НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Герасимова Тетяна Григорівна

УДК 512.64

Лінійно-алгебраїчні методи в теорії операторів

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
СЕРГЕЙЧУК Володимир Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри та топології

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, доцент
ПРОСКУРІН Данило Павлович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри дослідження операцій

кандидат фізико-математичних наук, доцент
КРЮКОВА Галина Віталіївна,
Національний університет
"Києво-Могилянська академія",
доцент кафедри математики

Захист відбудеться «14» квітня 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 в Інституті математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «10» березня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Сорока Ю. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дисертаційній роботі розглядаються певні класифікаційні задачі лінійної алгебри, а саме: класифікація взаємоанулюючих матриць над будь-яким полем, класифікація матриць які є самоконгруентними за допомогою матриць з одиничним визначником, критерії унітарної подібності для матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

В першому розділі розглядається задача класифікації пар взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$ на скінченновимірному векторному просторі V. Пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ були класифіковані І. Гельфандом та В. Пономарьовим [1] над алгебраїчно замкненим полем та Л. Назаровою, А. Ройтером, В. Сергейчуком та В. Бондаренко [2] над довільним полем $\mathbb{F}$ як модулі над $\mathbb{F}[x, y]/(xy)$. В цьому розділі дисертаційної роботи дано конструктивне доведення теореми про канонічну форму пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ взаємоанулюючих операторів над довільним полем. Наводиться алгоритм для зведення матриць пари до канонічних форм відносно перетворень подібності.

Д. Доковіч та Ф. Зехтман [3] розглянули векторний простір V, наділений білінійною формою. Вони довели, що ізометрії V над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2 мають визначник 1 тоді та тільки тоді коли V не має ортогональних доданків непарної розмірності (випадок характеристики 2 був також розглянутий). Їх доведення базується на класифікації білінійних форм Ріма. Е. Коклі, Ф. Допіко та Р. Джонсон [4] надали інше доведення цього критерію над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$, використовуючи канонічні пари Томпсона [5] си-

[1] I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev, Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space, *Functional Anal. Appl.* 3 (1969) 325–326.

[2] L.A. Nazarova, A.V. Roiter, V.V. Sergeichuk, V.M. Bondarenko, Application of modules over a dyad for the classification of finite p-groups possessing an abelian subgroup of index p and of pairs of mutually annihilating operators, *J. Soviet Math.* 3 (no. 5) (1975) 636–654.

[3] D. Ž. Đocović, F. Szechtman, Characterization of bilinear spaces with unimodular isometry group, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005) 2853–2863.

[4] E.S. Coakley, F.M. Dopico, C.R. Johnson, Matrices with orthogonal groups admitting only determinant one, *Linear Algebra Appl.* 428 (2008) 796–813.

[5] R.C. Thompson, Pencils of complex and real symmetric and skew matrices, *Linear Algebra Appl.* 147 (1991) 323–371.

метричних та кососиметричних матриць відносно конгруентності. Нехай M — матриця білінійної форми на V. В другому розділі дисертаційної роботи наведено інше доведення цього критерію над $\mathbb{F}$ та отримано необхідні та достатні умови, використовуючи канонічні форми M для конгруентності, пари (M^T, M) для еквівалентності, та $M^{-T}M$ (якщо M невироджена) для подібності.

Класичною задачею теорії матриць є задача знаходження умов унітарної подібності. Найвідомішими результатами у цьому напрямку є теорема Шпехта, яка надає умову унітарної подібності матриць у термінах рівності слідів; канонічна форма Літтлвуда відносно унітарної подібності; та критерій Арвесона, шо надає умову унітарної подібності у термінах рівності норм.

Необхідність різних підходів до питання унітарної подібності обумовлюється широким застосуванням цих результатів. Зокрема, для окремих класів матриць критерії унітарної подібності можуть бути суттєво послаблені або адаптовані відповідно до практичних задач. В третьому та четвертому розділі дисертаційної роботи розроблено критерії унітарної подібності для верхньотрикутних матриць у загальному положенні та нормальних матриць.

Нехай $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ — задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. В п'ятому розділі наведений алгоритм, що визначає за скінченну кількість обчислень, чи існує одна унітарна матриця U така, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

В шостому розділі дисертаційної роботи наведений алгоритм, що для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад, використовуючи елементарні перетворення матриць. Регуляційні алгоритми були побудовані для матричних пучків В. Дуреном [6], для циклів лінійних відображень В. Сергейчуком [7] та А. Варгою [8], та для квадратних матриць

[6] P. Van Dooren, The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, Linear Algebra Appl. 27 (1979) 103–140.

[7] V.V. Sergeichuk, Computation of canonical matrices for chains and cycles of linear mappings, Linear Algebra Appl. 376 (2004) 235–263.

[8] A. Varga, Computation of Kronecker-like forms of periodic matrix pairs, Proceedings of the 16th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium, 2004, pp. 5–9.

відносно конгруентності та *конгруентності Р. Хорном та В. Сергейчуком [9]. Регуляційний розклад — це перший крок у бік зведення пари (A, B) до її канонічної форми відносно конгруентності.

Розглянуті задачі належать до напрямку, в якому працюють багато українських та іноземних науковців. Все вищезазначене свідчить про актуальність теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках теми 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теорії груп, напівгруп, кілець, зображень, до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер держреєстрації 0111U005264).

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є побудова канонічного виду пар взаємоанулюючих матриць над будь-яким полем, опис матриць, які є самоконгруентими за допомогою матриць з визначником 1, встановлення критеріїв унітарної подібності для верхньотрикутних матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та побудова алгоритму зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

Об'єктом дослідження є лінійні відображення, ланцюжки лінійних відображень та скінченні множини пар n-на-n матриць.

Предметом дослідження є унітарна подібність, подібність, та конгруентність.

Методами дослідження є класифікаційні методи лінійної алгебри, розроблені математиками київської школи теорії зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

[9] R.A. Horn, V.V. Sergeichuk, A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms, Linear Algebra Appl. 412 (2006) 380–395.

1. Побудовано канонічну форму пари взаємоанулюючих матриць у явному вигляді; дано конструктивне доведення зведення пар матриць до цієї форми.

2. Описано матриці, які є самоконгруентними тільки за допомогою матриці з одиничним визначником.

3. Знайдено новий критерій перевірки унітарної подібності двох верхньотрикутних матриць, що є матрицями або в загальному положенні або матрицями, що неподібні прямій сумі квадратних матриць менших розмірів. Новий критерій використовує норми Фробеніуса від матричних поліномів в якості інваріантів відносно унітарної подібності.

4. Одержано нові критерії унітарної подібності нормальної матриці та довільної матриці. В якості інваріантів були використані: спектральна норма, норма Фробеніуса, характеристичний многочлен та слід матриці.

5. Для скінченної множини пар n-на-n комплексних матриць $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ побудовано алгоритм для визначення за скінченну кількість обчислювань, чи існує така унітарна матриця U, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

6. Побудовано алгоритм, який для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними в дослідженнях з теорії матриць і прикладних дослідженнях.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать моєму науковому керівнику В. В. Сергейчуку.

У роботах, які опубліковано разом зі співавторами, внески співавторів є рівноцінними. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

- VIII International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics", June 15–21, 2009, Varna, Bulgaria.
- Summer School and Advanced Workshop on Trends and Developments in Linear Algebra, June 22 – July 10, 2009, Trieste, Italy.
- VII International Algebraic Conference in Ukraine, August 18–23, 2009, Kharkov, Ukraine.
- Ukrainian Mathematical Congress 2009, August 27–29, 2009, Kiev, Ukraine.
- International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department at the Taras Shevchenko National University of Kiev, December 22–23, 2009, Kiev, Ukraine.
- International Conference "Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits", August 05–08, 2010, Kiev, Ukraine.
- International Young Scientists Conference "70 years of KNU's mechanics and mathematics faculty", December 13–15, 2010, Kiev, Ukraine.
- 4th European Women in Mathematics Summer School, June 6–10, 2011, Leiden, the Netherlands.
- 3rd International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, MMMA-2011, June 22–25, 2011, Moscow, Russia.
- IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics", June 20–26, 2011, Varna, Bulgaria.

- 8th International Algebraic Conference in Ukraine, July 5–12, 2011, Lugansk, Ukraine.
- 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), July 3–9, 2011, Seville, Spain.
- The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 3–17, 2011, Moscow, Russia.
- School and Workshop on Computational Algebra and Number Theory, June 18 – June 29, 2012, Trieste, Italy.
- 6th European Congress of Mathematicians, July 2–7, 2012, Krakow, Poland.
- 7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, September 9-19 2012, Belgrade, Serbia.
- The Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra, September 1–30, 2012, Moscow, Russia and Rome, Italy.
- X International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics", June 17–23, 2013, Varna, Bulgaria.
- Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications, July 1 – July 12, 2013, Trieste, Italy.
- International Congress of Women Mathematicians, August 12, 14, 2014, Seoul, South Korea
- International Congress of Mathematicians, August 13–21, 2014, Seoul, South Korea

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-16], що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 5 з вказаних робіт надруковано без співавторів, 9 у закордноннних виданнях. Згідно з міжнародною науковометричною базою даних Scopus є 24 посилання на 7 з наведених робіт автора дисертації. h-index цих робіт у вказаній базі даних становить 3.

Відповідно до класифікації SCImago Journal&Country Rank наукові публікації [1-7] надруковано у виданнях, які відносятья до квартиля Q1.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації (двома мовами), вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 72 найменування. Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку, з них 8 сторінок займає список використаних джерел.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику провідному співробітнику Інституту математики НАН України доктору фіз.-мат. наук, професору Сергейчуку Володимиру Васильовичу за допомогу в роботі над дисертацією та нескінченну віру в неї.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, описана методика дослідження; зазначені можливі практичні застосування одержаних результатів; сформульовано наукову новизну та особистий внесок здобувача; надано перелік публікацій та наукових конференцій, на яких проводилась апробація отриманих результатів.

Основна частина роботи складається з шести розділів.

Перший розділ дисертації присвячений задачі класифікації пар взаємоанулюючих операторів. Він складається з п'яти параграфів та додатку.

У §1.1 дано означення пар операторів шляхового та циклічного типу, а також сформульовано основну теорему розділу.

Означення 1.1.1. *Пара взаємоанулюючих операторів* $\mathcal{A} : V \to V$ *та* $\mathcal{B} : V \Rightarrow V$ *є* **шляхового типу***, якщо вона визначена наступним чином. Нехай*

$$1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} 3 \frac{\quad}{} \cdots \frac{\quad}{} (t-1) \frac{\quad}{} t \qquad (t \geqslant 1) \tag{1}$$

— довільний шлях в якому кожне ребро є одинарною стрілкою $\longrightarrow$ або подвійною $\Longleftarrow$ такого напряму. Нехай

$$V := \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_t$$

та визначимо дію $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ на базисних векторах $e_1, \ldots, e_t$, як в (1), в якому кожна вершина i замінена на e_i та невизначена дія оператора є нульовою. Матрична пара

$$(A, B)$$

що відповідає $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ у базисі $e_1, \ldots, e_t$ називається **матричною парою шляхового типу**.

Означення 1.1.2. *Пара взаємоанулюючих операторів $\mathcal{A}: V \to V$ та $\mathcal{B}: V \Rightarrow V$ називається парою* **циклічного типу**, *якщо вона визначена наступним чином:*

(i) нехай

$$\underbrace{1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } t} \tag{2}$$

є циклічним графом в якому кожне пряме ребро є або одинарною $\longrightarrow$ або подвійною $\Longleftarrow$ стрілкою та зігнуте ребро є одинарною $\longleftarrow$ або подвійною $\Longrightarrow$ стрілкою саме з такою орієнтацією.

(ii) нехай цей граф є аперіодичним, *це означає, що циклічна перенумерація його вершин*

$$\underbrace{1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } t} \quad \to \quad \underbrace{i \text{ --- } (i+1) \text{ --- } \cdots \text{ --- } (i-1)} \tag{3}$$

не є ізоморфізмом для кожного $i = 2, \ldots, t$. Іншими словами, для кожного нетривіального обертання цього циклічного графу існує одинична або подвійна стрілка, що відображається у подвійну або, відповідно, одинарну стрілку.

(iii) на підставі (ii), якщо (2) не має подвійної стрілки, тоді цей граф є петлею $\circlearrowleft$*; поставимо у відповідність їй невироджений блок Фробеніуса* Φ *(або невироджений Жорданів блок, якщо* $\mathbb{F}$ *алгебраїчно замкнене поле). Якщо граф має подвійну стрілку, тоді виберемо будь-яку подвійну стрілку та поставимо їй у відповідність* Φ*.*

Нехай розмірність Φ *є* $k \times k$*. Визначимо дію* $\mathcal{A}$ *та* $\mathcal{B}$ *на* kt*-вимірному векторному просторі*

$$V := V_1 \oplus \cdots \oplus V_t, \qquad V_i := \mathbb{F}e_{i1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{ik},$$

за допомогою (2), в якому кожна вершина i *замінюється на* V_i *та кожній стрілці відповідає лінійне відображення відповідних векторних просторів. Це лінійне відображення задається* Φ*, якщо стрілка була асоційована з* Φ*; в протилежному випадку, відображення задається одиничною матрицею* I_k*.*

Матрична пара (A, B)*, яка задає* $\mathcal{A}$ *та* $\mathcal{B}$ *у базисі*

$$e_{11}, \ldots, e_{1k}; \ldots; e_{t1}, \ldots, e_{tk}$$

буде називатися **матричною парою циклічного типу***. Таким чином,*

- *якщо* $t = 1$ *та петля* $1 \longrightarrow 1$ *є одинарною стрілкою (яка асоційована з* Φ*), тоді* $(A, B) = (\Phi, 0_k)$*;*

- *якщо* $t = 1$ *та петля* $1 \longrightarrow 1$ *є подвійною стрілкою (яка асоційована з* Φ*), тоді* $(A, B) = (0_k, \Phi)$*;*

- *якщо* $t \geqslant 2$*, тоді* $A = [A_{ij}]$ *та* $B = [B_{ij}]$ *є блочними матрицями (що містять* t^2 *блоків та кожний блок розміру* $k \times k$*), в яких для* $i = 1, \ldots, t$*:*

$$A_{i+1,i} = I_k, \quad \text{якщо } i \longrightarrow (i+1), \qquad B_{i,i+1} = \begin{cases} I_k, & \text{якщо } i \Longleftarrow (i+1) \\ \Phi, & \text{якщо } i \overset{\Phi}{\Longleftarrow} (i+1) \end{cases} \tag{4}$$

(якщо $i = t$ *тоді усі* $i + 1$ *у (4) замінюються на 1); інші блоки* A *та* B

є нульовими. Зазначимо, що

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 0_k & \dots & \dots & 0_k & * \\ * & 0_k & & & 0_k \\ 0_k & * & 0_k & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_k & \dots & 0_k & * & 0_k \end{bmatrix} \qquad (t^2 \text{ блоків})$$

в якому 0_k є $(k \times k)$ нульовою матрицею, одна з зірок є Φ, та інші елементи є I_k.

Теорема 1.1.3. (a) *Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ — два лінійні оператори на векторному просторі над будь-яким полем $\mathbb{F}$, таких що*

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0.$$

Тоді $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ є ізоморфною прямій сумі пар шляхового та циклічного типів, ця сума однозначно визначається по $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ з точністю до

(i) *перестановки прямих доданків та*

(ii) *заміни будь-якого заданого доданку циклічного графу* (2) *парою заданою будь-яким циклічним графом отриманим з* (2) *шляхом*

- *циклічної перенумерації його вершин* (3) *та/або*
- *якщо існує хоча б дві подвійні стрілки, тоді перенесенням Φ (асоційованого з однією подвійною стрілкою) до іншої подвійної стрілки.*

(b) *Кожна пара (A, B) взаємоанулюючих матриць*

$$AB = BA = 0$$

подібна до прямої суми матричних пар шляхового та циклічного типу; ця сума визначається однозначно по (A, B), з точністю до перетворень (i) *та* (ii).

В інших підрозділах побудований алгоритм, що перетворює пару (A, B) взаємоанулюючих матриць до її канонічної форми визначеної в теоремі 1.1 (b).

В §1.2 зводиться загальний випадок до випадку нільпотентної A, зводимо A до її канонічної форми Жордана, обмежуючи себе до таких перетворень подібності, що зберігають A, та показується, що вони індукують на деяку підматрицю D матриці B (що містить усі ненульові елементи матриці B).

В §1.3 трансформуємо D у таку блочну форму, що кожний горизонтальний та кожний вертикальний рядок містить не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим.

В §1.4, розширюючи поділ D на блоки, знаходимо блочну форму A та B таку, що кожна горизонтальна та кожна вертикальна смуга містить не більше ніж один ненульовий блок, та цей блок є невиродженим. З цього випливає розклад відповідної операторної пари $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ у пряму суму пар шляхового та циклового типів, що доводить Теорему 1.1.

У додатку надаються альтернативні доведення двох ключових тверджень з параграфів §1.3 та §1.4, використовуючі елементарні перетворення матриці. У §1.5 наведено висновки до першого розділу.

У другому розділі дисертації описано матриці, які є самоконгруентні тільки за допомогою матриці з одиничним визначником. Він складається з чотирьох параграфів.

У §2.1 надається опис усіх $n \times n$ матриць M над довільним полем $\mathbb{F}$, що з того, що

$$S \text{ невироджена та } S^T M S = M \quad \text{випливає} \quad \det S = 1. \tag{5}$$

Ми позначимо через $\Xi_n(\mathbb{F})$ набір усіх $M \in M_n(\mathbb{F})$ що задовільняють (5). Наводиться наступна основна теорема розділу.

Теорема 2.1.1. *Нехай M — квадратна матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні*

(i) *M задовільняє* (5) (*тобто кожна ізометрія на білінійному просторі над $\mathbb{F}$ з скалярним добутком заданим матрицею M має визначник* 1),

(ii) *M не конгруентна до $A \oplus B$, де A — квадратна матриця непарного розміру.*

У §2.2 доведено, що з теореми 2.1 випливають дві такі теореми.

Теорема 2.1.3. *Нехай M є $n \times n$ матриця над полем $\mathbb{F}$ характеристики, відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні:*

(i) *$M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$;*

(ii) *M має прямий доданок відносно конгруентності, що має непарний розмір;*

(iii) *(M^T, M) має прямий доданок (A, B) відносно еквівалентності, в якій A та B є $r \times r$ матрицями та r є непарним.*

(iv) *(у випадку невиродженої M) $M^{-T}M$ має прямий дооданок відносно подібності, що має непарний розмір.*

Для кожного натурального числа r, визначимо $(r-1)$-на-r матриці

$$F_r := \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

та r-на-r матриці

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_r := \begin{bmatrix} 0 & & & & & \iddots \\ & & & & 1 & \iddots \\ & & & -1 & -1 & \\ & & 1 & 1 & & \\ & -1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що

$$\Gamma_r^{-T}\Gamma_r \quad \text{подібна до} \quad J_r((-1)^{r+1})$$

оскільки

$$\Gamma_r^{-T}\Gamma_r = (-1)^{r+1}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \Gamma_r = (-1)^{r+1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & & * \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.1.4. *Нехай M є $n \times n$ матрицею над полем $\mathbb{F}$ характеристики відмінної від 2. Наступні умови еквівалентні:*

(i) $M \notin \Xi_n(\mathbb{F})$;

(ii) *M має прямий доданок відносно конгруентності, що є або*

- *невиродженою матрицею Q такою, що $Q^{-T}Q$ подібна до $J_r(1)$ з непарним r (якщо $\mathbb{F}$ є алгебраїчно замкненим, тоді можемо взяти Q, що буде Γ_r оскільки будь-яка така Q конгруентна до Γ_r), або*
- *$J_s(0)$ з непарним s.*

(iii) *(M^T, M) має прямий доданок відносно еквівалентності, що є або $(I_r, J_r(1))$ з непарним r, або (F_t, G_t) з будь-яким t.*

(iv) *(у випадку невиродженої M) $M^{-T}M$ має прямий доданок для подібності, що є $J_r(1)$ з непарним r.*

У §2.3 доведена теорема 2.1, використовуючи канонічні матриці відносно конгруентності. У §2.4 наведено висновки до розділу 2.

Третій розділ присвячено вивченню критерію унітарної подібності верхньотрикутних матриць у загальному положенні. Він складається з семи параграфів.

У §3.1 наведені основні означення та відомі результати з цієї теми. У §3.2 наведені основні результати розділу, а саме отримано новий критерій унітарної подібності для верхньотрикутної матриці Тьопліца.

Теорема 3.1.1. *Нехай A — верхньотрикутна матриця Тьопліца з ненульовою супердіагоналлю, та нехай B — матриця такого ж розміру. Тоді*

A та B унітарно подібні тоді та тільки тоді коли

$$\|h(A)\| = \|h(B)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x].$$

Отримано критерій унітарної подібності для нерозкладних верхньотрикутних матриць.

Теорема 3.1.2. *Нехай A та B — $n \times n$ верхньотрикутні матриці, нерозкладні відносно подібності. Тоді A та B унітарно подібні тоді і тільки тоді, коли*

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для усіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \ldots, n,$$

де A_k та B_k лідуючі основні $k \times k$ підматриці A та B.

Числа знаходяться в лексикографічному порядку, якщо:

$$a + bi \preccurlyeq c + di \qquad \text{або якщо } a < c, \text{ або } a = c \text{ та } b \leqslant d.$$

Отримано критерій унітарної подібності для верхньотрикутних матриць у загальному положенні.

Теорема 3.1.5. *Дві $n \times n$ верхньотрикутні матриці A та B у загальному положенні з лексикографічно впорядкованими власними числами на головній діагоналі є унітарно подібними тоді та тільки тоді, коли*

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{для всіх } h \in \mathbb{C}[x] \text{ та } k = 1, \ldots, n,$$

де A_k та B_k лідуючі основні $k \times k$ підматриці A та B.

У §3.3 наведено доведення Теореми 3.1. У §3.4 наведено доведення Теореми 3.2. У §3.5 наведено контрприклади. У §3.6 наведено доведення Теореми 3.3. §3.7 містить висновки до розділу 3.

Четвертий розділ присвячено критерію унітарної подібності нормальній матриці. Він складається з п'яти параграфів.

У §4.1 наведені основні означення та відомі результати з критеріїв унітарної подібності, а також сформульована основна теорема розділу.

Теорема 4.0.1. *Нехай A — довільна $n \times n$ нормальна комплексна матриця та B — довільна $n \times n$ комплексна матриця. Наступні твердження еквівалентні:*

(i) *A та B унітарно подібні;*

(ii) *B — нормальна матриця та характеристичні многочлени A та B рівні;*

(iii) *$\|A\| = \|B\|$ та характеристичні многочлени A та B рівні;*

(iv) *$\|A\| = \|B\|$ та $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} B^k$ для $k = 1, \dots, n$;*

(v) *$\|A^k + cI_n\| = \|B^k + cI_n\|$ для $c \in \{0, 1, i\}$ та $k = 1, \dots, n$;*

(vi) *$\|f(A)\| = \|f(B)\|$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n;*

(vii) *$\|f(A)\|_{\mathrm{sp}} = \|f(B)\|_{\mathrm{sp}}$ для усіх $f \in \mathbb{C}[x]$ степеня не більше ніж n, та характеристичні многочлени матриць A та B рівні.*

У §4.2 – §4.4 наведено доведення основної теореми. У §4.5 наведено висновки до розділу 4.

У **п'ятому розділі** сформульована така задача.

Нехай $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ — задана скінченна множина пар n-на-n комплексних матриць. Побудувати алгоритм для визначення за скінченну кількість обчислювань, чи існує така унітарна матриця U така, що матриці кожної пари з $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, матриці кожної пари з $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та матриці кожної пари з $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

У §5.2 наведені критерії унітарної подібності пар матриць за теоремою Шпехта, та з обмеженням Папачени. У §5.3 сформульована та доведена базова лема, необхідна для розв'язання основної задачі розділу. У §5.4 наведений скінченний алгоритм для визначення чи будуть матриці одночасно унітарно подібні. У §5.5 наведений скінченний алгоритм для визначення чи будуть матриці одночасно унітарно конгруентні. У §5.6 наведений скінченний алгоритм для визначення чи будуть матриці одночасно унітарно еквівалентні. §5.7 містить висновки до розділу 5.

Шостий розділ дисертації присвячений зведенню пари кососиметричних матриць до її канонічної форми відносно конгруентності. Він складається з чотирьох параграфів. У §6.1 наведені основні означення та результати розділу. У §6.2 надається регуляційний алгоритм, який використовує елементарні перетворення матриць та для кожної пари кососиметричних матриць над полем характеристики не 2 та будує її регуляційний розклад відносно конгруентності. У §6.3, наведено інше доведення цієї канонічної форми пари кососиметричних матриць над алгебраїчно замкненим полем, що базується на регуляризуючому алгоритмі з §6.2.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі було розглянуто деякі класифікаційні задачі лінійної алгебри, а саме: класифікація взаємоанулючих матриць над будь-яким полем, класифікація матриць які є самоконгруентими за допомогою матриць з одиничним визначником, критерії унітарної подібності для матриць в загальному положенні та нормальних матриць, та зведення пар кососиметричних матриць до канонічної форми відносно конгруентності.

У дисертації отримано такі нові результати:

- Описані канонічні форми взаємоанулюючих матриць у явній формі, а також наведене конструктивне доведення зведення до цих форм.
- Одержане нове доведення критерію самоконгруентності за допомогою матриці з одиничним визначником, використовуючи канонічні матриці відносно конгруентності.
- Описаний новий критерій перевірки унітарної подібності двох верхньотрикутних матриць, що є матрицями або в загальному положенні або матрицями, що не подібні прямій сумі квадратних матриць менших розмірів. Новий критерій використовує норми Фробеніуса від матричних поліномів в якості інваріантів відносно унітарної подібності.
- Одержані нові критерії унітарної подібності нормальної матриці та довільної матриці. В якості інваріантів були використані спектрально норма,

норма Фробеніуса, характеристичний многочлен та слід матриці.

• Для скінченної множини пар n-на-n комплексних матриць $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ описано алгоритм для визначення за скінченну кількість обчислювань, чи існує така унітарна матриця U така, що кожна пара матриць в $\mathcal{S}_1$ унітарно подібні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_2$ унітарно конгруентні за допомогою U, кожна пара матриць в $\mathcal{S}_3$ унітарно подібні за допомогою $\bar{U}$, та кожна пара матриць в $\mathcal{S}_4$ унітарно конгруентні за допомогою $\bar{U}$.

• Наведений алгоритм, що для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bovdi V.A. Reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence / V.A. Bovdi, T.G. Gerasimova, M.A. Salim, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 17–30.

2. Bondarenko V.M. Pairs of mutually annihilating operators / V.M. Bondarenko, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 86–105.

3. Farenick D. Criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position / D. Farenick, V. Futorny, T.G. Gerasimova, V.V. Sergeichuk, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 1356–1369.

4. Farenick D. A complete unitary similarity invariant for unicellular matrices / D. Farenick, T.G. Gerasimova, N. Shvai // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 435. — P. 409–419.

5. Gerasimova T.G. Simultaneous unitary equivalences / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 3829–3835.

6. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova, R.A. Horn, V.V. Sergeichuk // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431. — P. 1620–1632.

7. Gerasimova T.G. Unitary similarity to a normal matrix / T.G. Gerasimova // Linear Algebra Appl. — 2012. — Vol. 436. — P. 3777–3783.

8. Gerasimova T.G. Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one / T.G. Gerasimova // 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Kharkov, Ukraine, 18 — 23 August 2009. - Kharkov: V. N. Karazin Kharkov National University, 2009. — P. 54.

9. Gerasimova T.G. Linear operators satisfying a polynomial relation on a space with positive semidefinite form / T.G. Gerasimova // Ukrainian Mathematical Congress – 2009, Kyiv, Ukraine, 27 — 29 August 2009. - Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2009.

10. Gerasimova T.G. Unitary similarity of nonderogatory matrices / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference Celebrating the 50th Anniversary of the Algebra Department, Kyiv, Ukraine, 22 — 23 December 2009. - Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2009. — P. 30-31.

11. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular compact operators / T.G. Gerasimova, N. Zharko // International Conference "Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits", Kyiv, Ukraine, 5 — 8 August 2010. - Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,2010. — P. 32.

12. Gerasimova T.G. A characterization of upper triangular Toeplitz matrices / T.G. Gerasimova, N. Shvai // International Young Scientists Conference "70 years of KNU's mechanics and mathematics faculty, Kyiv, Ukraine, 13 — 15 December 2010. - Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2010. — P. 27.

13. Gerasimova T.G. A complete unitary invariant for unicellular matrices / T.G. Gerasimova, N. Shvai // 3rd International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, MMMA-2011, Moscow, Russia, 22 — 25 June 2011. - Moscow: 2011.

14. Gerasimova T.G. Unitary similarity of unicellular operators / T.G. Gerasimova // IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics Varna, Bulgaria, 20 — 26 June 2011. - Varna: Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, 2011.

15. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova, N. Shvai // 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Lugansk, Ukraine, 5 — 12 July 2011. - Lugansk: Lugansk Taras Shevchenko National University, 2011. — P. 162.

16. Gerasimova T.G. A criterion for unitary similarity of upper triangular matrices in general position / T.G. Gerasimova // 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), Seville, Spain, 3 — 9 July 2011. — P. 29.

АНОТАЦІЇ

Герасимова Т.Г. Лінійно-алгебраїчні методи в теорії операторів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 "Алгебра та теорія чисел". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Розв'язана задача класифікації пари взаємоанулюючих операторів, при цьому описані їх канонічні форми у явній формі та наведений алгоритм зведення до них. Одержане нове доведення критерію самоконгруентності за допомогою матриці з визначником один, використовуючи канонічні матриці. Побудовано нові критерії унітарної подібності для певного класу матриць: матриць Тьопліца, одноклітинних матриць, верхньотрикутних матриць у загальному положенні та нормальних матриць. Наведений алгоритм розв'язку проблеми одночасної еквівалентності пар матриць відносно подібності та конгруентності. Наведений алгоритм, який для кожної пари кососиметричних матриць будує її регуляційний розклад.

Ключові слова: канонічна форма, унітарна подібність, конгруентність, алгоритм регуляризації.

Герасимова Т.Г. Линейно-алгебраические методы в теории операторов. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 "Алгебра и теория чисел". – Киевскиий национальный университет имени Тараса Шевченко. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2020.

Решена задача классификации пары взаимоаннулирующих операторов, при этом описаны их канонические формы в явном виде и приведен алгоритм приведения к ним. Получено новое доказательство критерия самоконгруэнтности с помощью матрицы с определителем один, используя канонические матрицы. Построено новые критерии унитарного подобия для

некоторого класса матриц: матриц Теплица, одноклеточных матриц, верхнетреугольных матриц в общем положении и нормальных матриц. Приведен алгоритм решения проблемы одновременной эквивалентности пар матриц относительно подобия и конгруэнтности. Приведен алгоритм, что для каждой пары кососимметрических матриц строит ее регуляризационное разложение.

Ключевые слова: каноническая форма, унитарное подобие, конгруэнтность, алгоритм регуляризации.

Gerasimova T.G. Linear-algebraic methods in operator theory. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.06 – algebra and the theory of numbers. – Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

Several aspects of the classification problem in linear algebra are considered: classification of pairs of mutually annihilating operators, classification of matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one, criterion of unitary similarity for upper triangular matrices in general position and normal matrices, simultaneous unitary equivalences, and reduction of a pair of skew-symmetric matrices to its canonical form under congruence.

Pairs $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ of mutually annihilating operators $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = 0$ on a finite dimensional vector space over an algebraically closed field were classified by Gelfand and Ponomarev by method of linear relations. The classification of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ over any field was derived by Nazarova, Roiter, Sergeichuk, and Bondarenko from the classification of finitely generated modules over a dyad of two local Dedekind rings. It is given canonical matrices of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ over any field in an explicit form and our proof is constructive: the matrices of $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ are sequentially reduced to their canonical form by similarity transformations $(A,B) \mapsto (S^{-1}AS, S^{-1}BS)$.

-D.Docović and F. Szechtman considered a vector space V endowed with a bilinear form. They proved that all isometries of V over a field $\mathbb{F}$ of characteristic not 2 have determinant 1 if and only if V has no orthogonal summands of odd

dimension (the case of characteristic 2 was also considered). Their proof is based on Riehm's classification of bilinear forms. E. Coakley, F. Dopico, and R. Johnson gave another proof of this criterion over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ using Thompson's canonical pairs of symmetric and skew-symmetric matrices for congruence. Let M be the matrix of the bilinear form on V. It is given another proof of this criterion over $\mathbb{F}$ using our canonical matrices for congruence and obtain necessary and sufficient conditions involving canonical forms of M for congruence, of (M^T, M) for equivalence, and of $M^{-T}M$ (if M is nonsingular) for similarity.

Each square complex matrix is unitarily similar to an upper triangular matrix with diagonal entries in any prescribed order. Let $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ be upper triangular $n \times n$ matrices that

- are not similar to direct sums of matrices of smaller sizes, or
- are in general position and have the same main diagonal.

It is proved that A and B are unitarily similar if and only if

$$\|h(A_k)\| = \|h(B_k)\| \qquad \text{for all } h \in \mathbb{C}[x] \text{ and } k = 1, \dots, n,$$

where $A_k := [a_{ij}]_{i,j=1}^k$ and $B_k := [b_{ij}]_{i,j=1}^k$ are the leading principal $k \times k$ submatrices of A and B, and $\| \cdot \|$ is the Frobenius norm.

It is given several criteria of unitary similarity of a normal matrix A and any matrix B in terms of the Frobenius and spectral norms, characteristic polynomials, and traces of matrices.

Let $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ be given finite sets of pairs of n-by-n complex matrices. It is described an algorithm to determine, with finitely many computations, whether there is a single unitary matrix U such that each pair of matrices in $\mathcal{S}_1$ is unitarily similar via U, each pair of matrices in $\mathcal{S}_2$ is unitarily congruent via U, each pair of matrices in $\mathcal{S}_3$ is unitarily similar via $\bar{U}$, and each pair of matrices in $\mathcal{S}_4$ is unitarily congruent via $\bar{U}$.

Let (A, B) be a pair of skew-symmetric matrices over a field of characteristic not 2. Its regularization decomposition is a direct sum

$$(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \oplus (A_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (A_t, B_t)$$

that is congruent to (A, B), in which $(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ is a pair of nonsingular matrices and $(A_1, B_1), \dots, (A_t, B_t)$ are singular indecomposable canonical pairs of skew-symmetric matrices under congruence. It is given an algorithm that constructs a regularization decomposition. We also give a constructive proof of the known canonical form of (A, B) under congruence over an algebraically closed field of characteristic not 2.

Keywords: canonical form, unitary similarity, congruence, regularizing algorithm.