).

4.2 Доведення імплікацій (vi) ⇒ (v) ⇒ (iv)

Нехай A довільна $n \times n$ нормальна матриця та нехай B довільна матриця такого ж розміру. Імплікація (vi) ⇒ (v) очевидна, доведемо (v) ⇒ (iv).

Припустимо, що A та B задовільняють (v). Не втрачаючи загальності, припустимо, що

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \mu_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

(згідно з [37, Теоремами 2.5.3, 2.3.1]можемо звести їх до цієї форми перетвореннями унітарної подібності, що зберігає (v)).

Позначимо через $\operatorname{Re}(z)$ та $\operatorname{Im}(z)$ дійсну та уявну частини $z \in \mathbb{C}$. Умова (v) дає, що $\|A\|^2 = \|B\|^2$ та $\|A + I\|^2 = \|B + I\|^2$, тобто

$$\sum |\lambda_i|^2 = \sum |\mu_i|^2 + \sum_{i<j} |b_{ij}|^2 \tag{4.1}$$

та

$$\sum |\lambda_i + 1|^2 = \sum |\mu_i + 1|^2 + \sum_{i<j} |b_{ij}|^2. \tag{4.2}$$

Віднімаючи (4.1) з (4.2), отримаємо

$$\begin{gathered} \sum \left(|\lambda_i + 1|^2 - |\lambda_i|^2\right) = \sum \left(|\mu_i + 1|^2 - |\mu_i|^2\right), \\ \sum \left((\lambda_i + 1)(\overline{\lambda_i} + 1) - \lambda_i \overline{\lambda_i}\right) = \sum \left((\mu_i + 1)(\overline{\mu_i} + 1) - \mu_i \overline{\mu_i}\right), \\ \sum (\lambda_i + \overline{\lambda_i} + 1) = \sum (\mu_i + \overline{\mu_i} + 1), \\ \sum \operatorname{Re} \lambda_i = \sum \operatorname{Re} \mu_i. \end{gathered} \tag{4.3}$$

За (v), $\|A + iI\|^2 = \|B + iI\|^2$, та таким чином

$$\sum |\lambda_i + i|^2 = \sum |\mu_i + i|^2 + \sum_{i<j} |b_{ij}|^2. \tag{4.4}$$

Віднімаючи (4.1) з (4.4), отримаємо

$$\sum \operatorname{Im} \lambda_i = \sum \operatorname{Im} \mu_i. \tag{4.5}$$

За (4.3) та (4.5),

$$\sum \lambda_i = \sum \mu_i, \tag{4.6}$$

та таким чином $\operatorname{trace} A = \operatorname{trace} B$. Аналогічні міркування до A^k та B^k замість A та B гарантують, що

$$\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k \qquad \text{для усіх} \quad k = 1, \dots, n, \tag{4.7}$$

що доводить (v) $\Rightarrow$ (iv).

4.3 Доведення імплікації (vii) $\Rightarrow$ (i)

Нехай A довільна $n \times n$ нормальна матриця та нехай B довільна матриця такого ж розміру. Припустимо, що A та B задовільняють (vii).

Оскільки A та B мають однаковий характеристичний многочлен, то вони мають однакові власні числа. Використовуючи перетворення унітарної подібності (що зберігає (vii)), зведемо A до діагональної форми, B до верхньотрикутної форми з такою ж самою діагоналлю, та отримаємо

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_{m_s} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{bmatrix},$$

в якій $\lambda_i \neq \lambda_j$, якщо $i \neq j$ та кожна B_i є $m_i \times m_i$ верхньотрикутна матриця з головною діагоналлю $(\lambda_i, \dots, \lambda_i)$.

Доведемо, що

$$B_1 = \lambda_1 I_{m_1}, \ \dots, \ B_s = \lambda_s I_{m_s}. \tag{4.8}$$

Мінімальний многочлен A — це $\mu_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$. Оскільки $\mu_A(A) = 0$, за (vii)маємо

$$\mu_A(B) = \begin{bmatrix} \mu_A(B_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_A(B_s) \end{bmatrix} = 0,$$

та таким чином для кожного i

$$\mu_A(B_i) = (B_i - \lambda_1 I)\cdots(B_i - \lambda_s I) = 0.$$

Але $\det(B_i-\lambda_j I) \neq 0$, якщо $i \neq j$, таким чином усі $B_i-\lambda_i I = 0$, які гарантують (4.8).

Нам потрібно довести, що $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$. Припустимо від супротивного, що B не діагональна. Нехай l — це максимальний індекс, такий що, існує ненульовий елемент над $B_l = \lambda_l I_{m_l}$ у B.

Якщо $l < s$, тоді B має форму

$$B = \begin{bmatrix} C & Y \\ 0 & B_l \end{bmatrix} \oplus D,$$

в якій C — це верхньотрикутна матриця, $Y \neq 0$, та $D = B_{l+1} \oplus \cdots \oplus B_s$. Перестановкою рядків та такою ж перестановкою стовпчиків одночасно у A та B, зробимо

$$B = D \oplus \begin{bmatrix} C & Y \\ 0 & B_l \end{bmatrix}.$$

Таким чином, можемо припустити, що $l = s$, тоді

$$B = \begin{bmatrix} C & Y \\ 0 & \lambda_s I_{m_s} \end{bmatrix},$$

в якій $Y \neq 0$ та

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{s-1} I_{m_{s-1}} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Мінімальний многочлен матриці C дорівнює $\mu_C(x) := (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{s-1})$, та таким чином

$$\mu_C(A) = \begin{bmatrix} 0_{m'} & 0 \\ 0 & \mu_C(\lambda_s) I_{m_s} \end{bmatrix}, \qquad \mu_C(B) = \begin{bmatrix} 0_{m'} & Z \\ 0 & \mu_C(\lambda_s) I_{m_s} \end{bmatrix}$$

в якому $m' := m_1 + \cdots + m_{s-1}$ та

$$Z = \sum_{i=1}^{s-1} (C - \lambda_1 I)\cdots(C - \lambda_{i-1} I) Y (\lambda_s - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_s - \lambda_{s-1}).$$

Отже, $Z = f(C)Y$ з

$$f(x) := \sum_{i=1}^{s-1} (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_{i-1})(\lambda_s - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_s - \lambda_{s-1}).$$

Згідно (vii),

$$\left\| \begin{bmatrix} 0_{m'} & Z \\ 0 & \mu_C(\lambda_s) I_{m_s} \end{bmatrix} \right\| = \|\mu_C(B)\| = \|\mu_C(A)\| = |\mu_C(\lambda_s)|,$$

таким чином $Z = 0$ та $f(C)Y = 0$. Оскільки $Y \neq 0$, $f(C)$ вироджена матриця та таким чином $f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_{s-1}) = 0$ за (4.9). Тоді,

$$f(\lambda_r) = 0 \qquad \text{для деяких } r \leqslant s - 1. \tag{4.10}$$

Позначимо

$$M := \begin{bmatrix} \lambda_r & 1 \\ 0 & \lambda_s \end{bmatrix}.$$

Прирівнюючи $(1, 2)$ елементи в матрицях

$$\begin{aligned} &(M - \lambda_1 I)(M - \lambda_2 I)\cdots(M - \lambda_{s-1} I) \\ =&(M - \lambda_r I)(M - \lambda_1 I)\cdots(M - \lambda_{r-1} I)(M - \lambda_{r+1} I)\cdots(M - \lambda_{s-1} I), \end{aligned}$$

отримаємо

$$f(\lambda_r) = (\lambda_s - \lambda_1)\cdots(\lambda_s - \lambda_{r-1})(\lambda_s - \lambda_{r+1})\cdots(\lambda_s - \lambda_{s-1}) \neq 0,$$

що суперечить (4.10).

4.4 Висновки до розділу 4

Данний розділ дисертації присвячений критерію унітарної подібності нормальній матриці.

У першому параграфі наведені основні означення та відомі результати з цієї теми, а також сформульована основна теорема розділу:

Нехай A довільна $n \times n$ нормальна комплексна матриця та B довільна $n \times n$ комплексна матриця. Наступні твердження еквівалентні:

(i) A та B унітарно подібні;

(ii) B нормальна матриця $($тобто, B задовільняє одну з 89 критеріїв нормальності з [21] та [34]) та характеристичні многочлени A та B рівні;

(iii) $\|A\| = \|B\|$ та характеристичні многочлени A та B рівні;

(iv) $\|A\| = \|B\|$ та $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ для $k = 1, \dots, n$;

(v) $\|A^k + cI_n\| = \|B^k + cI_n\|$ для $c \in \{0, 1, i\}$ та $k = 1, \dots, n$;

(vi) $\|f(A)\| = \|f(B)\|$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n;

(vii) $\|f(A)\|_{\text{sp}} = \|f(B)\|_{\text{sp}}$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n, та характеристичні многочлени матриць A та B рівні.

У другому, третьому та четвертому параграфі наведено доведення основної теореми.

Розділ 5

Одночасні унітарні еквівалентності

Результати даного розділу опубліковані в статті [31].

Даний розділ присвячений розв'язку наступної задачі:

Загальна задача. Нехай $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. Опишемо алгоритм, щоб визначити, за скінченну кількість обчислень, чи існує одна унітарна матриця U така, що кожна пара матриць в $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та кожна пара матриць в $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

5.1 Вступ

Ця загальна задача включає спеціальні випадки задачі визначення чи скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно подібні ($\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$) так само як і задачу визначення чи скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно конгруентні ($\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \varnothing$).

Усі матриці, що розглядаємо комплексні та квадратні. Дві матриці A та

B однакового розміру *унітарно подібні*, якщо існує унітарна матриц U така, що $A = UBU^*$; вони *унітарно конгруентні*, якщо існує унітарна матриця U така, що $A = UBU^T$. Задані пари n-на-n матриць $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ *одночасно унітарно подібні*, якщо існує унітарна матриця U така, що $A_j = UB_jU^*$ для кожного $j = 1, \ldots, m$; вони *одночасно унітарно конгруентні* , якщо існує унітарна матриця U така, що $A_j = UB_jU^T$ для кожного $j = 1, \ldots, m$. Слід матриці A позначимо як $\operatorname{tr} A$. Використаємо позначення та термінологію з [37].

5.2 Унітарна подібність пар матриць

Будь-який скінченний формальний добуток невід'ємних степенів двох некомутуючих змінних s, t

$$W(s,t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\cdots s^{m_k}t^{n_k}, \quad m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k \geq 0$$

називається **словом** з s та t. Сума $m_1+n_1+m_2+n_2+\cdots+m_k+n_k$ називається **довжиною** слова $W(s,t)$, та невід'ємні числа m_i та n_i називаються його **степенями множників** . *Слово з A та A^** це

$$W(A, A^*) = A^{m_1}(A^*)^{n_1}A^{m_2}(A^*)^{n_2}\cdots A^{m_k}(A^*)^{n_k} \tag{5.1}$$

Якщо $A = UBU^*$ для деяких унітарних $U \in M_n$, обчислення показують, що $W(A, A^*) = UW(B, B^*)U^*$, таким чином $W(A, A^*)$ унітарно подібні до $W(B, B^*)$. Таким чином, унітарна подібність A та B дає, що

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \tag{5.2}$$

для кожного слова $W(s,t)$ з двох некомутуючих змінних.

Теорема Шпехта [68] дає протилежний бік цієї імплікації. Різні автори надали обмеження, щоб показати, що тількі скіченна кількість слів необхідна для розгляду [57]; обмеження в наступній теоремі згідно Папачени [56].

Теорема 5.2.1. *Нехай комплексні n-на-n матриці A та B задані. Наступні твердження еквівалентні*
(a) A та B унітарно подібні;
(b) $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$ *для кожного слова* $W(s,t)$ *з двох некомутуючих змінних;*
(c) $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$ *для кожного слова* $W(s,t)$ *з двох некомутуючих змінних, чия довжина не більше ніж*

$$n\sqrt{\frac{2n^2}{n-1} + \frac{1}{4}} + \frac{n}{2} - 2.$$

5.3 Базова лема

Ключ до отримання критерію одночасної унітарної подібності та одночасної унітарної конгруентності — це розуміння наслідків певних переплетених відношень, що містять спеціальну блочну матрицю.

Лема 5.3.1. *Розглянемо комплексні k-на-k блочні матриці*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & A_{1,3} & \cdots & A_{1,k} \\ & 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & A_{k-2,k} \\ & & & \ddots & I_n \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

та

$$B = \begin{bmatrix} 0 & I_n & B_{1,3} & \cdots & B_{1,k} \\ & 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & B_{k-2,k} \\ & & & \ddots & I_n \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

в якому кожен блок є n-на-n. Визначимо $A_{i,i+1} = B_{i,i+1} = I_n$ *для усіх* $i = 1, \dots, k-1$ *та* $A_{ij} = B_{ij} = 0$ *коли* $i \geq j$. *Нехай* $W = [W_{ij}]_{i,j=1}^{k}$ *— це*

nk-на-nk матриця, що поділена конформно до матриць A та B.
(a) Припустимо, що $AW = WB$. Тоді W блочна верхньотрикутна та $W_{11} = W_{22} = \cdots = W_{kk}$.
(b) Припустимо, що W унітарна та $AW = WB$, так що , A та B унітарно подібні та $A = WBW^*$. Тоді $W_{11} = U$ унітарна та $W = U \oplus U \oplus \cdots \oplus U$ блочнодіагональна. Більш того, $A_{ij} = UB_{ij}U^*$ для усіх i та j.
(c) Припустимо, що $A\bar{W} = WB$. Тоді W блочна верхньотрикутна, $W_{ii} = W_{11}$, якщо i непарне, та $W_{ii} = \overline{W_{11}}$, якщо i парне.
(d) Припустимо, що W унітарна та $A\bar{W} = WB$, так що, A унітарно конгруентна до B та $A = WBW^T$. Тоді $W_{11} = U$ унітарна, $W_{ii} = U$, якщо i непарне, $W_{ii} = \bar{U}$, якщо i парне, та $W = U \oplus \bar{U} \oplus U \oplus \cdots$ блочнодіагональна. Більш того,

(d1) $A_{ij} = UB_{ij}U^*$, якщо i непарне та j парне;
(d2) $A_{ij} = UB_{ij}U^T$, якщо i та j обидва непарні;
(d3) $A_{ij} = \bar{U}B_{ij}U^*$, якщо i та j обидва парні; та
(d4) $A_{ij} = \bar{U}B_{ij}U^T$, якщо i парне та j непарне.

Доведення. Обчислення перевіряє твердження в (a) та (c) про блочну трикутність: порівняємо блоки у відповідній тотожностях $AW = WB$ та $A\bar{W} = WB$, починаючи з блочної позиції $(k, 1)$. Працюємо вправо поки досягаємо блочну позицію $(k, k-1)$. Рухаємося до блочної позиції $(k-1, 1)$ та працюємо вправо поки не досягаємо блочну позицію $(k-1, k-2)$. Повторюємо цей процес, рухаючись уверх на один блочний рядок одночасно, покі не досягаємо блочну позицію $(2, 1)$.

Твердження в (a) та (c) про головні діагональні блоки W випливають (відомо, що W блочноверхньотрикутна) з порівняння блоків у відповідних тотожностях в позиціях $(1, 2)$,. . . ,$(k-1, k)$.

Твердження в (b) та (d) про W відображають факти, що блочнотрикутна унітарна матриця блочнодіагональна, та прямі доданки в унітарній прямій сумі унітарні. Стверджувані співвідношення в A_{ij} та B_{ij} випливають (відомо, що W блочно діагональна) з відповідних тотожностей $A_{ij}W_{jj} = W_{ii}A_{ij}$ та $A_{ij}\overline{W_{jj}} = W_{ii}A_{ij}$. □

Наостанок, якщо матриці A та B в (5.3) та (5.4) унітарно подібні, тоді усі пари (A_{ij}, B_{ij}) одночасно унітарно подібні. Якщо A та B унітарно конгруентні, тоді існує одна унітарна матриця U, що включена у чотири типи унітарної еквівалентності: певні пари (A_{ij}, B_{ij}) одночасно унітарно подібні за допомогою U та $\bar{U}$, та певні пари одночасно унітарно конгруентні за допомогою U або $\bar{U}$.

5.4 Одночасна унітарна подібність

Корисно мати явне твердження критерію для одночасної унітарної подібності, що не є явним у лемі 5.3.1.

Теорема 5.4.1. *Нехай задані пари $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ n-на-n комплексних матриць. Оберемо k достатньо великим, щоб матриця A в (5.3) мала хоча б m блоків над другою блочною супердіагоналю. Помістимо матриці $A_1, \ldots, A_m$ у ці блоки у будь-якому порядку, та помістимо нульові матриці в будь-які незаповнені блоки.Помістимо $B_1, \ldots, B_m$ та нульові матриці у відповідні блоки матриці B в (5.4). Тоді A унітарно подібна до B, тоді та тільки тоді, коли пари $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ одночасно унітарно подібні.*

Наприклад, можемо обрати $k = m + 2$ та помістити відповідні матриці пар $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ в позиціях $(1, 3), \ldots, (1, k)$ перших блочних рядків (5.3) та (5.4), або в блоках $(1, 3), (2, 4), \ldots, (k - 2, k)$ третьої блочної супердіагоналі (5.3) та (5.4).

Природнє розширення критерію Шпехта на більш ніж одну пару матриць випливає з попередньої теореми.

Наслідок 5.4.2. *Задані пари* $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$ *n-на-n комплексних матриць одночасно унітарно подібні тоді та тільки тоді, коли* $\operatorname{tr} w(A_1, A_1^*, \dots, A_m, A_m^*) = \operatorname{tr} w(B_1, B_1^*, \dots, B_m, B_m^*)$ *для усіх слів* $w(s_1, t_1, \dots, s_m, t_m)$ *в* $2m$ *некомутуючих змінних.*

Доведення. Нехай $k = m + 2$, та розглянемо матрицю A виду (5.3), що побудована розміщенням матриць $A_1, \dots, A_m$ послідовно у m блоків третього блоку супердіагоналі, та розміщенням нульових блоків в усіх його інших блоків над третьою блочною супердіагоналлю. Побудуємо матрицю B виду (5.4), аналогічно, використовуючи матриці $B_1, \dots, B_m$.

Розглянемо наступні припущення:

(a) $\operatorname{tr} w(A_1, A_1^*, \dots, A_m, A_m^*) = \operatorname{tr} w(B_1, B_1^*, \dots, B_m, B_m^*)$ для усіх слів $w(s_1, t_1, \dots, s_m, t_m)$ з $2m$ некомутуючих змінних;

(b) $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$ для кожного слова $W(s, t)$ з двох некомутуючих змінних;

(c) A унітарно подібна до B;

(d) Пари $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$ одночасно унітарно подібні.

Достатньо показати, що ці чотири припущення еквівалентні.

(a) $\Rightarrow$ (b) Кожний блок будь-якого слова $W(A, A^*)$ — це лінійна комбінація одиничної матриці (можемо вважати, що це порожнє слово) та слів виду $w(A_1, A_1^*, \dots, A_m, A_m^*)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Теорема 5.2.1.

(c) $\Rightarrow$ (d) Теорема 5.4.1.

(d) $\Rightarrow$ (a) Аналогічні обчислення, що перевіряють тотожності (5.2). □

Одночасна унітарна подібність заданих пар $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$ n-на-n комплексних матриць еквівалентна до унітарної подібності двох окремих блочних матриць; Теорема 5.2.1 гарантує, що остання унітарна подібність може бути підтверджена або заперечена за скінченну кількість обчислень. Таким чином, існує скінченний алгоритм для визначення чи буде скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно подібні.

Більш того, критерій сліду у Твердженні 5.4.2 вимагає тільки скінченну кількість обчислень: це потребує перевірку тільки достатніх тотожностей виду $\operatorname{tr} w(A_1, A_1^*, \dots, A_m, A_m^*) = \operatorname{tr} w(B_1, B_1^*, \dots, B_m, B_m^*)$, гарантувати задоволення скінченної кількості тотожностей виду $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$, потрібних за верхнім обмеженням Папачени у Теоремі 5.2.1.

5.5 Унітарна конгруентність пар матриць

До того як розглянемо роль леми 5.3.1 в оцінці одночасних унітарних конгруентностей та інших одночасних унітарних еквівалентностей, нам потрібно розглянути найпростіший випадок унітарної конгруентності однієї пари матриць. Якщо U унітарна та $A = UBU^T$, обчислення показують, що

$$AA^* = U(BB^*)U^*,\ A\bar{A} = U(B\bar{B})U^*,\ \text{та}\ A^T\bar{A} = U(B^T\bar{B})U^*, \tag{5.5}$$

отже, три пари матриць, що відносяться до A та B, одночасно унітарно подібні. Ця необхідна умова також є і достатньою:

Теорема 5.5.1. *Комплексні n-на-n матриці A та B унітарно конгруентні тоді та тільки тоді, коли три пари (AA^*, BB^*), $(A\bar{A}, B\bar{B})$, та $(A^T\bar{A}, B^T\bar{B})$ одночасно унітарно подібні. Якщо будь-яка з матриць A або B невироджені, третя пара може бути упущена.*

Доведення. Дивіться [38]. □

Попередня теорема та теорема 5.4.1 дають наступний критерій унітарної конгруентності.

Теорема 5.5.2. *Комплексні n-на-n матриці A та B унітарно конгруентні* *тоді та тільки тоді, коли $4n$-на-$4n$ матриці*

$$K_A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & AA^* & A\bar{A} \\ & 0 & I_n & A^T\bar{A} \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ та } K_B = \begin{bmatrix} 0 & I_n & BB^* & B\bar{B} \\ & 0 & I_n & B^T\bar{B} \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

унітарно подібні. Якщо A або B невироджені, вони унітарно конгруентні тоді та тільки тоді, коли

$$K'_A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & AA^* & A\bar{A} \\ & 0 & I_n & 0 \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ та } K'_B = \begin{bmatrix} 0 & I_n & BB^* & B\bar{B} \\ & 0 & I_n & 0 \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

унітарно подібні.

Якщо застосувати критерій в теоремі 5.5.2, обмеження в теоремі 5.2.1 гарантує, що достатньо перевірити тотожності виду

$$\operatorname{tr} W(K_A, K_A^*) = \operatorname{tr} W(K_B, K_B^*) \tag{5.8}$$

для усіх слів $W(s,t)$ довжини не більше

$$4n\sqrt{\frac{32n^2}{4n-1} + \frac{1}{4}} + 2n - 2. \tag{5.9}$$

Матриці (5.6) та (5.7) нільпотентні четвертого індексу, тож в перевірці тотожностей зі слідом (5.8) потрібно розглянути тільки слова, усі множникові степені яких дорівнюють або менші трьох.

Для $n = 2$, обмеження (5.9) каже, що достатньо розглянути усі слова довжини не більше 37, то ж потрібно розглянути величезну кількість слів, навіть у маленькому випадку. Для $n = 3$ верхнє обмеження на довжину дорівнює 66; для $n = 4$ дорівнює 116. На противагу, коли використовувати критерій Шпехта для тестування пари 2-на-2 матриць відносно унітарної подібності, достатньо перевірити сліди тільки трьох слів довжини не більше двох; для тестування пари 3-на-3 матриць достатньо перевірити сліди тільки семи слів довжини не більше шести. Невідомо, чи спеціальна форма матриць в (5.6) та (5.7), деякі спеціальні характеристики у випадках маленької розмірності, або деякі розумні спостереження дадуть змогу суттєво зменшити верхнє обмеження (5.9).

5.6 Одночасна унітарна еквівалентність

Зараз покажемо явний розв'язок загальної задачі, що неявне у лемі 5.3.1.

Теорема 5.6.1. *Нехай m_1, m_2, m_3, та m_4 задані невід'ємні цілі числа. Нехай*

$$\begin{array}{ll} (A_1^{(1)}, B_1^{(1)}), \ldots, (A_{m_1}^{(1)}, B_{m_1}^{(1)}), & (A_1^{(2)}, B_1^{(2)}), \ldots, (A_{m_2}^{(2)}, B_{m_2}^{(2)}), \\ (A_1^{(3)}, B_1^{(3)}), \ldots, (A_{m_3}^{(3)}, B_{m_3}^{(3)}), & (A_1^{(4)}, B_1^{(4)}), \ldots, (A_{m_4}^{(4)}, B_{m_4}^{(4)}) \end{array}$$

задані пари n-на-n комплексних матриць. Оберемо k достатньо великим, щоб матриця A в (5.3) мала достатньо блоків над другою блочною супер-діагоналю для пристосуваня наступної конструкції:

(1) Помістимо матриці $A_1^{(1)}, \ldots, A_{m_1}^{(1)}$ (у будь-якому бажаному порядку) в (i, j) блоках матриці A так, щоб i було непарним, j було парним, та $j - i \geq 2$; помістимо матриці $B_1^{(1)}, \ldots, B_{m_1}^{(1)}$ у відповідні позиції в B.

(2) Помістимо матриці $A_1^{(2)}, \ldots, A_{m_2}^{(2)}$ (у будь-якому бажаному порядку) в (i, j) блоках матриці A так щоб i та j були обидва непарні та $j - i \geq 2$; помістимо матриці $B_1^{(2)}, \ldots, B_{m_2}^{(2)}$ у відповідні позиції в B.

(3) Помістимо матриці $A_1^{(3)}, \ldots, A_{m_3}^{(3)}$ (у будь-якому бажаному порядку) і (i, j) блоках матриці A так щоб i та j були обидва парними та $j - i \geq 2$; помістимо матриці $B_1^{(3)}, \ldots, B_{m_3}^{(3)}$ у відповідні позиції в B.

(4) Помістимо матриці $A_1^{(4)}, \ldots, A_{m_4}^{(4)}$ (у будь-якому бажаному порядку) і (i, j) блоках матриці A так щоб i було парним, j було непарним, та $j - i \geq 2$; помістимо матриці $B_1^{(4)}, \ldots, B_{m4}^{(4)}$ у відповідні позиції в B.

(5) Помістимо нульові матриці у будь-які незаповнені блоки матриць A та B.

Тоді A конгруентна до B тоді та тільки тоді, коли існує унітарна матриця U така, що

(1′) $A_i^{(1)} = UB_i^{(1)}U^*$ для усіх $i = 1, \ldots, m_1$;

(2′) $A_i^{(2)} = UB_i^{(2)}U^T$ для усіх $i = 1, \ldots, m_2$;

(3′) $A_i^{(3)} = \bar{U}B_i^{(3)}U^*$ для усіх $i = 1, \ldots, m_3$; та

(4′) $A_i^{(4)} = \bar{U}B_i^{(4)}U^T$ для усіх $i = 1, \ldots, m_4$.

Припустимо, що чотири набори пар n-на-n комплексних матриць задані (деякі з цих наборів можуть бути порожніми), та вимагається визначити чи одночасні унітарні еквівалентності вказані у Загальній задачі валідні. Наш алгоритм буде працювати наступним чином:

Алгоритм 5.6.2. *Побудуємо блочні матриці A та B згідно з призначення у попередній теоремі. Потім побудуємо*

$$K_A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & AA^* & A\bar{A} \\ & 0 & I_n & A^T\bar{A} \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ та } K_B = \begin{bmatrix} 0 & I_n & BB^* & B\bar{B} \\ & 0 & I_n & B^T\bar{B} \\ & & 0 & I_n \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Чотири задані набори пар матриць задовільняють потрібні одночасні унітарні еквівалентності тоді та тільки тоді, коли K_A та K_B унітарно подібні. Та унітарна подібність може бути підтверджена або заперечена за скінченну кількість обчислень використовуючи теорем 5.2.1. У цих обчисленнях, тільки слова з множниковими степенями не більше 3 потрібно буде розглянути.

5.7 Висновки до розділу 5

Данний розділ дисертації присвячений розв'язанню наступної задачі.

Нехай $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. Опишемо алгоритм, щоб визначити, за скінченну кількість обчислень, чи існує одна унітарна матриця U така, що кожна пара матриць в $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та кожна пара матриць в $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

У першому параграфі сформульована основна задача розділу.

У другому параграфі наведені критерії унітарної подібности пар матриць за теоремою Шпехта, та з обмеженням Папачени.

У третьому параграфі сформульована та доведена базова лема, необхідна для розв'язання основної задачі розділу.

У четвертому параграфі наведений скінченний алгоритм для визначення чи буде скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно подібні.

У п'ятому параграфі наведений скінченний алгоритм для визначення чи буде скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно конгруентні.

У шостому параграфі наведений скінченний алгоритм для визначення чи буде скінченна кількість пар матриць одночасно унітарно еквівалентні.

Розділ 6

Зведення пари кососиметричних матриць до її канонічної форми відносно конгруентності

Результати даного розділу опубліковані в статті [13].

В даному розділі надається алгоритм, що для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

6.1 Вступ

Дві пари (A, B) та (A', B') квадратних матриць однакового розміру є **конгруентними**, якщо існує невироджена матриця S така, що

$$S(A, B)S^T := (SAS^T, SBS^T) = (A', B').$$

Прямою сумою пар (A, B) та (A', B') є пара

$$(A, B) \oplus (A', B') := \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \right).$$

Регуляційним розкладом пари (A, B) кососиметричних матриць над полем характеристики, що не дорівнює 2, є пряма сума

$$(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \oplus (A_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (A_t, B_t), \tag{6.1}$$

що конгруентна (A,B), в якій $(\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}})$ є пара невироджених матриць однакового розміру та кожна (A_i,B_i) є однією з пар

$$\mathcal{J}_n := \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & J_n(0) \\ -J_n(0)^T & 0 \end{bmatrix}\right), \tag{6.2}$$

$$\mathcal{K}_n := \left(\begin{bmatrix} 0 & J_n(0) \\ -J_n(0)^T & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{L}_n := \left(\begin{bmatrix} 0 & L_n \\ -L_n^T & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & R_n \\ -R_n^T & 0 \end{bmatrix}\right), \quad n = 1,2,\dots, \tag{6.3}$$

де $J_n(0)$ — це $n \times n$ вироджений Жорданів блок та

$$L_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ((n-1)\text{-на-}n). \tag{6.4}$$

А саме, $\mathcal{L}_1 = ([0],[0])$. Канонічна форма (A,B) відносно конгруентності (див (6.5)) гарантує, що $(\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}})$ — **основна частина** пари (A,B) визначена з точністю до конгруентності, та $(A_1,B_1),\dots,(A_t,B_t)$ — *вироджені доданки* — визначені з точністю до перестановок.

У частині 6.2 наведено *регуляційний алгоритм*, що використовує елементарні перетворення матриць та для кожної пари кососиметричних матриць над полем характеристики не 2 будує її регуляційний розклад відносно конгруентності. Регуляційні алгоритми були побудовані для матричних пучків згідно Ван Дурена [70], для циклів лінійних відображень Сергейчуком [65] та Варгою [71], та для квадратних матриць відносно конгруентності та *конгруентності Хорном та Сергейчуком [39].

Регуляційний розклад (6.1) — це перший крок в сторону зведення пари (A,B) до її канонічної форми відносно конгруентності (див Теорему 6.3.1 у Розділі 6.3): кожна пара кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики не 2 конгруентна прямий сумі, що визначається однозначно з точністю до перестановки доданків, пар виду

$$\mathcal{J}_n(\lambda) := \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & J_n(\lambda) \\ -J_n(\lambda)^T & 0 \end{bmatrix} \right) \ (\lambda \in \mathbb{F}), \quad \mathcal{K}_n, \quad \mathcal{L}_n, \tag{6.5}$$

де

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (n\text{-на-}n).$$

Якщо $\mathbb{F}$ не алгебраїчно замкнене, тоді $J_n(\lambda)$ в (6.5) замінюється будь-якою нерозкладною канонічною матрицею відносно подібності; наприклад, $J_n(\lambda)$ може бути замінена блоком Фробеніуса

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & & 1 & -c_1 \end{bmatrix},$$

в якому $p(x)^\ell = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$ цілий степінь многочлена $p(x)$, що незвідний над $\mathbb{F}$. Ця канонічна форма пар кососиметричних матриць над конгруентністю була надана Шарлау [67] у термінах модулів Кронекера; див також [64, 69].

У розділі 6.3, надамо інше доведення цієї канонічної форми пари кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем, що базується на регуляризуючому алгоритмі з Розділу 6.2.

Дмитришин та Крагстрем [17, 18] будують мініверсальні деформації пари кососиметричних матриць (A, B) відносно конгруентності та вивчають як маленькі збурення A та B змінюють канонічні форми (A, B) відносно конгруентності.

6.2 Регуляційний алгоритм для пари кососиметричних матриць

Розглядаємо тільки матричні пари, в яких обидві матриці мають однаковий розмір. Усі перетворення, що робимо з матричними парами в цьому розділі є перетвореннями конгруентності. Таким чином,

> коли пишемо, що робимо елементарні перетворення рядків (стовпчиків) однієї матриці з пари, це означає, що також робимо однакові елементарні перевторення рядків (відповідно, стовпчиків) іншої матриці, та тоді таке ж елементарне перетворення стовпчиків (відповідно, рядків) обох матриць. (6.6)

Напіврегуляційний розклад пари (A, B) кососиметричних матриць прямої суми

$$(\underline{A}, \underline{B}) \oplus (A_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (A_t, B_t)$$

що конгруентна (A, B), в якій $\underline{A}$ є невиродженою матрицею та кожна пара (A_i, B_i) має форму $\mathcal{J}_n$ або $\mathcal{L}_n$ (див (6.2) та (6.3)).

У цьому розділі, надаємо алгоритм, який будує регуляційний розклад пари (A, B) кососиметричних матриць над полем $\mathbb{F}$ характеристики не 2. З цією метою, достатньо дати алгоритм що будує напіврегуляційний розклад оскільки, якщо (6.1) є напіврегуляційним розкладом пари (A, B) та

$$(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}) \oplus (B'_1, A'_1) \oplus \cdots \oplus (B'_s, A'_s)$$

є напіврегуляційним розкладом $(\underline{B}, \underline{A})$ (та таким чином кожна (B'_i, A'_i) є формою $\mathcal{J}_n$), тоді

$$(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \oplus (A'_1, B'_1) \oplus \cdots \oplus (A'_s, B'_s) \oplus (A_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (A_t, B_t)$$

є регуляційним розкладом (A, B).

Припустимо, що A була зведена до її канонічної форми відносно конгруентності; таким чином,

$$(A,B) = \left(\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I & 0 \\ \hline -I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array} \right] \right) \tag{6.7}$$

та далі використаємо тільки ті перетворення конгруентності $S(A,B)S^T$, що зберігає A; таким чином для кожного $SAS^T = A$.

Наприклад, можемо взяти $S = R \oplus R^{-T} \oplus I$, в якому R є невиродженою матрицею. Якщо R є елементарною матрицею, тоді отримаємо перетворення (i) з наступного параграфу. Наприклад, можемо додати рядок $i1$, що множиться на $a \in \mathbb{F}$, до рядка $j1$ ("рядок il" означає iий рядок lої горизонтальної смуги у (6.7)) та робить таке ж перетворення зі стовпчиками. Ці перетворення зіпсовує блоки $(1,2)$ та $(2,1)$ матриці A; відновлюємо їх відніманням стовпчика $j2$ помноженого на a з стовпчика $i2$ та розблячи аналогічне перетворення рядків.

Наступні перетворення рядків, які згруповані з аналогічними перетвореннями стовпчиків (див (6.6)), не змінюють A:

(i) – Елементарні рядкові перетворення у першій горизонтальній смузі та обернені рядкові перетворення у другій горизонтальній смузі.

– Елементарні рядкові перетворення у третій горизонтальній смузі.

(ii) – Додаємо рядок $i1$, помножений на $a \in \mathbb{F}$ до рядка $j2$ з $j \neq i$, тоді додаємо рядок $j1$, помножений на a до рядка $i2$.

– Додаємо рядок $i1$ помножений на $a \in \mathbb{F}$ до рядка $i2$.

(iii) – Додаємо рядок $i2$ помножений на $a \in \mathbb{F}$ до рядка $j1$ з $j \neq i$, тоді додаємо рядок $j2$ помножений на a до рядка $i1$.

– Додаємо рядок $i2$ помножений на $a \in \mathbb{F}$ до рядка $i1$.

(iv) Помножимо рядок $i1$ на -1, тоді поміняємо його з рядком $i2$.

(v) Додамо рядок $i3$ помножений на $a \in \mathbb{F}$ до рядка у смузі 2 або 3.

На кожному кроці наступного алгоритму, зводимо пару (A, B) форми (6.7) перетвореннями (i)–(v) до прямої суми, в якій деякі прямі доданки форми $\mathcal{K}_n$ або $\mathcal{L}_n$, та видалимо ці доданки. Цей алгоритм зупиняється колиотримаємо пару $(\underline{A}, \underline{B})$ з невиродженою $\underline{A}$.

Напіврегуляційний алгоритм для пари (6.7)**:**

1. Якщо $B_{33} \neq 0$, зводимо її перетвореннями (i) до форми
$$B_{33} = \begin{bmatrix} 0 & I_k & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (k > 0),$$
потім, використовуючи перетворення (v), робимо нульовими усі елементи поза I_k, що розміщуються в рядках та стовпчиках, які перетинають I_k (згідно (6.6), також робимо нульові усі елементи поза $-I_k$ що розміщені у рядках та стовпчиках, які перетинають $-I_k$). Видалимо k *прямі доданки* $\mathcal{K}_1 = \left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$ з (A, B) (таким чином, видаляємо рядки та стовпчики, що перетинають I_k та рядки та стовпчики, що перетинають $-I_k$). Отримаємо (A, B) з $B_{33} = 0$.

2. Якщо стовпчики вертикальної смуги 3 матриці B лінійно залежні, тодіфіксуємо максимальну систему лінійно незалежних стовчиків, та зробимо нульовими інші стопвчики вертикальної смуги 3; вони дають *прямі доданки* $\mathcal{L}_1 = ([0], [0])$. Видаляючи їх, отримаємо (A, B) в яких стовпчики вертикальної смуги 3 матриці B лінійно незалежні.

3. Якщо вертикальна смуга 3 матриці B порожня, тоді A є невиродженою та напіврегуляційний розклад був побудований. Припустимо, що вертикальна смуга 3 матриці B непорожня. Якщо останній стовпчик B_{13}

нульовий, робимо його ненульовим перетвореннями (iv). Зведемо останній стовпчик B_{13} до форми $\begin{bmatrix}0 \dots 0\,1\end{bmatrix}^T$, тоді зробимо нульовоими усі елементи останнього стовпчика B під 1. Зробимо останній рядок горизонтальної смуги 1 матриці B рівний $\begin{bmatrix}0 \dots 0\,1\end{bmatrix}$ та отримаємо

$$B = \left[\begin{array}{cc|c|cc} & \vdots & & & \vdots \\ \dots & . & \dots & \dots & 1 \\ \hline & \vdots & & & \vdots \\ \hline & \vdots & & 0 & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & \dots & . \end{array}\right],$$

в якому крапки означають нульові елементи. Два випадки можливі:

(a) По-перше припустимо, що останній рядок матриці B_{23} ненульовий. Зводимо його до $\begin{bmatrix}0 \dots 0\,1\,0\end{bmatrix}$, тоді робимо нульовими усі елементи матриці B над 1, зведемо останній рядок горизонтальної смуги 2 до $\begin{bmatrix}0 \dots 0\,1\end{bmatrix}$ та отримаємо

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & . & \dots & . & .. & 0 & 1 \\ \hline & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & . & \dots & . & .. & 1 & 0 \\ \hline & \vdots & & \vdots & & & \\ \dots & 0 & \dots & -1 & & 0 & \\ \dots & -1 & \dots & 0 & & & \end{array}\right]$$

в якій крапки позначають нульові елементи. Таким чином, (A, B) має прямий доданок

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{2}{c|}{} & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & 1 \\ \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & 1 & 4 & \end{array}, \begin{array}{cccc|c} \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & & \multicolumn{1}{c|}{1} & 2 \\ \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{-1} & & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 \\ \multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{} & & \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & 1 & 4 & \end{array} \right), \tag{6.8}$$

в якому усі неуточнені елементи є нульовими. Переставляючи рядки та стовпчики як позначено, то отримаємо

$$\left(\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ & & & \end{array}\right] & \begin{array}{c}\mathit{1}\\ \mathit{2}\\ \mathit{3}\\ \mathit{4}\end{array} \\ \begin{array}{cccc}\mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4}\end{array} & \end{array}, \begin{array}{cc}\left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right] & \begin{array}{c}\mathit{1}\\ \mathit{2}\\ \mathit{3}\\ \mathit{4}\end{array} \\ \begin{array}{cccc}\mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4}\end{array} & \end{array}\right).$$

Таким чином, (6.8) *конгруентно до* $\mathcal{K}_2$. Видаляємо доданок (6.8) для (A, B) та повторимо крок 3.

(b) Тепер припустимо, що останній рядок B_{23} нульовий.

Тоді повторимо крок 3, ігноруючи останні рядки та стовпчики усіх смуг матриць A та B, та отримаємо

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ \cdots & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \hline & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & & & & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots & & & 0 & & & \\ \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & 0 & \\ \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

Якщо попередній рядок матриці B_{23} ненульовий, тоді (A, B) має прямий доданок виду (6.8), що *конгруентно до* $\mathcal{K}_2$, видалимо його та повторимо крок (b).

Повторимо (a) та (b) поки не отримаємо

$$
(A,B)=\left(\left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0\\ \hline -I & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc|cc|c} B'_{11} & 0 & B'_{12} & B'_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I\\ \hline B'_{21} & 0 & B'_{22} & B'_{23} & 0\\ B'_{31} & 0 & B'_{32} & B'_{33} & 0\\ \hline 0 & -I & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right), \tag{6.9}
$$

4. Давайте зведемо (6.9) цими перетворенням конгруентності, що зберігають A та смуги 2 та 5 матриці B, і вертикальні і горизонтальні. Тоді її підпара

$$
(A',B'):=\left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0\\ -I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13}\\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23}\\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{bmatrix}\right) \tag{6.10}
$$

зводиться тими перетворенням конгруентності, що зберігають A', що означає, що B' зводиться перетвореннями (i)–(v).[1]

Застосовуємо до (A',B') кроки 1–4:

- Якщо $B'_{33}\neq 0$, тоді видаляємо доданки форми

$$
\left(\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ \hline -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 3\\4\\5\\2\\1\\6 \end{array}\\ \begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{array} & \end{array},\ \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} & & & & & 1\\ & & & & 1 & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ \hline & -1 & & & & \\ -1 & & & & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 3\\4\\5\\2\\1\\6 \end{array}\\ \begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{array} & \end{array}\right),
$$

  в яких усі неуточнені елементи нульові. Ці доданки *конгруентні до* $\mathcal{K}_3$ оскільки переставовляючи рядки та стовпчики як було вказано,

[1] Наприклад, можемо додати рядок i матриці $[B'_{31}\,B'_{32}\,B'_{33}]$ до рядка j матриці $[B'_{21}\,B'_{22}\,B'_{23}]$. Це додавання псує нульовий блок $(3,2)$ матриці A в (6.9);відновлюємо його відніманням стовпчика j вертикальної смуги 1 від стовпчика i вертикальної смуги 2. Це додавання псує вертикальну смугу 2 матриці B;відновлюємо його рядками останньої смуги з B.

отримаємо

$$\left(\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & \\
 & & & -1 & & \\
 & & & & 1 & \\
\hline
 & 1 & & & & \\
 & & -1 & & & \\
 & & & & &
\end{array}\right]\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\\
\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\end{array},\quad
\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & -1 & & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & 1\\
\hline
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & -1 & & &
\end{array}\right]\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\\
\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\end{array}\right).$$

Отримали $B'_{33} = 0$.

- Якщо стовпчики вертикальної смуги 3 матриці B' лінійно залежні, тоді видаляємо з (6.9) *доданки*

$$\mathcal{L}_2 = \left(\left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\right). \tag{6.11}$$

- Аргументуючи як в кроці 4, видаляємо з (A, B) усі доданки, що *конгруентні до* $\mathcal{K}_3$ та отримаємо (A, B) виду

$$\left(\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
 & & & I & 0 & 0 & \\
 & 0 & & 0 & I & 0 & 0\\
 & & & 0 & 0 & I & \\
\hline
-I & 0 & 0 & & & & \\
0 & -I & 0 & & 0 & & 0\\
0 & 0 & -I & & & & \\
\hline
 & 0 & & & 0 & & 0
\end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
B''_{11} & 0 & 0 & B''_{12} & B''_{13} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I\\
\hline
B''_{21} & 0 & 0 & B''_{22} & B''_{23} & 0 & 0\\
B''_{31} & 0 & 0 & B''_{32} & B''_{33} & 0 & 0\\
0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\right),$$

в яких

$$(A'', B'') := \left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B''_{11} & B''_{12} & B''_{13} \\ B''_{21} & B''_{22} & B''_{23} \\ B''_{31} & B''_{32} & B''_{33} \end{bmatrix}\right)$$

зведені довільними перетвореннями конгруентності, що зберігають A'', та також B'' зводиться перетвореннями (i)–(v).

Повторюємо ці зведення докине отримаємо $\left(A^{(k)}, B^{(k)}\right)$, в яких третя вертикальня та горизонтальна смуги порожні. Тоді $A^{(k)} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right]$ та $(\underline{A}, \underline{B}) := \left(A^{(k)}, B^{(k)}\right)$.

Зауваження 6. *Регуляційний алгоритм пари (A, B) кососиметричних матриць побудований Козловим [45, § 3] має прогалину. Кроки 1 та 2 його алгоритму зводять (A, B) до виду*

$$(A', B') := \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\right).$$

Він стверджує, що крок 3 зводить B' до виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

в той час зберігаючи A', що неможливо: з цими перетвореннями з B' перший рядок матриці A' зводиться до виду $[0 \ -1 \ * \ \cdots *]$. Канонічна форма пар кососиметричних матриць не може бути доведена елементарним шляхом *(як в [45]) оскільки вона містить в собі канонічну форму Кронекера з матричних пучків.*

6.3 Доведення канонічної форми пар над алегбраїчно замкненим полем

В цьому розділі, доводимо наступну добре відому теорему (див [64, 67, 69]) використовуючи регуляризаційний алгоритм з розділу 6.2 та метод, що був розроблений Назаровою та Ройтером [53] (див також [54] та [26, Розділ 1.8]), щоб довести канонічну форму Кронекера для матричних пучків.

Теорема 6.3.1. *Кожна пара кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем* $\mathbb{F}$ *характеристики не* 2 *конгруентна прямій сумі пар виду*

$$\mathcal{J}_n(\lambda)\ (\lambda \in \mathbb{F}), \quad \mathcal{K}_n, \quad \mathcal{L}_n$$

(*see* (6.5)). *Ця сума однозначно визначена, з точністю до перестановки доданків.*

Пара кососиметричних матриць є **нерозкладною**, якщо вона не конгруентна прямій сумі пар кососиметричних матриць менших розмірів. Алгоритм з Розділу 6.2 використовується тільки в доведенні наступної леми.

Лема 6.3.2. *Над полем характеристики не* 2*, нехай* (A, B) *нерозкладна пара кососиметричних матриць, в якій* A *вироджена. Тоді* (A, B) *конгруентна парі, що задовільняє наступну умову:*

> *кожний рядок та стовпчик цих матриць містить не більше одного ненульового елемента що є* 1 *або* −1 *та інші елементи нульові.* (6.12)

Доведення. Застосовуємо кроки 1–3 напіврегуляційного алгоритму з розділу 6.2 та отримаємо, що (A, B) конгруентно прямій сумі (6.9) та пар виду $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{L}_1$, та $\mathcal{K}_2$. Оскільки (A, B) нерозкладна, є дві можливості:

- (A, B) конгруентна $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{L}_1$, або $\mathcal{K}_2$; вони задовільняють (6.12).
- (A, B) конгруентна (6.9). Оскільки A вироджена, розмір (A', B') менше розміру (A, B). Використовуючи індукцію n, допускаємо, що (A', B') визначено в (6.10) задовільняє (6.12). Тоді (A, B) задовільняє (6.12) також, що випливає з форми (6.9). □

Доведення теореми 6.3.1. Нехай (A, B) нерозкладна пара кососиметричних матриць над $\mathbb{F}$. Два випадки можливі.

Випадок 1: A вироджена. Перетвореннями конгруентності з (A, B), зробимо A та B, що задовільняють вимоги (6.12). Покажемо, що отримана (A, B) зведена до $\mathcal{K}_n$ або $\mathcal{L}_n$ наступними перетвореннями конгруентності:

- переставимо рядки i та j та потім переставимо стовпчики i та j в обох матрицях,
- помножимо рядок i та стовпчик i на -1 в обох матрицях.

Робимо лише ці перетворення з (A, B). Наприклад (як в (6.6)), якщо пишемо про перестановку двох стовпців в A, пам'ятаємо, що робимо такі ж перетворення зі стовпчиками в B та рядками в A та B.

Нехай A та B будуть $(2n-1)\times(2n-1)$ або $2n\times 2n$; розділимо їх на блоки

$$(A, B) = \left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]\right), \quad A_{22} \text{ та } B_{22} \text{ є } n \times n.$$

Оскільки A вироджена та задовільняє (6.12), вона має нульовий стовпець;переставимо їх з останнім стовпчиком та отримаємо нульовий останній стовпчик. Якщо останній стовпець B також нульовий, тоді $\mathcal{L}_1 = ([0], [0])$ прямий доданок в (A, B). Оскільки (A, B) нерозкладна, $(A, B) = \mathcal{L}_1$, що доводить теорему в цьому випадку.

Залишається розглянути випадок, коли останній стовпець B ненульовий. Тоді він містить $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Множимо рядок, що містить ε на ε, переставимо це з останнім рядком $[B_{11}\, B_{12}]$, та отримаємо

$$(A, B) = \left(\left[\begin{array}{cc|cc} & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline & & & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & . \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} & \vdots & & \vdots \\ \dots & . & \dots & 1 \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & . \end{array}\right]\right),$$

в якій крапки позначають нульові елементи. Якщо останній рядок пари $\left[A_{11}\,A_{12}\right]$ нульовий, тоді $\mathcal{K}_1 = \left(\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right]\right)$ прямий доданок пари (A, B), і також $(A, B) = \mathcal{K}_1$, що доводить теорему в цьому випадку.

Залишається розглянути випадок, коли останній рядок $\left[A_{11}\,A_{12}\right]$ містить $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Множимо стовпчик, який містить ε на ε, переставляємо його з передостаннім стовпчиком, та отримаємо

$$(A, B) = \left(\left[\begin{array}{cc|ccc} & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & . & \dots & 1 & 0 \\ \hline & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & . & . \\ \dots & 0 & \dots & . & . \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|ccc} & \vdots & & & \vdots \\ \dots & . & \dots & 0 & 1 \\ \hline & \vdots & & & \vdots \\ & 0 & & & . \\ \dots & -1 & \dots & . & . \end{array}\right] \right).$$

Якщо передостанній стовпчик матриці B нульовий, тоді $\mathcal{L}_2$ (див (6.11)) прямий доданок пари (A, B), а також $(A, B) = \mathcal{L}_2$.

Залишається розглянути випадок, коли попередній стовпчик матриці B містить $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Множимо рядок, що містить ε на ε, переставимо його з передостаннім рядком пари $\left[B_{11}\,B_{12}\right]$, та отримаємо

$$(A, B) = \left(\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & . & & 0 & 0 \\ \dots & . & . & \dots & 1 & 0 \\ \hline & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & -1 & \dots & . & . \\ \dots & 0 & 0 & \dots & . & . \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & . & . & \dots & 1 & 0 \\ \dots & . & . & \dots & 0 & 1 \\ \hline & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & 0 & \dots & . & . \\ \dots & 0 & -1 & \dots & . & . \end{array}\right] \right).$$

Якщо передостанний рядок $\left[A_{11}\,A_{12}\right]$ нульовий, тоді $\mathcal{K}_2$ прямий доданок пари (A, B), а також $(A, B) = \mathcal{K}_2$.

Залишається розглянути випадок коли передостанній рядок $\left[A_{11}\,A_{12}\right]$ містить $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Множимо стовпчик, що містить ε на ε, переставляємо його з передостанним стовпчиком та отримаємо

$$\left(\left[\begin{array}{ccc|cccc} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & . & . & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & . & . & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & 0 & \dots & . & . & . \\ \dots & 0 & -1 & \dots & . & . & . \\ \dots & 0 & 0 & \dots & . & . & . \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|cccc} & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \dots & . & . & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & . & . & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & & & . & . \\ \dots & -1 & 0 & \dots & . & . & . \\ \dots & 0 & -1 & \dots & . & . & . \end{array}\right]\right),$$

і так далі.

Повторюючи це зведення, отримаємо, що (A, B) конгруентна до $\mathcal{K}_n$ або $\mathcal{L}_n$.

Випадок 2: A невироджена. Оскільки $\mathbb{F}$ алгебраїчно замкнене, існує $\lambda \in \mathbb{F}$ таке, що $\det(A\lambda - B) = 0$. За випадком 1, є невироджена S така, що

$$S(B - \lambda A, A)S^T = \mathcal{K}_n = \left(\begin{bmatrix} 0 & J_n(0) \\ -J_n(0)^T & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Тоді

$$S(B, A)S^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & J_n(\lambda) \\ -J_n(\lambda)^T & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\right),$$

а також (A, B) конгруентно до $\mathcal{J}_n(\lambda)$.

Довели, що кожна пара кососиметричних матриць над $\mathbb{F}$ конгруентна прямій сумі пари виду $\mathcal{J}_n(\lambda)$, $\mathcal{K}_n$, та $\mathcal{L}_n$. Доведемо тепер єдиність такої прямої суми. Дві пари (A, B) та (A', B') матриць однакового розміру є *еквівалентними*, якщо існують невироджені матриці R та S такі, що $R(A, B)S := (RAS, RBS) = (A', B')$. Таким чином, конгруентні пари еквівалентні. За теоремою Кронекера для матричних пучків (див. [27, Розділ XII]), кожна матрична пара над полем $\mathbb{F}$ є еквівалентною прямій сумі, однозначно визначеною з точністю до перестановки доданків, пар типу

$$(I_n, J_n(\lambda)), \quad (J_n(0), I_n), \quad (L_n, R_n), \quad (L_n^T, R_n^T), \tag{6.13}$$

в якій $n \in \{1, 2, \dots\}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, та L_n та R_n визначені в (6.4).

Пари $\mathcal{J}_n(\lambda)$, $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{L}_n$ еквівалентні до

$$(I_n, J_n(\lambda)) \oplus (I_n, J_n(\lambda)),\ (J_n(0), I_n) \oplus (J_n(0), I_n),\ (L_n, R_n) \oplus (L_n^T, R_n^T). \tag{6.14}$$

Таким чином, дві різні прямі суми пар виду $\mathcal{J}_n(\lambda)$, $\mathcal{K}_n$, та $\mathcal{L}_n$ (визначені з точністю до перестановки доданків) мають різні канонічні форми відносно еквівалентності, а також ці суми не можуть бути конгруентними, що доводить єдиність в Теоремі 6.3.1. □

Зауваження 7. *Теорема 6.3.1 може також бути доведена використовуючи опис канонічних форм Кронекера для пар кососиметричних матриць відносно еквівалентності та наступне цікаве твердження з [50, Наслідок 35.2] (див також [16, § 61 та § 62]) для матричних пар над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики не 2:*

> *Нехай (A, B) та (A', B') дві матричні пари, в яких A та A', також B та B', є симетричними або кососиметричними. Тоді (A, B) та (A', B') конгруентні тоді та тільки тоді коли вони еквівалентні.* (6.15)

Це твердження було узагальнено для пар кососиметричних матриць над будь-яким полем характеристики 0 Уільямсоном [72]. Аналогічне твердження для довільної системи форм та лінійних відображень наведено в [60] та [64, Теорема 1 та § 2].

Нехай (A, B) пара кососиметричних матриць. За теоремою Кронекера для матричних пучків (див (6.13)*), (A, B) еквівалентна прямій сумі*

$$\bigoplus_i (I_{m_i}, J_{m_i}(\lambda_i)) \oplus \bigoplus_j (J_{n_j}(0), I_{n_j}) \oplus \bigoplus_k (L_{r_k}, R_{r_k}) \oplus \bigoplus_l (L_{s_l}^T, R_{s_l}^T) \tag{6.16}$$

що визначається однозначно з точністю до перестановок доданків.

Пара $(A, B) = (-A^T, -B^T)$ еквівалентна до (A^T, B^T), що еквівалентно *до*

$$\bigoplus_i (I_{m_i}, J_{m_i}(\lambda_i)) \oplus \bigoplus_j (J_{n_j}(0), I_{n_j}) \oplus \bigoplus_k (L_{r_k}^T, R_{r_k}^T) \oplus \bigoplus_l (L_{s_l}, R_{s_l})$$

Оскільки сума (6.16) *визначена однозначно парою* (A, B)*, з точністю до перестановок прямих доданків, доданки третього та четвертого типу в* (6.16) *виникає в парах*

$$(L_{r_k}, R_{r_k}) \oplus (-L_{r_k}^T, -R_{r_k}^T)$$

За [69, p. 335], доданки першого та другого типів також виникає в парах

$$(I_n, J_n(\lambda)) \oplus (I_n, J_n(\lambda)), \qquad (J_n(0), I_n) \oplus (J_n(0), I_n).$$

Оскільки пари $\mathcal{J}_n(\lambda), \mathcal{K}_n, \mathcal{L}_n$ *еквівалентні до* (6.14)*,* (A, B) *еквівалентна прямій сумі пар типу* $\mathcal{J}_n(\lambda), \mathcal{K}_n, \mathcal{L}_n$*, та ця сума однозначно визначена, з точністю до перестановки доданків. За* (6.15)*,* (A, B) *конгруентна прямій сумі.*

6.4 Висновки до розділу 6

Даний розділ дисертації присвячений зведенню пари кососиметричних матриць до її канонічної форми відносно конгруентності. У першому параграфі наведені основні означення та результати розділу.

У другому параграфі надається регуляційний алгоритм, що використовує елементарні перетворення матриць та для кожної пари кососиметричних матриць над полем характеристики не 2 будує її регуляційний розклад відносно конгруентності.

У третьому параграфі наведено інше доведення цієї канонічної форми пари кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем, що базується на регуляризуючому алгоритмі з другого параграфу.

Висновки

У дисертаційній роботі було розглянуто деякі класифікаційні задачі лінійної алгебри. Отримано такі нові результати:

- Побудовано канонічну форму пари взаємоанулюючих матриць у явному вигляді; дано конструктивне доведення зведення пар матриць до цієї форми.
- Описано матриці, які самоконгруентності тільки за допомогою матриці з одиничним визначником.
- Знайдено новий критерій перевірки унітарної подібності двох верхньотрикутних матриць, що є матрицями або в загальному положенні або матрицями, що не подібні прямій сумі квадратних матриць менших розмірів.
- Одержано нові критерії унітарної подібності нормальної матриці та довільної матриці. В якості інваріантів були використані спектральна норма, норма Фробеніуса, характеристичний многочлен та слід матриці.
- Для скінченної множини пар n-на-n комплексних матриць $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ побудовано алгоритм для визначення за скінченну кількість обчислювань, чи існує така унітарна матриця U така, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.
- Побудовано алгоритм, який для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

Одержані результати можуть бути застосовані для подальшого розвитку теорії матричних рівнянь та теорії класифікаційних задач лінійної алгебри.

Список використаних джерел

[1] Альпин Ю.А. Об унитарном подобии матричных семейств / Ю.А. Альпин, Х.Д. Икрамов // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 6. — С. 815–826.

[2] Альпин Ю.А. Критерий унитарной конгруэнтности матриц / Ю.А. Альпин, Х.Д. Икрамов // Докл. Акад. Наук. — 2011. — Т. 437, № 1. — С. 7–8.

[3] Artin E. Geometric Algebra / E. Artin // Interscience Publishers, Inc, New York, 1957. — 214 pp.

[4] Arveson W. Unitary invariants for compact operators / W. Arveson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76. — P. 88–91.

[5] Arveson W. Subalgebras of C^*-algebras / W. Arveson // Acta Math. — 1969. — Vol. 123. — P. 141–224.

[6] Balyan L. Unitary equivalence to a complex symmetric matrix: geometric criteria / L. Balayan, S.R. Garcia // Oper. Matrices. — 2010. — Vol. 4. — P. 53–76.

[7] Bass H. Algebraic K-theory / H. Bass // Benjamin, New York, 1968. — 761 pp.

[8] Belitskii G.R. Normal forms in matrix spaces / G.R. Belitskii // Integral Equations and Operator Theory. — 2000. — Vol. 38, № 3. — P. 251–283.

[9] Belitskii G.R. Complexity of matrix problems / G.R. Belitskii, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2003. — Vol. 361. — P. 203–222.

[10] Benedetti R. Versa1 families of matrices with respect to unitary conjugation / R. Benedetti, P. Cragnolini // Adv. Math. — 1984. — Vol. 54. — P. 314–335.

[11] Blyth T. Further Linear Algebra / T.S. Blyth, E.F. Robertson // Springer-Verlag, London, 2002. — 244 pp.

[12] Bondarenko V.M. Pairs of mutually annihilating operators / V.M. Bondarenko, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 86–105.

[13] Bovdi V.A. Reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence / V.A. Bovdi, T.G. Gerasimova, M.A. Salim, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 17–30.

[14] Coakley E.S. Matrices with orthogonal groups admitting only determinant one / E.S. Coakley, F.M. Dopico, C.R. Johnson // Linear Algebra Appl. — 2008. — Vol. 428. — P. 796–813.

[15] Dennis R.K. $K_2(A[X,Y]/XY)$, a problem of Swan, and related computations / R.K. Dennis, M.I. Krusemeyer //J. Pure Appl. Algebra. — 1979. — Vol. 15. — P. 125–148.

[16] Dickson L.E. Modern Algebraic Theories / L.E. Dickson // Benj. H. Sanborn & Co, Chicago, 1926. Republished as: Algebraic Theories, Dover Publications, Inc., New York, 1959. — 276 pp.

[17] Dmytryshyn A. Miniversal deformations of pairs of skew-symmetric matrices under congruence / A. Dmytryshyn // Linear Algebra Appl. — 2016. — Vol. 506. — P. 506–534.

[18] Dmytryshyn A. Orbit closure hierarchies of skew-symmetric matrix pencils / A. Dmytryshyn, B. Kågström // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2014. — Vol. 35. — P. 1429–1443.

[19] Đocović D. Ž. Characterization of bilinear spaces with unimodular isometry group / D. Ž Đocović, F. Szechtman // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133. — P. 2853–2863.

[20] Drozd Yu.A. Tame and wild matrix problems / Yu.A. Drozd // Lect. Notes Math. — 1980. — Vol. 832. — P. 242–258.

[21] Elsner L. Normal matrices: an update / L. Elsner, Kh.D. Ikramov // Linear Algebra Appl. — 1998. — Vol. 285. — P. 291–303.

[22] Farenick D. Arveson's criterion for unitary similarity / D. Farenick // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol.435. — P. 769–777.

[23] Farenick D. Criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position / D. Farenick, V. Futorny, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 1356–1369.

[24] Farenick D. A complete unitary similarity invariant for unicellular matrices / D. Farenick, T.G. Gerasimova, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 409–419.

[25] Farenick D. C^*-extreme points of some compact C^*-convex sets / D.R. Farenick, P.B. Morenz // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 118. — P. 765–775.

[26] Gabriel P. Representations of Finite-Dimensional Algebras / P. Gabriel, A.V. Roiter // Encyclopaedia of Math. Sci., Springer, 1992. — Vol 73: Algebra VIII. — 1992. — 182 pp.

[27] Gantmacher F.R. The Theory of Matrices / F.R. Gantmacher // Vol. 1 and 2, Chelsea, New York, 2000.

[28] Garcia S.R. Unitary equivalence to a complex symmetric matrix: a modulus criterion / S.R. Garcia, D.E. Poore, M.K. Wyse // Oper. Matrices. — 2011. — Vol. 5. — P. 273–287.

[29] Gelfand I.M. Indecomposable representations of the Lorentz groups / I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev // Russian Math. Surveys. — 1968. — Vol. 23. — P. 1–58.

[30] Gelfand I.M. Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space / I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev // Functional Anal. Appl. — 1969. — Vol. 3. — P. 325–326.

[31] Gerasimova T.G. Simultaneous unitary equivalences / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 3829–3835.

[32] Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 1620–1632.

[33] Gerasimova T.G. Unitary similarity to a normal matrix / T.G. Gerasimova // Linear Algebra Appl. — 2012. — Vol. 436. — P. 3777–3783.

[34] Grone R. Normal matrices / R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa, H. Wolkowicz // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 87. — P. 213–225.

[35] Harris J. Algebraic geometry. A first course / J. Harris // Graduate Texts in Mathematics, 133, Springer-Verlag, New York, 1992. — 330 pp.

[36] Hesselholt L. On the K-theory of the coordinate axes in the plane / L. Hesselholt // Nagoya Math. J. — 2007. — Vol. 185. — P. 93–109.

[37] Horn R.A. Matrix Analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson // Cambridge U. P., Cambridge, 1985. — 575 pp.

[38] Horn R.A. A characterization of unitary congruence / R.A. Horn, Y.-P. Hong // Linear Multilinear Algebra. — 1989. — Vol. 25 — P. 105–119.

[39] Horn R.A. A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms / R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2006. — Vol. 412. — P. 380–395.

[40] Horn R.A. Congruence of a square matrix and its transpose / R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 389. — P. 347–353.

[41] Horn R.A. Canonical forms for complex matrix congruence and *congruence / R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2006. — Vol. 416. — P. 1010–1032.

[42] Horn R.A. Canonical matrices of bilinear and sesquilinear forms / R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2008. — Vol. 428. — P. 193–223.

[43] Ikramov Kh.D. On the unitary similarity of normal matrices from the standpoint of Specht's criterion / Kh.D. Ikramov // Comput. Math. Math. Phys. — 2002. — Vol. 42. — P. 1065–1066.

[44] Kleiman S. r-Special subschemes and an argument of Severi's / S. Kleiman // Advances in Math. — 1976. — Vol. 22. — P. 1–31.

[45] Kozlov I.K. An elementary proof of the Jordan–Kronecker theorem / I.K. Kozlov // Math. Notes. — 2013. — Vol. 94. — P. 885–896.

[46] Laubenbacher R.C. A normal form algorithm for modules over $k[x,y]/\langle xy\rangle$ / R.C. Laubenbacher, B. Sturmfels // J. Algebra. — 1996. — Vol. 184, № 3. — P. 1001–1024.

[47] Levy L.S. Mixed modules over ZG, G cyclic of prime order, and over related Dedekind pullbacks / L.S. Levy // J. Algebra. — 1981. — Vol. 71. — P. 62–114.

[48] Levy L.S. Modules over Dedekind-like rings / L.S. Levy // J. Algebra. — 1985. — Vol. 93. — P. 1–116.

[49] Littlewood D.E. On unitary equivalence / D.E. Littlewood // J. London Math. Soc. —1953. — Vol. 28. — P. 314–322.

[50] Mac Duffee C.C. The Theory of Matrices / C.C. Mac Duffee // Verlag Von Julius Springer, Berlin, 1933. — 128 pp.

[51] Mitchell B.E. Unitary transformations / B.E. Mitchell // Canad. J. — 1954. — Vol. 6. — P. 69–72.

[52] Murnaghan F.D. On the unitary invariants of a square matrix / F.D. Murnaghan // Anais Acad. Brasil. Ci. — 1954. — Vol. 26 — P. 1–7.

[53] Nazarova L.A. Finitely generated modules over a dyad of two local Dedekind rings, and finite groups with an Abelian normal divisor of index p / L.A. Nazarova, A.V. Roiter // Math. USSR, Izv. — 1969. Vol. 3, № 1. — P. 65–86.

[54] Nazarova L.A. Application of modules over a dyad for the classification of finite p-groups possessing an abelian subgroup of index p and of pairs of mutually annihilating operators / L.A. Nazarova, A.V. Roiter, V.V. Sergeichuk, V.M. Bondarenko // J. Soviet Math. — 1975. — Vol. 3, № 5. — P. 636–654.

[55] Oblak P. Jordan forms for mutually annihilating nilpotent pairs / P. Oblak // Linear Algebra Appl. — 2008. — Vol. 428. — P. 1476–1491.

[56] Pappacena C.J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra / C.J. Pappacena // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535–545.

[57] Pearcy C. A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of Type I / C. Pearcy // Pacific J. Math. — 1962. — Vol. 12. — P. 1405–1416.

[58] Prasolov V.V. Problems and Theorems in Linear Algebra / V.V. Prasolov // Translations of Mathematical Monographs, 134, Providence, AMS, 1994. — 225 pp.

[59] Riehm C. The equivalence of bilinear forms / C. Riehm // J. Algebra. — 1974. — Vol. 31. — P. 44–66.

[60] Roiter A.V. Bocses with involution, in: Representations and Quadratic Forms / A.V. Roiter // Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev. — 1979. — P. 124–128.

[61] Schröer J. Varieties of pairs of nilpotent matrices annihilating each other / J. Schröer // Comment. Math. Helv. — 2004. — Vol. 79. — P. 396–426.

[62] Sergeichuk V.V. Canonical matrices for linear matrix problems / V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 317. — P. 53–102.

[63] Sergeichuk V.V. Classification of linear operators in a finite-dimensional unitary space / V.V. Sergeichuk // Functional Anal. Appl. — 1984. — Vol. 18, № 3. — P. 224–230.

[64] Sergeichuk V.V. Classification problems for systems of forms and linear mappings / V.V. Sergeichuk // Math. USSR, Izv. — 1988. — Vol. 31, № 3. — P. 481–501.

[65] Sergeichuk V.V. Computation of canonical matrices for chains and cycles of linear mappings / V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2003. — Vol. 376 — P. 235–263.

[66] Sergeichuk V.V. Unitary and Euclidean representations of a quiver / V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 1998. – Vol. 278. — P. 37–62.

[67] Scharlau R. Paare alternierender Formen / R. Scharlau // Math. Z. — 1976. — Vol. 147. — P. 13–19.

[68] Specht W. Zur Theorie der Matrizen. II / W. Specht // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. — 1940. — Vol. 50. — P. 19–23.

[69] Thompson R.C. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices / R.C. Thompson // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 323–371.

[70] Van Dooren P. The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil / P. Van Dooren // Linear Algebra Appl. — 1979. — Vol. 27. — P. 103–140.

[71] Varga A. Computation of Kronecker-like forms of periodic matrix pairs / A. Varga // in Proceedings of the 16th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium. — 2004. — P. 5–9.

[72] Williamson J. The conjunctive equivalence of pencils of hermitian and antihermitian matrices / J. Williamson // Amer. J. Math. — 1937. — Vol. 59. — P. 399–413.

Додаток

Список опублікованих праць

Статті у фахових іноземних виданнях:

1. Bovdi V.A. Reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence / V.A. Bovdi, T.G. Gerasimova, M.A. Salim, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 17–30.

2. Gerasimova T.G. Simultaneous unitary equivalences / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 3829–3835.

3. Farenick D. A complete unitary similarity invariant for unicellular matrices / D. Farenick, T.G. Gerasimova, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 409–419.

4. Gerasimova T.G. Unitary similarity to a normal matrix / T.G. Gerasimova // Linear Algebra Appl. — 2012. — Vol. 436. — P. 3777–3783.

5. Bondarenko V.M. Pairs of mutually annihilating operators / V.M. Bondarenko, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 86–105.

6. Farenick D. Criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position / D. Farenick, V. Futorny, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 1356–1369.

7. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 1620–1632.

Тези наукових доповідей:

1. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova // 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Kharkov, Ukraine, 18 — 23 August 2009. — Kharkov: V. N. Karazin Kharkov National University, 2009. — P. 54.

2. Gerasimova T.G. Linear operators satisfying a polynomial relation on a space with positive semidefinite form / T.G. Gerasimova // Ukrainian Mathematical Congress – 2009, Kyiv, Ukraine, 27 — 29 August 2009. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2009.

3. Gerasimova T.G. Unitary similarity of nonderogatory matrices / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department, Kyiv, Ukraine, 22 — 23 December 2009. — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2009. — P. 30-31.

4. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular compact operators / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference "Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits", Kyiv, Ukraine, 5 — 8 August 2010. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,2010. — P. 32.

5. Gerasimova T.G. A characterization of upper triangular Toeplitz matrices / T.G. Gerasimova, N. Shvai // International Young Scientists Conference "70 years of KNU's mechanics and mathematics faculty, Kyiv, Ukraine, 13 — 15 December 2010. — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2010. — P. 27.

6. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular operators / T.G. Gerasimova // IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics Varna, Bulgaria, 20 — 26 June 2011. — Varna: Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, 2011.

7. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova, N. Shvai // 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Lugansk, Ukraine, 5 — 12 July 2011. — Lugansk: Lugansk Taras Shevchenko National University, 2011. — P. 162.

8. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova // 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), Seville, Spain, 3 — 9 July 2011. — P. 29.

Апробація результатів дисертації

1. VIII International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics June 15–21, 2009, Varna, Bulgaria.
2. Summer School and Advanced Workshop on Trends and Developments in Linear Algebra, June 22 – July 10, 2009, Trieste, Italy.
3. VII International Algebraic Conference in Ukraine, August 18–23, 2009, Kharkov, Ukraine.
4. Ukrainian Mathematical Congress 2009, August 27–29, 2009, Kiev, Ukraine.
5. International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department at the Taras Shevchenko National University of Kiev, December 22–23, 2009, Kiev, Ukraine.
6. International Conference “Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits”, August 05–08, 2010, Kiev, Ukraine.
7. International Young Scientists Conference "70 years of KNU’s mechanics and mathematics faculty December 13–15, 2010, Kiev, Ukraine.
8. 4th European Women in Mathematics Summer School, June 6–10, 2011, Leiden, the Netherlands.
9. 3rd International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, MMMA-2011, June 22–25, 2011, Moscow, Russia.
10. IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics June 20–26, 2011, Varna, Bulgaria.
11. 8th International Algebraic Conference in Ukraine, July 5–12, 2011, Lugansk, Ukraine.

12. 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), July 3–9, 2011, Seville, Spain.

13. The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 3–17, 2011, Moscow, Russia.

14. School and Workshop on Computational Algebra and Number Theory, June 18 – June 29, 2012, Trieste, Italy.

15. 6th European Congress of Mathematicians, July 2–7, 2012, Krakow, Poland.

16. 7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, September 9-19 2012, Belgrade, Serbia.

17. The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 1–30, 2012, Moscow, Russia and Rome, Italy.

18. X International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics June 17–23, 2013, Varna, Bulgaria.

19. Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications, July 1 – July 12, 2013, Trieste, Italy.

20. International Congress of Women Mathematicians, August 12, 14, 2014, Seoul, South Korea

21. International Congress of Mathematicians, August 13–21, 2014, Seoul, South Korea